APLICACIONES DEL LEMA DE KY FAN

APPLICATIONS OF THE KY FAN CONJECTURE

Yboon García Ramos, Wilfredo Sosa Sandoval

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es presentar un resultado de Ky Fan, llamado Lema de Ky Fan, como una herramienta eficaz para obtener resultados de existencia de solución en problemas de desigualdad variacional, problemas de equilibrio y teoría de juegos.

Palabras claves: Lema de Ky Fan, desigualdad variacional, problemas de aquilibrio, teoría de juegos.

ABSTRACT

The subject of this work is to introduce the famous Ky Fan's Lemma as an efficient tool in order to obtain existence results, for instance, variational inequality problems, equilibrium problems and game theory.

Key words: Ky Fan´s Lemma, variational inequality, equilibrium problems, game theory.

INTRODUCCIÓN

En 1961, Ky Fan [1] demostró la existencia de un punto común para una familia de conjuntos $C(x)\}_{x\in D}$, donde:

1. D, es un subconjunto de un espacio vectorial real topológico (e.v.t.) de Hausdorff X.

2. Para cada $x \in D$, $C(x)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X.

3. Para cada familia finita $\{x_1, \ldots x_n\} \subset D$ se tiene que $\mathrm{conv}\{ x_1, x_2,.. x_n \} \subset \cup_{i=1}^{n} C(x_i)$.

4. Existe $x \in D$, tal que $C(x)$ es compacto.

Este resultado de Ky Fan, conocido en la literatura como el **Lema de Ky Fan**, fue publicado en [1], como una generalización del clásico teorema de Knaster-Kuratowsky- Mazurkiewicz, históricamente conocido como el teorema *KKM*.

Este último establece que si S es por un simplex, S_v la cara en cualquier subconjunto v de vértices, F_i un conjunto cerrado asociado con un vértice i, y $F_v = \cup_{i\in v} F_i$ y $S_v \subseteq F_v$ para todo v, entonces $\cap_i F_i \neq \varnothing$ [16].

PRELIMINARES

Sea X un e.v.t. de Hausdorff, $K \subseteq X$ convexo. Una función $f : K \to R \vee \{+00\}$se dice **convexa** en K si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, y\,) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y),$$

para todo $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$. Una generalización de este concepto es el de función cuasiconvexa: $f: X \to \Re \cup \{+\infty\}$ es **cuasiconvexa** en K si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{\, f(x), f(y)\,\},$$

para todo $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$ y diremos que f es **estrictamente cuasiconvexa** en K si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\,\{\, f(x), f(y)\,\},$$

para todo $x, y \in K$, $x \neq \varnothing$ y $\lambda \in [0,1]$.

Sean X e Y dos conjuntos. Una **multifunción** F de X en Y, denotada por $F : X \xrightarrow{\rightarrow} Y$, es una relación que a cada $x \in X$ le asocia de manera única un subconjunto $F(x) \subset Y$. Denotaremos por dom (F): =

Facultad de Ciencias – Instituto de Matemática y Ciencias Afines
E-mails: yboongarcia@uni.edu.pe, sosa@uni.edu.pe

$\{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$.

Sea X es un e.v.t. de Hausdorff y $D \subset X$ no vacío, G: $X \xrightarrow{\rightarrow} X$ es llamada **multifunción KKM** en D si conv $\{x_1,x_2,\ldots x_n\} \subset \cup_{i=1}^{n} G(x_i)$ para cualquier subconjunto finito $\{x_1, x_2,\ldots x_n\} \subset D$.

Sean X y Y dos e.v.t. Una multifunción $F : X \xrightarrow{\rightarrow} Y$ es llamada **semicontinua superiormente** (s.c.s.) en $x \in \mathrm{Dom}(F)$ si, para toda vecindad U de F(x), existe una vecindad W de x, tal que $\forall x' \in W \cap \mathrm{dom}(F)$: $F(x') \subset U$.

Decimos que F es **s.c.s.**, si lo es en todo punto de dom(X). Sea K un subconjunto convexo no vacío de X. Diremos que la multifunción F: $K \xrightarrow{\rightarrow} Y$ es **hemicontinua superiormente** en K, si para cualesquiera x, y $\in$ K, la restricción $F|_{[x,y]}:[x,y] \xrightarrow{\rightarrow} Y$ es semicontinua superiormente.

Diremos que $F:X \xrightarrow{\rightarrow} X^*$ es **débilmente hemicontinua superiormente** en K si consideramos en X^* (el dual topológico de X) la topología débil estrella.

Sea X un espacio de Banach reflexivo, K un subconjunto no vacío convexo y cerrado, diremos que $T:K \xrightarrow{\rightarrow} X^{**}$ es:

1. **monótono**, si

$$\langle x^* - y^*, x-y \rangle \geq 0, \quad para\ todo\ x^* \in T(x),\ y^* \in T(y).$$

2. **cíclicamente monótono**si para cualquier ciclo $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq K$ $(x_{n+1} = x_1)$ y cualquier $x^*_i \in T(x_i)$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x^*_i , x_{i+1}-x_i \rangle \leq 0.$$

3. **cuasimonótono,** si para todo x, y $\in$ X y $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$ se verifica que

$$x^*,y-x \rangle > 0 \ implica\ \langle y^*,y-x \rangle \geq 0.$$

4. **propiamente cuasimonótono,** si para todo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ y todo $z \in \mathrm{conv}\{x_1,\ldots,x_n\}$, existe $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\langle x^*, y-x_i \rangle \leq 0 \ para\ todo\ x^* \in T(x_i).$$

5. **pseudomonótona,** si para todo x, y $\in$ X y $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$ se verifica que

$$\langle x^*,y-x \rangle \geq 0 \ implica\ \langle y^*,y-x \rangle \geq 0;$$

lo cual es equivalente a que si existe $y^* \in T(y)$ tal que

$$\langle y^*,y-x\rangle < 0,\ entonces \langle x^*,y-x\rangle <0,\ para\ todo\ x^* \in T(x).$$

Observación 1.- Un operador cuasimonótono, pseudomonótono es propiamente cuasimonótono.

