

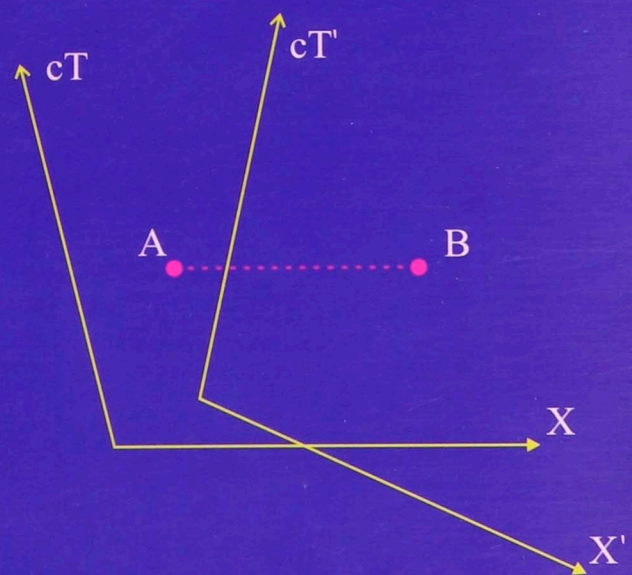
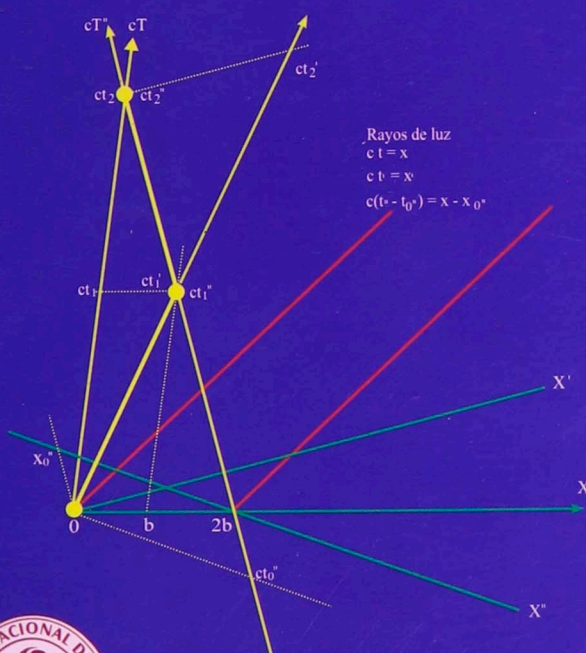
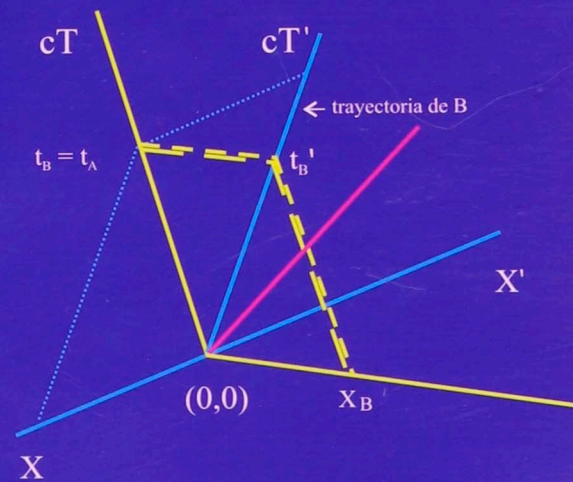
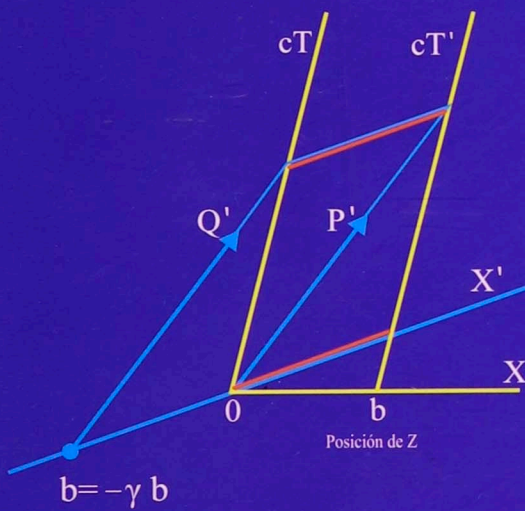
# REVCIUNI

