

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL NO LINEAL POR MODOS DESLIZANTES MULTIVARIABLE APLICADO A UN MANIPULADOR RÓBOTICO TRASLACIONAL 2DOF

Ricardo Rodríguez Bustinza
Sección de Postgrado - Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Email: rirodbus@uni.edu.pe

RESUMEN

El presente trabajo trata sobre el control de trayectoria de un manipulador robótico de traslación multivariable de 2 DOF (Degrees-of-Freedoms) que consta de un carro accionado por una polea y un eslabón articulado en el CG (centro de gravedad) de dicho carro. Tal proceso será controlado mediante la técnica de control por modos deslizantes. La acción de control esta orientada a controlar el movimiento traslacional del móvil y el movimiento angular de la varilla, que es libre de girar en ambas direcciones. Las metas impuestas para este trabajo son: modelación del proceso y simulación del sistema con la ley de control por modos deslizantes. Esta ley de control emplea la realimentación no lineal discontinua en una superficie dada que pertenece al espacio estado del sistema. Si una trayectoria de estado originada en esta superficie (como respuesta al comportamiento natural de la dinámica de sistema de lazo abierto) intenta desviarse de la misma, entonces actúa una fuerza de control que evita tal desviación. Estudios de simulación demostrarán que las señales de control diseñadas pueden hacer que las salidas sigan eficientemente a trayectorias de referencia arbitrarias.

ABSTRACT

This paper presents the multivariable sliding mode control methodology applied to a translational robot arm of 2 DOF to solve the problem of trajectory tracking. The robot arm into consideration possesses two DC motors with gear reduction mechanism and optical encoder. The first motor is articulated to a pulley that uses a cable to transmit the force that drives the sliding motion of a cart mounted on a pair of rails along the horizontal axis. The second motor is employed to drive the rotary motion of the link of the robot arm around a pivot point; such a point is assumed to be the CG of the cart. Such a robot arm is a multivariable square process with two inputs (armature voltages) and two outputs (cart and link positions). Simulation results of the designed nonlinear control system will demonstrate that the designed control inputs make the outputs capable of tracking desired trajectories.

INTRODUCCION

El manipulador robótico de traslación de 2DOF es un proceso multivariable que posee un eslabón (el brazo del robot) articulado al eje de un motor DC. Este motor está montado sobre un móvil que desarrolla su movimiento de traslación empleando por la acción de dos poleas. Una de las poleas está acoplada al eje de un segundo motor DC. Este ultimo motor va a gobernar el movimiento del móvil. El propósito de este proyecto es el control simultaneo de la posición angular de la varilla y la posición de traslación del móvil. Por consiguiente, el proceso a controlar posee dos entradas

y dos salidas, es decir, es un proceso MIMO (MultipleInput-Multiple-Output)cuadrado.

La técnica a emplear para controlar el proceso MIMO es el control por modos deslizantes [2], [3], el cual garantiza la convergencia de la ley del control para una superficie de estado S discontinua del sistema, en un tiempo finito. Cuando se emplea control por modos deslizantes en los motores eléctricos, la ley del control es de naturaleza discontinua; sin embargo, para un sistema mecánico, la aplicación de tal ley de control

puede traer consigo el fenómeno "chattering", que se manifiesta en una oscilación sostenida de la señal de control, la cual puede ser dañina para el funcionamiento del sistema de control. El fenómeno "chattering" se produce en el límite de la superficie S y se debe a los cambios de alta frecuencia que muy bien pueden excitar la dinámica del modelo e imponer el desgaste indebido en el actuador. Por lo tanto, la ley del control no sería aceptablemente realizable, si no se resolviera este problema.

Se han propuesto varias modificaciones para superar esta dificultad. De los resultados obtenidos se puede concluir que la técnica de control con modos deslizantes empleando una función de saturación en su ley de control soluciona este inconveniente [2], [3].

DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

La fig. 1 muestra el sistema del manipulador robótico traslacional multivariable de 2DOF, donde M_1 y M_2 son los motores DC con decodificadores ópticos, U_1 y U_2 son las señales de control, θ es la posición angular del brazo de longitud l y masa m , r es la posición del móvil, y f es la fuerza de fricción.