En efecto: Sea $T:K \xrightarrow{\rightarrow} X^*$ pseudomonótono y supongamos que no sea propiamente cuasimonótono; entonces existe $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq K$, existe $z \in \mathrm{conv}\{x_1,\ldots,x_n\}$, $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (con $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$) y

$$\langle x_i^*, z-x_i \rangle > 0$$

para algún $x_i^* \in T(x_i)$. Pero esto implica, para cada i = 1,2,...,n, que

$$\langle z^*, z-x_i \rangle > 0,$$

para todo $z^* \in T(z)$, de donde

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle z^*, z-x_i \rangle > 0,$$

lo cual constituye una contradicción. Por consiguiente, T es propiamente cuasimonótono.

Una de las primeras extensiones del Lema de Ky Fan es debido a el mismo y es dada en el siguiente teorema, el cual se puede hallar formulado sin demostración en [4] nosotros damos aquí una prueba.

Teorema 2.1.- *Sea D un subconjunto de un e.v.t. de Hausdorff X y G: $X \xrightarrow{\rightarrow} X$ una multifunción tal que:*

1. G(x) es cerrado para cada $x \in D$.
2. G: $X \xrightarrow{\rightarrow} X$ es KKM en D.
3. Existe un subconjunto $X_0 \subseteq D$ tal que $\cap_{x \in X_0} G(x)$ es compacto y X_0 está contenido en un subconjunto compacto y convexo de X.

Entonces

$$\bigcap_{x \in D} G(x) \neq \phi$$

$\cap$

Prueba.-Como $x \in X_0$ es compacto, será suficiente probar que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset D$ se satisfaga

$$\bigcap_{x \in X_0} G(x) \cap G(x_1) \cap \ldots \cap G(x_0) \neq \phi$$

Para esto primero observemos que, desde que X_0 está contenido en un subconjunto compacto y convexo de X, entonces $\overline{convX_o}$ es compacto. Ahora sea $\{x_1, .., x_n\} \subseteq D$ arbitrario.

Sea $K = \overline{conv(X_0 \cup \{x_{1,\ldots,}x_n\})}$ entonces como $K \subseteq \overline{convX_o} \cup$ conv $\overline{\{x_1, \ldots, x_n\}}$ tenemos que K es compacto; y además obviamente $F(x) \cap K \neq \varnothing$ para todo $x \in D \cap K \neq \varnothing$.

Definamos $F : K \cap D \xrightarrow{\rightarrow} K$ mediante.

$$F(x) = G(x) \cap K;$$

entonces se verifican las hipótesis del lema de Ky Fan:

1. $F(x) \neq \varnothing$; como ya vimos anteriormente.
2. $F(x)$ es compacto para todo $x \in K \cap D$, pues $G(x)$ es cerrado y K es compacto.
3. F es KKM, pues dado cualquier subconjunto finito $\{ y_1, \ldots, y_n \} \subset K \cap D$ tenemos que conv $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \cup_{i=1}^{n} G(y_i)$ y $conv\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq K$; luego

$$conv\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G(y_i) \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} F(y_i).$$

Luego, de (i), (ii) y (iii), $\cap_{x \in K \cap D} F(x) \neq \varnothing$, y como

$$\bigcap_{x \in K \cap D} F(y) \subseteq \bigcap_{x \in X_0} F(x) \cap F(x_1) \cap \ldots \cap F(x_n),$$

y el teorema está probado.

En [5] aparece la siguiente modificación del Lema de Ky Fan.

Teorema 2.2.- Sea X un e.v.t. de Hausdorff, $D \subseteq X$ no vacío y $G: X \xrightarrow{\rightarrow} X$ una multifunción tal que:

1. $G(x)$ es cerrado para cada $x \in D$.
2. $G: X \xrightarrow{\rightarrow} X$ es KKM en D.
3. La clausura de la cápsula convexa de D es compacto.

$$\bigcap_{x \in D} G(x) \neq \varnothing.$$

Entonces:

Prueba.- Definamos la multifunción $F{:}D \xrightarrow{\rightarrow} X$ mediante

$$F(x) = cl(conD) \cap G(x)$$

Se satisface:

1. $F(x)$ es compacto y no vacío para cada $x \in D$.
2. F es KKM. En efecto, dado cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq D$, se tiene que $conv\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \cup_{i=1}^{n} G(x_i)$ y además $conv\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq$ **cl** (convD); luego

$$conv\{x_i, \ldots, x_0\} \subseteq \bigcup_{i=i}^{n} G(x_i) \cap cl(convD)$$

De donde, por el lema de Ky Fan,

$$\bigcap_{x \in D} F(x) \neq \phi$$

y, por lo tanto

$$\bigcap_{x \in D} G(x) \neq \phi.$$

Como consecuencia de esta modificación del Lema de Ky Fan tenemos:

Corolario 2.3.- Si X es un espacio de Banach reflexivo y D un subconjunto acotado, entonces

$$\bigcap_{x \in D} G(x) \neq \phi.$$

Otra modificación del Lema de Ky Fan aparece en [4].

Teorema 2.4.- Sea X un t.v.s. de Hausdorff , Y $\subseteq$ X convexo, D $\subseteq$ Y no vacío y F: X $\xrightarrow{\rightarrow}$ X una multifunción tal que:

1. F transfiere valores cerrados en D;
2. La multifunción $\bar{F}$: X $\xrightarrow{\rightarrow}$ X es KKM en D;
3. Existe un subconjunto $X_0 \subseteq D$ tal que $\bigcap_{x \in X_0} \overline{F(x)}$ es compacto y X_0 está contenido en un subconjunto compacto y convexo de X.

Entonces

$$\bigcap_{x \in D} F(x) \neq \phi$$

Prueba.- Como se observa de la hipótesis, la multifunción F satisface las hipótesis del teorema 2.1, luego sólo será necesario mostrar que

$$\bigcap_{x \in D} F(x) \supseteq \bigcap_{x \in D} \overline{F(x)},$$

pues la otra inclusión se satisface trivialmente.