VOLUMEN 14

NÚMERO 1

ENERO - AGOSTO 2011

## Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

LIMA - PERÚ

## AUTORIDADES UNIVERSITARIAS

### RECTOR

Dr. Aurelio Padilla Ríos

### PRIMER VICERRECTOR

Geol. José Martínez Talledo

### SEGUNDO VICERRECTOR

Mag. Walter Zaldívar Álvarez

### DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS

Dr. Humberto Asmat Azahúanche

**Caratula:** Cuando la nave  $Q'$  (es decir,  $S'$ ) alcanza al instituto  $H$ , entonces según  $S'_1$ , la nave  $S'_2$  (es decir,  $P'$ ) alcanza a la estrella  $Z$ . Aquí,  $|HZ|_{S'} = b'$ .

Representación de los tres sistemas de referencia  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ .

El gemelo  $A$  se mantiene en el origen espacial de la referencia  $S$  ( $X, cT$ ), avanzando sólo temporalmente durante  $t_A$  segundos, mientras que  $B$  avanza desde el origen ( $0', 0'$ ) con velocidad  $V = V_{S'S}$ , siendo sus coordenadas  $(t_B, x_B)$ , con  $t_B = t_A$ ,  $x_B = Vt_B$ . En su propia referencia,  $B$  avanza temporalmente durante  $t'_B = \gamma(t_B - \frac{V}{c^2} x_B) = \frac{t_B}{\gamma}$  segundos.

Los eventos  $A$  y  $B$  son simultáneos en  $S$ , pero no pueden serlos en  $S'$  (salvo que  $V_{SS'} = 0$ ).



# Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI-REVCUNI

Volumen 14, Número 1, enero-agosto 2011

ISSN: 1813-3894

Publicada por el Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias  
de la Universidad Nacional de Ingeniería

Director del Instituto de Investigación  
Dr. Orlando Luis Pereyra Ravinez

Editor: Dr. Rosendo Ochoa Jiménez

## Comité Científico

- Dr. Javier Solano
- Dr. Héctor Loro
- Dr. Armando Bernui

La revista se distribuye en la Facultad de Ciencias – UNI  
Av. Túpac Amaru 210 - Rimac Lima - Perú  
Página web: <http://fc.uni.edu.pe/revciuni>  
E-mail: [posgrado@uni.edu.pe](mailto:posgrado@uni.edu.pe)

Registro de Depósito Legal No 15010199-3597  
Revista indexada en el LATININDEX

---

Impreso en los Talleres Gráficos de:  
**CONTACTO GRÁFICO PERÚ S.R.L.**  
☎ 482 5252 / 381 3992 Fax: 482 7055  
E-mail: [contacto.graficoperu@gmail.com](mailto:contacto.graficoperu@gmail.com)

---

## EDITORIAL

La Facultad de Ciencias buscando mejorar el buen desempeño de sus estudiantes ha hecho posible que se apruebe el Proyecto de Inversión Pública: “Mejoramiento de los Servicios Complementarios en Apoyo a la Actividad Académica en la Facultad” con lo cual se piensa contar en un futuro próximo, con una nueva edificación que tendrá aulas modernas y laboratorios bien equipados, se piensa contar con una amplia biblioteca que tendrá material bibliográfico actualizado y un auditorio de gran capacidad, dicho proyecto se encuentra en proceso de construcción.

