

DISEÑO E IMPLEMENTACION DE UN SISTEMA DE CONTROL DE POSICION DIGITAL PREDICTIVO PARA UN MOTOR DC SUJETO A CARGAS NO LINEALES

M.Sc. Raúl Benites Saravia

Sección de Post-Grado - Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Email : nrbs01@hotmail.com

RESUMEN

Este trabajo presenta el comportamiento del Control Predictivo Basado en Modelo (MBPC), orientado a controlar un proceso SISO. El proceso es un sistema no lineal, al que después de linealizar y discretizar, se le aplican las técnicas de control predictivo. El proceso no lineal (planta) consiste de un servomotor DC con reducción, una etapa de potencia y una varilla acoplada al rotor del motor. Se hace uso de una tarjeta de interface LAB-PC+ (implantado en un microcomputador Pentium) y una interface auxiliar. El software usado para la simulación es MATLAB y el que se ha usado para la implementación del algoritmo de control de posición es el lenguaje C. Los resultados que se presentan son en tiempo real. Por razones de espacio las simulaciones no han sido presentadas en este artículo.

ABSTRACT

This work, presents the behavior of the Model Based Predictive Control (MBPC) oriented to control a SISO process. The process or plants is a system nonlinear, that after linealized and discretized is applied the techniques of predictive control to show the answer of the system to signals of control, for a reference desired. The process non linear consist of an actuator DC with reduction, a stage of power and a rod connected to the rotor of motor. Se make use of a card of interface LAB-PC+ (implanted in a Pentium microcomputer) and an interface help. The software used for the simulation is MATLAB and the one that has been used for the implementation of the algorithm of position control is language C. The results that appear are in real time. For space reasons the simulations have not been presented in this article.

INTRODUCCION

El control predictivo basado en modelos se impuso en la década de los 80, ofreciendo un algoritmo de control que usa el modelo del proceso para calcular y optimizar las predicciones de las acciones de control y de la salida controlada. El modelo a usar es el modelo CARIMA y entre los parámetros de diseño tenemos el horizonte de predicción máximo (N2), el horizonte de predicción mínimo (N1), el horizonte de control, y parámetros de peso y filtraje entre otros.

PRINCIPIOS, MODELO DEL PREDICTOR Y ALGORITMOS

PRINCIPIOS

El Control Predictivo basado en un modelo (MBPC) [1][2][3] es una metodología de control, desarrollada alrededor de ciertos principios comunes, entre los cuales podemos citar:

- a) Uso explícito de un modelo del proceso para pronosticar su salida a controlar en instantes de tiempo futuro
- b) Cálculo de una acción de control óptima basada en la minimización de las funciones de costo, posiblemente incluyendo restricciones en las variables del proceso.

La notación usada es la siguiente:

- t , denota el índice de tiempo discreto ($t = 0, 1, 2, \dots$).
- $y(t)$, es la salida del proceso (variable controlada).
- $u(t)$, denota la entrada al proceso (variable manipulada o variable de control)
- $w(t)$, representa la trayectoria deseada ("set point").
- $r(t)$, denota la trayectoria de referencia.
- $u(t+k/t)$, denota los valores futuros de la entrada (variable manipulada: MV) en el tiempo $t+k$ postulados en el tiempo t .
- $y(t+k/t)$, denota los valores futuros de la salida (variable controlada: CV) basado en las medicio-

$$\{ y(t), y(t-1), \dots, u(t-1), u(t-2), \dots \}$$

y en los valores futuros de la entrada postulados en el tiempo t :

$$\{ u(t/t), u(t+1/t), \dots \}.$$

Sobre la estrategia de control MBPC, se pueden mencionar algunos elementos importantes:

- Predicción bajo el modelo del proceso
- Especificación de una trayectoria
- Estructuración de la futura ley de control;
- Definición de la función de costo (y restricciones);
- * Cálculo de una acción de control óptima.

La estrategia MBPC puede ser visualizada en el siguiente diagrama de bloques:

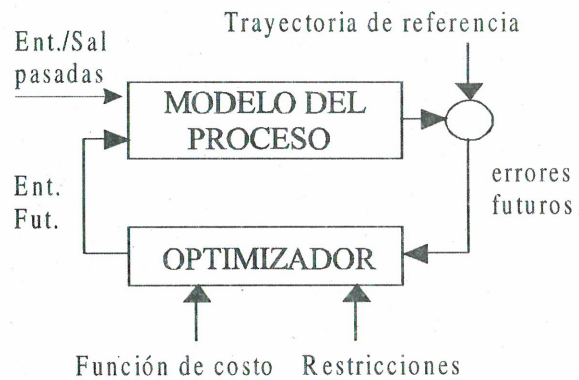


Fig. 1 Estrategia del Control Predictivo.