Ahora, por reducción al absurdo, supongamos que existe $x \in \bigcap_{x \in D}$ *cl(F(x))* y $x \notin \bigcap_{x \in D} F(x)$, de la condición 1, entonces $x \notin F(x_0)$ para algún $x_0' \in D$ tal que $x \notin$ **cl**$(F(x_0'))$, lo cual es absurdo, de lo que concluimos que $\bigcap_{x \in D} F(x) = \bigcap_{x \in D}$ **cl** (F(x)).

y, por lo tanto,

$$\bigcap_{x \in D} F(x) \neq \phi$$

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones de este teorema son más débiles que la condición del teorema 2.1.

Ejemplo 2.1.- Sea Y = [0,1], X = Y $\cap$ Q. Claramente X no es convexo ni compacto; tomemos F:X $\xrightarrow{\rightarrow}$ Y como

$$F(x) = [x,1] \cap Q.$$

Entonces F(x) no es cerrado excepto para x = 1, además F no es KKM, de donde no podemos utilizar el teorema 2.1, sin embargo, F satisface las hipótesis del teorema anterior.

1. F transfiere valores cerrados: Sean $x \in X$, $y \in Y$ con $y \notin F(x)$; tomando $x' = 1$, tenemos que $y \notin$ **cl** (F(x')).
2. La multifunción $\bar{F}$:X $\xrightarrow{\rightarrow}$ Y es KKM pues como

   $$\bar{F}(x) = [x,1]\ si\ \{x,\dots,x\} \subset X, y,\ para$$

   $$z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\ con\ \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

   tomando $x_j = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$, tenemos que $x_j \leq x_i$, luego $\alpha_i x_j \leq \alpha_i x_i$ y, por lo tanto

   $x_j \leq z$, *i.e.* $z \in$ ***cl****(F(x_j))*

   Por lo tanto, $z \in \cup_{i=1}^{n}$ ***cl****(F(x_j))*
3. Se satisface desde que Y es compacto.

APLICACIONES

Desigualdades Variacionales Escalares

Sea X un espacio de Banach real y K un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de X. Dada una multifunción T: X $\xrightarrow{\rightarrow}$ X* tal que $\varnothing \neq$ dom(T) $\subset$ K, el **Problema de Desigualdad Variacional** (denotado **VIP**) **escalar** consiste en:

VIP: Hallar $x_0 \in K$ tal que

Para todo $x \in K$, existe $x^* \in T(x_0)$: $\langle x^*, x-x_0 \rangle \geq 0.$

Este problema está estrechamente relacionado con el problema de hallar $x_0 \in$ K tal que

para todo $x \in K$, $x^* \in T(x)$: $\langle x^*, x-x_0 \rangle \geq 0;$

el cual es llamado **Problema Dual de Desigualdad Variacional** (DVIP) y esta relación se da en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.- Sea X un espacio de Banach y $K \subseteq X$ un subconjunto no vacío, convexo y cerrado. Dada $T: K \xrightarrow{\to} X^*$ con valores no vacíos y hemicontinua superiormente, entonces toda solución de DVIP es solución de VIP.

Prueba.- Sea x_0 una solución de DVIP, i.e. que para todo $x \in K$, $x^* \in T(x)$ se tiene $\langle x^*, x-x_0 \rangle \geq 0$. Mostraremos que para todo $x \in K$, existe $x^* \in T(x_0)$ tal que $\langle x^*, x-x_0 \rangle \geq 0$. Supongamos que no sea cierto, entonces existe $y \in K$ tal que, para todo $x^* \in T(x_0)$: $\langle x^*, y-x_0 \rangle < 0$.

Sea

$$V = \{ z^* \in X^* \,/\, \langle z^*, y-x_0 \rangle < 0 \} = \varphi^{-1}_{y-x0}(-\infty, 0)$$

donde φ_x es la funcional lineal definida por $\varphi_x(z^*) = \langle z^*, x \rangle$, luego V es una vecindad débil de $T(x_0)$. Como T es hemicontinua superiormente,

existe $\eta > 0$ *tal que,*
para todo z *con* $\| z-x_0 \| < \eta$, *se tiene* $T(z) \subseteq V$;

para $\lambda \in (0,1)$ suficientemente pequeño tal que $z = \lambda x_0 + (1-\lambda)$ y satisface $\|z-x_0\| < \eta$, tenemos $T(z) \subseteq V$, i.e.

$$z^* \in T(z) \quad \textit{implica} \quad \langle z^*, y-x_0 \rangle < 0; \tag{1}$$

y, como

$$\begin{aligned} \langle z^*, z-x_0 \rangle &= \langle z^*, \lambda x_0 + (1-\lambda) y - x_0 \rangle \\ &= \langle z^*, (1-\lambda)(y-x_0) \rangle \\ &= (1-\lambda) \langle z^*, y-x_0 \rangle < 0, \end{aligned}$$

de (1), i.e. $\langle z^*, z-x_0 \rangle < 0$, lo cual constituye una contradicción. Por lo tanto, x_0 es solución de VIP.

Uno de los resultados más generales acerca de la existencia de soluciones de DVIP fue dado en [6] para operadores propiamente cuasimonótonos; el resultado se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.- *Sea* $T:K \xrightarrow{\to} X^*$ un operador propiamente cuasimonótono con valores no vacíos. Si alguna de las siguientes condiciones se verifican:

1. K es débilmente compacto;
2. existe un subconjunto débilmente compacto W de K y $x_0 \in W$, tal que

   para todo $x \in K \setminus W$,
   existe $x_0^* \in T(x_0)$ *tal que* $\langle x_0^*, x_0-x \rangle < 0$;

entonces, el DVIP tiene solución. En consecuencia, si T es hemicontinua superiormente, entonces el VIP tiene solución.

