MODELO MATEMÁTICO APLICADO AL CONTROL DEL PROCESO DE CARBÓN EN PULPA

MATHEMATICAL MODEL APPLIED TO THE CONTROL OF CARBON IN PULP PROCESS

Edgar Pérez-Matos^{*1}, Manuel Kurokawa-Guerreros¹, Arturo Lobato-Flores¹, David Romero-Ríos¹, Santiago Valverde-Espinoza¹, Atilio Apolaya-Mendoza¹

¹Facultad de Ingeniería Geológica Minera y Metalúrgica (FIGMM), Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru Nº 210- Rímac-Lima

Recibido (Received): 13 / 10 / 2022 Aceptado (Accepted): 20 / 12 / 2023

RESUMEN

Las relaciones matemáticas obtenidas denotan la complejidad de la operación en la etapa del oro lixiviado y adsorbido en el carbón activado; puesto que en operaciones metalúrgicas reales ocurren pérdidas importantes de oro en solución. Así mismo en la operación de oro adsorbido, revela su alta cinética al inicio y tiende a disminuir al transcurrir tal proceso; llegando a obtener toda la carga de oro que pueda admitir el carbón, para luego mostrar su tendencia opuesta. Además, al ir variando la concentración del carbón repercute en la operación de adsorción; es decir la cinética de oro adsorbido en el carbón disminuye en el tiempo; pero la operación tiene mayor cinética con más volumen de carbón durante la adsorción. Lo mencionado es posible al constituir su respectivo modelo matemático del oro en solución barren y oro cargado en el carbón; luego optimizando con Solver- herramienta Excel los dos parámetros como la capacidad de carga y la constante cinética del carbón activado, ambos ligados íntimamente al proceso; con la condición de obtener un menor error relativo y por consiguiente un mayor grado de confianza. Consiguiendo así asemejar el modelo matemático hacia lo real; prediciendo fehacientemente la operación de oro adsorbido en carbón, variando la velocidad de flujo en el proceso de adsorción.

Palabras clave: Lixiviación, Adsorción, Carbón, Solución barren, Solver.

ABSTRACT

The mathematical relationships obtained denote the complexity of the operation in the leached and adsorbed gold stage on activated carbon; since significant losses of gold in solution occur in real metallurgical operations. Similarly, in the adsorbed gold operation, it reveals its high kinetics at the beginning and tends to decrease as the process progresses; eventually reaching the maximum gold load that the carbon can accommodate, and then showing the opposite trend. Furthermore, varying the concentration of carbon affects the adsorption operation; that is, the kinetics of gold adsorbed on carbon decreases over time, but the operation has higher kinetics with a larger volume of carbon during adsorption. The mentioned aspects are made possible by establishing the respective mathematical model of gold in barren solution and gold loaded on carbon; then optimizing with Solver - an Excel tool - the two parameters, such as the loading capacity and the kinetic constant of activated carbon, both closely linked to the process; with the condition of obtaining a lower relative error and, consequently, a higher degree of confidence. This allows us to closely resemble the mathematical model to reality, accurately predicting the operation of gold adsorption on carbon, while varying the flow rate in the adsorption process.

Keywords: Leaching, Adsorption, Carbon, Barren solution, Solver.

1. INTRODUCCIÓN

Hay varios métodos para recuperar el oro tales como la lixiviación, concentración gravimétrica y flotación. La lixiviación con cianuro siempre fue la operación metalúrgica más usada para la obtención del oro por décadas [1].

La cantidad promedio de oro en la superficie terrestre es de 0.005 g/t, que es bastante más bajo respecto a los siguientes metales en mención; 0.07 g de Ag/t y 50 g de Cu/t. La aleación electrum, con una gravedad especifica

* Corresponding author.:

E-mail: eperezm@uni.edu.pe

de 16-19.3, con un contenido de plata y oro de 45-75 % [2].

Los procesos metalúrgicos tienen problemas con las pérdidas de cianuro y oro en solución. Considerando el precio del mercado mundial actual del oro, las pérdidas de oro de las compañías mineras son muy significativas. De allí que las compañías mineras busquen un modelo matemático que les asegure predicción y control adecuado de la concentración del oro acuoso durante el proceso de adsorción en cualquier etapa [3].

Los objetivos del presente estudio recaen en los siguientes puntos:

- Desarrollar un modelo matemático de control que describa la ley de la solución de oro acuoso en el proceso de adsorción.
- Realizar análisis de sensibilidad y simulaciones con el modelo desarrollado.
- Usar el modelo desarrollado, para deducir la cantidad presente del oro en el proceso de adsorber a un tiempo determinado e interpretar el resultado [4].

El modelo matemático detallado de Control Optimo se vincula íntimamente al Principio Mínimo de Pontryagin, Los diversos problemas dinámicos complejos se solucionan con el respaldo y sustento de la Teoría de Control Optimo, denominado herramienta-técnica matemática; pues el cambio de un sistema dependiente del tiempo puede ser controlado parcialmente por las decisiones de un agente y además utilizado para tomar decisiones que afecten a diversas situaciones muy complejas. Teniendo como objetivo la optimización del comportamiento de los sistemas denominados dinámicos reales, a estos tipos de sistemas se los analiza en la construcción de los modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales parciales, ecuaciones integrodiferenciables, etc [5].

Las variables que pueden influir en la operación de adsorbente del carbón, tales como la cantidad de cianuro, pH, volumen de carbón, tiempo de adsorción del carbón con la solución pregnant, cantidad de carguío del carbón; muestran la concentración de oro en la solución [6].

2. ANTECEDENTES

Durante varios años se han estudiado los modelos matemáticos para conseguir predecir la velocidad de cianuración y también en las reacciones durante la adsorción [7]. Se han publicado numerosas ecuaciones basadas en variadas condiciones a nivel experimental. Por lo general son ecuaciones mecanisticas y otras son empíricas.

