

PRUEBA NO PARAMÉTRICA PARA DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES

NONPARAMETRIC TEST FOR TWO INDEPENDENT GROUPS

Luis E. Huamanchumo de la Cuba¹, José W. Camero Jiménez²,
Kesber Angulo Sánchez³

RESUMEN

Se presenta un nuevo test no paramétrico para dos muestras independientes el cual utiliza todas las diferencias posibles entre las observaciones de ambas empleándose el método de Wilcoxon sin suprimir las observaciones empatadas. Esta prueba resulta ser adecuada para muestras pequeñas ($n=5$) y es muy sensible para detectar diferencias significativas entre las poblaciones de donde se tomaron éstas. Lo más importante de esta prueba radica en que es capaz de encontrar diferencias significativas cuando cada muestra tiene todas sus observaciones iguales ($S_1^2 = S_2^2 = 0$), problema que no supera la prueba t-Student ni la prueba de Mann-Whitney debido a la corrección por empates.

Palabras clave.- Prueba de wilcoxon, Observaciones empatadas, Corrección por continuidad, Distribución normal.

ABSTRACT

This paper presents a new nonparametric test for two independent samples. It has been decided to make the inference, using all the possible differences between the comments of the two samples, and has used the Wilcoxon method for treatment, but with a different attitude when faced with a couple of comments that did not numerically presents difference, it not removed from the analysis. This test proves to be suitable from small samples ($n = 5$) and is very sensitive to detect significant differences between the populations from which the samples were taken. The most important thing in this test, it is also able to check when each sample has all his remarks equals ($S_1^2 = S_2^2 = 0$), a problem which does not exceed t-Student test or Mann-Whitney test due to the correction for draws.

Keywords.- Wilcoxon's test, Tied observations, Correction for continuity, Normal distribution.

INTRODUCCIÓN

En la práctica, es frecuente que los investigadores requieran una prueba estadística para detectar diferencias de posición entre dos poblaciones. La situación usual es que las distribuciones de tales poblaciones bajo la hipótesis nula, tienen formas desconocidas pero iguales (supuesto fundamental para el desarrollo de esta prueba) y, por otro lado, el investigador tiene muestras aleatorias

independientes de ambas poblaciones. En este marco, es común que el investigador use la prueba propuesta por Mann y Whitney en 1947 [1], debido a que su estadístico de prueba y sus valores críticos pueden obtenerse fácilmente. Cabe recalcar que el test de Mann-Whitney, constituye una buena alternativa a la prueba t de Student equivalente al análisis de varianza para un factor con dos niveles, cuando no es necesario hacer suposiciones acerca de la distribución de las

¹Lic. en Estadística, Catedrático Escuela Profesional de Ingeniería Estadística (EPIES)-UNI e Instructor en la Escuela Nacional de Estadística e Informática-INEI, ²Lic. en Estadística, Catedrático EPIES-UNI, Consultor en Certificaciones y Control de Calidad, ³Estudiante EPIES-UNI, asistente de Investigación de la Escuela Profesional de Ingeniería Estadística.

poblaciones.

El objetivo de este trabajo es brindar una alternativa al investigador para los casos en que la distribución de la población sea desconocida o sus supuestos subyacentes no están especificados.

El test permitirá contrastar las siguientes hipótesis:

- Un tratamiento es mejor que otro o establecer la diferencia entre los dos tratamientos. El tratamiento puede ser cualquiera de una multiforme variedad de condiciones [2].
- Probar si dos grupos independientes han sido tomados de una misma población o de dos poblaciones con la misma distribución respecto a la variable de interés [3].

$$\begin{aligned} H_0 : F_x(x) &= G_y(x) \\ H_1 : F_x(x - \Delta) &= G_y(x) \\ \Delta \neq 0, \Delta > 0, \Delta < 0 \end{aligned} \quad (1)$$

La prueba propuesta, demuestra que brinda ventajas adicionales a la tradicional prueba no paramétrica de Mann Whitney para dos muestras independientes y la prueba t-student debido a que es más sensible para detectar diferencias significativas entre dos poblaciones y no pierde potencia de prueba al presentar empates.

En principio, se construye la estadística de prueba y sus dos primeros momentos muestrales para posteriormente estudiar la convergencia en distribución.

Finalmente, el problema de empates es tratado mediante una simulación.

