TECNIA, Vol.13 Nº 1, págs. 3 - 7, 2003
Universidad Nacional de Ingeniería
Lima - Perú

UNA PRUEBA DE UNICIDAD RESPECTO DE LA SECUENCIA DE MULTIPLICADORES GENERADA POR EL MÉTODO LAGRANGEANO AUMENTADO

Yna Consuelo Rezza Espinoza
Facultad de Ingeniería Económica y Ciencias Sociales
Escuela Profesional de Ingeniería Estadística
E-mail: yna_c@yahoo.com

RESUMEN

Este trabajo presenta una demostración de la unicidad de la secuencia de multiplicadores generada por el método Lagrangeano Aumentado con Penalidades Pi $\in$ P. Esta unicidad ha sido probada a lo largo de los últimos 25 años mediante el uso de la relación de equivalencia existente entre los Métodos Lagrangeano Aumentado y de Punto Proximal. Diversos investigadores tales como Rockafellar [10], Iusem [6] y Gonzaga y Castillo [2], probaron esta equivalencia y la consecuente unicidad de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado para casos particulares. La prueba que presentamos incluye todos estos casos y además se distingue por ser directa y no hacer uso de la relación de equivalencia antes mencionada.

ABSTRACT

*This paper presents a proof of the unicity of the sequence of multipliers generated by the Aumented Lagrangean Method with Penalties $P_i \in P$. This unicity has been tested along the last 25 years by the use of the equivalence relationship existing between the Aumented Lagrangean and Proximal Point Methods Various researchers such as Rockafellar [10], Iusem [6] and Gonzaga & Castillo [2] tested this equivalence and the consequent unicity of the multipliers sequence generated by the Aumented Lagrangean Method in particular cases. The proof we are presenting includes all these cases; it is outstanding for being direct and **not to use** the above equivalence relation.*

INTRODUCCIÓN

Problemas no lineales de optimización se presentan frecuentemente en muchos campos de aplicación. Uno de los más estudiados es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{s.a. } x \in \bar{S} \end{aligned} \tag{1}$$

donde f $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa y cerrada, S es abierto y convexo y $\bar{S}$ es su clausura.

Un método muy elegante para resolver este problema es el llamado Método de Punto Proximal, introducido por Martinet [7] al rededor de los años 70, éste opera esencialmente sustituyendo el problema inicial (1) por una sucesión de problemas regularizados (o sea con solución única). Ya para resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{s.a. } g_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &\quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para $i=1, \dots, m$ son funciones convexas y cerradas, existe un método de optimización muy popular, conocido como el Método Lagrangeano Aumentado.

Con relación a estos métodos, Rockafellar [10] demostró en 1976 que el Método Lagrangeano

Aumentado Estándar (aplicado al problema (2)) y el de Punto Proximal respectivo (aplicado al problema dual de (2)) pueden ser vistos como equivalentes.

Esto implica inmediatamente la unicidad de la secuencia de multiplicadores $\{\mu^k\}$ generada por el Método Lagrangeano Aumentado Estándar.

Otras pruebas de esta equivalencia y la consecuente unicidad de la respectiva secuencia dual, para el caso del Método Lagrangeano Aumentado Exponencial y con Cambio de Variable pueden ser encontradas en [6] y [2], respectivamente.

La prueba de unicidad de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado que presentamos, además de incluir todos estos casos, no hace uso de esta conocida relación entre los Métodos Lagrangeano Aumentado y de Punto Proximal.

Notación

$\mathbb{R}_+$ Conjunto de números reales no negativos.
$\mathbb{R}_{++}$ Conjunto de números reales positivos.

LA SECUENCIA DE MULTIPLICADORES GENERADA POR EL MÉTODO LAGRANGEANO AUMENTADO

Definición 2.1.- Se dice que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ no idénticamente $+\infty$ es convexa si para todo $(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in (0, 1)$

Tenemos:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leq \alpha\, f(x) + (1-\alpha)\, f(x')$$

Considerando esta desigualdad en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definición 2.2.- La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice cerrada, si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica.

$$\lim_{y\to x}\inf f(y) \geq f(x).$$

Consideremos el siguiente problema de optimización convexa:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar } f(x) & & (\hat{P}) \\ \quad \text{s.a. } g_i \leq 0, & & i = 1, \ldots, m \\ & x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

donde: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para $i = 1, \ldots, m$ son funciones convexas y cerradas.

