TECNIA, Vol.12 N° 1, págs. 73 - 77, 2002
Universidad Nacional de Ingeniería
Lima - Perú

APLICACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO MATLAB PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GUÍA DE ONDAS

Miguel Z. Delgado León
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
E-mail: mdelgado@uni.edu.pe

RESUMEN

El presente trabajo desarrolla el Método de Elementos Finitos (MEF) mediante un programa en código MATLAB para la solución de problemas de guía de ondas. La ecuación diferencial de Helmholtz se resuelve mediante un sistema de eigenvalores de una forma simple con MATLAB. Los resultados numéricos son comparados con la solución analítica de guía de ondas rectangulares, obteniéndose resultados satisfactorios.

ABSTRACT

The present work develops the Finite Element Method (FEM) as a program written in MATLAB code and its application for the numerical simulation of waveguides. The Helmholtz equation diferential is determined by solving as the generalized eigenvalue problem and with MATLAB is simples. The numerical results is compared with the solution analitical of the rectangular waveguides, we obtained good results.

INTRODUCCIÓN

La aplicación del Método de Elementos Finitos para guías de ondas rellenas con aire o con materiales dieléctricos homogéneos e isotrópicos no es reciente [1,2] y fue una de las primeras aplicaciones en electromagnetismo.

Aunque una guía de ondas puede adoptar cualquier sección transversal arbitraria, las guías de onda comunes son rectangulares o circulares [3] y su diseño puede ser obtenido en forma analítica sólo cuando el material de relleno en la guía es homogéneo e isotrópico. El análisis de las guías de onda de sección transversal arbitraria es complicado y requiere buena familiaridad con funciones especiales [4].

El MEF es una herramienta numérica muy potente, útil para resolver ecuaciones diferenciales. En el caso de guía de ondas, proporciona la solución de la constante de fase y de corte de la guía y los campos electromagnéticos para una guía de ondas de cualquier sección arbitraria rellena con material no homogéneo o anisotrópico. [4] La programación del MEF para guía de ondas en cualquier lenguaje de programación no es fácil, en FORTRAN, se requiere elaborar varias subrutinas que hacen extenso el programa.

El presente trabajo, desarrolla el MEF para guía de ondas utilizando MATLAB, la programación es fácil, proporciona buena aproximación, no necesita dimensionar los vectores y las matrices, el problema del sistema de eigenvalores lo resuelve mediante un simple comando. Como ejemplo, se muestra aplicaciones a guía de ondas en una y dos dimensiones, comparando el resultado analítico con el numérico.

FORMULACION DEL MEF PARA GUÍA DE ONDAS

En esta sección consideramos el problema de guía de ondas cerradas y se presenta la solución mediante el MEF en términos de las componentes axiales de los campos electromagnéticos. La formulación es conocida como la formulación escalar E_z-H_z.

Como es conocido, en una guía de ondas llena con un material homogéneo, existen dos conjuntos de modos diferentes. Uno de ellos no tiene componentes del campo magnético en la dirección de propagación y se llama modo transversal magnético (TM). En contraste, el otro modo no tiene componente del campo eléctrico en la dirección de propagación y se llama modo transversal eléctrico (TE). Asumiendo que el eje infinito de propagación de la guía de ondas es a lo largo del eje z, los campos electromagnéticos en la guía pueden expresarse como:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{-j\beta z} \tag{1}$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y)e^{-j\beta z} \tag{2}$$

donde β es la constante de propagación de la guía. Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de Maxwell para regiones libres de fuentes, se llega a la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + K_c^2\phi = 0 \tag{3}$$

donde:

$$K_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2 \tag{4}$$

es la constante de corte de la guía, ω es la frecuencia angular, μ y ε son la permeabilidad y permitividad del material, respectivamente.

Para el caso TM, $\phi = E_z$, donde ϕ satisface la condición de frontera homogénea de Dirichlet en las paredes metálicas de la guía, es decir:

$$\phi = 0 \text{ en } \Gamma \tag{5}$$

Para el caso TE, $\phi = H_z$,donde ϕ satisface la condición de frontera homogénea de Neumann en las paredes metálicas de la guía:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma \tag{6}$$

Aquí Γ es la frontera conductora en las paredes de la guía y **n** es el vector unitario normal.

