

## SERVOCONTROL NO LINEAL PARA SISTEMAS PRECISOS DE SEGUIMIENTO

Omar Alfredo Tupayachi Calderón, Luis Guillermo Herrera Bendezú

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Sección de Postgrado

### RESUMEN

*Este artículo trata el problema de identificación de parámetros y seguimiento de trayectoria de un sistema electro-mecánico no lineal, que consiste de un motor DC que acciona una carga no lineal que asemeja un manipulador robótico de un grado de libertad. El sistema presenta dos tipos de no linealidad; una de naturaleza discontinua, debida a las fricciones estática y de Coulomb, y la otra continua, debida a la carga no lineal. Sólo se dispone de la posición angular de la carga no lineal para fines de realimentación. Las fricciones estática y de Coulomb se modelan y se compensan usando un esquema de compensación no lineal que depende de la velocidad de la carga. Los parámetros desconocidos del sistema compensado y sin carga no lineal son identificados a lazo abierto en el dominio de la frecuencia usando el método de los mínimos cuadrados, y la carga no lineal es compensada usando Linealización por Realimentación. Finalmente, se presenta la implementación del sistema de control diseñado, conjuntamente con sus resultados experimentales, los cuales son comparados con aquellos obtenidos cuando el controlador no lineal se reemplaza por un controlador lineal PID.*

### ABSTRACT

*This paper deals with the problem of parameter identification and tracking for a nonlinear electro-dynamical system that consist in a DC-motor driving a nonlinear load: a metal rod attached to the shaft of the motor in order to obtain a robotic manipulator of one degree of freedom. The system contains a discontinuous nonlinearity due to the static and Coulomb frictions, and a continuous one due to the nonlinear load. Only the angular position of the load is available for feedback. The nonlinear frictions are compensated using a nonlinear compensation schema that depends on the load angular rate. The unknown parameters of the compensated but unloaded system are identified off-line using the least squares method in the frequency domain. Next, the nonlinear load is compensated using Feedback Linearization. System implementation and experimental results are presented and compared with respect to the results obtained when the nonlinear controller is replaced by a linear PID controller.*

### INTRODUCCION

Las técnicas de control lineal se fundamentan en el supuesto de que la planta presenta un comportamiento aproximadamente lineal en todo el rango de operación. Es decir, que las no linealidades presentes en la dinámica del sistema son pequeñas y suaves (condición para poder obtener una aproximación lineal del modelo de la planta).

Cuando se desea controlar una planta no lineal en un

amplio rango de operación y en forma precisa, las técnicas de control lineal son insuficientes o tienen que ser muy sofisticadas. En estos casos, que se presentan en el campo de la robótica, de la aeronáutica y en muchos procesos industriales, las técnicas de control no lineal son mucho más adecuadas.

En las últimas décadas se ha observado un vertiginoso avance en el campo del control no lineal de sistemas. Desde el punto de vista teórico, el entendimiento de la dinámica de los sistemas no lineales es más profun-

do, y conceptos ántes comprendidos sólo en sistemas lineales tales como controlabilidad y observabilidad, han sido extendidos al caso de sistemas no lineales utilizando la Geometría Diferencial [2]. Desde el punto de vista práctico, se tienen numerosas aplicaciones exitosas en áreas tales como control de vehículos espaciales y aviones, control de procesos, robótica e ingeniería biomédica. Las técnicas de control basadas en la geometría diferencial han sido principalmente aplicadas a sistemas no lineales que poseen una ecuación de estado de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

donde  $u$  es la señal o fuerza de control. La mayoría de sistemas electromecánicos usados en la industria tienen esta forma. El problema por resolver radica en encontrar una realimentación no lineal  $u$  tal que el sistema (1) en lazo cerrado sea lineal. Para encontrar dicho control linealizante en forma directa, se debe llevar el sistema no lineal a su *forma normal* [1], [2] mediante una adecuada transformación no lineal de las variables de estado, de modo tal que permita emplear controladores lineales. Esta técnica es conocida como *Linealización por Realimentación* [1], [2], [3].