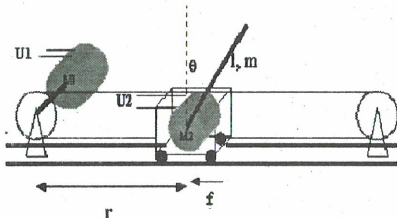


Fig. 1 Manipulador robótico de traslación.

El sistema emplea dos motores DC; uno de ellos está montado sobre el móvil y tiene acción directa sobre el brazo; el otro motor tiene acción directa sobre la posición del móvil. El brazo se fija al móvil poniendo goznes al eje del motor. El móvil toma posición a lo largo los rieles y el brazo que está montado sobre el móvil es libre de girar en ambas direcciones.

MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA

Antes de generalizar la ecuación dinámica de Lagrange, se debe de construir las condiciones de energía necesarias para cada componente del sistema. El propósito de este modelo matemático es desarrollar y probar una ley de control que pueda hacer que la

trayectoria del carro y la trayectoria del brazo sigan trayectorias de referencia arbitrarias. Nosotros asumimos que las dos componentes de la salida $y(r, \theta)$ son medidas y que la fuerza $u(u_1, u_2)$ es la entrada del control. Nuestro primer objetivo es encontrar la relación dinámica entre $u(u_1, u_2)$ e $y(r, \theta)$. Para esto, podemos usar las ecuaciones de Lagrange. Para expresar la energía en este sistema, introducimos las variables en la ecuación de Lagrange. El principio de Lagrange nos permite escribir en forma directa las ecuaciones de energía cinética T , energía potencial U y energía disipada D . En otras palabras, una vez que modelamos T , U y D , tendremos las ecuaciones dinámicas.

Para el sistema del manipulador robótico de traslación de 2 DOF, los términos de las energías individuales componen en su conjunto la totalidad energética del sistema:

$$T = T_1 + T_2$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$D = D_1 + D_2$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 +$$

$$2l \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{r})$$

$$U = m g l \cos(\theta)$$

$$D = \frac{1}{2} f \dot{r}^2 + \frac{1}{2} c \dot{\theta}^2$$

Las ecuaciones dinámicas de Lagrange son desarrolladas para las variables que intervienen en el sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{r}} \right) = F_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) = T_L$$

Desarrollando las ecuaciones de Lagrange arriba indicadas, se obtienen las ecuaciones parciales que describen a F_1 (fuerza que desarrolla el eje del motor M_1 para hacer girar la polea) y T_L (torque que desarrolla el motor M_2 para giro angular de la varilla). Luego debemos modelar las ecuaciones para los subsistemas

motor-polea y motor-móvil para determinar las ecuaciones que relacionan a F_1 y T_L con las señales de control eléctrica (los voltajes de armadura) u_1 y u_2 . La forma compacta de las ecuaciones de Lagrange que definen las leyes de control del sistema tienen la forma:

$$u_1 = m_{11} \ddot{r} + m_{12} \ddot{\theta} + p_{11} \dot{r} + p_{12} \dot{\theta} \quad (1)$$

$$u_2 = m_{21} \ddot{r} + m_{22} \ddot{\theta} + p_{22} \dot{\theta} + q_{21} \quad (2)$$

La ecuación del sistema manipulador robótico, puede ser escrita de la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = -M^{-1} \left\{ P \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + Q + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (3)$$

donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = \left(\frac{R_a n r_p}{K_A K_m} \right) (M_c + m + \frac{J_{eq}}{n^2 r_p^2})$$

$$m_{12} = \left(\frac{R_a n r_p}{K_A K_m} \right) m l \cos(\theta)$$

$$m_{21} = \left(\frac{R_a}{K_A K_m} \right) m l \cos(\theta)$$

$$m_{22} = \left(\frac{R_a}{K_A K_m} \right) (m l^2 + J)$$

$$p_{11} = \left(\frac{R_a n r_p}{K_A K_m} \right) \left(f + \frac{B_{eq}}{n^2 r_p^2} + \frac{K_m K_b}{R_a n^2 r_p^2} \right)$$

$$p_{12} = - \left(\frac{R_a n r_p}{K_A K_m} \right) m l \sin(\theta) \dot{\theta}$$

$$p_{21} = 0; \quad p_{22} = \left(\frac{R_a}{K_A K_m} \right) \left(c + \frac{K_m K_b n}{R_a} \right)$$

$$q_{11} = 0; \quad q_{21} = - \left(\frac{R_a}{K_A K_m} \right) m l g \sin(\theta)$$

La tabla siguiente muestra los valores de los parámetros del sistema.