El problema variacional equivalente para la ecuación de Helmholtz fue formulado en [5] y el funcional será:

$$F(\phi) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - K_c^2\phi^2\right]d\Omega \tag{7}$$

donde Ω es la sección transversal de la guía de ondas. Aplicamos el análisis de elementos finitos [6] y aproximamos la solución dentro de cada elemento como una función lineal de la forma:

$$\phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^{3} N_j(x, y)\phi_j^e \tag{8}$$

donde $N_j(x, y)$ [4] es la función de interpolación y ϕ_j^e , es el valor de la incógnita en el nodo de cada elemento.

Reemplazando (8) en (7), y ensamblando, se llega al sistema de ecuaciones:

$$[K]\{\phi\} = \{0\} \tag{9}$$

donde $[K]$ es el ensamblamiento de las matrices elementales dadas por:

$$K_{ij}^e = \iint_{\Omega^e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} - K_c^2 N_i^e N_j^e\right)d\Omega$$

Dado que K_c es de valor desconocido, el cual intentamos encontrar, dividimos K_{ij} en dos partes:

$$K_{ij}^e = A_{ij}^e - K_c^2 B_{ij}^e \tag{10}$$

con

$$A_{ij}^e = \iint_{\Omega^e}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right)d\Omega \tag{11}$$

$$B_{ij}^{e} = \iint_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega \qquad (12)$$

Ensamblando, se puede escribir

$$[A]\{\phi\} = K_c^2 [B]\{\phi\} \qquad (13)$$

lo cual es reconocido como un problema de eigenvalores generalizado. K_c son los eigenvalores y ϕ son los eigenvectores. Este sistema se resuelve muy fácilmente con MATLAB mediante el comando eig que se escribe en el ambiente MATLAB de la siguiente forma:

$$[U,V] = eig[A,B] \qquad (14)$$

donde los elementos de la diagonal principal de la matriz V son los eigenvalores generalizados y las columnas de la matriz U son los eigenvectores correspondientes. La programación de las ecuaciones (7) a (13) se ha realizado íntegramente en MATLAB

PROCEDIMIENTO DE LA SIMULACIÓN

Preprocesamiento

Para una guía de ondas en dos dimensiones, utilizamos dos programas de computadora ejecutables llamados generadores automáticos de mallas cuya función es dividir el dominio Ω en pequeños elementos triangulares como se muestra en la figura 2. Estos programas generan los archivos nen, enl, bx y co, cuyas funciones se encuentran explicadas en [5].

Este generador de mallas, además de especificar las regiones donde las condiciones de frontera son del tipo Dirichlet o Neumann, genera un archivo PostScript (formato grafico) que muestra la división de la región en elementos triangulares. Cabe señalar que para guías de ondas en una dimensión no se necesita de un generador de mallas porque puede programarse fácilmente.

PROCESAMIENTO

Se ha escrito dos programa en MATLAB llamados guia1d.m y guia2d.m, para guías de ondas en una y dos dimensiones, respectivamente. guia2d.m lee los archivos producidos por el generador de mallas y aplica la técnica del MEF que consiste en la programación de las ecuaciones (7) hasta la (13). La programación es fácil y su extensión es menos de dos páginas.

APLICACIONES, RESULTADOS Y DISCUSION

Guía de onda en una dimensión

Como una aplicación original y didáctica para la enseñanza del MEF, resolvemos un problema de guía de ondas en una dimensión. Se trata de la propagación de una onda electromagnética TE entre las placas paralelas perfectamente conductoras como se muestra en la figura 1

La solución analítica es desarrollado en [6] y está dada por:

$$\hat{E}(y,z) = E_x(y)e^{-j\beta z}$$

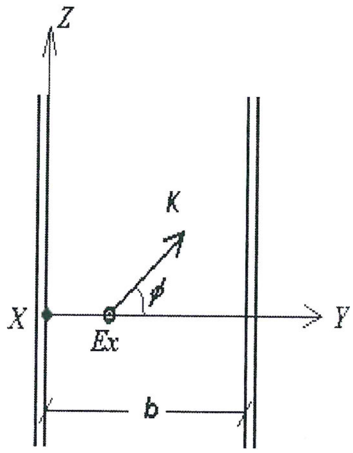

Fig. 1

donde:

$$E_x = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad K_c = \frac{n\pi}{b}, \quad \beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - K_c^2}$$

para n=1,2,3,...., que son los modos.

Considerando b=0.04m, la constante de corte más bajo es cuando n=1 y es Kc=78.5375.

El primer paso para la solución mediante el MEF consiste en dividir la región que va de y=0 hasta y=b en elementos tipo segmentos como se muestra en la Figura 2.

El programa guia1d.m realiza la división (mallado). Al ejecutar el programa en ambiente MATLAB, se ha obtenido los autovalores para diferentes números de elementos que se muestran en la Tabla 1.