CONSTRUCCIÓN DE LA ESTADÍSTICA DE PRUEBA

Sean dos muestras A y B de tamaño n_1 y n_2 respectivamente. Si las observaciones de la muestra A son x_1, x_2, \dots, x_{n_1} y las observaciones de la muestra B son y_1, y_2, \dots, y_{n_2} . El número total de diferencias posibles es $r = n_1 \times n_2$. A dichas diferencias las llamaremos d_k , $k = 1, 2, \dots, r$. El nivel de la escala de medición debe ser por lo menos ordinal.

Empleando el método de Wilcoxon para extraer toda la información posible, se propone utilizar los signos y rangos de las d_k , simbolizados respectivamente como:

$$d_k \Rightarrow \begin{cases} \Psi_k \rightarrow \text{signo de las } d_k \\ R_k \rightarrow \text{magnitud de las } d_k \end{cases} \quad (2)$$

Wilcoxon define su estadística de prueba como:

$$R^+ = \sum_{k=1}^r R_k \Psi_k \quad (3)$$

Esto representa la suma de los rangos provenientes de las diferencias positivas. Por lo que:

$$\Psi_k = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow d_k < 0 \\ 1 \Leftrightarrow d_k > 0 \end{cases} \quad (4)$$

La expresión (4) indica que las $d_k = 0$ no se consideran en el cálculo de la estadística de prueba, y en consecuencia, el tamaño de la muestra se reduce en una unidad por cada par sin diferencia (empate).

Puesto que, el test de Wilcoxon sirve para tratar muestras relacionadas. ¿Qué ocurriría si en el muestreo al azar nos encontramos con todas las observaciones pareadas que reflejan $d_k = 0$?

En primer lugar, sin recurrir a la inferencia estadística, diríamos que no hay cambios en el indicador de la posición ($\Delta \neq 0$) en las poblaciones de donde se extrajeron las muestras. Pero, el test de Wilcoxon sugiere eliminar aquellos pares que no presentan diferencias, en este sentido, el tamaño de la muestra se reduciría a cero y, por último, no tendríamos estadística de prueba ni región crítica para contrastar objetivamente este caso. Al parecer, esto sugiere no eliminar los pares que expresan $d_k = 0$.

En el proceso de medición para obtener información, no estamos exentos de una imprecisión en nuestras medidas. Por lo que las medidas obtenidas están afectadas en algún grado por el error experimental debido a las imperfecciones inevitables del instrumento de medida, o las limitaciones impuestas por nuestros

sentidos (visión y audición) que deben registrar la información [5].

Este argumento nos dice sobre la imposibilidad de obtener medidas absolutamente iguales por más que se mejoren los instrumentos de medida. Por otro lado, Gauss en su Ley para los Errores Accidentales considera también como postulado que:

“La misma probabilidad habrá para que se presente un error por defecto que por exceso” [6].

Este postulado nos dice, que de todas las medidas obtenidas, la mitad de ellos serán por defecto y la otra por exceso. De esa manera, la función indicadora de Wilcoxon pasa la siguiente forma general

$$\Psi_k = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow d_k < 0 \\ \frac{1}{2} \Leftrightarrow d_k = 0 \\ 1 \Leftrightarrow d_k > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Y la estadística de prueba de Wilcoxon (3) continúa siendo válida, es decir, siempre va a representar la suma de los rangos provenientes de diferencias positivas.

Además, (5) tiene un significado estadístico; porque si $\Psi_k = 1$, indica que si $d_k > 0$ hay 100% de probabilidades de que $d_k > 0$; si $\Psi_k = 0$, indica que si $d_k < 0$ hay 0% de probabilidades de que $d_k > 0$; y si $\Psi_k = 1/2$, indica que si $d_k = 0$ hay 50% de probabilidades de que $d_k > 0$.

La estadística de prueba toma los valores discretos:

$$R^+ = \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots; \frac{r(r+1)}{2} \right\} \quad (6)$$

PRIMER Y SEGUNDO MOMENTO DE R^+

Por inducción matemática, si se tiene $r = 12$, resultan las diferencias d_k tal como se observa en la Tabla 1, la cual está ordenada ascendentemente según los valores absolutos de d_k .

Así, en la tercera columna tenemos los rangos de $|d_k|$ y en la última su correspondiente Ψ_k .