Considero importante que la Facultad de Ciencias siga brindando el apoyo necesario a los proyectos de investigación los mismos que podrían concluir con la publicación de los resultados obtenidos y con una ponencia, nuestra Facultad siempre estará comprometida con el desarrollo de la ciencia en el país, a fin de que en el futuro nuestros profesionales egresados dejen en alto el buen nombre de la Universidad Nacional de Ingeniería.

El agradecimiento a todos las personas que con esfuerzo y dedicación han hecho posible la presente publicación de REVCIUNI.

Dr. HUMBERTO ASMAT A.  
Decano  
Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Ingeniería



task that may be effectively performed by the *exploratory data analysis*: nowadays referred to as *data mining* in the Anglosaxon world, it is a detective work (Diggle et al., 1994) aiming at revealing the structures and relations that may be found in the data. The methods developed in this framework aim at grasping the most of information in a highly synthetic and easily understandable way, that helps the user to formulate some hypotheses concerning relations among characters, existence of classes of objects with specific features, identification of latent factors, etc..

Here we limit our attention to the so-called *tandem analysis* (Arabie and Hubert, 1994), the use in sequence of well-known techniques which aim at reducing the data dimension through both *ordination* and *classification* (Whittaker, 1967): *Principal Component Analysis* (PCA, Legendre and Legendre, 1983; Lebart et al., 1984) and *Hierarchical Ascendent Classification* (HAC, Anderberg, 1973; Benzécri, 1973-82; Legendre and Legendre, 1983; Lebart et al., 1984; Gordon, 1999). In fact, the quest of an optimal ordering may lead to the identification of some *factors* whose action on the observed objects is revealed by the values of the characters taken into account. So the factors can explain the objects diversity, whereas an optimal classification may group them into classes that may be considered as sub-populations of objects with different properties. The tandem analysis, albeit severely criticized by Arabie and Hubert (1994) is still largely used in most applications, nor really alternative practical methods have been proposed in literature so far. It aims first at identifying the factors and then at classifying the units according only to the factors that have been chosen and interpreted. In this way, the structure found by the classification, as well as its interpretation through the original variables, becomes helpful for a better understanding of the factors themselves. Both methods have been long used in applied sciences since the '70s, when computer programs that could perform these tasks became widely available. As well, they were also misused (see Camiz, 1991, for a discussion), with the attempt to force their use largely beyond their actual abilities: in particular, no statistical inference of exploratory analysis results may be done to the reference population. This is the reason why the hypotheses that were formulated during this step must be validated by further investigations that use other techniques, before that one can accept them as knowledge. Indeed, Tukey (1977) already warned that

"...exploratory data analysis can never be the whole story"

but he added that

"... nothing else can serve as the foundation stone - as the first step."

Actually, exploratory data analysis is presently largely developed and adopted in all fields where quantitative methods are used and even in some other where the methods are still qualitative, but whose texts may be explored via *exploratory textual analysis* (Lebart and Salem, 1994). As simple examples of exploratory analysis

utility, consider how can be useful to know that a population is structured according to some particular feature, when one wants to do a sampling: in this case a stratified sample will be much more effective than a pure random one; or to find that two characters are independent, if the identification of their relation, or worst its modelling, would require an expensive experimental design.

## 4.2 The confirmatory phase

In this phase one may want to test to what extent the hypotheses formulated in the exploratory phase may be taken as true and contribute to form a new knowledge. In particular, one may want to quantify the intensity and the form of the relations among the objects, the characters, the classes, etc. This is the typical framework where the statistical methods are applied, such as parameters point and interval estimates, hypothesis testing, identification of a distribution, etc. The *confirmatory analyses* applied in this phase are based on probabilistic models, where the distribution of a searched parameter is essential for accepting/rejecting the results, such as the modelling of a relation between two or more characters, through regression and ANOVA.

It must be reminded that, albeit the computer programs run any method with any data set, the statistical inference of the confirmatory analysis results to the reference population is possible only if the sampling has been done appropriately: a check that no computer program can do but only the awareness of the scientist. In this framework the information obtained within the exploratory phase may be used with two purposes: on one side, it addresses to both relations and hypotheses that appear more relevant and deserve being studied and tested first, and on the other it helps identifying both the population and characters distributions, that can be used in the experimental design and sampling.