Prueba.- Definamos $G: K \xrightarrow{\to} K$ por la regla $G(x) = \{ y \in K \,/\, \langle x^*, x-y \rangle \geq 0, \text{ para todo } x^* \in T(x) \}$.

Probaremos que $\displaystyle\bigcap_{x \in K} G(x) \neq \phi$

1. $G(x)$ es no vacío, cerrado y convexo, para todo $x \in K$.

En efecto, $x \in G(x)$, para todo $x \in K$. Sea ahora $\{y_k\}_{k \in N} \subseteq G(x)$ tal que $y_k \to y$, entonces

$$\langle x^*, x-y_k \rangle \geq 0,$$

para $x^* \in T(x)$, implica que

$$\langle x^*, x-y \rangle \geq 0,$$

pues $\langle x^*, \cdot \rangle$ es continua. Luego $y \in G(x)$.

2. G es un mapeo KKM: Dado $\{ x_1, ..., x_n \} \subseteq K$ subconjunto finito arbitrario y $z \in \text{conv}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, por hipótesis T es propiamente cuasimonótono, luego existe $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\langle x^*, y-x_i \rangle \leq 0, \text{ para todo } x^* \in T(x_i),$$

o, lo que es lo mismo

$$\langle x^*, x_i-y \rangle \geq 0, \text{ para todo } x^* \in T(x_i),$$

de donde $z \in G(x_i)$; luego G es KKM.

Ahora, si (i) se satisface, i.e. si K es débilmente compacto, tendríamos que G(x) es débilmente compacto y no vacío para todo $x \in K$; desde que G es KKM, por el lema de Ky Fan tenemos

$$\bigcap_{x \in K} G(x) \neq \varnothing,$$

i.e. existe $x_0 \in K$ tal que

$$\textit{para todo } x \in K,\ x^* \in T(x),\quad \langle x^*, x - x_0 \rangle \geq 0.$$

Si (ii) se satisface, veamos que $G(x_0)$ es débilmente compacto, para esto mostramos que $G(x_0) \subseteq W$; sea $y \in K \setminus W$, entonces existe $x_0^* \in T(x_0)$ tal que

$$\langle x_0^*, x_0 - x \rangle < 0,$$

de donde $y \in G(x_0)$. Luego, nuevamente tenemos que las hipótesis del teorema 2.1 se satisfacen. Por lo tanto, DVIP tiene solución.

Por lo visto en el capítulo 3, el teorema anterior se verifica en particular para multifunciones monótonas, pseudomónotonas.

El siguiente resultado fue tratado en [3], aquí lo presentamos como un corolario de teorema anterior.

Corolario 3.3.- [Browder] Sea X un espacio de Banach, $K \subseteq X$ convexo cerrado con $0 \in K$, $T: K \to X^*$ un mapeo tal que

i) T es monótono;

ii) T es hemicontinuo;

iii) $\langle T(x), x \rangle / \|x\| \to +\infty$ cuando $\|x\| \to +\infty$;

entonces, para cada $y^* \in X^*$, existe $\bar{x} \in K$ tal que

$$\langle T(\bar{x}) - y^*, x - \bar{x} \rangle \geq 0$$

Prueba.- Sea $y^* \in X^*$ fijo. Definiendo $T' : K \to X^*$, $T'(x) = T(x) - y^*$, probaremos que existe $\bar{x} \in K$ tal que

$$\langle T^1(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0 \ \textit{para todo } x \in K$$

lo que demuestra el teorema.

Consideremos $X_0 = \{ x \ / \ \langle T(x), x \rangle \leq 0 \}$, entonces X_0 es acotado por (ii); además si $\langle T(0), x \rangle > 0$ para algún x,desde (i) tendríamos que

$$\langle T(x), x \rangle > 0,$$

luego, $x \notin X_0$.

De esta manera, se satisfacen las hipótesis del teorema anterior y de la última observación; por lo tanto, para cada $y^* \in X^*$, existe $\bar{x} \in K$ tal que

$$\langle T(\bar{x}) - y^*, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \ \textit{para todo}\, x \in K$$

En particular, si $K = X$ tenemos que $T(\bar{x}) = y^*$, es decir, T es sobreyectiva.

Observación 1.- La proposición 3.1 se verifica si T es débilmente semicontinua inferiormente en x_0, es decir, dado x_0 solución de DVIP, si T es semicontinua inferiormente en x_0, entonces x_0 es solución de VIP.

Prueba.- Procedemos por reducción al absurdo: Supongamos que existe $y \in K$ tal que

$$\textit{para todo } x^* \in T(x_0):\quad \langle x^*, y - x_0 \rangle < 0.$$

Sea $z_n = \lambda_n y + (1-\lambda_n)x_0$ con $\lambda_n = 1/n$, una sucesión tal que $z_n \to x_0$. Entonces dado $x^* \in T(x_0)$, existe una sucesión $z_n^* \in F(z_n)$ tal que z_n converge en la topología débil estrella a x^* y como x_0 es solución de DVIP, tenemos

$$\langle z_n^*, \lambda_n y + (1-\lambda_n) x_0 - x_0 \rangle = \langle z_n^*, z_n - x_0 \rangle \geq 0,$$

de donde $\lambda_n \langle z_n^*, y - x_0 \rangle \geq 0$, luego

$$\langle z_n^*, y - x_0 \rangle \geq 0,$$

y, de aquí

$$\langle x^*, y - x_0 \rangle \geq 0,$$

una contradicción.

Por tanto, x_0 es solución de VIP.

EL PROBLEMA DE EQUILIBRIO

Sea *X* un espacio vectorial topológico Hausdorff, K

$\subseteq X$ convexo, cerrado no vacío y ϕ:K ×K → $\Re$ una función tal que $\phi(x,x) \geq 0$ para todo x ∈ K. El problema de equilibrio (denotado EP) consiste en:

$$EP: Hallar\ \bar{x} \in K\ tal\ que: \phi\left(\overline{x,y}\right) \geq 0,\ para\ todo\ y \in K$$

como muestra [5], este problema contempla muchos otros, por ejemplo:

1. Problema de minimización: Dada f:K → $\Re$, el problema de minimización (MP) consiste en

$$MP:\ Hallar\ x_o\ Ktal\ f(x_o) \leq f(x)\ para\ todo\ x \in K$$

Definiendo ϕ:K ×K → $\Re$ por $\phi(x,y) = f(y)-f(x)$, tenemos que $\bar{x}$ es solución de MP si y sólo si $\bar{x}$ es solución de EP.