Tabla 1. Para $r = 12$, signos y rangos para d_k .

d_k	$ d_k $	R_k	Ψ_k
+7	0	2	1/2
+5	0	2	1/2
-6	0	2	1/2
+1	1	4	1
-4	2	5	0
0	3	6	1
+3	4	7	0
+6	5	8	1
0	6	10	0
-2	6	10	1
+6	6	10	1
0	7	12	1

En esta tabla, vemos que las $d_k = 0$ siempre se situarán primeros, esto implica que poseerán los rangos $\Psi_k = 1/2$. En consecuencia, podemos concluir que siempre que haya $d_k = 0$, en un número k de veces, las k -ésimas primeras $|d_k|$ ordenadas ascendentemente tomarán el valor de $\Psi_k = 1/2$. Asimismo, en la Tabla 2, se muestra todos los posibles arreglos de Ψ_k dado $r=3$.

Tabla 2. Para $r = 3$, posibles arreglos de Ψ_k .

	$R_1 = 1$	$R_2 = 2$	$R_3 = 3$	R^+
Segunda partición	1/2	1/2	1/2	3
	1/2	1/2	0	1.5
	1/2	1/2	1	4.5
	1/2	0	0	0.5
	1/2	0	1	3.5
	1/2	1	0	2.5
	1/2	1	1	5.5
Primera partición	0	0	0	0
	0	0	1	3
	0	1	0	2
	0	1	1	5
	1	0	0	1
	1	0	1	4
	1	1	0	3
1	1	1	6	

Para la primera partición

Existen 2^r casos posibles. El primer rango puede tomar tanto el cero como el uno, de tal manera que

habrá 2 formas; para el segundo rango también ocurre lo mismo, hay 2 formas; y así sucesivamente hasta el r-ésimo rango. Entonces el número total de arreglos posibles estará dado de esta manera: $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_r = 2^r$ arreglos. Como ejemplo, para $r = 3$, ver la tabla 3.

Tabla 3. Para $r = 3$, tabla de frecuencias para R_1^+ .

R_1^+	0	1	2	3	4	5	6	total
Frecuencia	1	1	1	2	1	1	1	$2^3=8$

De esa manera, si R_1^+ es la variable aleatoria generada por la primera partición, entonces:

$$R_1^+ = \sum_{k=1}^r R_k \Psi_k \quad (7)$$

Donde

$$\Psi_k = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow d_k < 0 \\ 1 \Leftrightarrow d_k > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Entonces

$$E[R_1^+] = \frac{r(r+1)}{4} \quad (9)$$

y

$$V[R_1^+] = \frac{r(r+1)(2r+1)}{24} \quad (10)$$

tal que

$$P(\Psi_k = 0) = \frac{1}{2} \quad (11)$$

y

$$P(\Psi_k = 1) = \frac{1}{2} \quad (12)$$

Que obviamente es la media y varianza de Wilcoxon.

Para la segunda partición

Existen $2^r - 1$ casos posibles. Si fijamos $\frac{1}{2}$ para el primer rango, quedarán $r - 1$ rangos para ordenar los ceros y unos, de tal manera que habrá 2^{r-1} arreglos; si fijamos $\frac{1}{2}$ en los dos primeros rangos,

quedaran $r - 2$ rangos para ordenar ceros y unos, de tal forma, que habrá 2^{r-2} arreglos, y así sucesivamente hasta fijar $\frac{1}{2}$ en los r rangos, de tal manera que habrá $2^{r-r} = 2^0 = 1$ sólo caso posible. Así, si sumamos todos los casos posibles, tenemos: $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{r-1} = \frac{2^r - 1}{2 - 1} = 2^r - 1$ arreglos. Como ejemplo, para $r = 3$, ver la tabla 4.

Tabla 4. Para $r = 3$, tabla de frecuencias para R_2^+ .