Hipótesis 2.3.- Supongamos que el conjunto de soluciones óptimas del problema $(\hat{P})$ es no vacío y limitado.

Definición 2.4.- Dado $b>0$ (posiblemente $+\infty$), denotemos por $\mathcal{P}$ a la familia de funciones $P: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ o $P: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

Si $b = +\infty$ (respectivamente $0 < b < +\infty$)

1. $P(\,.\,,u)$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, estrictamente convexa en $[-b, +\infty)$ y constante en $(-\infty, -b]$.

2. $P(0, u) = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial t}(0,u) = u$

3. $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t,u) = 0$ y

4. $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t,u) = +\infty$

para cualquier $u > 0$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ (respectivamente para cualquier $u \geq 0$ y para todo $t \in \mathbb{R}$).

Por comodidad de aquí en adelante escribiremos $P'(\,.\,,u)$ en lugar de $\dfrac{\partial P}{\partial t}(\,.\,, u)$, para cualquier $u \geq 0$ ($u > 0$ respectivamente).

Observación 2.5.- Para cada $u \geq 0$ y $\lambda > 0$ fijos. Considere $P \in \mathcal{P}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa y cerrada. Entonces:

i) $\dfrac{\partial P}{\partial t}(t, u) = P_u'(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
O sea, $P_u = P(\,.\,,u)$ es creciente.

ii) $P\left(\dfrac{g(.)}{\lambda}, u\right) = P_u \circ \dfrac{g}{\lambda}$ es convexa y cerrada.
P_u'

Además, si $P \in$ P es tal que para cualquier u>0, $P(\,.,u)$ es estrictamente convexa (el caso en que $b=+\infty$).

Entonces: P_u (t) >0, para todo $t \in \mathbb{R}$. Osea, P_u será estrictamente creciente.

Prueba.-
Ver Observación 2.10 dada en [9].

El Método Lagrangeano Aumentado con Penalidades $P_i \in$ P

Asociada al problema la $(\hat{P})$ definimos L, la función Lagrangeano Aumentado (con penalidades $P_i \in$ P) dada por:

$x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$,

$$\lambda > 0 \rightarrow L(x, \mathrm{ì}, \lambda) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} P_i\left(\frac{g_i(x)}{\lambda}, \mu_i\right)$$

donde las m funciones $P_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ (o las m funciones $P_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$) llamadas penalidades pertenecerán a la familia P definida antes.

El Método Lagrangeano Aumentado para la optimización convexa intenta aproximar una solución del problema $(\hat{P})$ mediante la secuencia $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$, obtenida al resolver problemas de tipo:

$$\text{minimizar}_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \mu^k, \lambda_k) = \qquad (\hat{P}_k)$$
$$f(x) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} P_i\left(\frac{g_i(x)}{\lambda_k}, \mu_i^k\right)$$

donde la actualización de μ^k se realiza por la fórmula:

$$\mu_i^{k+1} = \frac{\partial P_i}{\partial y_i}(y_i^{k+1}, \mu_i^k) \quad \text{e} \quad y_i^{k+1} = \frac{g_i(x^{k+1})}{\lambda_k}$$

para todo i = 1 ,..., m y para todo $k \in \mathbb{N}$

Un profundo estudio de la formulación de este método (generalización que incluye casi todas las formulaciones existentes en la literatura) puede ser encontrado en [9].

Debido al uso posterior que haremos de las penalidades $P_i \in$ P, las detallaremos.

Las dos posibilidades respecto de b>0 (ver definición 2.4) darán lugar a dos familias la primera de las cuales puede a su vez ser subdividida en dos casos como veremos a continuación.

Penalidad Tipo I ($b=+\infty$)

P_1 es una penalidad Tipo I, si para todo $\mu \in \mathbb{R} > 0$ se satisface:

1. $P_1(\,.\,,u)$ es continuamente diferenciable y estrictamente convexa en $\mathbb{R}$,
2. a) $P_1(\,.\,,u)$ es ilimitada o
   b) $P_1(\,.\,,u)$ es limitada inferiormente
3. $P_1(0, u) = 0$, $P_1'(0, u) = u$
4. $\lim_{t\to-\infty} P_1'(t, u) = 0$ y
5. $\lim_{t\to+\infty} P_1'(t, u) = +\infty$.