EL MODELO DEL PREDICTOR

Existen dos posibles esquemas de implementación, los cuales se muestran en la figura 2 para un modelo de segundo orden:

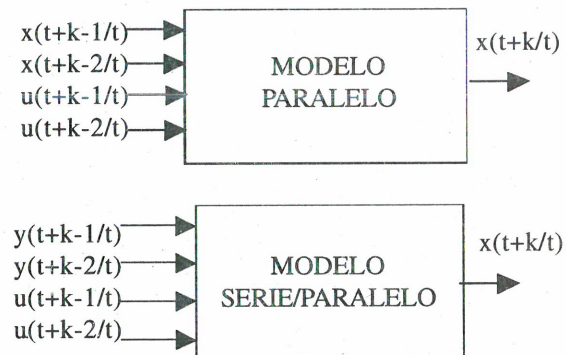


Fig. 2 Esquemas representativos de los modelos paralelo y serie/paralelo

El Modelo Paralelo

El modelo paralelo sólo puede ser usado para procesos estables y es el que se implementa por defecto. En este caso la salida $y(t)$ se realimenta a sí misma. Su expresión es:

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t) + \frac{1}{1-z^{-1}} e(t) = x(t) + n(t) \tag{1}$$

con

$$C(z^{-1}) = 1, \quad D(z^{-1}) = (1-z^{-1})$$

$$n(t) = \frac{1}{1-z^{-1}} e(t); \quad x(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(t)$$

Por consiguiente, para cualquier t:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - A(z^{-1}))x(t) + B(z^{-1})u(t) \\ &= -a_1x(t-1) - \dots - a_{n_a}x(t-n_a) \\ &\quad + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) \end{aligned} \quad (2)$$

Siendo su expresión genérica predictiva:

$$\begin{aligned} x(t+k/t) &= -a_1x(t+k-1/t) - \dots \\ &\quad - a_{n_a}x(t+k-n_a/t) + b_1u(t+k-1/t) + \dots \\ &\quad + b_{n_b}u(t+k-n_b/t) \end{aligned} \quad (3)$$

La expresión genérica predictiva para la perturbación es:

$$n(t+k/t) = n(t+k-1/t) + e(t+k/t) \quad (4)$$

El Modelo Serie/Paralelo

El modelo serie-paralelo puede ser usado en procesos estables e inestables. En este caso, la perturbación $n(t)$ se escoge diferente al del modelo paralelo como sigue:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \frac{A(z^{-1})}{1-z^{-1}}e(t) \quad (5)$$

siendo

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1}), \quad D(z^{-1}) = (1-z^{-1})$$

La salida sin perturbación $x(t)$ toma entonces la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - A(z^{-1}))y(t) + B(z^{-1})u(t) \\ &= -a_1y(t-1) - \dots - a_{n_a}y(t-n_a) \\ &\quad + b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) \end{aligned} \quad (6)$$

Por consiguiente su expresión genérica predictiva del modelo serie/paralelo es:

$$\begin{aligned} x(t+k/t) &= -a_1y(t+k-1/t) - \dots \\ &\quad - a_{n_a}y(t+k-n_a/t) + b_1u(t+k-1/t) + \dots \\ &\quad + b_{n_b}u(t+k-n_b/t) \end{aligned} \quad (7)$$

la diferencia entre los dos modelos puede deducirse de la figura 3.

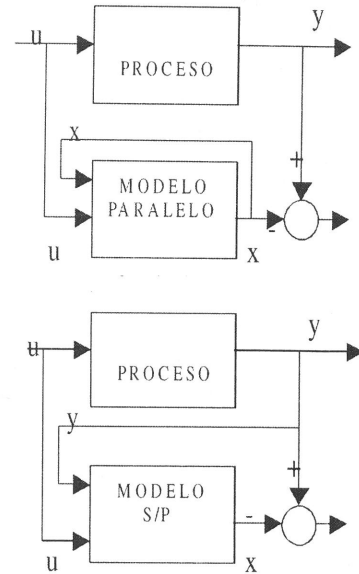


Fig. 3 Implementación de los modelos Paralelo y Serie/Paralelo

EL CONTROLADOR PREDICTIVO

Objetivo del Controlador

El objetivo del controlador predictivo es determinar el vector de control $u(t+k/t)$, con $k = 0, \dots, N_2-1$, que minimice la siguiente función de costo [1][3][5]:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=N_1}^{N_2} [r(t+k/t) - y(t+k/t)]^2 + \\ &\quad \lambda \sum_{k=0}^{N_u-1} [\Delta u(t+k/t)]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