En efecto, si $\bar{x}$ ∈ K es solución de EP, i.e. $\phi([\bar{x}, y) \geq 0$ para todo y ∈ K, por la definición de ϕ, $f(y) - f(\bar{x})) \geq 0$ y de aquí:

$$f(y) \geq f(\bar{x}),\ para\ todo\ y \in K;$$

esto es $\bar{x}$ soluciona MP. Recíprocamente, si x_0 ∈ K es tal que $f(x_0) \leq f(y)$, para todo y ∈ K entonces

$$\phi(x_0 y) = f(y) - f(x_0) \geq 0,\ para\ todo\ y \in K.$$

2. Problema de desigualdad variacional: Sea X un espacio de Banach real. Dada la ultifunción T: K $\xrightarrow{\to}$ X^*; ya habíamos visto que el problema de desigualdad variacional, VIP consiste en:

$$VIP:\quad Hallar\ \bar{x} \in K\ tal\ que\ para\ todo\ y \in K, existe\ x* = x*(y) \in \mathrm{T}(\bar{x}): \langle x*, y - x \rangle \geq O$$

Entonces, si definimos ϕ:K ×K → $\Re$ por:

$$\phi(x,y) = \max_{x* \in \mathrm{T}(x)} \langle x*, y - x \rangle$$

tenemos que $\bar{x}$ es solución de VIP si y sólo si $\bar{x}$ es solución de EP.

En efecto: Si existe $\bar{x}$ ∈ K tal que $\phi(x,y) \geq 0$, para todo y ∈ K, de la definición de ϕ, para y ∈ K debe existir $x^* = x^*(y) \in T(\bar{x})$, tal que $\langle x^*, y\text{-}x] \rangle \geq 0$, i.e. x es solución de VIP; igualmente si x soluciona VIP, entonces para cada y ∈ K,

$$\max_{x^* \in T(\bar{x})} \langle x^*, y - \bar{x} \rangle = \phi(\bar{x}, y) \geq 0.$$

El primer resultado de existencia de solución de este problema es el siguiente teorema debido a Ky Fan:

Teorema 4.1.- Sea X un t.v.s de Hausdorff, K ⊆ X subconjunto convexo, compacto no vacío, f:K ×K → $\Re$ que satisface

1. f(x,x) = 0, para todo x ∈ K;

2. Para cada y ∈ K, f(·,y):K → $\Re$ es s.c.s.;

3. Para cada x ∈ K, f(x,·):K → $\Re$ es cuasiconvexa;

entonces, existe un punto $\bar{x}$ ∈ K tal que

$$\bar{F}(x,y) \geq 0,\ para\ todo\ y \in K.$$

Prueba.- Consideremos la multifunción F: K $\xrightarrow{\to}$ K dada por

$$F(y) = \{ x \in K / f(x,y) \geq 0 \}$$

entonces, tenemos:

1. F(y) ≠ ∅ para todo y ∈ K, pues y ∈ F(y).
2. F(y) es cerrado para todo y ∈ K. En efecto, dado y ∈ K, consideremos g:K → $\Re$ definida por g(x) = -f(x,y); g es s.c.i. y, por tanto, el conjunto

$$S_0(g) = \{x \in K / g(x) \leq 0\} = F \leq (y)$$

es cerrado.

3. No es difícil ver que F es KKM desde que f(x,·) es cuasiconvexa.

4. Luego, como además, K es compacto, F(y) es compacto, para todo y $\in$ K; luego por el lema de Ky Fan tenemos que existe $\bar{x} \in \cap_{y \in K}$ F(y); i.e. existe x $\in$ K tal que $f(\bar{x},y) \geq 0$ para todo y $\in$ K.

Si, en el teorema anterior no consideramos que K sea compacto y agregamos la siguiente condición de coercitividad:

- Existe C $\subseteq$ K subconjunto compacto, tal que para todo y $\in$ K \C, existe x $\in$ C con f(x,y) < 0;

entonces, el teorema se sigue verificando.

En efecto, dado que (i), (ii) y (iii) del teorema anterior se siguen satisfaciendo, sólo probaremos que $\cap_{y \in C}$ F(y) es compacto y esto se sigue del hecho que si y $\in$ C, F(y) $\subseteq$ C; luego por el teorema 2.1 tenemos que existe $\bar{x} \in$ K tal que $f(\bar{x},y) \geq 0$, para todo y $\in$ K.

A continuación damos una generalización de este teorema aparecida en [4], para esto daremos antes una pequeña introducción.

Sabemos que dada una función f: K $\to \Re$ cuasiconvexa, para cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de K y z $\in$ conv$\{x_1, \ldots x_n\}$ se tiene:

$$f(z) \leq \max_{1 \leq i \leq n} f(x_i)$$

lo cual es equivalente a

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)-f(z)\}.$$

Introduciendo una nueva función ϕ:K $\times$K $\to \Re$ definida por $\phi(x,y) = f(y)-f(x)$, tenemos que ϕ satisface

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z,x_i)\}.$$

Esto nos motiva a introducir la siguiente definición dada en [4]:

Definición 4.1.- [**Cuasiconvexidad diagonal**] Sea X un espacio vectorial topológico de Hausdorff, K $\subseteq$ X convexo, diremos que ϕ:K $\times$K $\to \Re$ es cuasiconvexa diagonal (abreviado q.c.d.) si dado cualquier subconjunto finito $\{x_1, \ldots x_n\} \subseteq$ K y z $\in$ conv$\{x_1, \ldots x_n\}$, se satisface

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z,x_i)\}$$

Proposición 4.2.- Sea X un espacio vectorial topológico de Hausdorff, K $\subseteq$ X convexo, son equivalentes:

1. ϕ:K $\times$K $\to \Re$ es cuasiconvexa diagonal;
2. La multifunción F:K $\overset{\to}{\longrightarrow}$ K definida por F(y) = $\{x \in K / \phi(x,y) \geq 0\}$ es KKM.