Existen varios factores que dificultan el uso directo de técnicas de Linealización por Realimentación en aplicaciones reales. Entre ellos vamos a mencionar tres. El primero es que no todos los sistemas cumplen las condiciones necesarias (condiciones para la linealización exacta de un sistema no lineal) que permita obtener un control linealizante. El segundo, es que para obtener una buena compensación de las no linealidades, éstas tienen que ser conocidas y modeladas. Esta técnica, como todas las que se basan en el modelo del sistema, requieren un conocimiento preciso de los parámetros del sistema. Un tercer factor es que se requiere que el modelo del sistema pueda ser diferenciable. Por tanto, no debe contener no linealidades discontinuas. Sin embargo, en las aplicaciones reales se presentan no linealidades tales como las fricciones estática y de Coulomb que por su naturaleza son discontinuas.

Nuestro objetivo es resolver el problema de identificación de parámetros y control del seguimiento de trayectoria de un sistema no lineal suficientemente simple como para ser implementado con medianos recursos, y que a la vez presente no linealidades continuas y discontinuas. Así mismo, queremos mostrar el comportamiento de dicho sistema cuando es sometido a un controlador lineal PID.

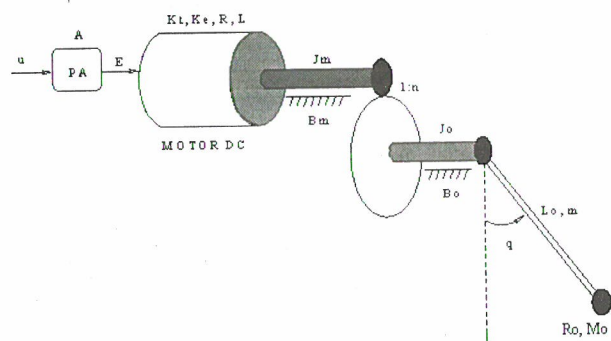


Fig. 1: Manipulador robótico de un grado de libertad.

Nuestro sistema representa un manipulador robótico de un grado de libertad y está esquematizado en la Fig. 1. En tal sistema se desconocen las magnitudes de las fricciones viscosa, estática y de Coulomb y el momento de inercia total respecto al eje de giro. Se desea identificar los parámetros desconocidos del sistema y solucionar el problema de seguimiento de trayectoria en todo el rango de acción del sistema ( $-\pi \leq q \leq \pi$ ).

En la segunda sección de este artículo se presenta el procedimiento de compensación de las no linealidades discontinuas para poder identificar los parámetros desconocidos del sistema. En la tercera sección se muestra el diseño del controlador no lineal usando linealización por realimentación. En la cuarta sección se presenta la implementación y los resultados de funcionamiento del mismo sistema, pero bajo la acción de un controlador lineal PID. La quinta sección es de conclusiones.

**COMPENSACION DE FRICCION  
E IDENTIFICACION.**

El modelo del sistema mostrado en la Figura (1) está dado por (2) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} -\frac{N}{M} \sin(x_1) - \frac{B}{M} x_2 + \frac{nK_1}{M} x_3 \\ -\frac{nK_e}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{A}{L} \end{bmatrix} u \quad (2)$$