R_2^+	0.5	1.5	2.5	3	3.5	4.5	5.5	total
Frecuencia	1	1	1	1	1	1	1	$2^3-1=7$

Si R_2^+ es la variable aleatoria generada por esta segunda partición, entonces:

$$R_2^+ = \sum_{k=1}^r R_k \Psi_k \quad (13)$$

donde

$$\Psi = \begin{cases} 1/2 \Leftrightarrow d_k = 0 \\ 0 \vee 1 \Leftrightarrow d_k \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Entonces

$$E[R_2^+] = \frac{r(r+1)}{4} \quad (15)$$

y

$$V[R_2^+] = \frac{2^{r-3}}{2^r - 1} \left[\frac{r(r+1)(2r+1)}{3} + \frac{r^2 + 4r + 6}{2^{r-2}} - 24 \right] \quad (16)$$

tal que

$$P(\Psi_k = \frac{1}{2} / \Psi_1 = \frac{1}{2}, \Psi_2 = \frac{1}{2}, \dots, \Psi_{k-1} = \frac{1}{2}) = \frac{2^{r+1-k} - 1}{2^r - 1} \quad (17)$$

$$P(\Psi_k = 0 / \Psi_1 = \frac{1}{2}, \Psi_2 = \frac{1}{2}, \dots, \Psi_{k-1} = \frac{1}{2}) = \frac{2^{r-k}(2^{k-1} - 1)}{2^r - 1} \quad (18)$$

$$P(\Psi_k = 1 / \Psi_1 = \frac{1}{2}, \Psi_2 = \frac{1}{2}, \dots, \Psi_{k-1} = \frac{1}{2}) = \frac{2^{r-k}(2^{k-1} - 1)}{2^r - 1} \quad (19)$$

Podemos obtener la media y la varianza de la estadística de prueba R^+ como ponderación de los resultados de las dos particiones. Primero, se verifica que hay un total de

$$\underbrace{2^r}_{1ra\ partici3n} + \underbrace{2^r - 1}_{2da\ partici3n} = 2^{r+1} - 1 \text{ arreglos.}$$

Entonces:

$$E[R^+] = \frac{2^r E[R_1^+] + (2^r - 1)E[R_2^+]}{2^{r+1} - 1} \quad (20)$$

$$V[R^+] = \frac{2^r V[R_1^+] + (2^r - 1)V[R_2^+]}{2^{r+1} - 1} \quad (21)$$

De esa manera, la Media y la Varianza de R^+ quedan expresados como:

$$E[R^+] = \frac{r(r+1)}{4} \quad (22)$$

$$V[R^+] = \frac{2^{r-2}}{2^{r+1} - 1} \left[\frac{r(r+1)(2r+1)}{3} + \frac{r^2 + 4r + 6}{2^{r-1}} - 12 \right] \quad (23)$$

DISTRIBUCIÓN DE LA ESTADÍSTICA DE PRUEBA R^+

La estadística de Wilcoxon es simétrica como se formula (4); su distribución tiende asintóticamente a la normal para muestras de más de 20 observaciones [4]. La función indicadora (5) no deja de ser simétrica, por lo que se espera que su distribución también lo sea.

Esto lo podemos ver con la ayuda de un programa elaborado en Visual Basic. Ver Figura 1.

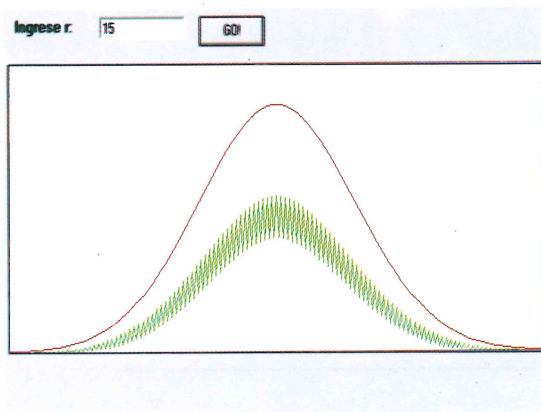


Fig. 1 La distribución del estadístico R^+ (verde) y la distribución Normal con $E(R^+)$ y $V(R^+)$ (rojo).

La “discontinuidad” observada se debe a los valores no enteros que toma el estadístico R^+ , (6).

La probabilidad de un R^+ no entero es inferior a la probabilidad de un R^+ entero contiguo.