La primera investigación comprensible referido a la variación de la velocidad de lixiviación de oro con cianuro de sodio y considerando la concentración de oxígeno fue descrito desde el año 1966 [8]. Las limitaciones de valoración en la ecuación del modelamiento de lixiviación de oro a nivel industrializado, es debido a la dificultad en la medición exacta del área superficial del oro en el mineral y también el espesor de la capa límite de Nernst.

En varias investigaciones se ha mostrado que un par de expresiones pueden derivarse a partir del mecanismo electroquímico de la cianuración de oro y también del modelo del núcleo reducido con pasivación de la superficie [9].

El proceso de lixiviación del oro se puede realizar fuera de un rango óptimo. Por ejemplo, se espera que los consumos de reactivos ($CN^{-} y O^{2}$) sean altos y el comportamiento del proceso este de acorde con la mineralogía del mineral alimentado [10].

El oro tiene que ser concentrado utilizando métodos que promuevan el cambio de fase, así de sólido a solución, o sea lixiviación o disolución [11]. Como indica en un estudio [12], es mucho más fácil concentrar oro de la fase de solución que de la fase sólida. El carbón activado es un adsorbente que aumenta la cantidad de oro en fase de disolución.

La lixiviación de oro del mineral aurífero da como resultado la obtención del oro como ión de cianuro de oro: Au + $2CN^- \rightarrow Au(CN)2^-$ [13]. El complejo iónico reacciona rápidamente con otro ión de carga opuesta tal como el calcio (Ca²⁺), el cual normalmente se tiene en gran cantidad debido a la adición de CaCO3, para formar una especie neutra. La estructura del agua influye en el complejo de cianuro de oro con calcio al variar su estructura. Dando como resultado que el carbón activado cargado neutralmente y con una gran área superficial interna atrape al oro fácilmente, ocurriendo de esta manera la adsorción.

El Método del Principio de Mínimos de Pontryagin, fortalece la Teoría del Control Optimo;_propiciando el mayor control y a su vez logrando que un sistema dinámico se trasfiera de un estado a otro, considerando la presencia de ciertas restricciones para controlar el estado de entrada [14]. Fue desarrollado por el matemático ruso Lev Pontryagin y sus estudiantes por los años 1956. Además, consolidando su caso especial con el cálculo de variaciones de la ecuación de Euler-Lagrange. Se realizan una serie de pasos secuenciales que conllevan a constituir el modelo matemático; que vincula e involucra al oro presente en la solución y simultáneamente también la adsorción de oro por carbón activado en el proceso de lixiviación.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

La carga que pueda adsorber el carbón activado definirá cuánto de oro en la solución se irá al depósito de relave, por lo que sería necesario encontrar un método que asegure predicción y control adecuado de la concentración de oro durante el proceso de adsorción; obviamente involucrando las siguientes parámetros o variables: [15].

- α: carga máxima en el carbón activado, mg /kg.
- k : constante cinética de adsorción, kg/mg.hr
- r: velocidad de flujo del carbón activado, L/hr
- q: velocidad de flujo volumétrico de la solución, L/hr
- t: tiempo, hora/día

La cantidad de oro disuelto que sale del circuito hacia el relave, equivale a la cantidad total de oro disuelto en la solución, contrarrestado con la cantidad de oro adsorbido por el carbón activado; todo acontecido en un tiempo dado. Estas cantidades se obtienen encontrando el producto de las concentraciones y sus respectivas velocidades de flujo volumétrico [16].

Por lo tanto.

$$MinI_{x_{i}}(u) = \int_{t_{i}}^{t_{f}} (qx(t) - ru(t))^{2} dt \quad (1.1)$$

Sujeto a:

$$\dot{X} = k \propto x - kux \tag{1.2}$$

3.2 MODELO: ORO DISUELTO EN SOLUCIÓN. x(t)

x(t): concentración de oro disuelto en solución en función del tiempo. Δt : Intervalo del tiempo.

Deseamos calcular $x(t + \Delta t)$, mediante la expresión:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = k \cdot x(t)$$
(2.1)

Resultando:

$$x'(t) = k.x(t)$$
 (2.2)

Habituando la derivada e integrando ambos miembros de la ecuación resulta:

$$x(t) = C.e^{kt} \tag{2.3}$$

La reciente relación obtenida de oro disuelto que transcurre a través del tiempo podemos habituarlo convenientemente:

$$C = C_2$$
 , $k = \lambda_2$

Obteniendo:

$$x(t) = C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \tag{3.1}$$

Para t=o

Evaluado en: $x(0) = C_2$ También: $x(0) = x_0$ (condición inicial) Luego resulta: $C_2 = x_0$

Finalmente (3.1) resulta:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda_2 t} \tag{3.2}$$

También:

$$\lambda_2 = -\mathbf{K}. \boldsymbol{\alpha} \tag{3.3}$$

x(t): Concentracion de oro disuelto en el proceso de carbón en pulpa a través del tiempo.

Dónde:

- x₀: concentración inicial de oro disuelto en solución; que transcurrido el tiempo en el proceso irá disminuyendo exponencialmente.
- t: tiempo medido en hora/día.
- λ₂: Factor de adsorción de oro en solución hacia el carbón activado.

3.3 MODELO: SOLUCIÓN DE ADSORCIÓN DE ORO POR CARBÓN ACTIVADO. (u_t)

u(t): concentración de oro adsorbido en carbón activado en función del tiempo.

$$u(t) = C_1 C_2 \frac{k}{2r^2} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + C_2 \frac{q}{r} e^{\lambda_2 t}$$
(4.1)

Habituando:

$$u_t = \frac{k}{2r^2} \left(C_1 e^{\lambda_1 t} \right) \left(C_2 e^{\lambda_2 t} \right) + \frac{q}{r} \left(C_2 e^{\lambda_2 t} \right) \quad (4.2)$$

DOI: 10.21754/tecnia.v33i2.1990

Dónde:

- $p(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$ $x(t) = C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$

Al evaluar la ecuación (4.2) en condición inicial; es decir para un tiempo cero tenemos:

• t = 0, u(0) = 0; (concentración inicial de oro en el carbón activado)

Resulta.

$$\frac{k}{2r^2}C_1.C_2 + \frac{q}{r}C_2 = 0 \tag{4.3}$$

Además, en condición inicial e ideal:

La cinética de adsorción de oro en carbón activado (r) es igual (pero de signo opuesto) a la cinética en que la cantidad de oro inicial en la solución (q) vaya disminuyendo en el circuito operativo.