Penalidad Tipo II (b > 0 finito)

P_2 es una penalidad Tipo II, si para todo $u \geq 0$ se satisface:

1. $P_2(.,u)$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, estrictamente convexa en $[-b, +\infty)$ y constante en $(-\infty, -b]$.
2. $P_2(0, u) = 0$, $P_2'(0, u) = u$
3. $\lim_{t\to-\infty} P_2'(t, u) = 0$ y
4. $\lim_{t\to+\infty} P_2'(t, u) = +\infty$.

La unicidad de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado

Consideremos el problema $(\hat{P})$ bajo la Hipótesis 2.3. Sea $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ una secuencia generada por el Método Lagrangeano Aumentado con penalidades $P_i \in \Pi$ siguiente:

$$\mu^0 \in \mathbb{R}^m_+ \ (\mu^0 \in \mathbb{R}^m_{++}) \tag{2.1}$$
$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x, \mu^k, \lambda_k)\} \tag{2.2}$$
$$\mu_i^{k+1} = \frac{\partial P_i}{\partial y_i}(y_i^{k+1}, \mu_i^k) \tag{2.3}$$

para todo i = 1 ,..., m y para todo $k \in \mathbb{N}$

donde $\{\lambda_k\}$ es una secuencia limitada de números reales positivos, L es la función Lagrangeano Aumentado con penalidades $P_i \in \mathbf{P}$ y y_i^{k+1} =

$$\frac{g_i(x^{k+1})}{\lambda_k} \quad \text{para } i = 1,\dots,m. \qquad (2.4)$$

Afirmación 2.6.- La secuencia $\{x^k\}$ está bien definida.

Prueba.-
Ver Afirmación 2.26 dada en [9].

A continuación presentamos otra forma de probar la unicidad de la secuencia de multiplicadores $\{\mu^k\}$generada por el Método Lagrangeano Aumentado con penalidades $P_i \in \mathbf{P}$.

Lema 2.6.- Consideremos el Método Lagrangeano Aumentado con penalidades $P_i \in \mathbf{P}$, dado por las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.4).

En cada interacción k y para cada $i = 1,\dots,m$,

μ_i^k es único y y_i^k es único, para penalidades P_i de Tipo I.

μ_i^k es único y y_i^k es único ó $\mu_i^k = 0$ y $y_i^k \le -b$ para penalidades P_i de Tipo II.

Prueba.-
Para las penalidades de Tipo II:

i) Si el problema dado en (2.2) tiene mínimo único obviamente y_i^{k+1} y μ_i^{k+1} serán únicos (basta sustituir el punto mínimo en (2.4) y (2.3) respectivamente).

ii) Caso $L_{\mu^k, \lambda_k}(.)$ no tenga minimizador único.

Sean x^1, x^2 dos soluciones diferentes del problema dado en (2.2). Denotemos por:

$$y_i^1 = \frac{g_i(x^1)}{\lambda_k},\ y_i^2 = \frac{g_i(x^2)}{\lambda_k} \quad \text{para cada } i = 1,\dots,m$$

y comparemos y_i^1 con y_i^2.

Para $y_i^1 < y_i^2$ con i arbitrario fijo.

Supongamos que $y_i^1 > -b$. Luego para $\alpha \in (0, 1)$ tenemos:

$$P_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2, \mu_i^k) <$$

$$\alpha P_i(y_i^1, \mu_i^k) + (1-\alpha) P_i(y_i^2, \mu_i^k)$$

para aquel i , pues en ese intervalo $P_i(., \mu_i^k)$ es estrictamente convexa. Dado que g_i es, convexa para todos los índices restantes en $\{1,\dots,m\}$, si hacemos la suma obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2, \mu_i^k) <$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} P_i(y_i^1, \mu_i^k) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} P_i(y_i^2, \mu_i^k)$$

multiplicando por λ_k y sumando $\alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2)$ en ambos miembros tenemos:

$$\alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2) +$$

$$\lambda_k \sum_{i=1}^{m} P_i(\alpha y_i^1 + (1-\alpha) y_i^2, \mu_i^k)$$

$$< \alpha L(x^1, \mu^k, \lambda_k) + (1-\alpha) L(x^2, \mu^k, \lambda_k)$$

recordando ahora la convexidad de f , de cada g_i usando la Observación 2.5, concluimos :

$$L(x, \mu^k, \lambda_k) <$$

$$\alpha L(x^1, \mu^k, \lambda_k) + (1-\alpha) L(x^2, \mu^k, \lambda_k)$$

$$< L(x^1, \mu^k, \lambda_k)$$

donde $x = \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2$, lo que es una contradicción dado que $L(x^1, \mu^k, \lambda_k)$ es valor óptimo.