In our work, we wanted to identify first the sources of variation among the different factors that were supposed to influence the indicators levels and then, among the levels of the ascertained sources, which levels were significantly different. Thus, we assumed as null hypothesis that all means of all indicators were homogenous for all levels and all factors. As test for the homogeneity of the means we used a two-step procedure, based on the classical *analysis of variance* (ANOVA, Scheffé, 1959; Mood et al., 1974; Legendre and Legendre, 1983), that allowed us to work on all factors at the same time. When the null hypothesis was rejected, ANOVA was followed by four different *multiple comparisons* (Tukey, 1953; Miller, 1981), to detect which factors levels had different means. Our choice was to use some of them and compare the results prior to take a decision, to avoid to take as homogenous means that are not such in reality.

## 4.3 The modelling phase

In this phase, a theoretical and formalised (mathematical) description of the observed phenomenon is given, able of giving evidence of the relations observed. It is clear that grounding a model on well-proved exist-

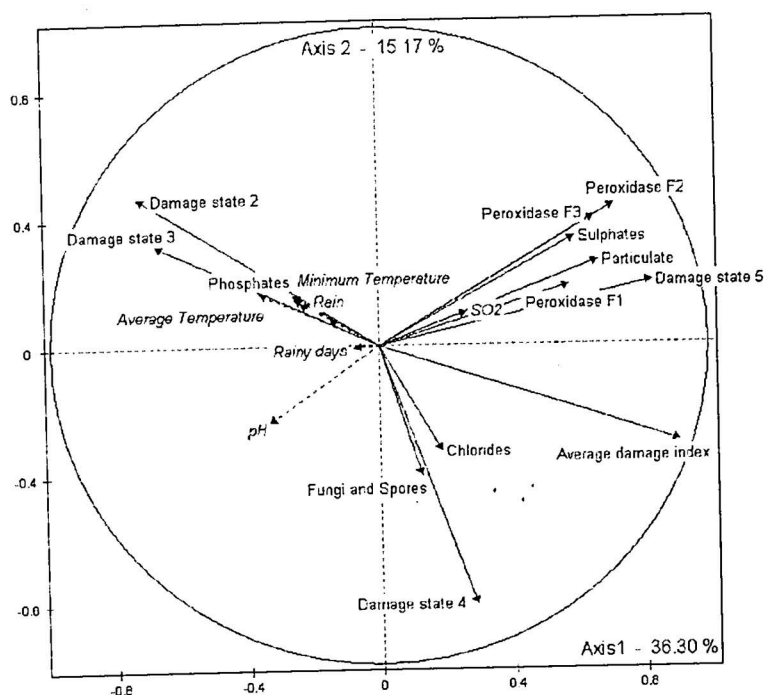


Figure 1. PCA: Representation of indicators on the plane spanned by the principal axes 1 and 2.

ing relations, rather than on purely theoretical matters, may avoid dramatic mistakes, that may depend on a too partial knowledge of the phenomenon. So, the three-step pathway proposed here should avoid this loss of reality in model building. In this phase, the data must be used for the *calibration* of the model, say the estimation of the model's appropriate parameters, and to test the effectiveness of the model, as measured by the analysis of the residuals: it is clear that the most different data sets are used to evaluate its application range, the better calibration may result.

Actually, such a subdivision in three phases can be considered useful at every level of an investigation which aims at a knowledge progress, in a somewhat fractal repetition of this scheme. The use of this three-steps procedure, in particular the attention devoted to these steps and their corresponding paradigms and techniques, may be very helpful to the scientist. Indeed, the three phases are so different that only their knowledge may indicate to the scientist the specific use of the techniques, the caveats to notice in exploratory data analysis, the importance of the quality of the sampling in confirmatory analysis, the selection of the specific tools to use in each step, etc.. The advantage to proceed to a modelling after a better knowledge of the data structure is the acquired ability to tailor the model in order to fit the data in the best way. One may wonder if many doubts concerning pollution, glasshouse effects to the climate, and the development of particular ecological environment may depend sometimes on a questionable definition of the models used for

the interpretation of the phenomenon.