Donde:

$$q - r = 0, \qquad q = r, \qquad \frac{q}{r} = 1$$

Sustituyendo $\frac{q}{r}$ en (4.3) y despejando C₁:

$$C_1 = -\frac{2r^2}{k} \tag{4.4}$$

A continuación, reemplazamos C_1 en (4.1):

$$u_{t} = -C_{2} \cdot e^{(\lambda_{1} + \lambda_{2})t} + C_{2} \frac{q}{r} e^{\lambda_{2} \cdot t}$$
 (4.5)

Dónde:

- $C_2 = x_0$ (concentración inicial de oro disuelto en solución)
- t: horas/día.
- q: velocidad de flujo volumétrico de la solución enriquecida.
- r: velocidad de flujo del carbón activado.
- K: constante cinética empírica o velocidad cinética de adsorción para el oro.
- α: capacidad o contenido oro en el carbón activado.

También:

•
$$\lambda_1 = K. \propto ; \ \lambda_2 = -K. \propto$$

Lo reflejado del modelo matemático para la concentración del oro disuelto en la solución x(t) y la concentración del oro en el carbón activado u(t); ambos a un tiempo dado:

-Viene de la ecuación (3.2)

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\lambda_2 \frac{t}{60}}$$

-Sustituyendo C_2 y habituando la ecuación (4.5)

$$u(t) = -1 + \frac{q \cdot x_0}{r} e^{\lambda_2 \frac{t}{60}}$$
(4.6)

$$U(t) = u(t)10^{-3}$$
(4.7)

Dónde:

- x(t): mg de Oro en solución/L de solución.
- u(t): mayor o igual a "o", mg de Oro en el carbón/L de solución
- Densidad aparente del Carbón activado: 0,4 gr/ml.

Además.

La carga máxima en el carbón activado (α) en el rango entre 3600 y 14200 mg/kg y la constante cinética (K) entre 0.012 y 0.120 kg/mg h. Valores establecidos dentro del rango operativo.

3.4 EL PROCESO DE ADSORCIÓN EN CARBÓN ACTIVADO DEL ORO DISUELTO EN LA SOLUCION

Se manifiesta básicamente ante dos efectos simultáneos:

- x_t : Oro disuelto en solución y durante el tiempo transcurrido "t" se irá empobreciendo.
- *u*_t: Oro adsorbido en carbón activado durante el proceso y se irá enriquecimiento en el transcurso del tiempo "t".

Inicialmente en el proceso de adsorción para un tiempo (t=o), tenemos:

- Concentración inicial de oro disuelto en solución: (x_0)
- Concentración inicial nula de oro en el carbón activado: $(u_0) = 0$

Tabla 1. Adsorción del carbón activado u(t) en concentración de oro en solución x(t).

Т	x _t	x(t): empobreciendo	Ut	u(t): enriqueciendo
0 1 2 3 4 T	$ \begin{array}{c} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \cdot\\ \cdot\\ x_t \end{array} $	$ \begin{array}{c} x_0 - 0 \\ (x_0 - 0) - u_1 \\ [(x_0 - 0) - u_1] \\ - u_2 \\ \{[(x_0 - 0) - u_1] \\ - u_2\} - u_3 \\ [\{[(x_0 - 0) - u_1] \\ - u_2\} - u_3] - u_4 \\ \vdots \\ (\dots \left[\{[(x_0 - 0) - u_1] - u_2\} - u_2\right] - u_1\right] \end{array} $	$U_{0} \\ U_{1} \\ U_{2} \\ U_{3} \\ U_{4} \\ . \\ . \\ U_{t}$	$0 \\ u_1 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ \vdots \\ u_1 + u_2 + u_3 \\ + u_4 \dots u_t$
		$u_4 \rangle \dots - u_t$		

A medida que se empobrece el oro disuelto en solución, tal efecto produce el enriquecimiento de oro adsorbido en el carbón activado, pero siempre un remanente expuesto con destino al relave [17].

3.5 APLICACIÓN INDUSTRIAL

Considerando una planta metalúrgica que ha estado reciclando su carbón activado por un tiempo, el carbón se ha contaminado con calcio y otros compuestos normalmente presentes en el circuito. Por lo que se tendrá un carbón activado de capacidad media de aproximadamente, $\propto = 7000 \text{mg/kg}$ y una velocidad cinética promedio de adsorción K = 0.07 kg/mg. h; valores asumidos inicialmente de acuerdo al rango operativo ya establecido; además q = 1800 l/h y r = 5 l/h.

La concentración de oro inicial de la planta metalúrgica, $x_0 = 0.2mg/l \ y u_0 = 0$ (condición inicial); también de lo establecido tenemos:

$$\lambda_1 = 490, \ \lambda_2 = -490.$$

La ecuación (3.2) resulta:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, 2e^{-490\frac{t}{60}}$$
(5)

La ecuación (4.7) resulta:

$$\mathbf{U}(\mathbf{t}) = \left(-1 + 72e^{-490\frac{\mathbf{t}}{60}}\right)\mathbf{10}^{-3} \qquad (6)$$

A continuación, se muestra los resultados de la concentración de oro disuelto en la solución y oro adsorbido (Tabla 2) a través del tiempo. De Minas Culebras-Huarmey.

 Tabla 2.

 Concentración del oro en la solución "x(t)" y oro adsorbido en carbón activado "U(t)", referido al tiempo. Según muestreo en Planta.