Tabla de parámetros del sistema

Símbolo	Valor	Unidades
M_c	0.9574	kg
m	0.103	kg
l	0.225	m
J	2.38e-3	kgm ²
J_{eq}	4.2e-6	kgm ²
B_{eq}	3.36e-6	Nms(rad) ⁻¹
c	1.92e-3	kgm ² s ⁻¹
f	2.81	kgs ⁻¹
g	9.8	ms ⁻²
K_A	15	Sin unidades
K_b	25e-3	Vs(rad) ⁻¹
K_m	31.07e-3	NmA ⁻¹
r_p	0.05	m
R_a	2	Ω
L_a	0.002	H
N	0.08	Sin unidades

La siguiente tabla muestra la descripción de los parámetros y variables que intervienen en el sistema.

Descripción de parámetros y variables.

Símbolo	Descripción
M_c	Masa del carro
m	Masa del brazo
L	Longitud del brazo
J	Momento de inercia de la varilla
J_{eq}	Momento de inercia equivalente
B_{eq}	Fricción viscosa equivalente
c	Coefficiente de fricción viscosa varilla
f	Coefficiente de fricción del móvil
g	Aceleración de la gravedad
K_A	Constante de ganancia de amplificación
K_b	Constante fuerza contraelectromotriz
K_m	Constante de torque de motor
r_p	Radio de la polea
R_a	Resistencia de armadura
N	Factor de reducción

CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

En el control por modos deslizantes la descripción del proceso puede ser imprecisa; es decir, el modelo dinámico del proceso puede presentar incertidumbre de los parámetros en su estructura, o puede no

considerar el modelado dinámico de cierto comportamiento. Desde que la descripción del proceso permite las incertidumbres, el control deslizante puede ser considerado como un acercamiento particular del control robusto.

La modificación apropiada de la ley de control por modos deslizantes puede moderar la actividad del control, por ejemplo empleando una función de saturación en una región de la superficie de deslizamiento en lugar de la clásica ley de control que incluye el término $\text{sgn}(s)$. La función $\text{sgn}(s)$ es 1 cuando $s > 0$ y -1 si $s < 0$. De manera simplificada, la ecuación de Lagrange del sistema en estudio puede ser formulada como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = -M^{-1} \left\{ P \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + Q \right\} + M^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde (ver siguiente tabla):

R	posición del móvil
θ	posición angular del móvil
$M(\theta)$	Matriz de inercia definida positiva
$P(\theta, d\theta)$	Matriz de la fuerza de Coriolis
$Q(\theta)$	Matriz de la fuerza gravitacional
(u_1, u_2)	Vector de fuerzas aplicadas al sistema

Asumiremos que los vectores de posición y velocidad deseadas, son funciones continuamente diferenciales en el tiempo. La meta es que el sistema tenga que seguir la posición y velocidad actual de estos valores en tiempo real, lo que nos induce a considerar las siguientes superficies de conmutación:

$$s_i(t, x, \dot{x}) = (\dot{x} - \dot{x}_d) + C(x - x_d) = dX - CX \quad (5)$$

donde, $C = \text{diag} [c_i]$ $i=1,2$ constante, $s_i(t, x, dx)$ es una trayectoria de la ecuación (4).