donde:

$$\Delta u(t+k/t) = u(t+k/t) - u(t+k-1/t) \quad (9)$$

con $\Delta u(t+k/t) = 0$ para $k \geq N_u$

La trayectoria de referencia está representada por la ecuación:

$$\begin{aligned} r(t+k/t) &= \alpha r(t+k-1/t) \\ &\quad + (1-\alpha)\omega(t+k/t) \end{aligned} \quad (10)$$

Los parámetros de diseño son:

- N1: Horizonte de predicción mínimo
- N₂: Horizonte de predicción máximo (por defecto N₂ = N₁+1 ...N₁+10)
- N_u: Horizonte de control (por defecto N_u=1)
- N1 ...N2 = Horizonte de coincidencia (por defecto N1 = tiempo muerto)
- λ: Parámetro de ponderación; por defecto considerar cero.
- α: Parámetro de filtraje (por defecto considerar cero).

Es importante observar que:

1. La trayectoria de referencia dada en (10) constituye un filtro de primer orden para w(t). Este filtro se puede representar mediante la siguiente función de transferencia:

$$\frac{r(z)}{\omega(z)} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \quad (11)$$

2. El filtro para w(t) se puede implementar fuera del lazo de control, no afectando de esta manera a la estabilidad, pero sí contribuyendo al rechazo al ruido.

Respuesta Libre y Respuesta forzada

Conceptualmente, la respuesta futura y(t+k/t) puede ser considerada como el resultado acumulativo de dos efectos:

$$y(t+k/t) = y_{libre}(t+k/t) + y_{forzada}(t+k/t) \quad (12)$$

donde:

- y_{libre}(t+k/t): es el efecto del control pasado
- y_{forzada}(t+k/t): es el efecto de la acción de control futuro y a una secuencia de entradas escalón.

El efecto acumulativo de todos los escalones es:

$$y_{forz}(t+k/t) = g_k \Delta u(t/t) + g_{k-1} \Delta u(t+1/t) + \dots + g_{k-N_u+1} \Delta u(t+N_u-1/t) \quad (13)$$

donde los parámetros g₁, g₂, ..., g_{N₂} son los coeficientes de la respuesta del sistema al escalón unitario.

De la ecuación (13) se puede obtener la siguiente expresión para la componente forzada:

$$Y_{forz} = GU \quad (14)$$

donde:

$$y_{forz} = \begin{bmatrix} y_{forz}(t+N_1/t) \\ y_{forz}(t+N_1+1/t) \\ \dots \\ \dots \\ y_{forz}(t+N_2/t) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & g_{N_1-2} & \dots \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & \dots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \Delta u(t/t) \\ \Delta u(t+1/t) \\ \dots \\ \Delta u(t+N_u-1/t) \end{bmatrix}$$

La Ley de Control

Con la notación anterior, la función de costo resulta:

$$(R-Y)^T (R-Y) + \lambda U^T U = [(R-\bar{Y})-GU]^T [(R-\bar{Y})-GU] + \lambda U^T U \quad (15)$$

la cual es una forma cuadrática en U, cuya minimización por diferenciación resulta en la siguiente solución óptima:

$$U^* = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (R-Y) \quad (16)$$

Es importante indicar que:

- Solamente el primer elemento de Δu(t/t) de U* es necesario para computar la entrada de control actual u(t) = u(t-1)+ Δu(t/t). El mismo procedimiento se

repite para la nueva medición $y(t+1)$ en el próximo instante de tiempo $t+1$. Este procedimiento se denomina el principio del "horizonte retroactivo".