CORRECCIÓN POR “CONTINUIDAD”

Para superar esto, se ha propuesto hacer la siguiente corrección para conseguir “continuidad”

$$R_{\text{corregido}}^+ = \begin{cases} R_1^+ - 0.5 \rightarrow a \text{ arreglos} \\ R_2^+ + 0.5 \rightarrow a \text{ arreglos} \\ R_3^+ \rightarrow b \text{ arreglos} \end{cases} \quad (24)$$

$$2a + b = 2^{r+1} - 1 \quad (25)$$

Donde

$$\begin{aligned} R_1^+ = R^+ &\Leftrightarrow R^+ - \|R^+\| \neq 0 \wedge R^+ < E(R^+) \\ R_2^+ = R^+ &\Leftrightarrow R^+ - \|R^+\| \neq 0 \wedge R^+ > E(R^+) \\ R_3^+ = R^+ &\Leftrightarrow R^+ - \|R^+\| = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$\|X\|$: función máximo entero.

Esta corrección no altera la media, porque es simétrica. Veamos:

$$E[R_{\text{corregido}}^+] = \frac{\sum_{i=1}^{r+1} R_{\text{corregido}}^+}{2^{r+1} - 1} = \frac{\sum (R_i^+ - 0.5) + \sum (R_i^+ + 0.5) + \sum R_i^+}{2^{r+1} - 1} = E[R^+] \quad (27)$$

Análogamente para la varianza se hace el mismo análisis, pero teniendo en cuenta que $R_1^+ + R_2^+ = r(r+1)/2$. Así:

$$V[R_{\text{corregido}}^+] = V[R^+] + \frac{2 \sum [E[R^+] - R_i^+] + \frac{a}{2}}{2^{r+1} - 1} \quad (28)$$

La varianza de R^+ se incrementa al hacer esta corrección. ¿Pero, qué tanto es este incremento? Sólo para tener una idea de cuanto es este incremento; primero, se estimará R_1^+ de (27) como un promedio \hat{R}_1^+ ; para ello, asumiremos que R_i^+ es una variable continua normal (sugerida por la figura 1). De (25), R_1^+ se encuentra a la izquierda de la distribución, entonces:

$$\frac{\hat{R}_1^+ - E[R^+]}{\sqrt{V[R^+]}} = \int_{-\infty}^{\hat{R}_1^+} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (29)$$

En (28), el segundo factor, que multiplica a la densidad normal, se debe a que la distribución de R^+ alcanza más o menos la mitad de la distribución normal.

Se ha verificado que la proporción de R^+ , de *no enteros*, es alrededor del 40%. Entonces, de (24), "2a" representa la cantidad de no enteros, por lo tanto:

$$\frac{2a}{2^{r+1} - 1} \approx 0.4 \quad (30)$$

Despejando \hat{R}_1^+ en (28) y utilizando (29) para reemplazarlos en (27), y a esta última dividiéndola por $V(R^+)$, se tiene:

$$\frac{V[R^+_{\text{corregido}}]}{V[R^+]} \approx 1 + \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{\pi \times V[R^+]}} + \frac{1}{5V[R^+]} \quad (31)$$

Este incremento de la varianza de R^+ no es muy importante cuando r aumenta (ver Tabla 5).

A continuación, se muestra en la tabla 5 los incrementos porcentuales de la varianza de R^+ para cada r .

Hay que tener en cuenta que $r = n_1 \times n_2$. Por ejemplo, si n_1 y n_2 son respectivamente 6 y 7 (relativamente muestras pequeñas), entonces $r = 42$.

Tabla 5. Incremento porcentual de $V(R^+)$ debido a la corrección por continuidad.

r	$V(R^+)$	$V(R^+_{\text{corregida}})$	Incremento de la varianza	Incremento % de la varianza	Incremento % de la varianza pronosticado (30)
1	0,17	0,17	0,00	0,00%	198,18%
2	1,00	1,36	0,36	35,71%	51,92%
3	3,03	3,73	0,70	23,08%	24,92%
4	6,81	7,74	0,94	13,74%	15,17%
5	12,85	14,08	1,23	9,57%	10,46%
6	21,68	23,26	1,59	7,32%	7,78%
7	33,79	35,78	1,99	5,88%	6,08%
8	49,70	52,08	2,39	4,80%	4,93%
9	69,88	72,67	2,79	4,00%	4,10%
10	94,83	98,07	3,24	3,42%	3,49%
11	125,05	128,77	3,71	2,97%	3,01%
12	161,03	165,23	4,20	2,61%	2,64%
13	203,27	207,96	4,69	2,31%	2,34%
14	252,26	257,48	5,22	2,07%	2,09%
15	308,51	314,27	5,76	1,87%	1,88%

Tenemos una muy buena aproximación a la distribución normal, esta aproximación mejora cuando se incrementa el valor de r . Para un valor de $r = 25$ se podrá apreciar esto (ver Figura 2).