Si se logra en el desarrollo del control que todas las trayectorias originales son convergentes en la intersección de las superficies s_i , entonces para algún tiempo t_0 con $s_i(t_0)=0$, $i=1,2,\dots,n$, se tendrá de (5):

$$dX = -CX$$

por lo tanto, los errores de posición y velocidad convergen exponencialmente a cero. Para demostrar el comportamiento asintóticamente estable de nuestro sistema, podemos escoger la siguiente función de Lyapunov:

$$V(t, x) = \frac{1}{2} s^T M s \quad (6)$$

La derivada temporal de la energía $V(t, x)$ es,

$$\dot{V}(t, x) = s^T \dot{M} s + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s \quad (7)$$

La derivada de s es:

$$\dot{s} = (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + C(\dot{x} - \dot{x}_d) \quad (8)$$

Reemplazando (4) en (8):

$$\dot{s} = -M^{-1} (P \dot{x} + Q) + M^{-1} u - \ddot{x}_d + C \dot{X} \quad (9)$$

Agrupando la ecuación (9):

$$\dot{s} = M^{-1} \left[-P \dot{x} - Q + u - M \ddot{x}_d + MC \dot{X} \right] \quad (10)$$

o lo que es lo mismo:

$$\dot{s} = M^{-1} \left[u - u_{eq} \right] \quad (11)$$

donde:

$$u_{eq} = -MC \dot{X} + P \dot{x} + Q + M \ddot{x}_d \quad (12)$$

La ley de control posee la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - U \text{sgn}(s) \quad (13)$$

donde el i -ésimo elemento del vector es,

$$u_{oi} = \frac{1}{2} [u_i^+ + u_i^-]; U = \text{diag}[u_i^- - u_i^+] \quad (14)$$

$$\text{sgn}(s) = [\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2), \dots, \text{sgn}(s_n)]$$

Luego (11) toma la forma:

$$\dot{s}^* = M^{-1} (u_0 - U \text{sgn}(s) - u_{eq}) \quad (15)$$

Por consiguiente, (7) se convierte en:

$$\dot{V}^* = s^T (u_0 - U \text{sgn}(s) - u_{eq}) + \frac{1}{2} s^T M \dot{s} \quad (16)$$

La matriz M , siendo una función del vector de posición θ_1 , es continuamente diferenciable. Koditschek [8] estableció la siguiente identidad:

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{dM}{dt} - J \right) \quad (17)$$

Donde J es una matriz anti-simétrica dada por:

$$J_{ik} = - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial \theta_i} \right) \quad (18)$$

Utilizando (15) y (16) se obtiene:

$$\dot{V}^* = s^T (u_0 - U \text{sgn}(s) + Ps - u_{eq}) + \frac{1}{2} s^T J \dot{s} \quad (19)$$

Note que ($s^T J s = 0$); por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ (ε es una constante arbitraria) seleccionamos los controles u_i^- y u_i^+ que satisfacen:

$$\left| (u_0 + Ps - u_{eq})_i \right| \leq \frac{1}{2} (u_i^- - u_i^+) - \varepsilon \quad (20)$$

así obtenemos:

$$\dot{V}^* \leq -\varepsilon \sum_{j=1}^n |s_j| \quad (21)$$

La relación (21) asegura el comportamiento asintóticamente estable del sistema. La ecuación (20) puede tomar la forma:

$$u_i^+ + \varepsilon \leq (u_{eq} - Ps) \leq u_i^- - \varepsilon \quad (22)$$

En la referencia [7] se demuestra que la ley de control con modos deslizantes, para las condiciones impuestas por las ecuaciones (13), (14) y (20) es:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{K} \text{sgn}(s)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1 \text{sgn}(s_1) \\ K_2 \text{sgn}(s_2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Esta ley de control puede ser modificada para evitar el fenómeno "chattering" reemplazando $\text{sgn}(s)$ por la función $\text{sat}(s/\phi)$, donde ϕ es el ancho de la zona de saturación dentro de la superficie de deslizamiento, dentro de la cual la relación entre la ley de control u y la superficie de deslizamiento s es lineal. Sin embargo, debido a propósitos educativos, seguiremos usando la ley de control dada en (23).

RESULTADOS DE SIMULACION

Las figuras siguientes muestran los resultados gráficos que provienen de la simulación hecha en Matlab, el mismo que ha sido realizado usando condiciones iniciales y trayectorias que son mostradas a continuación.