- La matriz $[G^T G + \lambda I]$ a ser invertida tiene dimensión $N_u \times N_u$. Para el caso por defecto $N_u = 1$, se obtiene una ley de control escalar (con muy buenos resultados en muchos casos prácticos) de la forma:

$$\Delta u(t) = \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k [r(t+k/t) - y_{libre}(t+k/t)]}{\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k^2 + \lambda \right)} \quad (17)$$

- Otra optimización para la estructuración del escenario de control consiste en el empleo de funciones base de la forma:

$$u(t+k/t) = \sum_i \mu_i B_i \quad (18)$$

La optimización de la señal de control $u(t+k/t)$ es ahora con respecto a los parámetros μ_i .

El diagrama de bloques del sistema de control predictivo se muestra en la figura 4.

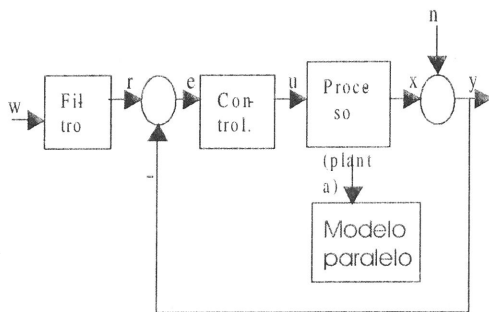


Fig. 4 Diagrama de bloques del controlador Predictivo

El Control Predictivo puede mostrar diferentes propiedades [2][4][6][7], dependiendo de la selección de N_1 , N_2 , N_u y λ . Por ejemplo:

- Si $N_1 = n$, $N_2 = 2n-1$, $N_u = n$ y $\lambda = 0$, la salida alcanza la referencia después de n muestras y se mantiene en este estado, proporcionando una vigorosa acción de control. Este caso es muy apropiada para aplicaciones de alto rendimiento como en la robótica.

- Si escogemos $N_1 = N_u = 1$, $N_2 \rightarrow \infty$ y $\lambda = 0$, obtendremos una respuesta transitoria de la variable

controlada, caracterizada por un tiempo de subida rápido y un tiempo de estabilización lento. Este hecho es relevante en el control de procesos industriales.

Ley de Control con Restricciones

El problema de control presentado en la subsección anterior fue formulado bajo condiciones de control sin restricciones; es decir, considerando que todas las señales poseen un rango ilimitado. Sin embargo, esto no es realista. En la práctica, todos los procesos están sujetos a restricciones. Por ejemplo, en el caso de un servosistema no lineal, si la señal de control $u(t)$ es demasiado grande, entonces el amplificador del voltaje de armadura se puede saturar produciéndose su deterioro. En presencia de restricciones no es posible la resolución analítica del problema de minimización, debiendo recurrirse a dos posibles soluciones. La primera solución es tratar a todas las variables como si no tuvieran restricciones. Posteriormente, conforme a rangos previamente especificados (las restricciones), proceder mediante software, con el corte o limitación de las magnitudes de las variables. La otra solución requiere el empleo de técnicas numéricas, tales como la programación cuadrática. En este artículo no se tratará esta alternativa.

APLICACIÓN

La figura 5 presenta la estructura del proceso no lineal a controlar, conformado por un sistema eléctrico (el servo-motor DC y el amplificador de potencia) y un sistema mecánico (conformado por una varilla acoplada al eje del motor y un engranaje reductor de velocidad). El sensor de posición está conformado por un codificador óptico, un decodificador de cuadratura y un contador de 16 bits. El sistema de control ha sido implementado usando un microcomputador Pentium y una tarjeta de interfaz LAB-PC+, tal como puede apreciarse en la figura 6.

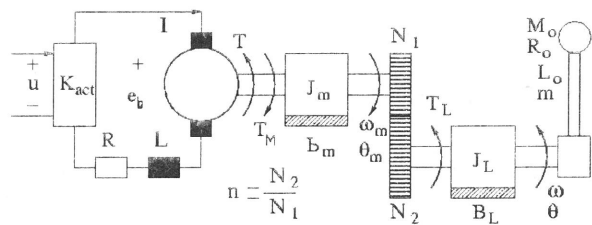


Fig. 5 Estructura del proceso no lineal.

