UNA NUEVA FORMA DEL TEOREMA DE KANTOROVICH PARA EL MÉTODO DE NEWTON

A NEW FORM OF THE KANTOROVICH THEOREM FOR NEWTON'S METHOD.

Leopoldo Paredes Soria [1] , Pedro Canales García [2]

Resumen

Una nueva forma de convergencia de tipo Kantorovich para el método de Newton es establecido para aproximarse localmente a una solución única de la ecuación $F(x) = 0$ definido sobre un espacio de Banach. Se asume que el operador F es dos veces diferenciable Fréchet, y que F', F'' satisface las condiciones de Lipschitz. Nuestra condición de convergencia difiere de los métodos conocidos y por lo tanto tiene un valor teórico y práctico.

Palabras clave.- Operador lineal, Diferenciable Fréchet, Sucesión convergente, Unicidad.

Abstract

A new Kantorovich-type convergence theorem for Newton's method is established for approximating a locally unique solution of an equation $F(x) = 0$ defined on a Banach space. It is assumed that the operator F is twice Fréchet differentiable, and that F', F'' satisfy Lipschitz conditions. Our convergence condition differs from earlier ones and therefore it has theoretical and practical value.

Keywords.- Linear operator, Differentiable Fréchet, Convergent succession, Uniqueness.

INTRODUCCIÓN

En este estudio nos preocupamos por el problema de la aproximación de una solución única local x^* de la ecuación

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

donde F es un operador dos veces diferenciable Fréchet definido en un subconjunto convexo Ω, de un espacio de Banach U con valores sobre el espacio de Banach V.

El método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n),\ n \geq 0,\ x_0 \in \Omega, \tag{2}$$

se ha utilizado por muchos autores [1-6] para generar una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ convergente a x^*. En particular las siguientes condiciones son utilizados.

Condición A.- (Kantorovich [6]). Sea $F : \Omega \subseteq U \to V$ diferenciable Fréchet sobre Ω, $F'(x_0)^{-1} \in L(V,U)$ para algún $x_0 \in \Omega$, donde $L(V,U)$ es el conjunto de operadores lineales acotados de V sobre U, y asumiendo

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\right\| \leq l\|x-y\|, \forall x, y \in \Omega, \tag{3}$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F'(x_0)\right\| \leq a \tag{4}$$

y

$$2al \leq 1. \tag{5}$$

Sobre la condición A, uno puede obtener el error estimado, la existencia y la unicidad de la solución sobre las regiones, y saber si x_0 es una condición inicial, es decir, saber si el método de Newton (2), a partir de x_0 converge a x^*. Pero en estos casos cuando se quiere determinar si la iteración de Newton (2) a partir de x_0 converge, una sola condición falla.

Ejemplo: Sean $U = V = \mathbf{R}$, $\Omega = [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$, $x_0 = \sqrt{2}$ y definimos el polinomio real F sobre Ω

[1]Lic., docente de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería
[2]Dr., docente de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería

por:

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \alpha,\ \alpha = \frac{2^{3/2}}{6} + 0{,}23. \qquad (6)$$

Veamos si la condición x_0 determina la convergencia del método de Newton.

Solución.- Usando (3), se tiene:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\right\| = \left\| \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\|$$

$$\leq \left\| \frac{x+y}{x_0^2} \right\| \|x - y\|,$$

con $\left\| \frac{x+y}{x_0^2} \right\| \leq \sqrt{2} + 1 = 2{,}414213562 = l.$
Donde por (4), se tiene:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| = \left\| \frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \alpha}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\|$$

$$= \left\| \frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \frac{2^{3/2}}{6} - 0{,}23}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\|$$

$$= \| -0{,}23\| = 0{,}23 = a.$$

Veamos si se satisface (5):

$$2al = 2(0{,}23)(2{,}414213562) = 1{,}110535256 > 1.$$

Entonces sobre la condición A no podemos determinar la convergencia del método de Newton (2) a partir de $x_0 = \sqrt{2}$. ⧫

Es decir, tenemos que introducir una nueva condición y un nuevo teorema sobre el método de Newton para que converja con la condición $x_0 = \sqrt{2}$ del ejemplo anterior.
De ahora en adelante asumiremos:

Condición B.- Sean $F : \Omega \subseteq U \to V$ dos veces diferenciable Fréchet sobre Ω, con $F'(x) \in L(U, V)$, $F''(x) \in L(U, L(U, V))$, $(x \in \Omega)$, $F'(x_0)^{-1}$ existe para algún $x_0 \in \Omega$, y asumimos

$$\begin{array}{rcl} 0 < \left\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| & \leq & a \text{ y} \\ \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\right\| & \leq & b, \end{array} \qquad (7)$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\right\| \leq c\|x - x_0\|, c > 0, \qquad (8)$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\| \leq d\|x - x_0\|, \forall x \in \Omega, \qquad (9)$$

y

$$2ka \leq 1, \qquad (10)$$

donde puede ser que

$$k = \max\{c, b + 2ad\}, \quad (c \leq k) \qquad (11)$$

ó que, si la función

$$f(t) = t^3 - 2bt^2 - (2d - b^2)t + 2d(b + ad), \qquad (12)$$

tiene dos raices positivos k_1 y k_2 tal que:

$$[b, b + 2ad] \subseteq [k_1, k_2], \qquad (13)$$

entonces $k \geq c$ y

$$k \in [b, b + 2ad]. \qquad (14)$$

Ejemplo: Sean $U = V = \mathbf{R}$, $\Omega = [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$, $x_0 = \sqrt{2}$ y definimos el polinomio real F sobre Ω por:

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \alpha, \quad \alpha = \frac{2^{3/2}}{6} + 0{,}23.$$

Entonces x_0 determina la convergencia del método de Newton.
Solución.- Usando (7), se tiene:

$$0 < \left\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| = \left\| \frac{\frac{1}{6}x_0^3 - \frac{2^{3/2}}{6} - 0{,}23}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\|$$

$$= | -0{,}23| = 0{,}23 \leq a.$$

Entonces tomamos $a = 0{,}23$, donde

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\right\| = \left\| \frac{x_0}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\| = \sqrt{2} \leq b,$$

sea $b = \sqrt{2}$, luego de (8), se tiene:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\right\| = \left\| \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2}{\frac{1}{2}x_0^2} \right\|$$

$$\leq \left\| \frac{x + x_0}{x_0^2} \right\| \|x - x_0\|,$$

con $\left\|\dfrac{x+x_0}{x_0^2}\right\| \leq \left\|\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{2}\right\| = 1{,}914213562$, consideramos $c = 1{,}914213562$, además de (9), se tiene:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x)-F''(x_0)]\right\| \leq \left\|\frac{2}{x_0^2}\right\| \|x-x_0\|$$

$$= \|x-x_0\|,$$

hacemos $d = 1$, y de (11), se obtiene:

$$\begin{aligned} k &= \text{máx}\{1{,}914213562, \sqrt{2}+2(0{,}23)(1)\} \\ &= \text{máx}\{1{,}914213562, 1{,}874213562\} \\ &= 1{,}914213562. \end{aligned}$$

Luego de (10), se tiene:

$$\begin{aligned} 2ka &= 2(1{,}914213562)(0{,}23) \\ &= 0{,}880538239 < 1, \end{aligned}$$

o, de (12), si la función:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3 - 2\sqrt{2}t^2 - (2-\sqrt{2}^2)t + 2(\sqrt{2}+0{,}23) \\ &= t^3 - 2{,}828427125t^2 + 3{,}28847125, \end{aligned}$$

resolviendo se tiene dos raices reales positivos $k_1 = 1{,}73123$ y $k_2 = 2{,}03199$ de (13), se obtiene:

$$[\sqrt{2}; \sqrt{2}+0{,}46] \nsubseteq [1{,}73123; 2{,}03199]$$

$$[1{,}414213562; 1{,}874213562] \nsubseteq [1{,}73123; 2{,}03199]$$

entonces $k = 1,914213562 \geq c = 1,914213562$ y de (14), se tiene:

$$1,914213562 \quad \notin \quad [1,414213562; 1,874213562]. \blacklozenge$$

Así, cumplido (12) vemos que la condición B determina la convergencia del método de Newton (2) a partir de $x_0 = \sqrt{2}$ con la primera parte, ya que la segúnda parte no satisface.

ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

En el análisis de convergencia necesitamos los lemas:

<u>Lema 1</u>.- Sean a, k constantes positivos dados. Definimos el polinomio real p sobre $[0, \infty\rangle$ por:

$$p(t) = \frac{k}{2}t^2 - t + a \tag{15}$$

y la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ por

$$t_0 = 0, \tag{16}$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)}. \tag{17}$$

Asumimos

$$2ka \leq 1. \tag{18}$$

Entonces la ecuación

$$p(t) = 0, \tag{19}$$

tiene dos raices positivas r_1, r_2 con $r_1 \leq r_2$ y la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ generado por (16)-(17) es tal que:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < r_1,$$

con $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = r_1$.

Prueba: Usando (15) y (18) deducimos que la ecuación

$$p(t) = \frac{k}{2}t^2 - t + a = 0$$

tiene dos raices positivos

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{1-2ka}}{k} \text{ y } r_2 = \frac{1+\sqrt{1-2ka}}{k} \tag{20}$$

con $r_1 \leq r_2$. Además, la función $t - \dfrac{p(t)}{p'(t)}$ es creciente sobre $[0, r_1]$, siendo $p'(t) < 0$, $p''(t) > 0$ y $p(t) > 0$ sobre $[0, r_1]$.

Ahora, veamos que la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ es creciente. Sea

$$S = \{n \in \mathbf{N}/t_n \text{ es creciente con } t_n \leq r_1,\ \forall n \geq 0\},$$

por inducción matemática, tenemos:

Para $n = 0$: De la definición de $p(t)$ se tiene $p(t_0) > 0$ y $p'(t_0) < 0$, entonces $-\dfrac{p(t_0)}{p'(t_0)} > 0$, luego de (16), (17) y (18)

$$\begin{aligned} t_0 &\leq t_0 - \frac{p(t_0)}{p'(t_0)} \\ &= t_0 - \frac{\frac{k}{2}t_0^2 - t_0 + a}{kt_0 - 1} \\ &= a = t_1 \\ &\leq r_1 - \frac{p(r_1)}{p'(r_1)} = r_1. \end{aligned}$$

Por la hipótesis inductiva con $n = m$, tenemos:

$$t_m \leq r_1.$$

Luego para $n = m + 1$, tenemos

$$t_{m+1} = t_m - \frac{p(t_m)}{p'(t_m)} \leq r_1 - \frac{p(r_1)}{p'(r_1)} = r_1,$$

así, $S = \mathbf{N}$
Por tanto,

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n < r_1 \text{ con } \lim_{n\to\infty} t_n = r_1. \blacksquare$$

A continuación definimos los conjuntos

$$\overline{B}(x_0, s) = \{x \in V / \|x - x_0\| \leq s\} \quad \text{y}$$

$$B(x_0, s) = \{x \in U / \|x - x_0\| < s\}.$$

Lema 2.- Sea $x \in B\left(x_0, \frac{1}{c}\right)$, entonces las siguientes estimaciones son verdaderos:

$$\left\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\right\| \leq \frac{1}{1 - c\|x - x_0\|} \qquad (21)$$

y

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| \leq b + d\|x - x_0\|. \qquad (22)$$

Prueba: Si $x \in B(x_0, \frac{1}{c})$, entonces

$$\|x - x_0\| < \frac{1}{c}$$

luego de (8)

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\right\| \leq c\|x - x_0\| < 1.$$

Haciendo $M = F'(x) - F'(x_0)$, se sigue que

$$\begin{aligned} -\left\|F'(x_0)^{-1}F'(x)\right\| + 1 &\leq \left\|F'(x_0)^{-1}M]\right\| \\ &\leq c\|x - x_0\| \end{aligned}$$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F'(x)\right\| \geq 1 - c\|x - x_0\|,$$

y

$$\left\|F'(x)^{-1}F'(x_0)\right\| \leq \frac{1}{1 - c\|x - x_0\|}.$$

Como por (9)

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\| \leq d\|x - x_0\|.$$

Haciendo $N = F''(x) - F''(x_0)$, tenemos:

$$-b + \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| \leq \left\|F'(x_0)^{-1}N\right\|$$

y usando la desigualdad en (7)

$$\begin{aligned} -b + \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| &\leq d\|x - x_0\| \\ \left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| &\leq b + d\|x - x_0\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora podemos probar el siguiente resultado semilocal relativo a la convergencia del método de Newton (2).