Tiempo Horas	Horas/Día	x(t)	u(t)	U(t) Acum.
0	0	0.2	0	0
1	0.04167	0.1495	0.052	0.052
2	0.08333	0.1110	0.038	0.090
3	0.12500	0.0730	0.027	0.117
4	0.16667	0.0582	0.021	0.138
5	0.20833	0.0371	0.016	0.154
6	0.25000	0.0300	0.010	0.164
7	0.29167	0.0210	0.007	0.171
8	0.33333	0.0140	0.004	0.175
9	0.37500	0.0100	0.0025	0.1775
10	0.41667	0.0070	0.00141	0.17891
11	0.45833	0.0050	0.00072	0.17963
12	0.50000	0.0038	0.00022	0.17985
x	$(0) = 0.2 \frac{\text{mg}}{\text{mg}}$	· II(t) :	$= 0.17985 - \frac{n}{2}$	ng

$$u(t)=0.0038\frac{mg}{dt}$$
; Relave = 0.01635 $\frac{mg}{dt}$;

%recp=89.925%

La concentración inicial de oro " x_0 " en solución, se va reduciendo exponencialmente según

 $x(t) = x_0 e^{\lambda_2 t}$; durante el tiempo de contacto "t" con el carbón activado en la operación de adsorción, manifestándose según la Figura 1.



Fig. 1. Diagrama de la concentración de oro (Au) en solución "mg/l" versus "Horas" (según muestreo en Planta). Tabla 2.

También la concentración del "carbón activado" en el proceso se inicia de cero y de inmediato capta considerablemente oro adsorbido para luego ir en descenso; en suma, resulta carbón enriquecido. Como se refleja en la Figura 2.



Fig. 2. Diagrama del oro adsorbido (Au) en el carbón activado "mg/l" versus "Horas" (según muestreo en Planta). Tabla 2.

Consecuentemente el empobrecimiento de la "solución cianurada" y el enriquecimiento del "carbón activado" ocurre simultáneamente a través del tiempo operativo.

Con las ecuaciones obtenidas (5) y (6) correspondientes a cada modelación matemática en el proceso de la solución en adsorción. Además, considerando los dos parámetros asumidos adecuadamente:

K: 0.07 y \propto = 7000. Se constituye la siguiente Tabla 3.

Tabla 3.Concentración del oro en la solución "x(t)" y del oro adsorbido encarbón activado "u(t)" y su acumulado respectivo "U(t)", respecto altiempo. Según el modelamiento matemático respectivo.

Tien Hor	npo as	Horas/Día	x(t)	u(t)	U(t) Acum.
0		0	0.2000	0	0
1		0.04167	0.1423	0.0502	0.0502
2		0.08333	0.1013	0.0355	0.0857
3		0.12500	0.0721	0.0249	0.1106
4		0.16667	0.0513	0.0175	0.1281
5		0.20833	0.0365	0.0121	0.1402
6		0.25000	0.0260	0.0083	0.1486
7		0.29167	0.0185	0.0057	0.1542
8		0.33333	0.0131	0.0037	0.1580
9		0.37500	0.0094	0.0024	0.1603
10)	0.41667	0.0067	0.0014	0.1617
11	I	0.45833	0.0047	0.0007	01624
12	2	0.50000	0.0034	0.0002	0.1626

$$\begin{split} x(0) &= 0.2 \, \frac{mg}{l} \quad ; \quad U(0,5) \text{=} 0,1626 \frac{mg}{l} \\ u(0,5) \text{=} 0,0034 \frac{mg}{l} \quad ; \quad \text{Relav} = 0,0340 \, \frac{mg}{l} \quad ; \end{split}$$

%recp=81.3%

4. ANÁLISIS DE DATOS

Los datos reportados de planta según muestreo y los datos obtenidos del modelo matemático, a ser evaluados.

4.1 VALIDACIÓN DE DATOS ENTRE EL MODELO Y EL MUESTREO EN PLANTA

A continuación, se muestran los resultados comparativos del muestreo en planta y el modelo matemático.

Método del porcentaje de confianza estadística (≥90%); Tablas 4 y 5.

Δ: Diferencia entre valores reales y valores proyectados (%).

4.2 COMPARACIÓN DEL ORO EN SOL .x(t)

El reporte comparativo de oro en solución, entre lo muestreado y el modelamiento matemático se observa a continuación.

Tabla 4.
Comparación de Oro en solución x(t), entre el muestreo en Planta y
el modelo (para xo = 0.2 mg/lt)

Tiempo	Planta	Modelo	Δ
Horas	x(t)	x(t)	
0	0.2	0.2000	-
1	0.1496	0.1423	4.8700
2	0.1111	0.1013	8.7684
3	0.0730	0.0721	1.2892
4	0.0582	0.0513	11.8984
5	0.0371	0.0365	1.6550
6	0.0300	0.0260	13.4585
7	0.0210	0.0185	12.0278
8	0.0140	0.0131	6.1021
9	0.0100	0.0094	6.4588
10	0.0070	0.0067	4.9123
11	0.0050	0.0047	5.2735
12	0.0038	0.0034	11.3095
	Promedio	Δ(%):	7.3353

Grado de confianza estadística: 92.6647%

4.3 COMPARACIÓN DEL ORO ADSORBIDO.u(x)

Así mismo se contrasta el oro adsorbido en planta y lo manifestado por el modelamiento matemático.

Tabla 5. Comparación de Oro adsorbido en Carbón Activado u(t), entre el muestreo en planta y el modelo (para x₀ = 0,2 mg/lt).