## 5 Optimization

It is interesting to observe that all data analysis methods used in all phases are based on optimization. The paradigm used in data analysis is that the information may be measured by the *inertia*, the multidimensional generalization of variance. Indeed, since the individuals are currently represented as point in a Euclidean vector space, it is natural to consider the inertia of a cloud of points relative to a point, a straight line, a plane, etc. as the weighed sum of squared distances of each point to that point, line, or plane. Weights are usually given each point either equal or not, according to the specific situation, provided that they sum up to 1.

So, both Principal Component Analysis and Hierarchical Cluster Analysis are based on inertia decomposition, via an optimization procedure. For *PCA*, the basic idea is to find step by step, in the vector space spanned by the set of the indicators, the vector that spans the straight line both with minimum distance from all the individual points and orthogonal to the ones previously found. Considering the decomposition of the distances of points to the origin and its sum of squares, that is the inertia of the points cloud, this is the same as searching the straight lines on which the projection of all the points is maximum.

For *HCA* of a set of objects, the process is more free, since the construction of a hierarchy requires the following steps:

- decide a criterion for associating the objects into groups;
- choose an association index and compute it for all



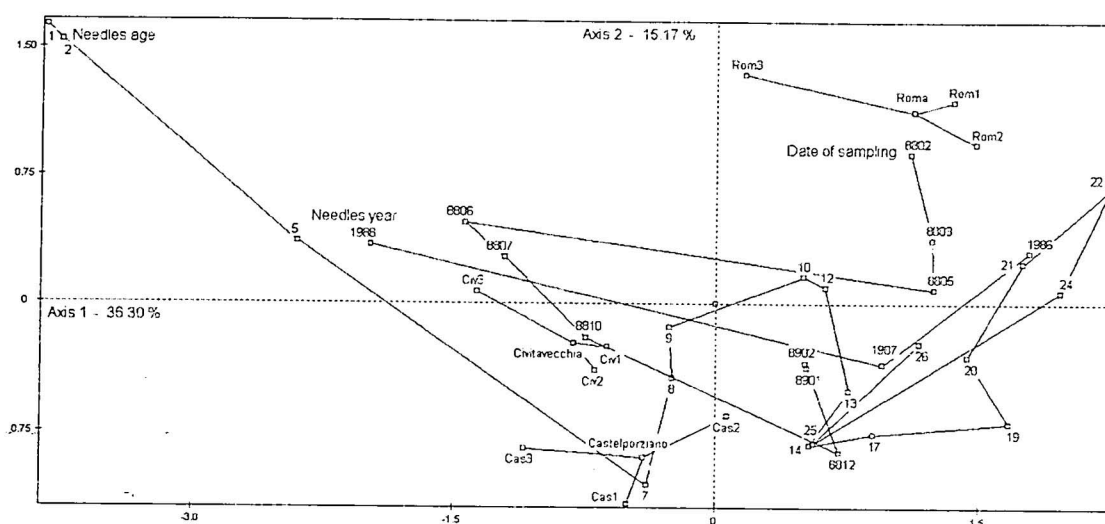


Figure 2. PCA: representation of the factors levels on the plane spanned by the principal axes 1 and 2.

pair of objects;

- choose a criterion (objective function) for the selection of pair of items (objects or groups) to be merged at each step;
- seek the the pair of items that by merging optimize the objective function;
- choose a criterion to recalculate the index once two items are merged.

Indeed, dealing with the classification of units represented in a factor space, the natural choice was to use the within-groups inertia as measure of association. Thus, our objective function was to minimize its increase at each step.