La tabla 1 describe las variables y los valores de sus parámetros. Despreciando la inductancia L del servomotor, el proceso no lineal puede ser descrito por

$$F(x) = \begin{bmatrix} -\frac{N}{M} \text{sen}x_1 - \left(\frac{B}{M} + \frac{n^2 KE}{MR} \right) x_2 - \frac{1}{M} T_N \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ nKK_{act} \\ RM \end{bmatrix} u; \quad H(x) = x_1 \quad (19)$$

Asumiendo que la señal de control u está compensada por las no linealidades y eligiendo al origen como punto de equilibrio estable, el proceso no lineal [4][5][6][7] puede ser descrito mediante el siguiente modelo lineal:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u; \quad y = C_c x \quad (20)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{N}{M} & -\left(\frac{B}{M} + \frac{Kn^2E}{MR} \right) \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KnK_{act}}{MR} \end{bmatrix}; \quad C_c = [1 \quad 0]$$

$$M = J_{eff} + ML_0^2 + \frac{2}{5} MR_0^2 + \frac{1}{3} mL_0^2$$

$$N = gL_0 \left(M + \frac{m}{2} \right); \quad J_{eff} = n^2 J_m + J_L;$$

$$B = n^2 b_m + b_L$$

La función de transferencia $G_p(s)$ del proceso puede determinarse de

$$G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C_c [sI - A_c]^{-1} B_c \quad (21)$$

La función transferencia pulso $G_p(z)$ se determina como sigue [5][8][9][10]:

$$G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] \quad (22)$$

donde $Z[\cdot]$ es la operación transformada Z. Dicha función de transferencia depende del tiempo de muestreo T y posee la estructura siguiente:

$$G_p(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$= \frac{B(z)}{A(z)} \quad (23)$$

que constituye el modelo CARIMA del proceso, con

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2};$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Su correspondiente ecuación de diferencias es:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (24)$$

Con $M_0 = 0$ (varilla sin carga adicional). Los parámetros poseen los valores siguientes:

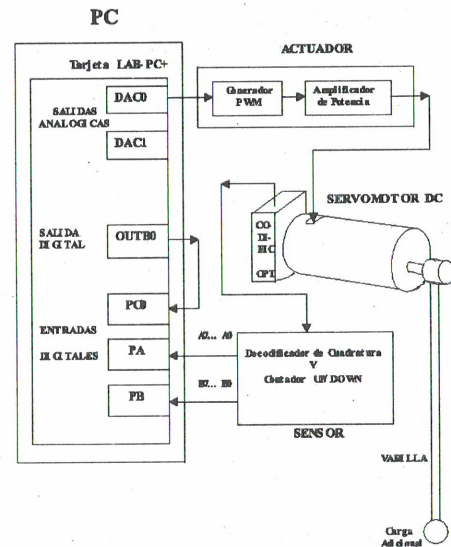


Fig. 6 Implementación del sistema de control

$$a_1 = -1.9614, \quad a_2 = 0.9614,$$

$$b_1 = 0.0044, \quad b_2 = 0.0043$$

La respuesta libre del proceso está dada por:

$$y_{libre}(t+1) = -a_1 y_{libre}(t) - a_2 y_{libre}(t-1) + (b_1 + b_2) u(t-1)$$

y los coeficientes g_k de la respuesta al escalón se determina de:

$$g(k) = -a_1 g(k-1) - a_2 g(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

⇒ podemos obtener :

$$g(0) = 0, \quad g(1) = b_1, \quad g(2) = -a_1 b_1 + b_1 + b_2 ;$$

y:

$$g(k) = -a_1 g(k-1) - a_2 g(k-2) + b_1 + b_2 ; \quad \text{para } k \geq 3$$

La ley de control a emplear es del tipo escalar ($N_u = 1$) con $N_1 = 1$ y $N_2 = 12$. La forma de la ley de control es:

$$\Delta u(t) = \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k [r(t+k/t) - y_{libre}(t+k/t)]}{\left(\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k^2 + \lambda \right)}$$

Las restricciones a la señal de control $u(t)$ están comprendidas en el rango:

$$-1.4 \leq u \leq +1.4$$

Tabla 1 : Parámetros de la planta

SIMBOLO	DESCRIPCIÓN	VALOR (unidades)
Kact	Ganancia del amplificador de potencia	14.9
E	Constante de fuerza electromotriz	31.0352×10^{-3} V/rad/s
J_L	Momento de inercia de la carga	3.5×10^{-7} kg m ²
n	Reducción de engranajes	19.741
b_L	Coefficiente de fricción de la carga	10^{-5} Nm/rad/ s
L	Inductancia de armadura	4.64×10^{-2} H.
R	Resistencia de armadura	7.38 Ω
J_m	Momento de inercia del motor	1.9062×10^{-6} kg m ²
b_m	Coefficiente de fricción del motor	1.8338×10^{-6} Nm/rad/ s
g	Aceleración de la gravedad	9.81 m/ s ²
m	Masa de la varilla	0.06377 kg
L_0	Longitud de la varilla	0.776 m
K	Constante de torque del motor	31.071×10^{-3} Nm/A

RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados de la implementación del algoritmo de control predictivo en tiempo real con restricciones de entrada y de salida. Para los casos presentados, la trayectoria deseada es una curva discontinua escalonada. Las respuestas controladas (en líneas de trazo) se muestran en las figuras 7 al 14.