$y = h(x) = x_1$

con

$M = n^2 J_m + J_0 + \frac{1}{3} mL_0^2 + (M_0 L_0^2 + \frac{2}{5} M_0 R_0^2)$

$B = n^2 B_m + B_0$

$N = \frac{1}{2} mL_0 g + M_0 L_0 g$

donde n es el factor de reducción de velocidad;  $J_m$ ,  $B_m$  y  $J_0$  son el momento de inercia del motor, la constante de fricción viscosa del motor y el momento de inercia del adaptador de carga respectivamente; m y  $L_0$  son la masa y la longitud de la varilla de carga;  $M_0$  y  $R_0$  son la masa y el radio de la esfera adherida a la varilla; L, R y  $K_e$  son la inductancia de armadura, resistencia de armadura y la constante de fuerza contra-electromotriz del motor respectivamente; A es la ganancia del amplificador de potencia;  $K_1$  es la constante de torque del motor;  $x_1 = q$  es la posición angular de la carga (la salida del sistema);  $x_2 = \dot{q}$  es la velocidad angular de la carga y  $x_3 = i$  es la corriente de armadura del actuador. La entrada u es el voltaje aplicado al amplificador de potencia. El voltaje de salida del amplificador se aplica al voltaje de armadura del motor. La respuesta del sistema a una entrada sinusoidal muestra la presencia de zonas muertas en el cruce por cero de la velocidad angular de la carga, tal como se puede apreciar en la Fig. 2.

Dicho fenómeno es atribuido a las fricciones estática, debido al torque que se opone al inicio del movimiento de la carga cuando ésta se encuentra en reposo, y

de Coulomb, causado por el torque que se requiere aplicar para mantener la carga en movimiento.

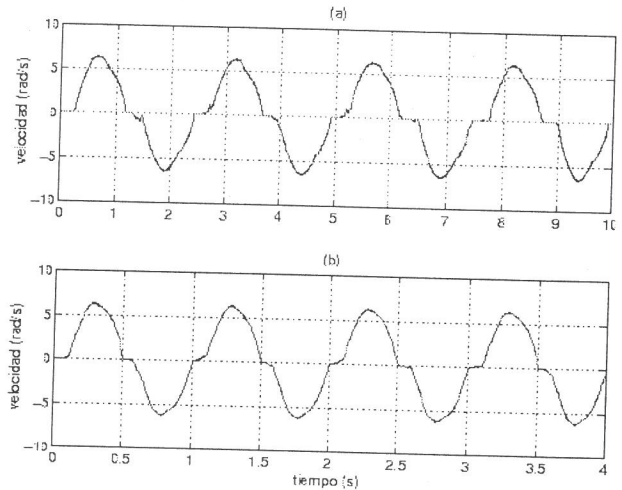


Fig. 2 Respuesta del sistema a una sinusoidal de amplitud 0.5V y frecuencia : (a) 0.8π, rad (b) 2π, rad

Los efectos de tales fricciones pueden notarse mejor en la curva experimental velocidad vs. entrada del sistema, cuando la carga no lineal ha sido anulada (es decir, desmontando la varilla sujeta al eje del motor). Tal curva, lograda aplicando diferentes valores de u y midiendo las correspondientes velocidades en estado estacionario se muestra en la Fig. 3 y, con más detalle en la zona muerta, en la Fig. 4. En estas figuras se puede apreciar que la curva está centrada respecto a 2.31 V debido a que éste es el valor de u que corresponde a un voltaje de armadura de 0 V aplicado al motor.

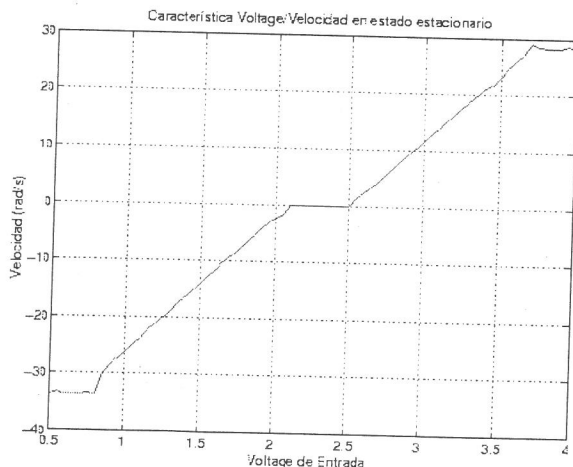


Fig. 3 Respuesta de  $\dot{q}$  en estado estacionario versus u.