Tiempo	Planta	Modelo	Δ
Horas	u(t)	u(t)	
0	0	0	-
1	0.052	0.0502	3.3976
2	0.038	0.0355	6.6943
3	0.027	0.0249	7.6252
4	0.021	0.0175	16.8616
5	0.016	0.0121	24.1565
6	0.010	0.0083	16.5352
7	0.007	0.0057	19.2758
8	0.004	0.0037	6.6886
9	0.0025	0.0024	5.3006
10	0.0014	0.0014	0.9780
11	0.00072	0.0007	2.0726
12	0.00022	0.0002	3.0516
	Promedio	∆(%):	9.3865
	<i>c</i> .		

Grado de confianza estadística: 90,6135%.

Por comparación entre la data real y lo modelado; se obtuvieron niveles aceptables en el grado de confianza, con un 92.7% para el x(t) y un 90.6% para el u(t), (según tabla 4 y tabla 5).

Además, con cierta tendencia lo cual implica que los dos parámetros considerados inicialmente fueron elegidos con buen criterio, dentro de su rango respectivo.

4.4 APLICANDO SOLVER

Se procedió utilizar Solver herramienta de Excel, que permite aproximar los valores proyectados hacia lo real lo más cerca posible; es decir asemejar el modelo matemático a lo muestreado.

Solver permite recalcular valores de los parámetros (asumidos inicialmente) en "k=0.07" y " α =700" en función de sus variaciones, dentro de sus rangos correspondientes [18].

Permitiendo identificar los valores recalculados en K=0.069655794 y α =6965.579459; extraído de los rangos operativos de k:[0.012 *a* 0.12]; y α :[3600 *a* 14200]. Obteniéndose un error de 15.4%; además con un grado de confianza de 94.7% en x(t) y 89.9% en u(t). Resultados que se detallan a continuación.

- SS: sin solver.
- CS: con solver.
- Gconf: grado de confianza.

	К	Alfa	x(t) Gconf.	U(t) Gconf.	Objetivo (%)
SS	0.07	7000	92.6647	90.6135	16.7217
CS	0.0697	6965.5795	94.6966	89.8624	15.4409

Incógnitas:

- K: 0.069655794
- Alfa: 6965.579459

Función Objetivo: Error neto mínimo que compete a x(t) y u(t) respectivamente.

• 15.44089897

Restricciones:

- 0.012≤K≤0.12
- 3600≤alfa≤14200

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
\$G\$31	Ku (t) Acu.	0.07	0.06955	Continua
\$G\$32	Alfa u(t) Acu.	7000	6965.579	Continua

Informe de Sensibilidad

Celdas de variables

Celdas	Nombre	Final Valor	Reducido Degradado
\$G\$31	Ku(t) Acu.	0.069655794	0
\$G\$32	Alfau(t)Acu.	6965.579459	0

Restricciones NINGUNO

A continuación, se muestran las lecturas comparativas identificadas en la siguiente Tabla 6 y Tabla 7 respectivamente.

 Tabla 6.

 Reporte de valores comparativos de x(t), entre muestreo en planta y modelo matemático, según Solver.

Tiempo	Planta:	Modelo:		
Horas	x(t)	x(t)	Δ(%)	ABS
0	0.2000	0.2	-	-
1	0.1496	0.1428	4.551873	4.551873
2	0.1110	0.1019	8.157218	8.157218
3	0.0730	0.0728	0.295639	0.295639
4	0.0582	0.0520	10.714068	10.714068
5	0.0371	0.0371	-0.000258	0.000258
6	0.0300	0.0265	11.707710	11.707710
7	0.0210	0.0189	9.947920	9.947920
8	0.0140	0.0135	3.560708	3.560708
9	0.0100	0.0096	3.605766	3.605766
10	0.0070	0.0069	1.684493	1.684493
11	0.0050	0.0049	1.730428	1.730428
12	0.0038	0.0035	7.684531	7.684531
Error relative	5.303384			
Grado de confianza: 94.6966				

Valores comparativos de x(t) se reflejan en la siguiente Fig.3.



Fig. 3. Aproximación de oro en solución del modelo respecto a lo muestreado en planta. (Concentración de oro en solución - mg/lt versus Horas).

También el oro en solución ante el carbón activado, se manifiesta en la siguiente Tabla 7.

 Tabla 7.

 Reporte de valores comparativos de u(t), entre muestreo en planta y modelo matemático, según Solver.

Tiempo Horas	Planta: u(t)	Modelo: u(t)	Δ(%)	ABS
0	0	0	-	-
1	0.0520	0.0504	3.068186	3.068186
2	0.0380	0.0357	6.051643	6.051643
3	0.0270	0.0252	6.658125	6.658125
4	0.0210	0.0177	15.680055	15.680055
5	0.0160	0.0124	22.774785	22.774785
6	0.0100	0.0085	14.644327	14.644327
7	0.0070	0.0058	17.029468	17.029468
8	0.0040	0.0039	3.486492	3.486492
9	0.0025	0.0025	1.192303	1.192303
10	0.0014	0.0015	-4.790835	4.790835
11	0.0007	0.0008	-6.785041	6.785041
12	0.0002	0.0003	-19.488915	19.488915
Error relativo promedio:			4.960049	10.137515
Grado de co	nfianza:			89.862485

Valores comparativos de u(t) se manifiestan en la siguiente Fig. 4.





Al conseguir x(t) y u(t), mostrado en las Fig.3 y Fig.4 mediante el modelamiento matemático y haberse sometido a Solver; la proximidad que se consigue es asemejar lo suficientemente a lo real; por cuanto se logra la representatividad de lo modelado hacia lo muestreado en planta.

Sintetizando las lecturas de la Tabla 6 y Tabla 7, se obtiene la siguiente Tabla 8.

Tiempo Horas	x(t),Ac(-)	u(t),Ac.(+)	%Ac.(+)
0	0.2	0	0
1	0.1428	0.0504	25.2023
2	0.1019	0.0861	43.0525
3	0.0728	0.1113	55.6536
4	0.0520	0.1290	64.5072
5	0.0371	0.1414	70.6852
6	0.0265	0.1499	74.9530
7	0.0189	0.1557	77.8570
8	0.0135	0.1596	79.7872
9	0.0096	0.1620	81.0223
10	0.0069	0.1635	81.7611
11	0.0049	0.1643	82.1455
12	0.0035	0.1646	82.2770

Tabla 8. Reporte de los valores de x(t) y u(t), provenientes del modelo matemático, según Solver.