Condiciones iniciales

0 para posición del móvil y $-\pi/2$ para posición del manipulador.

Trayectorias usadas

$xd1 = 2$ m (trayectoria constante)

$xd2 = (\pi/4)\cos(2\pi t)$ Rad. (trayectoria cosenoidal)

Resultados gráficos

Los resultados son mostrados en las figuras (1,2,3,4)

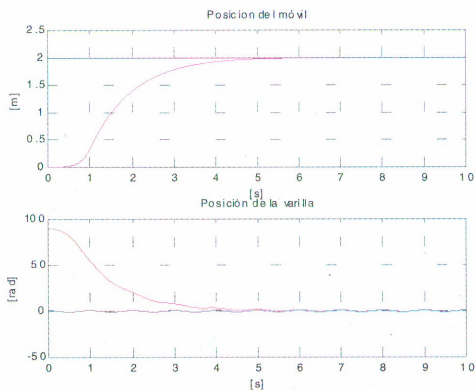


Fig. 1 Salidas controladas para la posición del móvil y posición angular de la varilla.

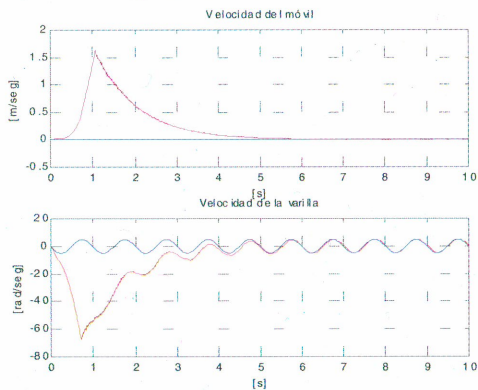


Fig. 2 Salidas de velocidad para el móvil y para la varilla.

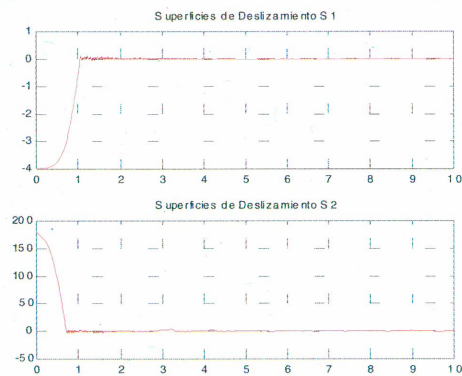


Fig.3 Superficies de deslizamiento S_1 y S_2

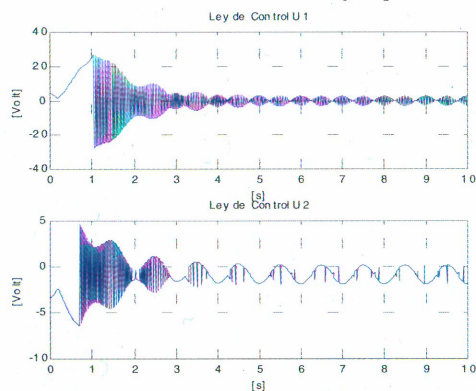


Fig.4 Señales de control para el motor 1 y para el motor 2.

Condiciones iniciales

0 para posición del móvil y $\pi/2$ para posición del manipulador.

Trayectorias usadas

$x_{d1} = 0.5$ m (trayectoria constante)

$x_{d2} = \pi/4$ Rad. (trayectoria constante)

Resultados gráficos

Los resultados son mostrados en las figuras (5,6,7,8)

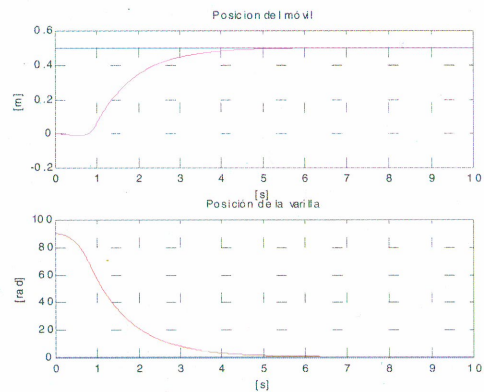


Fig. 5 Salidas controladas para la posición del móvil y posición angular de la varilla.