(2). El estado  $x$  original expresado en función del nuevo estado  $z$  está dado  $x = \Phi^{-1}(z)$  por donde:

$$x = \Phi^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\frac{N}{nk_1} \sin(z_1) + \frac{B}{nK_1} z_2 + \frac{M}{nk_1} z_3 \end{bmatrix}$$

Con esta transformación de coordenadas la forma normal del sistema viene a ser:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= \left\{ -\frac{N}{M} \cos(z_1) z_2 - \frac{NR}{ML} \sin(z_1) - \right. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left. - \left( \frac{n_2 k_1 k_e}{ML} + \frac{BR}{ML} \right) z_2 - \left( \frac{B}{R} + \frac{R}{L} \right) z_3 \right\} + \left\{ \frac{nK_1}{ML} \right\} u$$

El sistema (2) original ha sido llevado mediante la transformación  $z = \Phi(x)$  descrita en (7), a su forma normal (8), en donde el control  $u$  está dado por:

$$\begin{aligned} u &= \left( \frac{ML}{nK_1} \right) \left\{ v + \frac{N}{M} \cos(z_1) z_2 + \frac{NR}{ML} \sin(z_1) + \right. \\ &\left. + \left( \frac{n_2 K_1 K_e}{ML} + \frac{BR}{ML} \right) z_2 + \left( \frac{B}{M} + \frac{R}{L} \right) z_3 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

siendo  $v$  una nueva entrada equivalente que linealiza en forma exacta el sistema (8). Por tanto:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 \\ z_2 &= z_3 \\ z_3 &= v \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Este proceso de linealización se muestra en la Fig. 7. El sistema lineal equivalente corresponde a un integrador de tercer orden y puede ser expresado como:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = v \quad (11)$$

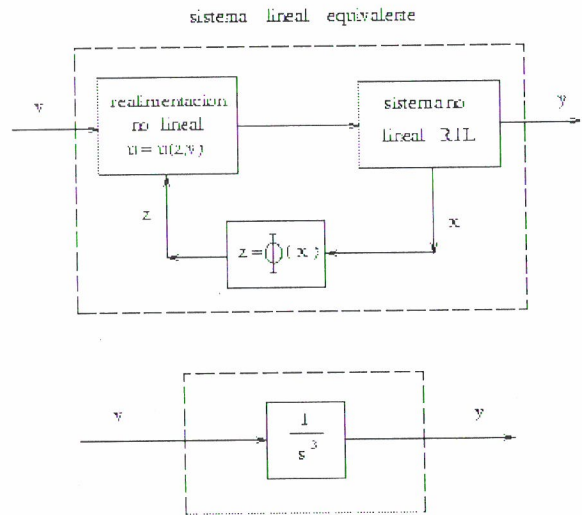


Fig.7 linealización del sistema no lineal.

Ahora debemos diseñar  $v$  tal que  $y = q = z_1$  siga una trayectoria deseada cualesquiera  $y_d(t)$ . El siguiente control  $v$  logra este objetivo:

$$v = \frac{d^3 y_d}{dt^3} - K_1 \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} - K_2 \frac{d\tilde{y}}{dt} - K_3 \tilde{y} \quad (12)$$

donde  $\tilde{y} = y_d - y$ . Reemplazando en (11) se obtiene el sistema de lazo cerrado siguiente:

$$\frac{d^3 \tilde{y}}{dt^3} + K_1 \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} + K_2 \frac{d\tilde{y}}{dt} + K_3 \tilde{y} = 0$$

en donde los parámetros  $K_1, K_2$  y  $K_3$  determinan la dinámica de  $\tilde{y}$ . Así, si se desea que los polos de lazo cerrado sean  $[-4, -4, -4]$ , la ecuación característica deberá ser  $p^3 + 12p^2 + 48p + 64 = 0$ , resultando  $K_1=12, K_2=48, K_3=64$ . Luego, el control total  $u$  queda como:

$$\begin{aligned} u &= \left( \frac{ML}{nK_1} \right) \left\{ \left[ \frac{d^3 y_d}{dt^3} + K_1 \frac{d^2 y_d}{dt^2} + K_2 \frac{d y_d}{dt} + K_3 y_d - K z \right] + \right. \\ &\left. + \frac{N}{M} \cos(z_1) z_2 + \frac{NR}{ML} \sin(z_1) + \right. \\ &\left. + \left( \frac{n_2 K_1 K_e}{ML} + \frac{BR}{ML} \right) z_2 + \left( \frac{B}{M} + \frac{R}{L} \right) z_3 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $K = [K_1, K_2, K_3]$



## IMPLEMENTACION Y RESULTADOS

El sistema de control no lineal, así como un controlador lineal PID diseñado para resolver el problema de seguimiento, han sido implementados en una PC-486 usando un amplificador de potencia (basado en modulación PWM), un modulador PWM, una tarjeta de adquisición Lab-PC+ de National Instruments, un decodificador de cuadratura, y un contador de 16 bits para el sensor óptico de posición.

Las Figs. (8) y (9) muestran el comportamiento de la trayectoria del sistema bajo la acción de un controlador lineal PID para los casos de carga lineal (sin la varilla) y carga no lineal (con varilla) respectivamente. En el primer caso se puede observar claramente el efecto debido a la no compensación de las fricciones estática y de Coulomb. Dicho efecto se manifiesta como una zona muerta en los cruces por cero de la velocidad. En el segundo caso se observa un mal seguimiento debido a la no compensación de la carga no lineal. Variando los polos se puede mejorar el seguimiento, pero el control sale del rango lineal del amplificador de potencia.

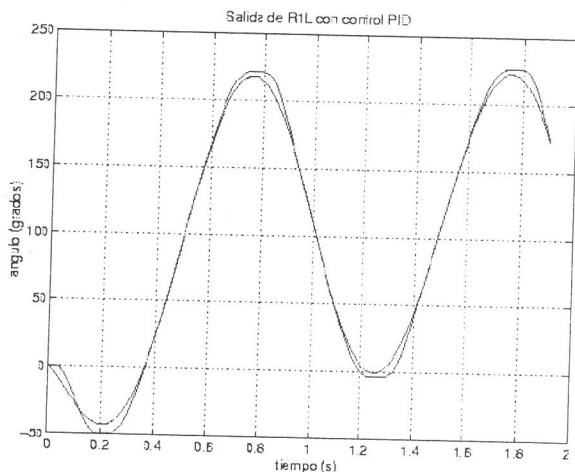


Fig.8 Control PID del sistema sin carga no lineal.

Las figuras (10) y (11) muestran el comportamiento del controlador no lineal diseñado en la anterior sección. Se puede observar un buen seguimiento de trayectoria y el control está dentro del rango lineal del amplificador de potencia.

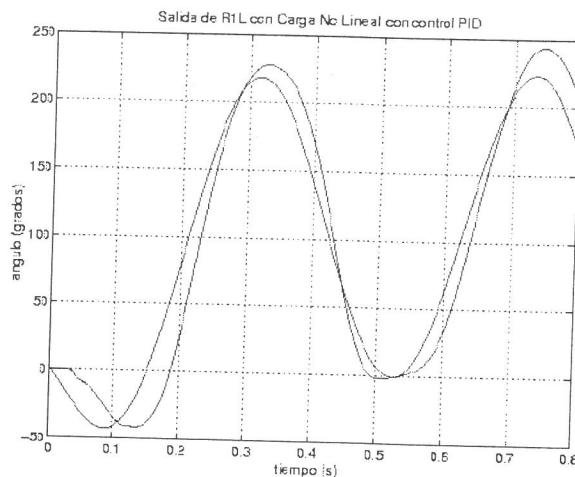


Fig.9 Control PID del sistema con carga no lineal.