In what concerns both confirmatory and modelling phases, both *ANOVA* and linear or non-linear regression solutions consist in minimizing the error sum of squares, thus the same concept as the inertia, but limited to one variable at a time. In fact, in this case, the results are the parameter that minimize the deviation of the observed data from the model.

## 6 Results

The ecological phenomena are always rather complex, since they involve a high number of heterogeneous co-occurrent characters. Nevertheless, their relations are of high importance to understand both the happening of the phenomenon itself and the rationale of their influence on the objects taken into account. So, we thought it really important to adopt the three-steps pathway paradigm to go through our study. In practice, we used first the *French school* methods, typically exploratory in type (Benzécri, 1973-82; Lebart *et al.*, 1984), and then the more traditional statistical tools, sometimes attributed to the *Anglosaxon school*. Thus, the exploratory phase helped identifying the most interesting information that

was further validated in the confirmatory phase. Here, a sampling specifically dedicated to this step would have been more appropriate, but we thought that its quality was sufficient for our present illustrative purposes. Only as a last step we built some simple models to explain the indicators' distributions. Indeed, we cannot consider them true theoretical models, since the lack of clear quantitative information on sites pollution limits this possibility.

### 6.1 Exploratory results

The *PCA* gave three-axes of interest, the first of which represents by no means the overall leaves damage. The relative position of the indicators is visible in Figure 1 where they are projected on the plane spanned by the first two principal components. Indeed, on its right side the damage stage 5 is found, together with the peroxidase, the sulphate, and the particulate, whereas on the left the lower damage stages 2 and 3 are together with phosphate (that decreases with the pollution increase). The position of the damage stage 4 on the second axis suggests either an independent direction of the damage due to natural causes (as suggested by the similar position of fungi and spores) or an arch effect, due to the progressive increase of the damage stages. If we represent the levels of the sampling factors on the plane where the individuals will be plotted (see Figure 2), we may find that Roma is on the side of higher damage, whereas the other two sites are in an intermediate position. The sampled trees are always around the corresponding site, a sign of homogeneity of the samples. The dates of sampling show a folded pattern, with the winter sampling on the higher damage side and the summer ones on the lower: this may be read as either the lowering of the observed damage due to the newborn leaves or the recovering of the plant in the good season, or both. Indeed, the leaves' year follows the damage pattern, together with the age in months, that in its final part is very complex. The third axis (not shown) concerns in particular a small number of leaves from Castelporziano with the highest value of

**Table 1.** ANOVA results: Indicators values, means, and standard deviations in the three sites and the three ages. In each row, the letters A B C characterise the mean differences: the means significantly different from the others at 5% probability level are indicated with a different letter. For the Phosphates, the two paired letters refer to two different groups of multiple comparison tests that gave different results.

		Total	Roma		Civitavecchia		Castelporziano		1986		1987		1988	
Sulphate	N	131	47		40		44		18		63		50	
	Mean	986.305	1389.659	A	1141.225	B	414.614	C	1647.833	A	1089.968	B	617.54	C
	St.dev	728.816	805.976		599.51		195.915		1152.36		602.916		385.39	
Phosphates	N	131	47		40		44							
	Mean	291.389	230.234	CC	302.675	AB	346.454	AA						
	St.dev	210.84	206.191		191.117		215.845							
Chlorides	N	131	47		40		44		18		63		50	
	Mean	1266.145	924.149	B	981.15	B	1890.545	A	1699.667	A	1420.968	A	915	B
	St.dev	1277.783	591.999		270.49		1957.438		713.658		1677.167		573.582	
Peroxidase F1	N	129	47		38		44		18		62		49	
	Mean	0.343	0.594	A	0.057	C	0.321	B	0.972	A	0.408	B	0.029	C
	St.dev	0.678	0.969		0.136		0.434		0.822		0.748		0.059	
Peroxidase F2	N	130	46		40		44		18		62		50	
	Mean	0.049	0.109	A	0.01	B	0.024	B	0.08	A	0.064	A	0.02	B
	St.dev	0.072	0.091		0.015		0.024		0.085		0.082		0.032	
Peroxidase F3	N	131	47		40		44		18		63		50	
	Mean	0.107	0.241	A	0.031	B	0.032	B	0.109	B	0.159	A	0.04	C
	St.dev	0.156	0.193		0.041		0.034		0.132		0.19		0.065	

chlorides: its provisional interpretation was the natural condition of Castelporziano.