El efecto simultaneo del empobrecimiento de la solución de oro x(t) y la adsorción en carbón activado u(t), se visualiza en la Tabla 8 y se ve reflejado en la siguiente Fig.5.



Fig. 5. Efecto de adsorción en solución de oro en carbón activado.

87

La Fig. 5, muestra el descenso de oro en solución tan pronto y simultaneo el aumento de oro adsorbido por el carbón activado, además se logra una recuperación del 25% en una hora y un complemento del 74% en 6 horas del proceso de adsorción. Llegando finalmente a un 82.3% de recuperación. Que sin duda conlleva a una posterior simulación del proceso de carbón activado en planta.

4.5 SIMULACIÓN

Variando la velocidad de flujo del carbón activado_(r_i) y considerando los dos parámetros ya identificados; capacidad promedio del carbón activado ($\propto = 6965.5795 mg/kg$), velocidad cinética promedio de adsorción (K = 0.0697 kg/mg.h). Además, la velocidad de flujo volumétrico de la solución que contiene oro (q = 40000 l/h) y su concentración inicial (x₀ = 0.8 l/h); valores que al ser reemplazado en la ecuación (4.6) resulta:

$$u(t) = -1 + \frac{32000}{r_{\rm i}} e^{-485.193\frac{t}{60}} \quad (7)$$

La elección del flujo de carbón activado en un sistema de adsorción depende de las especificaciones de diseño del sistema. Por ello el tiempo de residencia del sistema es un factor determinante.

Esto se evidencia según la siguiente Tabla 9 y Tabla 10 y se ve reflejado en la Fig.6 y Fig.7; correspondientes al muestreo y modelamiento; que describe el efecto y comportamiento del oro adsorbido en el carbón activado en función del tiempo dado u(t), cuándo se varía su velocidad de flujo" r_i ". Variando " r_i " en forma ascendente de por si disminuye la adsorción de oro y más aún al transcurrir el tiempo de contacto entre la solución y el carbón activado, lecturas que se muestran a continuación. Tabla 9.

 $\label{eq:Tabla 9.} {\mbox{Concentración de oro adsorbido u(t), de acuerdo a la velocidad de flujo "r_i". Según el muestreo en planta.}$

Tiempo				ri :							
	(Fracción	- 10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Horas	de un día)	10 l/h	201/h	30 l/h	401/h	50 l/h	60 l/h	70 l/h	80 l/h	90 l/h	100 l/h
1	0.04167	2.28099	1.14000	0.75966	0.56950	0.45540	0.37933	0.32498	0.28425	0.25255	0.22720
2	0.08333	1.62635	0.81267	0.54145	0.40584	0.32447	0.27022	0.23147	0.20242	0.17981	0.16173
3	0.12500	1.15383	0.57641	0.38394	0.28771	0.22997	0.19147	0.16397	0.14335	0.12731	0.11448
5	0.20833	0.58341	0.29121	0.19380	0.14510	0.11588	0.09640	0.08248	0.07205	0.06393	0.05744
6	0.25000	0.41576	0.20738	0.13792	0.10319	0.08235	0.06846	0.05853	0.05109	0.04531	0.04068
7	0.29167	0.29475	0.14687	0.09758	0.07294	0.05815	0.04829	0.04125	0.03597	0.03186	0.02857
8	0.33333	0.20480	0.10190	0.06760	0.05045	0.04016	0.03330	0.02840	0.02473	0.02187	0.01958
9	0.37500	0.14867	0.07383	0.04889	0.03642	0.02893	0.02394	0.02038	0.01771	0.01563	0.01397
10	0.41667	0.10784	0.05342	0.03528	0.02621	0.02077	0.01714	0.01455	0.01261	0.01109	0.00988
11	0.45833	0.07624	0.03762	0.02475	0.01831	0.01445	0.01187	0.01003	0.00865	0.00758	0.00672
12	0.50000	0.05381	0.02641	0.01727	0.01270	0.00996	0.00814	0.00683	0.00585	0.00509	0.00448
13	0.54167	0.03790	0.01845	0.01197	0.00872	0.00678	0.00548	0.00456	0.00386	0.00332	0.00289
14	0.58333	0.02660	0.01280	0.00820	0.00590	0.00452	0.00360	0.00294	0.00245	0.00207	0.00176
15	0.62500	0.01859	0.00879	0.00553	0.00390	0.00292	0.00226	0.00180	0.00145	0.00118	0.00096
16	0.66667	0.01360	0.00630	0.00387	0.00265	0.00192	0.00143	0.00109	0.00082	0.00062	0.00046
17	0.70833	0.00886	0.00393	0.00229	0.00147	0.00097	0.00064	0.00041	0.00023	0.00010	0.00000
18	0.75000	0.00600	0.00250	0.00133	0.00075	0.00040	0.00017	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
19	0.79167	0.00397	0.00148	0.00066	0.00024	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
20	0.83333	0.00253	0.00076	0.00018	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Y se ve reflejado en la siguiente Fig. 6.



Fig. 6. Cantidad de oro en el carbón versus tiempo para entradas variables de carbón (Según el muestreo en Planta).

Y simulando según el modelo matemático se proyecta las siguientes lecturas mostrado en la Tabla 10 [19].

 Tabla 10.

 Concentración de oro adsorbido u(t), de acuerdo a la velocidad de flujo "r.". Según el modelo.