La inercia total de la carga no lineal es:

$$J_T = J + \frac{2}{5} M_0 R_0^2$$

Respuesta a referencias fijas.

- Referencia=45°
- Carga inercial: $J_T = J$
- $\lambda=0.97$

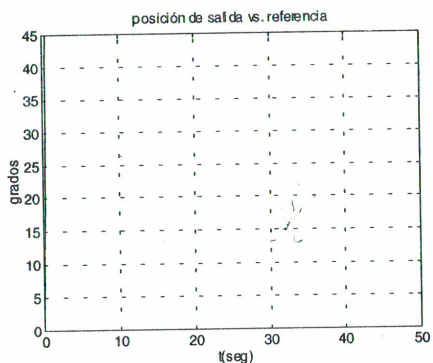


Fig. 7 Posición (y) vs. Referencia (r)

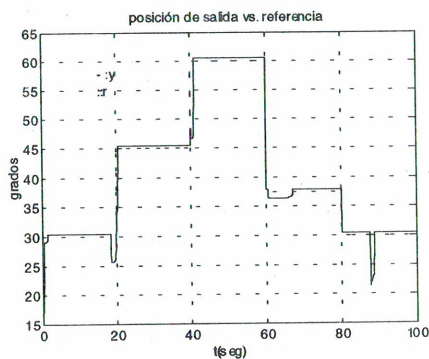


Fig. 10 Posición (y) vs Referencia

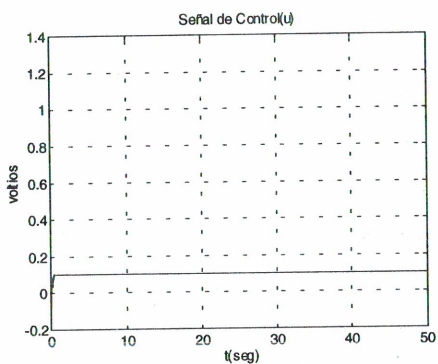


Fig. 8 Señal de Control (u)

- carga inercial : $J_T = 1.42 \text{ J}$
 $\lambda=0.935$

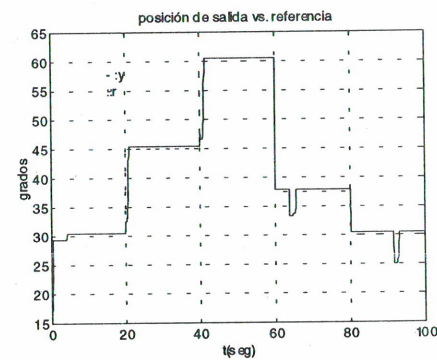


Fig.11 Posición (y) vs Referencia (r)

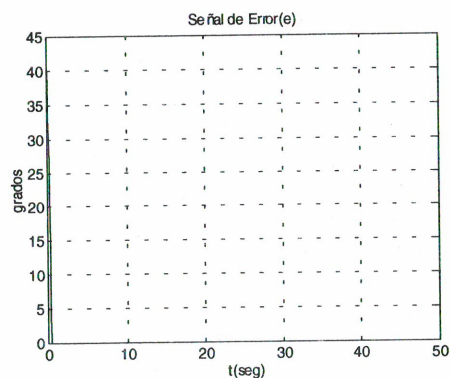


Fig. 9 Señal de Error (e)

- carga inercial : $J_T = 1.84 \text{ J}$
 $\lambda=0.935$

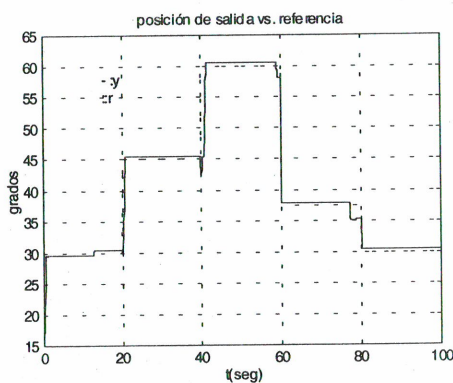


Fig. 12. Posición (y) vs Referencia (r)

Nota. Las gráficas para cargas distintas, son prácticamente las mismas.