Por tanto, $y_i^1 \le -b$, (o sea $y_i^{k+1} \le$ b) de lo que se deduce también que $\mu_i^{k+1} = 0$ pues $P_i'(t, u) = 0$ para $t \le -b$ y $u \ge 0$ fijo.
Si $y_i^1 = y_i^2$ para cada $i = 1,\dots,m$, y_i^{k+1} es único. Luego también μ_i^{k+1} será único.

Para las penalidades de Tipo I:

i) Si el problema dado en (2.2) tiene mínimo único obviamente y_i^{k+1} y μ_i^{k+1} serán únicos (basta sustituir el punto mínimo en (2.4) y (2.3) respectivamente).

ii) Caso $L_{\mu^k, \lambda_k}(.)$ no tenga minimizador único.

Sean x^1, x^2 dos soluciones diferentes de problema dado en (2.2).

Denotemos por:

$$y_i^1 = \frac{g_i(x^1)}{\lambda_k}, \quad y_i^2 = \frac{g_i(x^2)}{\lambda_k} \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, m$$

y supongamos que para i arbitrario fijo, $y_i^1 \neq y_i^2$. Luego, para $\alpha \in (0, 1)$ tenemos:

$$P_i(\alpha\, y_i^1 + (1-\alpha)\, y_i^2, \mu_i^k) < \alpha\, P_i(y_i^1, \mu_i^k) + (1-\alpha)\, P_i(y_i^2, \mu_i^k)$$

para aquel i , pues en ese intervalo $P_i(.,\mu_i^k)$ es estrictamente convexa. Haciendo la suma para obtener L y usando argumentos similares al caso anterior, concluimos que:

$$\begin{aligned} L(x, \mu^k, \lambda_k) &< \\ &\alpha L(x^1, \mu^k, \lambda_k) + (1-\alpha) L(x^2, \mu^k, \lambda_k) \\ &< L(x^1, \mu^k, \lambda_k) \end{aligned}$$

donde $x = \alpha\, x^1 + (1-\alpha)\, x^2$, lo que es una contradicción dado que $L(x^1, \mu^k, \lambda_k)$ es valor óptimo.

Por tanto, $y_i^1 = y_i^2$ para cada $i = 1, \ldots, m$, de lo que se deduce que y_i^{k+1} es único. Luego también μ_i^{k+1} será único.

Si $y_i^1 = y_i^2$ para cada $i = 1, \ldots, m$, y_i^{k+1} es único. Luego también μ_i^{k+1} será único.

REFERENCIAS

1. **Bertsekas, D. P.,** "Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Method", Academic Press, New York, 1982.
2. **Gonzaga, C. y Castillo, R.**, "Métodos de Lagrangeano Aumentado usando Penalidades Generalizadas para Programação não linear" Tesis, COPPE, UFRJ, 1998.
3. **Hiriart - Urruty J.- Baptiste y Lemaréchal, C.**, "Convex Analysis and Minimization Algorithms I, 1 ed." New York, Springer Verlag, 1993.
4. **Hiriart - Urruty J.- Baptiste y Lemaréchal, C.**, "Convex Analysis and Minimization Algorithms II, 1 ed." New York, Springer Verlag, 1993.
5. **Hestenes, M.**, "Multiplier and Gradient Methods", Jota, vol 4, pp.303-320, 1969.
6. **Iusem, A.** , "Métodos de Ponto Proximal em Otimizacao, 20°" Coloquio Brasileiro de matemática , IMPA, R., J., Brasil, 1995.
7. **Martinet, B.** , "Regularisation D'inequations variationnelle par approximations successives", Revue Francaise de Informatiqué et Recherche Opérationelle 2, pp. 154-159, 1970.
8. **Powell, M .**, "A method for nonlinear constraints in minimizations problems", Ed., Academic Press, N.Y., pp. 283-298, 1969.
9. **Rezza , Y.**, "Una prueba general de la buena definición del Método Lagrangeano Aumentado", 2003.
10. **Rockafellar R. T.** , "Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming', Mathematics of Operations Research, vol.1, pp. 97-116, 1976.