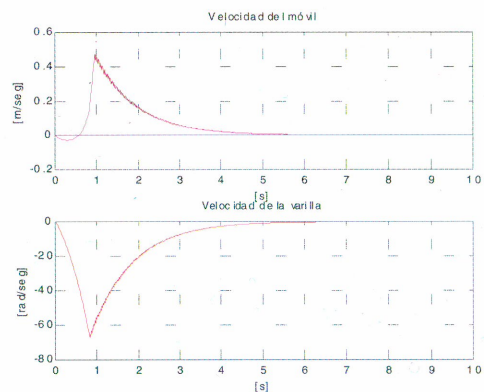


Fig. 6 Salidas de velocidad para el móvil y para la varilla.

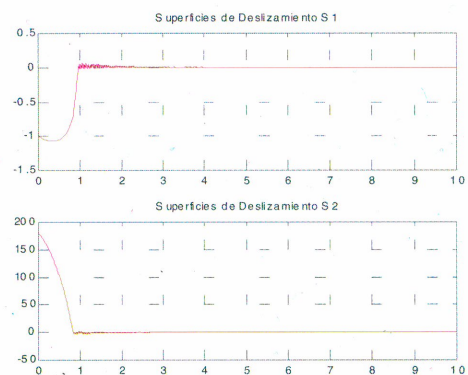


Fig. 7 Superficies de deslizamiento S_1 y S_2

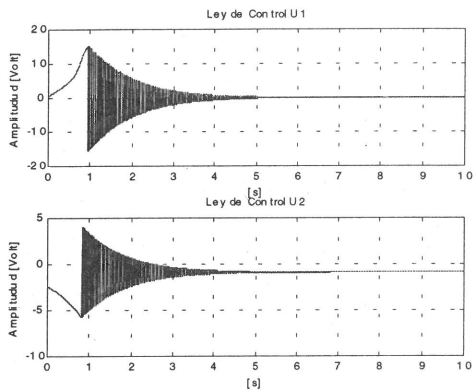


Fig. 8 Señales de control para el motor 1 y para el motor 2.

CONCLUSIONES

Para diseñar el sistema de control se tuvo que derivar un modelo dinámico apropiado del sistema. No se consideró el efecto de la inductancia de armadura La del motor en el modelo del sistema por ser despreciable dentro del ancho de banda del sistema.

El problema planteado fue el controlar al mismo tiempo la posición del móvil y la posición del brazo usando el control por modos deslizantes debido a que compensa satisfactoriamente las incertidumbres paramétricas e impresiones en el modelado.

Los resultados de la simulación han demostrado que las leyes de control diseñadas hacen que las salidas controladas sean capaces de seguir trayectorias de referencia arbitrarias.

El manipulador robótico en cuestión ya ha sido construido y actualmente se están elaborando los

programas que conforman el software de control siguiendo los lineamientos contenidos en [6].

RECONOCIMIENTOS

Agradecimiento especial a la Sección de Post Grado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional de Ingeniería y al Dr. Arturo Rojas Moreno, por todas las facilidades brindadas para el desarrollo y la continuación del presente trabajo.

REFERENCIAS

1. Hassan y K. Khalil "Nonlinear Systems", Prentice Hall, 1996.
2. J. Jacques y E. "Slotine Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, 1991.
3. C. Edwards y S. Spurgeon "Sliding Mode Control", Taylor and Francis, 1998.
4. S. Nakamura "Análisis y Visualización Gráfica con Matlab", Prentice Hall, 1991.
5. G. Franklin 6 J.D Powell "Control de Sistemas Dinámicos con Retroalimentación", Addison Wesley, 1991.
6. A. Rojas Moreno "Control Avanzado", Publicación independiente, ISBN 9972-9318-0-3, 2001.
7. E. Bailey A. Araposthatis "Simple sliding mode control scheme applied to robot manipulators", Int. J. Control, 1987, vol. 45, No. 4, p. 1197—1209. 1996.
8. Koditschek D. E., Proc. 23rd I.E.E.E. Conf. on Decision and Control, Las Vegas, p. 733, 1984.