Teorema.- Sean F el operador definido en (1) y p el polinomio definido en (15). Supongamos que $B\left(x_0, \frac{1}{c}\right) \subseteq \Omega$ y que la condición B se cumple. Entonces la sucesión de Newton $\{x_n\}_{n\geq 0}$ generado por (2) está bien definido, se encuentra en $\overline{B}(x_0, r_1)$ $\forall n \geq 0$, y converge hacia una solución $x^* \in \overline{B}(x_0, r_1)$ de la ecuación $F(x) = 0$, que es única en $\overline{B}(x_0, r_2)$ si $r_1 < r_2$. Si $r_1 = r_2$ la solución x^* es única en $\overline{B}(x_0, r_1)$. Además las siguientes estimaciones se cumplen para todo $n \geq 0$.

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n \qquad (23)$$

y

$$\|x_n - x^*\| \leq r_1 - t_n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2^n} (r_2 - t_n) \quad (24)$$

donde r_1 y r_2 son raices de la ecuación cuadrática $p(t) = 0$ dado por (20).

Prueba: Sea $F(x) = 0$.
Donde

$$p(t) = \frac{l}{2}t^2 - t + a$$

con

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2la}}{l}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2la}}{l}.$$

Además Ω es un conjunto convexo con $B\left(x_0, \frac{1}{c}\right) \subseteq \Omega$, considerando (2)

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \forall n \geq 0, x_0 \in B,$$

sea

$$S=\{n \in \mathbf{N}/\|x_n-x_0\| \leq a = t_n-t_0 < r_1, \forall n \geq 1\},$$

Veamos que $S = \mathbf{N}$.
Usando la inducción matemática, se tiene:
Para $n = 1$, usando la definición de x_1:

$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0),$$

entonces usando la condición B,

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_0\| &= \left\|-F'(x_0)^{-1}F(x_0)\right\| \\ &\leq a = t_1 - t_0 \ < \ r_1 \end{aligned}$$

De ello se deduce que $x_1 \in \overline{B}(x_0, r_1)$ y (23) es válido.
Por la hipótesis inductiva para $n = m$, se cumple:

$$\|x_m - x_0\| \ \leq \ t_m - t_0 \ < \ r_1,$$

entonces

$$x_m \in \overline{B}(x_0, r_1).$$

Luego para $n = m + 1$. Veamos antes el resultado de (2):

$$x_{i+1} - x_i = -F'(x_i)^{-1}F(x_i),$$

entonces

$$F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = -F(x_i)$$

luego

$$-F(x_i) - F'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \ = \ 0, \forall i \leq n,$$

entonces podemos expresar

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}[F(x_{i+1}) - 0] \\ &= F'(x_0)^{-1}[(x_i - x_{i+1})F'(x_i) \\ &\quad +F(x_{i+1}) - F(x_i)] \end{aligned}$$

haciendo $w = x_i + t(x_{i+1} - x_i)$ donde si $t \to 0$ entonces $w \to x_i$ y si $t \to 1$ entonces $w \to x_{i+1}$, tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}\left[x_{i+1}F'(w)\big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \right. \\ &\quad \left. wF'(w)\big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F'(w)dw \right] \\ &= F'(x_0)^{-1}\left[x_{i+1}F'(w)\big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \right. \\ &\quad \left. \int_{x_i}^{x_{i+1}} wF''(w)dw \right] \\ &= F'(x_0)^{-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - w)F''(w)dw\right], \end{aligned}$$

volviendo a la variable inicial de t, con $z = x_{i+1} - x_i$ y $w = 1 - t$, obtenemos:

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}\left\{z^2\left[\int_0^1 F''(x_i + tz)wdt \right.\right. \\ &\quad \left.\left. -\frac{1}{2}F''(x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)\right]\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1}) &= F'(x_0)^{-1}\left\{z^2\left[\int_0^1 G(t)wdt + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \frac{1}{2}F''(x_0)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_0\| &\leq \sum_{j=1}^{m+1} \|x_j - x_{j-1}\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{m+1} (t_j - t_{j-1}) \\ &= t_{m+1} - t_0 \ < \ r_1 \end{aligned}$$

y

$$\|x_m + t(x_{m+1} - x_m) - x_0\| \leq t_m + t(t_{m+1} - t_m) < r_1$$

de donde $S = \mathbf{N}$.
De (7), (9), (15), (22), (23) y (25) con $w = 1 - t$

tenemos:

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\right\| = \left\|\left[\int_0^1 G(t)wdt + \frac{1}{2}F''(x_0)\right] z^2 F'(x_0)^{-1}\right\|$$

$$\leq \int_0^1 \left\|G(t)F'(x_0)^{-1}\right\| w\|z\|^2 dt + \frac{1}{2}\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\right\| \|z\|^2$$

$$\leq \left\{\int_0^1 d\left(\|x_i - x_0\| + t\|z\|\right) wdt + \frac{1}{2}b\right\}\|z\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[b + d\|x_i - x_0\| + \frac{d}{3}\|z\|\right]\|z\|^2$$

haciendo $W = t_{i+1} - t_i$

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\right\| \leq \left[b + dt_i + \frac{d}{3}W\right]\frac{W^2}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[b + \frac{2}{3}dt_i + \frac{d}{3}t_{i+1}\right]W^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[b + dr_1\right]W^2$$

$$\leq \frac{k}{2}\left(t_{i+1}^2 - 2t_i t_{i+1} + t_i^2\right)$$

$$\leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - kr_1 t_{i+1} + \frac{k}{2}r_1^2$$

$$\leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - t_{i+1} + \frac{1}{2k},$$

con $0 < r_1 < \frac{1}{k}$. Luego

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F(x_{i+1})\right\| \leq \frac{k}{2}t_{i+1}^2 - t_{i+1} + a = p(t_{i+1}). \tag{26}$$

Por (2), (17), (21) y (26) obtenemos

$$\|x_{i+2} - x_{i+1}\| \leq -\frac{p(t_{i+1})}{p'(t_{i+1})} = t_{i+2} - t_{i+1},$$

donde se aprecia (23), $\forall n \geq 0$.
Por el lema (1) y la estimación (23) se desprende que $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach U, por lo que converge a algún límite $x^* \in \overline{B}(x_0, r_1)$, pues $\overline{B}(x_0, r_1)$ es un conjunto cerrado.
Por (2) y la continuidad de F, tenemos $F(x^*) = 0$.
Para probar la unicidad sea $y \in B(x_0, r_2)$ tal que $F(y) = 0$. Usando (2) obtenemos:

$$y - x_{n+1} = y - x_n + F'(x_n)^{-1}F(x_n)$$

Supongamos que $y \in B(x_0, r_2)$ tal que $x_n \to y$ con $y \neq x^*$ entonces

$$\begin{aligned} y - x_{n+1} &= F'(x_n)^{-1}F(x_n) \\ &= F'(x_n)^{-1}F(x_n).F'(x_0)^{-1}F'(x_0) \\ &= F'(x_n)^{-1}F'(x_0).F'(x_0)^{-1}F(x_n), \end{aligned}$$

Haciendo $z = 1 - t$, se concluye:

$$y - x_{n+1} = \left\{\int_0^1 [F''(x_n + t(y - x_n)) - F''(x_0)]zdt + \int_0^1 F''(x_0)zdt\right\} F'(x_0)^{-1}(y - x_n)^2. \tag{27}$$

Como en (25) y (26) tenemos $\|y - x_0\| \leq r_1 - t_0$ si $y \in \overline{B}(x_0, r_1)$, y

$$\|y - x_n\| \leq \lambda(r_2 - t_n), \; a < \lambda < 1,$$

si $y \in B(x_0, r_2)$. Es decir, como en (25) y (27) tenemos $\|y - x_n\| \leq r_1 - t_n$ si $y \in \overline{B}(x_0, r_1)$ $(n \geq 0)$, y $\|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n)$ si $y \in B(x_0, r_2)$ $(n \geq 0)$.
Ahora definimos el nuevo conjunto:

$$S = \left\{n \in \mathbf{N} / \|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n), \; \forall n \geq 0\right\}.$$

Veamos por inducción matemática.
Cuando $n = 0$:

$$\|y - x_0\| \leq (r_1 - t_0) \leq \lambda(r_2 - t_0) = \lambda^{2^0}(r_2 - t_0).$$

Por la hipótesis inductiva para $n = m$:

$$\|y - x_m\| \leq \lambda^{2^m}(r_2 - t_0).$$

Luego $n = m + 1$:

$$\|y - x_{m+1}\| \leq \lambda^{2^m}(r_1 - t_0) \leq \lambda^{2^{m+1}}(r_2 - t_0),$$

entonces $S = \mathbf{N}$, por lo tanto, como

$$\|y - x_n\| \leq \lambda^{2^n}(r_2 - t_n), \text{ si } y \in B(x_0, r_2), \ (n \geq 0),$$

y $F(x^*) = 0$ se deduce que:

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n = y,$$

en ambos casos.
Finalmente las estimaciones

$$\|x_n - x^*\| \leq r_1 - t_n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2^n}(r_2 - t_n).$$

siguen utilizando técnicas estándar mejoradas (17) y (23) ([2, 3, 6]). ■

OBSERVACIONES

Observación 1.- La convergencia del método de Newton's (2) puede ser establecido independientemente usando las condiciones A y B. En la práctica podemos utilizar ambas para determinar la región más pequeña donde se encuentra la solución y la más grande, donde la solución es única. Hagamos una comparación entre tales condiciones A y B.
Consideremos el polinomio dado por q:

$$q(t) = \frac{l}{2}t^2 - t + a,$$

con raíces denotadas por

$$r_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2la}}{l} \text{ y } r_4 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2la}}{l}$$

donde $r_3 \leq r_4$. A continuación, de (5), (6) y (15) tenemos:

$$p(r_3) \leq -\frac{1}{2l} \leq 0 \text{ y } p(r_4) \leq 0.$$

Por lo tanto dado que $f(t) > 0$, $\forall x \in [0, r_1]$ tenemos $r_1 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_2$ y $r_3 \leq \frac{1}{c}$. Teniendo en cuenta que el teorema usa simplemente un polinomio cuadratico p y de la condición (10) en lugar de un polinomio cúbico y de la condición (27) en [3], [5] lo cual es mas complicado obtener.

Observación 2.- Podemos extender el resultado obtenido en el teorema $(2{,}3)$ para incluir el caso Hölder. Supongamos, en lugar de (9) en la condición B, que F satisface

$$\left\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\right\| \leq d_0\|x - x_0\|^q, \quad \forall x \in \Omega, q \in [0,1], \text{ y con } d_0 \geq 0. \quad (28)$$

Para $q = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| - \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\| &\leq \big\|F'(x_0)^{-1}\\ &\quad \left[F''(x) - F''(x_0)\right]\big\|\\ &\leq d_0\end{aligned}$$

entonces por (9)

$$\begin{aligned}\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\| &\leq d_0 + \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\|\\ &\leq d_0 + b\end{aligned}$$

esto es

$$\left\|F'(x_0)^{-1}F''(x)\right\| \leq d_0 + b,$$

y en la situación del teorema de Kantorovich [6, Teorema XVIII.1.6]. Si $q = 1$ en (28) obtenemos (9). Por otra parte si $q \in (0,1)$, entonces F'' es q-Hölder continuas en Ω. Sean a, b, c dados como antes. Asumiendo que existen $k_0 \geq c$ tal que $b + d_0 r_1^q \geq k_0$, donde r_1 es dado por (20), y la condición (10) se cumple cuando k es reemplazado por k_0.
Con los cambios anteriores, las conclusiones del teorema $(2{,}3)$ son válidas para el caso Hölder.

CONCLUSIONES

Esta nueva forma de presentar el teorema de Kantorovich sigue siendo una alternativa de abordar el estudio del método de Newton en espacios de Banach, que es muy aplicado en el Análisis Numérico, y en otras ramas afines. En particular, es eficiente para la determinación de un cero local (único) de la ecuación $F(x) = 0$.

REFERENCIAS

1. **Argyros, I. K.**, "Newton-like methods under mild differentiability conditions with error analysis", Bull. Austral. Math. Soc. **37** (1988), 131-147.
2. **Argyros, I. K. and Szidarovszky F.**, "The Theory and Applications of Iteration Methods", C.R.C. Press, Boca Raton, Fla., 1993.

3. **Gutiérrez, J. M.**, “A new semilocal convergence theorem for Newtons method”, J. Comput. Appl. Math. **79** (1997), 131-145.
4. **Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. and Salanova, M. A.**, “Accessibility of solutions by Newton’s method”, Internat. J. Comput. Math **57** (1995), 239-247.
5. **Huang, Z.** “A note on the Kantorovick theorem for Newton iteration”, J. Comput. Appl. Math. **47** (1993) 211-217.
6. **Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P.** “Functional Analysis”, Pergamon Press, Oxford, 1982.

Correspondencia: lpsilf2005@yahoo.com
Recepcin de originales: enero 2013
Aceptacin de originales: Junio 2013.