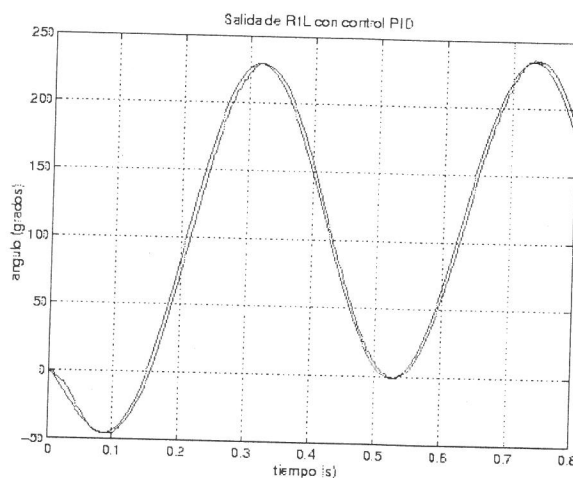


Fig.10 Control no lineal del sistema: salida.

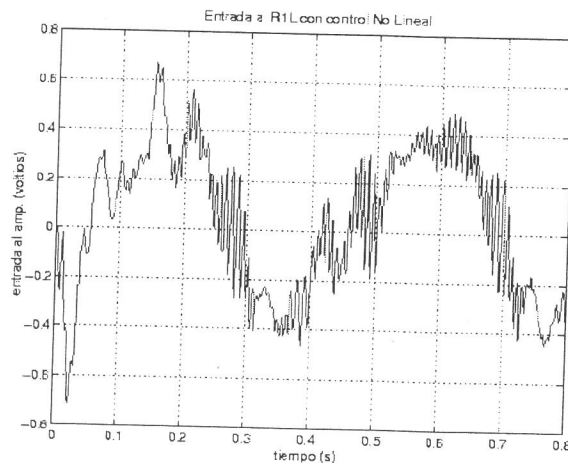


Fig.11 Control no lineal del sistema: entrada.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha resuelto el problema de seguimiento de trayectoria de un sistema no lineal que presenta una no linealidad continua y una discontinua. La no linealidad discontinua, debida a las fricciones estática y de Coulomb, fué satisfactoriamente compensada usando el esquema de compensación (3). La no linealidad continua fué compensada usando la técnica de linealización por realimentación. Mediante experimentación se ha demostrado que el comportamiento de un controlador lineal PID, diseñado para resolver el problema de seguimiento del sistema no lineal, es deficiente en los cruces por cero de la velocidad debido a las fricciones no lineales, y en el seguimiento en sí, debido a la carga no lineal. El controlador no lineal diseñado reduce el error en un 85% respecto al controlador PID lineal.

## RECONOCIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONCYTEC, por su apoyo financiero al presente proyecto, a través de su Programa Nacional de Electrónica y Microelectrónica PRONACEM.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] **D. DA'tellis**, Introducción a los Sistemas No Lineales de Control y sus Aplicaciones, Asociación Argentina de Control Automático, 1985.
- [2] **M. Vidyasagar**, Nonlinear Sistem Analysis, Prentice Hall.
- [3] **Jean-Jacques E-Slotine**, Weiping Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, 1991.
- [4] **Astrom, K.J. y Wittenmark, B.**, Computer Controlled Systems: Theory and Design, 2da Edición, Prentice-Hall, 1990.
- [5] **Priyadarshee D. Mathur**, "Servo Design for High-Speed Low-Tension Tape Transport", M.Sc. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburg, Pennsylvania, Diciembre 1994.
- [6] **Canudas, C., Astrom, K.J. y Braun, K.** "Adaptive Friction Compensation in DC Motor Drives" IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. 3, No. 6.
- [7] **Omar A. Tupayachi C.** "Control No Lineal de Servosistemas. Aplicación: Manipulador robótico de un grado de libertad" Tesis de Competencia Profesional para optar Título de Ingeniero Electrónico. Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima-Perú, Enero, 1998.