De este análisis se obtiene estas primeras conclusiones cuando $r \geq 20$. De (30) y de la tabla 5 se tiene que:

$$V(R^+_{\text{corregido}}) \rightarrow V(R^+) \quad (32)$$

Pero, también se verifica de (23) que:

$$V[R^+] \approx \frac{r(r+1)(2r+1)}{24} - 1.5 \quad (33)$$

Veamos en la Figura 2 la distribución de $R^+_{\text{corregido}}$, para un valor relativamente pequeño.

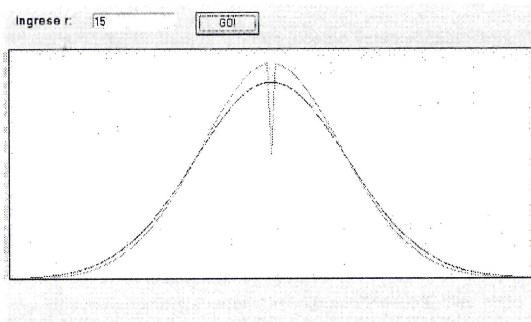


Fig. 2 La distribución del estadístico $R^+_{\text{corregido}}$ (verde) y la distribución Normal con $E(R^+)$ y $V(R^+)$ (rojo) para $r = 15$.

En (32) 1.5 es despreciable a comparación de $r(r+1)(2r+1)/24$. Por lo tanto, de la Figura 3 y de (32), se puede afirmar que:

$$R^+_{\text{corregido}} \sim N\left(\frac{r(r+1)}{4}, \frac{r(r+1)(2r+1)}{24}\right) \quad (34)$$

Por lo tanto, se considerará como valor esperado y varianza de $R^+_{\text{corregido}}$ a la media y varianza de Wilcoxon.

Hemos llegado a una conclusión importante, al no eliminar del análisis a las diferencias cero, $d_k = 0$, obtuvimos el mismo valor esperado y varianza (muy aproximada para $r \geq 20$) de la estadística de prueba Wilcoxon. Si se utiliza la varianza de Wilcoxon, ésta subestima la varianza corregida; pero, tienden a ser prácticamente iguales para valores de $r \geq 20$.

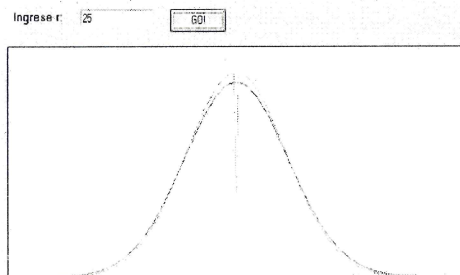


Fig. 3 La distribución del estadístico $R^+_{\text{corregido}}$ (verde) y la distribución Normal con $E(R^+)$ y $V(R^+)$ (rojo) $r = 25$

DISMINUCIÓN DE LA VARIANZA $V(R^+)$ DEBIDO A LOS EMPATES.

Hasta ahora no hemos analizado el caso en que hay empates, es decir, cuando hay algunas $|d_k|$ que son numéricamente iguales. Esto produce una disminución de la varianza $V(R^+)$.

Si nos ponemos en el caso extremo de tener todas las $|d_k|$ empatadas, la varianza toma la siguiente forma:

$$V_{100\% \text{ empates}}[R^+] = \frac{2^r(r^3 + 3r^2 - 2r - 20) + 4(r+1)^2 + 4}{8(2^{r+1} - 1)} \quad (35)$$

Si tomamos el límite a la expresión $V_{100\% \text{ empates}}(R^+)/V(R^+)$, tenemos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_{100\% \text{ empates}}[R^+]}{V[R^+]} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad (36)$$

Esto, quiere decir que, a lo mucho la varianza, $V(R^+)$, se reducirá a un 75% debido a tener todas las diferencias absolutas empatadas. (Ver Figura 4).