Tiempo		${\cal r}_i$ velocidad de flujo volumétrico del carbón activado (lt/h)										
	(Fracción	-										
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
Horas	de un día)											
1	0.04167	2.28365	1.14132	0.76055	0.57016	0.45593	0.37977	0.32538	0.28458	0.25285	0.22746	
2	0.08333	1.63013	0.81456	0.54271	0.40678	0.32523	0.27085	0.23202	0.20289	0.18024	0.16211	
3	0.12500	1.16355	0.58127	0.38718	0.29014	0.23191	0.19309	0.16536	0.14457	0.12839	0.11545	
5	0.20833	0.59260	0.29580	0.19687	0.14740	0.11772	0.09793	0.08380	0.07320	0.06496	0.05836	
6	0.25000	0.42280	0.21090	0.14027	0.10495	0.08376	0.06963	0.05954	0.05198	0.04609	0.04138	
7	0.29167	0.30157	0.15029	0.09986	0.07464	0.05951	0.04943	0.04222	0.03682	0.03262	0.02926	
8	0.33333	0.21502	0.10701	0.07101	0.05301	0.04220	0.03500	0.02986	0.02600	0.02300	0.02060	
9	0.37500	0.15323	0.07612	0.05041	0.03756	0.02985	0.02471	0.02103	0.01828	0.01614	0.01442	
10	0.41667	0.10911	0.05406	0.03570	0.02653	0.02102	0.01735	0.01473	0.01276	0.01123	0.01001	
11	0.45833	0.07762	0.03831	0.02521	0.01865	0.01472	0.01210	0.01023	0.00883	0.00774	0.00686	
12	0.50000	0.05513	0.02706	0.01771	0.01303	0.01023	0.00835	0.00702	0.00602	0.00524	0.00461	
13	0.54167	0.03907	0.01904	0.01236	0.00902	0.00701	0.00568	0.00472	0.00401	0.00345	0.00301	
14	0.58333	0.02761	0.01330	0.00854	0.00615	0.00472	0.00377	0.00309	0.00258	0.00218	0.00186	
15	0.62500	0.01943	0.00921	0.00581	0.00411	0.00309	0.00240	0.00192	0.00155	0.00127	0.00104	
16	0.66667	0.01358	0.00629	0.00386	0.00265	0.00192	0.00143	0.00108	0.00082	0.00062	0.00046	
17	0.70833	0.00941	0.00421	0.00247	0.00160	0.00108	0.00074	0.00049	0.00030	0.00016	0.00000	
18	0.75000	0.00643	0.00272	0.00148	0.00086	0.00049	0.00024	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
19	0.79167	0.00431	0.00165	0.00077	0.00033	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
20	0.83333	0.00279	0.00089	0.00026	-0.0001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	

Y se ve reflejado en la siguiente Figura 7.



Fig. 7. Cantidad de oro en el carbón versus tiempo para entradas variables de carbón (según el modelo)

Las figuras 6 y 7 resultan muy similares, lo cual corrobora la proximidad del modelo ante lo real; es decir ya es posible asemejar lo modelado con lo muestreado. Esto es manteniendo los parámetros dentro de sus rangos operativos del proceso de adsorción en planta (pH, concentración de cianuro, oxígeno disuelto, etc.). Además, considerando los valores de α y k obtenidos por Solver. [20]Además, considerando los valores de α y k obtenidos por Solver. [20]

CONCLUSIONES

Resaltar que el modelo matemático de la concentración de oro disuelto. x(t) y de la concentración de oro en el carbón activado. u(t); complementado con la aplicación Solver-Excel es fundamental en la obtención de los valores óptimos de los dos parámetros, como la capacidad de oro en el carbón (α) y de la cinética de adsorción para el oro (k). Para recién proceder recién con la simulación.

El modelo optimo desarrollado proporciona un panorama general en el proceso de la etapa de oro lixiviado y adsorbido en el carbón activado.

El modelo revela que el proceso es veloz y repentino inicialmente y es más lento con el transcurrir del tiempo, hasta que el carbón activado alcanza su capacidad de carga, en tanto la solución con oro disuelto se empobrece.

El modelo manifiesta simultáneamente, que la velocidad a la que el oro inicial en solución disminuye es igual pero opuesto a la velocidad en qué es adsorbida por el carbón activado; velocidad que depende de la capacidad máxima del carbón.

En la validación de datos entre el Modelo y el Muestreo en Planta, por el método del porcentaje de grado de confianza estadística se obtienen resultados entre el 90 % a 94%, lo que indica una buena confiabilidad de los datos de Planta con el modelo, tanto en oro en solución como oro adsorbido por el carbón activado.

Finalmente es posible proyectar-predecir los resultados de adsorción de oro en el carbón activado, variando la velocidad de flujo (rl). Corroborado en el Apéndice.2 y Apéndice.3; donde las lecturas comparativas se confunden.

REFERENCIAS

- [1] A. R. Bailón, S. F. Chávez y R. M. Sandoval, "Obtención de metales preciosos a partir de residuos sólidos mineros o relave", Industrial Data, vol.12, no. 1, pp. 41-46, Ene. 2009. [En línea]. Disponible en:
- https://www.redalyc.org/pdf/816/81620149007.pdf [2] J. R. Parga y F. R. Carillo, "Avances en los métodos de recuperación de oro y plata de minerales refractarios". Revista de Metalurgia, vol. 32, no. 4, pp. 254-261, Jul. 1996. [En línea].
 - Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7707279
- [3] I. R. Eleazar, F. R. Carrillo, F. P. Hernández y H. E. Leticia, "Mejora del proceso de cianuración de oro y plata, mediante la peroxidación de minerales sulfurosos con ozono". Rev. Soc. Quím. Méx., vol.48, no. 4, pp. 52-55, Oct. 2004. [En línea]. Disponible en: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=