Prueba.- Sea $\{x_1, \ldots\ldots x_n\} \subseteq$ K arbitrario y z $\in$ conv $\{x_1, \ldots x_n\}$.

Si ϕ es q.c.d., tenemos que

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z,x_i)\}$$

luego para algún $i_0 \in \{x_1, \ldots x_n\}$ se debe satisfacer $\phi(z,x_{i0}) \geq 0$ de donde z $\in F(x_0)$, entonces F es KKM.

De otro lado si F es KKM, z $\in F(x_i)$ para algún $i_0 \in \{x_1, \ldots x_n\}$, de donde se tiene $0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z,x_i)\}$ luego ϕ es cuasiconvexa diagonal.

Definición 4.2.- Diremos que ϕ: K $\times$K $\to \Re$ es diagonal cuasicóncava, si $\bar{\phi}$:K $\times$K $\to \Re$ dada por

$$\bar{\phi}(x,y) = -\phi(y,x)$$

es diagonal cuasiconvexa.

Veamos que una función ϕ diagonal cuasicóncava satisface que, dados $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq$ K y z $\in$ conv $\{x_1,\ldots,x_n\}$,

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{\phi(x_i, z)\} \leq = 0,$$

pues,

$$\min_{1\leq i\leq n} \{\phi(x_i, z)\} =$$

$$\min_{1\leq i\leq n} \{-\bar{\phi}(z, x_i)\} = \max_{1\leq i\leq n} \{-\bar{\phi}(z, x_i)\} \leq 0.$$

El siguiente ejemplo sencillo muestra que existen funciones cuasiconvexas que no son del tipo anterior.

Ejemplo 4.1.- Sea $X = \Re$ y consideremos $\phi: \Re\times\Re\to\Re$ como la multiplicación usual en $\Re$ $\phi(x,y) = xy$, entonces ϕ es diagonal cuasiconvexa.

Sea $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \Re$ y $z \in conv\{x_1,..., x_n\}: z = \sum^n_{i=i} \alpha_i x_i$ (con $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$),

entonces, tenemos $\phi(z,x_i) = zx_i$; si tuviéramos que $\phi(z,x_i) < 0$ para todo $i \in \{x_1, \ldots x_n\}$, entonces

$$z\alpha_i x_i < 0, \quad para\ todo \quad 1 \leq i \leq n$$

implica

$$z^2 = \sum_{i=1}^{n} z\,\alpha_i x_i < 0,$$

una contradicción. Por lo tanto, ϕ es diagonal cuasiconvexa.

Ejemplo 4.2.- Sea $A \subseteq \Re^{n\times n}$ una matriz semidefinida positiva, entonces $\phi: \Re^n\times\Re^n\to\Re$, definida por $\phi(x,y) = x^t A$ y es diagonal cuasiconvexa.

Sea $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \Re^n$ arbitrario y $z \in conv\{x_1, ..., x_n\}$, i.e. $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ con $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Si $\phi(z,x_i) = z^tAx_i < 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $\alpha_i z^tAx_i < 0$, y luego

$$z^tAz = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, z^tAx_i < 0,$$

lo cual es absurdo pues A es semidefinida positiva. Por tanto

$$\max_{1\leq i\leq n} \{\phi(x_i,z)\} \geq 0.$$

Como se puede notar en los ejemplos previos, $\phi(x,\cdot)$ era cuasiconvexa para todo $x \in K$, además $\phi(x,x) \geq 0$. Esto se cumple en general, es decir dada $\phi: K\times K \to\Re$ tal que

1. para todo $x \in K$, $\phi(x,\cdot)$ es cuasiconvexa;

2. para todo $x \in K$ $\phi(x,x) \geq 0$; se tiene que ϕ es diagonal cuasiconvexa.

Proposición 4.3.- Si ϕ_i: $K\times K \to \Re$ es diagonal cuasicóncava para todo $1 \leq i \leq n$, entonces ϕ: $K\times K \to \Re$ definida por

$$\phi(x,y)) = \max_{1\leq i\leq n} \phi_i(x,y)$$

es diagonal quasicóncava.

En efecto, sea $\{x_1,...,x_n\} \subseteq K$ y $z = \sum_{j=1}^n \alpha_i x_j$ una combinación convexa; entonces

$$\min_{1\leq j\leq m} \{\phi(z,x_j)\} = \min_{1\leq j\leq m}\ \max_{1\leq i\leq n} \phi_i(z,x_j)$$
$$= \min_{1\leq j\leq m} \phi_{ij}(z,x_j) \leq 0\ (1\leq i\leq n),$$

pues cada ϕ_i es diagonal cuasicóncava.

Teorema 4.4.- Sea X un t.v.s. Hausdorff $K \subseteq X$ convexo no vacío, $\phi: K\times K \to \Re$ una función tal que:

1. Es diagonal cuasiconvexa.
2. Dados $x, y \in K$ tales que $\phi(x,y) < 0$, existe $y^* \in K$ y una vecindad V de x tal que

$$\phi(z,y) < 0, \text{ para todo } z \in V.$$

3. Existe un subconjunto $C \subseteq K$ no vacío tal que para cada $x \in K \setminus C$, existe $y \in C$ con $\phi(y,x) < 0$ y C está contenido en un subconjunto compacto de K.

Entonces existe un punto $\bar{x} \in K$ tal que

$$\phi(\bar{x}, y) \geq 0, \text{ para todo } y \in K.$$

Antes de dar la prueba del teorema, observemos que la condición (ii) se satisface trivialmente si $\phi(\cdot,y)$ es semicontinua superiormente; esta condición es un tipo de transferencia de la semicontinuidad superior en el nivel cero.