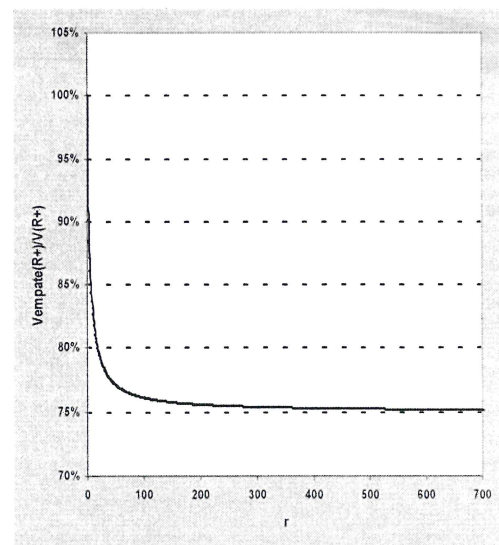


Fig. 4 Comportamiento de $V_{100\% \text{ empates}}(R^+)/V(R^+)$ en relación a r .

Para determinar aproximadamente cuanto disminuye la varianza debido a empates para cierto valor de r , asumamos una relación lineal y hagamos el siguiente análisis:

- Si hay 0% de empates, entonces la varianza representa el 100%.
- Si hay 100% de empates, entonces la varianza representa $V_{100\% \text{ empates}}(R^+)/V(R^+) \%$.

Si definimos la proporción de empates como:

$$P_{\text{empates}} = \frac{(\text{cantidad de empates}) - (\text{cantidad de grupos con empates})}{r-1} \quad (37)$$

La función lineal para determinar aproximadamente hasta cuánto, porcentualmente, disminuye la varianza debido a la cantidad de empates que se encontrarían en el proceso es:

$$P = 1 - P_{\text{empates}} \left(1 - \frac{V_{100\% \text{ empates}}[R^+]}{V[R^+]} \right) \quad (38)$$

Esto nos servirá para “desinflar” la varianza $V(R^+)$, por efecto de los empates, multiplicando a $V(R^+)$, es decir:

$$V_{\text{de sin flada}}(R^+) = p \times V(R^+) \quad (39)$$

De manera que (32) se corrige debido a empates con:

$$R_{\text{corregido}}^+ \sim N\left(\frac{r(r+1)}{4}, p \times \frac{r(r+1)(2r+1)}{24}\right) \quad (40)$$

En la práctica, la varianza se ve poco afectada por esta disminución debido a que la proporción de empates es pequeña en la mayoría de casos.

CONCLUSIONES

La prueba no-paramétrica “R” es útil para contrastar la hipótesis de que las dos muestras fueron extraídas de una misma población o de dos poblaciones con la misma distribución tomando en cuenta todas las diferencias posibles entre las observaciones de dichas muestras observándose una convergencia a la distribución normal para

$r \geq 20$.

La prueba propuesta brinda ventajas adicionales a la tradicional prueba no paramétrica de Mann Whitney para dos muestras independientes y la prueba t-student debido a que es más sensible para detectar diferencias significativas entre dos poblaciones y no pierde potencia de prueba al presentar empates, así como también, maximiza la información disponible en muestras pequeñas, $r \geq 20$.

Lo prueba “R” es capaz de contrastar una hipótesis aún cuando cada muestra tiene todas sus observaciones iguales $S_1^2 = S_2^2 = 0$, problema que no supera la prueba t-Student ni la prueba de Mann Whitney debido a su corrección por empates.

REFERENCIAS

1. Siegel, S., “Non parametric statistics for the behavioural sciences”. McGraw Book Company. New York, USA, pp. 143-155. 1990.
2. http://www.dm.uba.ar/materias/optativas/metodos_no_parametricos/2004/2/, Lima 2007.
3. Montanari, G., Ranalli G., “Non parametric Methods in Survey Sampling”, Developments in Classification and Data Analysis. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
4. Lehmann, E. L., “Theory of Point Estimation”, John Wiley & Sons, New York, pp. 25-28, 1983.
5. Alonso, M., Finn, E., “Física”, Vol. I Mecánica, Fondo Educativo Interamericano, S. A. México, pp. 15-16, 1971.
6. Mataix, C., “Elementos de Estadística Matemática”, 2ª Ed. Dossat, S. A. España, pp. 128-130, 1960.

Correspondencia:

keansa@gmail.com.keansa_sd@yahoo.es

Recepción de originales: enero 2007

Aceptación de originales: mayo 2007