Respuesta a referencias variantes.

- carga inercial : $J_T = J$
 $\lambda=0.935$

- carga inercial : $J_T = 2.98 \text{ J}$
 $\lambda=0.935$

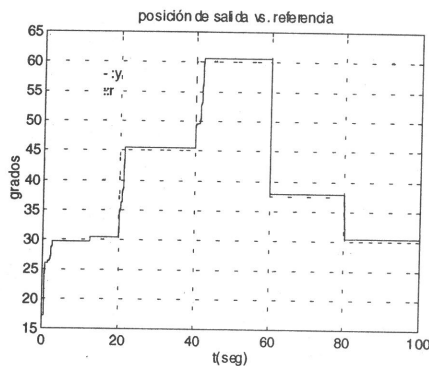


Fig. 13 Posición (y) vs Referencia (r)

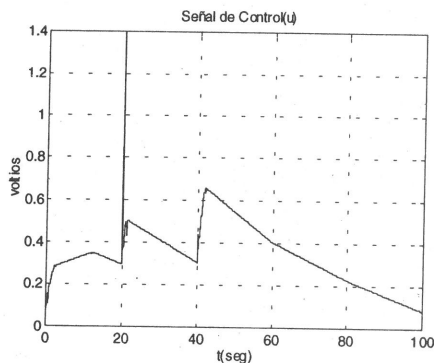


Fig. 14 Señal de Control (u) para el caso

CONCLUSIONES

- La frecuencia de muestreo usada para las pruebas experimentales es de 100Hz.
- Los resultados en tiempo real, presentan buena respuesta, confirmando los resultados de las simulaciones en MATLAB y SIMULINK (que no son presentadas en este artículo por razones de espacio).
- Por razones de espacio no se presentan las simulaciones.
- La respuesta del sistema (posición) a referencias fijas es muy rápida, llegando a converger en tres pasos, presentando alta estabilidad.
- La respuesta a referencias variantes es buena, tal como se pueden apreciar en los resultados mostrados.
- Una inspección a las diferentes pruebas, nos per-

mite afirmar que para valores de λ más cercanos a 0 que a 1, el sistema se hace más rápido, pero pierde robustez; mientras que, para λ más cercanos a la unidad, el sistema adquiere robustez, pero pierde rapidez.

- Otro factor muy importante es el parámetro de filtraje α , que determina la exactitud de seguimiento a la trayectoria deseada w .
- Finalmente, podemos observar que el máximo valor que adquiere la señal de control en el transitorio es de ± 1.4 voltios, para luego tender hacia cero.

REFERENCIAS

1. Robin De Keyser, "A gentle Introduction to Model Baseded Predictive Control". PADI2 International Conference on Automatic Control, octubre de 1998, Piura, Perú.
2. Eduardo F. Camacho and Carlos Bordons, "Model Predictive Control", Springer, 1999.
3. Cesar De Prada, "Optimización de Consignas en Control Predictivo". PADI2 International Conference on Automatic Control, octubre de 1998, Piura, Perú.
4. Katsuhiko Ogata, "Ingeniería de Control Moderna", Prentice - Hall Hispanoamericana, S.A. México - Englewood Cliffs, tercera edición, 1998.
5. Arturo Rojas, "Control Avanzado, Diseño y Aplicaciones en tiempo real", Edición independiente, UNI - 2001.
6. Alfredo Tupayachi, "Servo-Control no Lineal para Sistemas precisos de seguimiento", PADI2 International Conference on Automatic Control, octubre de 1998, Piura, Perú.
7. Luis A. Ponce Dioses, "Control de servo sistemas no Lineales usando Redes Neuronales", PADI2 International Conference on Automatic Control, octubre de 1998, Piura, Perú.
8. Katsuhiko Ogata, "Sistemas de Control en Tiempo Discreto", Prentice - Hall Hispanoamericana, S.A. México - Nueva York, segunda edición, 1996.
9. Astrom, K.J. y Wittenmark, B. "Computer Controlled Systems: Teory and Design", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, tercera edición, 1997.
10. Rolf Isermann, "Digital Control Systems", Springer, 1989.