La condición (iii) es una condición de coercitividad, la cual no es necesaria si K es compacto; lo que es lo mismo se satisface trivialmente por vacuidad tomando C = K.

Prueba del teorema.- Como ya vimos anteriormente, si ϕ es diagonal cuasiconvexa, entonces la multifunción $F:K \xrightarrow{\rightarrow} K$ definida por

$$F(y) = \{ x \in K \; / \; \phi(x,y) \geq 0 \}$$

es KKM. Veamos que F satisface las otras hipótesis del teorema 2.4:

F transfiere valores cerrados: Sean x, y ∈ K tales que $x \notin F(y)$, entonces $\phi(x,y) < 0$; de (ii) tenemos que existe $y' \in K$ y una vecindad V de x, tal que

$$\phi(z,y') < 0, \text{ para todo } z \in V,$$

esto nos dice que $V \cap F(y') = \emptyset$, luego $x \notin (F(y'))$, i.e. F transfiere valores cerrados.

- es precisamente la condición (3) del teorema 2.4, tomando $C = X_0$, esto nos dice que si $x \in K \setminus C$, existe $y \in C$ tal que $x \notin F(y) \subseteq (F(y))$

Una forma equivalente de éste teorema, que es más utilizada en economía es la siguiente:

Teorema 4.5.- Sea X un t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq X$ convexo no vacío, $\phi: X \times Y \rightarrow \Re$ una función tal que:

1. ϕ es diagonal cuasicóncava.
2. Dados x, y ∈ K tales que $\phi(x,y) > 0$, entonces existe $x' \in K$ y una vecindad V de y tal que:

$$\phi(x',z) > 0, \text{ para todo } z \in V.$$

3. Existe un subconjunto no vacío $C \subseteq K$ tal que para cada $y \in K \setminus C$, existe $x \in C$ con $\phi(x,y) > 0$ y C está contenido en un subconjunto compacto de K.

Entonces existe $\bar{y} \in K$ tal que

$$\phi(x,\bar{y}) \leq 0, \text{ para todo } x \in K$$

Como vimos en la motivación para definir el concepto de diagonal cuasiconvexa, si $f: K \rightarrow \Re$ es cuasiconvexa, entonces $\phi: K \times K \rightarrow \Re$ definida por $\phi(x,y) = f(y)-f(x)$, es diagonal cuasiconvexa, esto se puede extender más en el siguiente sentido:

Sea $f: K \rightarrow \Re$ cuasiconvexa y $g: K \rightarrow \Re$ una función cualquiera con $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in K$, entonces $\phi: K \times K \rightarrow \Re$ dada por

$$\phi(x,y) = f(y) - g(x)$$

es diagonal cuasiconvexa. En efecto: Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ cualquiera y $z \in \text{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{\phi(z, x_i)\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i) - g(z)\}$$

de donde max

$$1 \leq i \leq n\{\phi(z,x_i)\} \geq 0.$$

Corolario 4.6.- Sea X un t.v.s. de Hausdorff, $K \subseteq X$ un cono y $f: K \rightarrow X^*$ un mapeo tal que la función $\phi: X \times X \rightarrow \Re$ definida por

$$\phi(p,q) = \langle p-q, f(q) \rangle$$

satisface las condiciones (ii) y (iii) del teorema anterior, luego existe $\bar{q} \in K$ tal que

$$f(\bar{q}) \in K^* \, y \langle \bar{q}, f(\bar{q}) \rangle = 0$$

Prueba.- Como ϕ es lineal en p, ϕ es diagonal cuasiconcava, luego por hipótesis, existe $\bar{q} \in K$ tal que

$$\langle p-\bar{q}, f(\bar{q}) \rangle \leq 0, \text{ para todo } p \in K$$

En particular tomando $p_1 = 1/2\, \bar{q} \in K$ y $p_2 = 2\, \bar{q} \in K$, tenemos:

$$0 \leq \langle \bar{q}, f(\bar{q}) \rangle \leq 0$$

de donde $\langle \bar{q}, f(\bar{q}) \rangle = 0$.

TEORÍA DE JUEGOS

El Problema de Equilibrio de Nash

Teorema 5.1.- [Teorema de intersección de Ky Fan, 1966] Dado un producto cartesiano $X = \prod_{j=1}^{n} X_i$ de espacios topológicos, sea $X^i = \prod_{j \neq i} X_j$ y sean $p_i: X \to X_i$ y $p^i: X \to X^i$ las proyecciones; escribimos $p_i(x) = x_i$ y $p^i(x) = x^i$. Dados x, y ∈ X sea:

$$(y_i, x^i) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos compactos convexos y no vacíos en espacios vectoriales topológicos y sean $A_1, \ldots, A_n$ n subconjuntos de $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ tales que

1. para cada $x \in X$ y cada $1 \leq i \leq n$, $A_i(x) = \{ y \in X / (y_i, x^i) \in A_i \}$ es convexo y no vacío,
2. para cada $y \in X$ y cada $1 \leq i \leq n$, $A^i(y) = \{ x \in X / (y_i, x^i) \in A_i \}$ es abierto;

entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

Prueba.-Definimos $G: X \xrightarrow{\to} X$ mediante

$$G(y) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A^i(y)$$

Observemos que G(y) es cerrado para todo $y \in X$ y por lo tanto compacto (observe que X el compacto); además si $G(y) = \emptyset$ para algún y, entonces $X = \bigcap_{i=1}^{n} A^i(y)$, de donde $y \in \bigcap_{i=1}^{n} A^i(y)$ entonces, de la definición de $A_i(y)$, $y \in A_i$ para $1 \leq i \leq n$ y luego $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

Supongamos entonces que $G(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in X$ y probemos que G no es KKM; para esto veamos que

$$X = \bigcup_{y \in X} \left(\bigcap_{i=1}^{n} A^i(y) \right)$$

Sea $x \in X$ y escogemos $z^i \in A_i(x)$, entonces $(z_i^{\,i}, x^i) \in A_i$, $1 \leq i \leq n$; ahora considerando $z = (z_1^{\,1}, z_2^{\,2}, \ldots, z_n^{\,n})$ tenemos que $x \in A^i(z)$, para $1 \leq i \leq n$ de donde $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A^i(z)$, que era lo que queríamos probar.