So583-76932004000400021

- [4] M. O. Bustamante, A. J. Daza y M. J. Bustamante-Baena P, "Simulación de plantas de procesamiento de minerales a través de MODSIM®". Boletín de Ciencias de la Tierra, vol.39, pp. 33-37, Ene. 2016. [En línea]. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/1695/169543502004.pdf
- [5] J. A. Ruiz, C. A. López, M.E. Carmona y W. H. Bolívar. "Modelamiento estadístico y optimización del proceso de cianuración de un mineral aurífero". Facultad de Ingeniería vol.28, no.53, pp.33-51, Jun. 2019. [En línea]. Disponible en: https://www.redalyc.org/journal/4139/413961282002/html/
- [6] A. Ll. Gonzalo, "Adsorción del cianuro contenido en solución acuosa usando carbón activo obtenido de residuo de café: eficiencia de absorción, modelado de equilibrio y cinética", Scientia Agropecuaria vol.10, no.3, Jul. 2019. doi: 10.17268/sci.agropecu.2019.03.01
- [7] J. A. Ruiz, C. A. López, M. E. Carmona y W. Bolivar, "Modelamiento estadístico de la lixiviación con cianuro de un mineral del municipio de Andes, Colombia, como alternativa al proceso de amalgamación", Revista Logos, ciencia y tecnología, vol.11, no. 2, pp. 126 – 137, Nov. 2019. doi: 10.22335/rlct.v112.826
- [8] A. P. Jiménez, E. S. López, A. R. Rodríguez y C. D. López, "Gestión sustentable de pilas e intervenciones educativas para mitigar sus efectos en la salud humana y el ambiente", Horizonte Sanitario vol.10, no. 2, pp. 29-57, May. 2011. [En línea]. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/4578/457845138003.pdf
- [9] Y. B. Eng, N. Eshtiaghi, J. Wu y 2P. Rajarathinam, "Optimum solids concentration for solids suspension and solid–liquid mass transfer in agitated vessels", Chemical Engineering Research and Design vol. 100, pp. 148-156, Ag. 2015. doi: 10.1016/j.cherd.2015.05.021

AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen al director Alberto Landauro Abanto, de la escuela de metalurgia, de la FIEMM-UNI, por brindar y poner a disposición del laboratorio químico. Así mismo a la empresa ACOMISA S.A. – ASERORES Y CONSULTORES MINEROS, por el financiamiento y poder realizar hasta culminar tan importante trabajo de investigación.

- [10] S. M. Arias, J. D. Cordova y M. A. Gómez, "Alternativas de aprovechamiento de residuos de la industria minera de El Bajo Cauca Antioqueño en el sector de la construcción", EIA, vol. 18, no. 36, pp. 1-12, May. 2021. doi: 10.24050/reia.v18i36.1496
- [11] C. Feijoo, E. De la Torre, R. Uribe, "Determinación de la capacidad de adsorción del complejo oro-cianuro en compósitos de carbón activado-vidrio", Revista de química teórica y aplicada, vol.6, no. 588, pp. 299-306, 2019. [En línea]. Disponible en:

https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7190750

- [12] N. Hidalgo, A. Diaz, V. Bazán y P. Sarquis, "Mejora en la Recuperación de Au Y Ag mediante Cianuración en escorias de fundición", Avances en Ciencias e Ingeniería, vol.5, no.1, pp.23-29, Ene. 2014. [En línea]. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/3236/323630173003.pdf
- [13] L. R. Andrade, "Dynamic simulation of the carbon-inpulp and carbon-in-leach processes", Brazilian Journal of Chemical Engineering, vol. 24, no. 04, pp. 623 – 635, Oct. 2007. [En línea]. Disponible en:

https://www.scielo.br/j/bjce/a/DtMJ7scYrYPnVnzFRVJ7y8R/?for mat=pdf

- [14] W. Divyamaan, R. P. Utikar, M. O. Tade y V. K. Pareek, "Simulación y análisis de circuitos de carbono en lixiviación (CIL)", Computer Aided Chemical Engineering, vol. 31, pp. 1206 – 1210, Ag. 2012. doi: 10.1016/B978-0-444-59506-5.50072-9
- [15] I. R. Eleazar, I. Rivera, F. R. Carrillo, F. J. Patiño y H. E. Leticia, "Mejora del proceso de cianuración de oro y plata, mediante la preoxidación de minerales sulfurosos con ozono". Revista de la Sociedad Química de México, vol. 48, no. 4, pp. 52-55, Oct. 2004. [En línea]. Disponible en: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=

S0583-76932004000400021

- [16] W. Bolívar, J. R. Córdova, C. A. López y M. E. Carmona, "Modelamiento estadístico de la lixiviación con cianuro de un mineral del municipio de Andes, Colombia, como alternativa al proceso de amalgamación". Revista Logos, Ciencia y Tecnología, vol.11, no.2, pp.126-137, May. 2019. doi: 10.22335/rlct.v11i2.826
- [17] A. Barrios, H. Vaquera, J. M. Romero, J. Crossa y E. Burgute, "Estudio comparativo de técnicas de optimización multirespuesta en diseños experimentales". Ingeniería, investigación y tecnología, vol.21, no. 2, Ag. 2020. doi: 10.22201/fi.25940732e.2020.21n2.016

[18]C. A. Eyzaguirre, "Excel Aplicado- Ingenieros", Editorial Macro, Eyzaguirre https://editorialmacro.com/catalogo/excel-aplicado-aingenieros/

[19]M. A. Mas, F. L. Aguirre y G. Amaya, "Evaluación de los Procesos de Lixiviación por Agitación Convencional y Carbón en Pulpa en la Hidrometalurgia del Oro", Información Tecnológica, vol. 16, no.5, pp. 27-33, Set. 2005. doi: 10.4067/S071807642005000500006

[20] P. A. Sánchez, F. Ceballos y G. Sánchez, "Análisis del proceso productivo de una empresa de confecciones: modelación y

Los artículos publicados por TECNIA pueden ser compartidos a través de la licencia Creative Commons: CC BY 4.0. Permisos lejos de este alcance pueden ser consultados a través del correo revistas@uni.edu.pe

simulación". Ciencia e Ingeniería Neogranadina, vol. 25, no. 2,

Jul. 2015. doi: 10.15665/re.v13i1.348