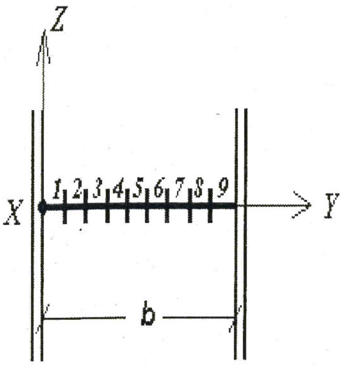

Fig. 2

Tabla 1

Número de elementos	Kc por el (MEF)	Error en (%)
10 elem.	78.8632	0.411 %
20 elem.	78.6206	0.102 %
40 elem.	78.5600	0.025 %
80 elem.	78.5449	0.006 %
200 elem.	78.5406	0.001 %

Como puede observarse el valor numérico mediante el MEF es muy próximo al valor teórico. A medida que se incrementa el número de elementos la aproximación mejora mucho.

GUÍA DE ONDA EN DOS DIMENSIONES

Como una segunda aplicación para la enseñanza del MEF, resolvemos el problema de una guía de ondas en dos dimensiones. Se trata de la propagación de una onda electromagnética TM entre las paredes perfectamente conductoras de una guía rectangular, como se muestra en la Figura 3.

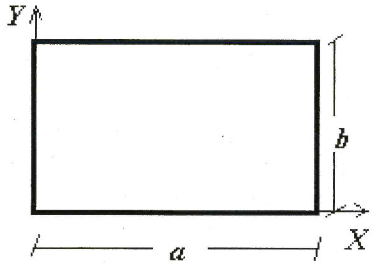

Fig. 3

La solución analítica es desarrollada en [3,6] y la constante de corte está dada por:

$$K_{c,m,n} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

donde m=1,2,3,... y n=1,2,3,..... son los modos TMmn de la guía. Considerando a=0.06m y b=0.03m, la constante de corte más bajo es cuando m=1 y n=1 y es Kc=117.4855.

El primer paso para la solución mediante el MEF consiste en utilizar el generador de malla para dividir la región transversal de la guía en elementos triangulares como se muestra en la Figura 4.

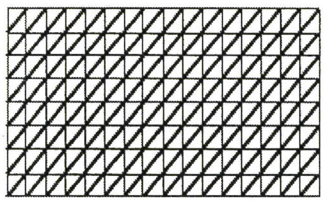

Fig. 2

El programa guía 2d.m lee los archivos de datos generados por el generador de mallas y utilizando las ecuaciones (7) a (13), calcula los autovalores y autovectores. Al ejecutar el programa en el ambiente MATLAB, se ha obtenido los autovalores para diferentes números de elementos que se muestran en la tabla 2.

Tabla 2

Número de elementos	Kc por el (MEF)	Error en (%)
64 elem.	122.0354	4.2323%
144 elem.	119.2852	1.8833 %
400 elem.	118.3210	1.0598 %
576 elem.	117.8744	0.6783 %
784 elem.	117.8455	0.3462 %

Al igual que en el ejemplo anterior, el valor numérico mediante el MEF es muy próximo al valor teórico. A medida que se incrementa el número de elementos la aproximación mejora mucho.

CONCLUSIONES

Un nuevo programa en MATLAB referente al MEF es desarrollado, este programa produce la solución numérica para problemas de guía de ondas, presentando resultados satisfactorios.

AGRADECIMIENTO

Al Instituto de Investigación de la FIEE por el financiamiento de este trabajo y a los alumnos Kevin Díaz Figueroa y Huberto Naupari Carrión por su ayuda en este proyecto.

REFERENCIAS

1. **P. P. Silvester** Finite element solution of homogeneous waveguide problems, Alta Freq., vol. 38, pp. 313-317, May 1969.
2. **S. Ahmed and P. Daly** Waveguide solutions by the finite element method, Radio Electron. Eng., vol 38, pp. 217-223, 1969.
3. **Kraus Fleisch** Electromagnetis- mo con aplicaciones, McGRAW-HILL, 1999.
4. **Jianming Jin** The Finite Element Method in Electromagnetics, John Willey & Sons, Inc., 1993
5. **Miguel Z. Delgado León** Método de Elementos Finitos en 2D utilizando MATLAB...., TECNIA, vol. 11, pp. 45-49, 2001.
6. **Miguel Z. Delgado León** Apuntes de clases de Propagación y Radiación Electromagnética II, FIEE-UNI, 2001.