Por lo tanto, existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ y $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, con $0 \leq \alpha_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ cumpliendo que $z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \notin \bigcup_{k=1}^{n} G(x_k)$. Luego $z \notin G(x_k)$, para todo $1 \leq i \leq n$; lo cual implica que $z \notin X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A^i(x_k)$, lo cual equivale a decir que $z \in \sum_{i=1}^{n} A^i(x_k)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Como $x_k \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i(z)$ para todo k, entonces $z = \sum_{i=1}^{n} A_i(z)$ y por lo tanto

$$\bigcap_{i=2}^{n} A_i \neq \emptyset$$

Teorema 5.2.- Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ conjuntos compactos, convexos no vacíos cada uno en un e.v.t.; $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Sean $f_1, \ldots, f_n: X \to \Re$ tales que para cada $1 \leq i \leq n$, la función $x_i \to f_i(x_i, y^i)$ es cuasicóncava en X_i.

Entonces existe [^y] ∈ X tal que

$$F_i(\hat{y}) = \max_{X_i \in X_i} f_i(x_i, \hat{y})$$

Prueba.- Definamos $\phi_i: X \times X \to \Re$ mediante:

$$\phi_i(x,y) = f_i(x_i, y^i) - f_i(y_i, y^i), \quad 1 \leq i \leq n;$$

veamos que ϕ_i es diagonal quasicóncava para cada $1 \leq i \leq n$. Sea $\{{}^1z, {}^2z, \ldots, {}^mz\} \subseteq X$ y $z \in \text{conv}\{{}^1z, {}^2z, \ldots, {}^mz\}$, entonces

$$\min_{1 \leq k \leq m} \phi({}^kz, z) = \min_{1 \leq k \leq m} \{ f_i({}^kz_i, z^i) - f_i(z_i, z^i) \}$$
$$= \min_{1 \leq k \leq m} \{ f_i({}^kz_i, z^i) \} - f_i(z_i, z^i)$$
$$\leq f_i(z_i, z^i) - f_i(z_i, z^i) = 0;$$

luego

$\min_{1 \leq k \leq m} \phi_i({}^kz, z) \leq 0$, i.e. ϕ es diagonal cuasicóncova.

Definiendo $\phi: X \times X \to \Re$ por

$$\phi(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \phi_i(x,y),$$

de la proposición 4.3 tenemos que ϕ es diagonal quasicóncava; además de la continuidad de f, tenemos que $\phi(x,\cdot)$ es s.c.i. y la compacidad de X, tenemos por 4.5, que existe $y' \in X$ tal que

$$\phi\,(x,y') \leq 0 \text{ para todo } x \in X,$$

de donde

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{ f_i(x_i,y^i) - f_i(y') \} \leq 0,$$

y por lo tanto

$$f_i(x_i,y^i) \leq f_i(\tilde{y}) \text{ para todo } x_i \in X_i,$$

lo que queríamos probar.

REFERENCIAS

1. **Ky Fan, A.,** "Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem", Math Annalen 142, pp. 305-319, 1961.
2. **Minty, G.,** "Monotone (Nonlinear) Operator in Hilbert Space", Duke Math. J. 29, pp. 341-346, 1962.
3. **Browder, F. E.,** "Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach Spaces", Bull. Amer. Math. Soc. 71, pp. 780-785, 1965.
4. **Gudqiang Tian,** "Generalizations of the FKKM theorem and the Ky Fan Minimaz Inequality", Journal of Mathematical Analysis and applications 170, pp. 457-471, 1992.
5. **Sosa Sandoval, W.,** "Iterative Algorithms for the abstract Equilibrium Problem, Teses de Doutorado", Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Série F-124 / 2000.
6. **N. Lusem, A.**, Sosa, W., "New existence results for equilibrium problems", Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Aplications 52, pp. 621-635, 2003.
7. **Hadjisavas, N. N., Schaible,** "Quasimonotone Variational inequalities in Banach Spaces", Journal of Optimization, Theory and Applications 90, pp. 95-111, 1996.
8. **Crouzeix, J. P., Martínez Legaz, J. E., Volle, M.,** (editores) "Generalized Convexity, Generalized Monotonicity", Kluwer Academic Publishers, 1998.
9. **Dugundji, J., Granas, A.,** "Fixed Point Theory", I, Monograf. Mat, vol. 61, PWN, Warszawa, 1982.
10. **Brezis, H**., "Análisis funcional y aplicaciones, Alianza Editorial", Masson, París, 1983.
11. **Dugundji, J.,** "Topology",
12. **Crouzeix, J. P.,** "Generalized Convexity and Generalized Monotonicity", Monografías del Imca, número 17.
13. **Gorniewicz, L.,** "Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings", Kluwer Academic Publishers, 1999.
14. **Aubin, J. P., Frankowska, H.,** "Set-Valued Analysis, Birkhäuser", Boston, Basel, Belin, 1990.
15. **Blum, E., Oettli, W.,** "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", Math Student, 63 pp. 123-145, 1994.
16. **Flores Bazán, F.,** "Optimización y cálculo de variaciones sin convexidad: Una introducción", Monografías del Imca, número 15.
17. **Knaster, B., Kuratowsky, C., Mazurkiewicz, S.,** "Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe", Fundamenta Math. 15, pp. 132-137, 1929.
18. **Fan, K.,** "Some properties of convex sets related to fixed point theorems", Math. Am. 266, pp. 519-537, 1984.
19. **Fan, A.,** "A minimax inequality and applications", In Inequality III, edited by O. Shisha, Academic Press, New York, 103-113, 1972.