## 6.2 Confirmatory results

The clustering procedure, based on these three axes, gave a dendrogram, which we found suitable to be cut to produce a seven groups partition. Its interpretation, based on the comparison of the mean values of the indicators in each group and on the relative frequencies of the sampling factors, showed that their differences are due to the increasing damage state, but as well on the different site. In particular, whereas the groups formed by the youngest leaves were distinct for the age in months and the damage state, in the last groups the distinction concerned the site too. Summarizing, the exploratory analysis results suggested:

- a distinction among damage of natural and anthropic origin;
- a different behaviour of the damage stages;
- different pollution conditions for the three sites;
- a variation of the conditions by year and age of the leaves and by the sampling date (seasonal recovering);
- a distinction among the leaves of different sites according to the increase of the age in months.

Based on the results of the exploratory analysis, we wanted to test the differences among sites, year-of the leaves, and date of sampling, as well as their interactions. This could be done through ANOVA and the following multiple comparisons. In Table 1 the main results

The adopted models were respectively

$$\begin{aligned} \text{linear with fluctuation } f(x) &= I + Lx + SF(x) + A \cos(\pi x + P) + \varepsilon, \\ \text{quadratic } f(x) &= I + Lx + Qx^2 + SF(x) + \varepsilon, \end{aligned}$$

concerning site and year are reported. The letters close to the values distinguish the means found different by the comparisons. The four methods agreed in general but in the case of phosphates by site, in which two different estimations were given, thus both reported (with two letters). Apart from the chlorides, all the other indicators behave differently in Roma than in the other sites, in which differences are significant only for sulphate and peroxidase F1, with some doubt for the phosphates. Concerning the years, differences were significant but for phosphates, whose ANOVA was not significant. In many cases, the date of sampling was significant as well as the interactions site by age. This led to the conclusion that the modelling ought to be performed separately for each site and that a seasonal component should be forecasted in the model building. Concerning the chlorides behaviour in Castelporziano, it resulted to depend on a South–Westerly gale in the days preceding one sampling that highly conditioned the observed values. For this reason, the study of this indicator was dropped.

## 6.3 Models

To model ions and peroxidase, we applied either linear or quadratic relations, when the non-linear behaviour along time was evident by the graphics and the quality improvement was noticeable. We added a seasonal fluctuation, when the date of sampling was revealed significant by the ANOVA. We do not report here all the results: suffice here to show only the models of sulphate, whose differences in the sites depend very clearly on the different pollution state, and of peroxidase F1, whose behaviour was difficult to interpret. In Figure 3 the observed values are plotted together with the model prediction: attention must be paid to the different vertical scales, since they reduce the real trend differences among the different sites.



and the R-square resulted 67, 37, and 11% for the sulphate and 40, 29, and 70% for the peroxidase F1 in Roma, Civitavecchia, and Castelporziano respectively. It is to be observed that the seasonal fluctuation of the sulphate contributes for 8-13% to the quality of the model, so that this is the only significant component in the case of Castelporziano. Indeed, no trend was noticed there, in opposition with the other sites, where the trend was important, in Roma twice than in Civitavecchia. So, we could argue that it is the sulphate trend that increases

with pollution, not the point values, and that in a non-polluted area the good season is sufficient to recover from the winter stress condition. On the opposite, in polluted areas the recovering is not sufficient, due to a too high stress. For the peroxidase F1, the trend differences between Roma and Castelporziano are as well high, whereas the very low values found in Civitavecchia could be eventually interpreted as a non-reactive state of the plants, that were in very bad conditions since the beginning of the experimentation.

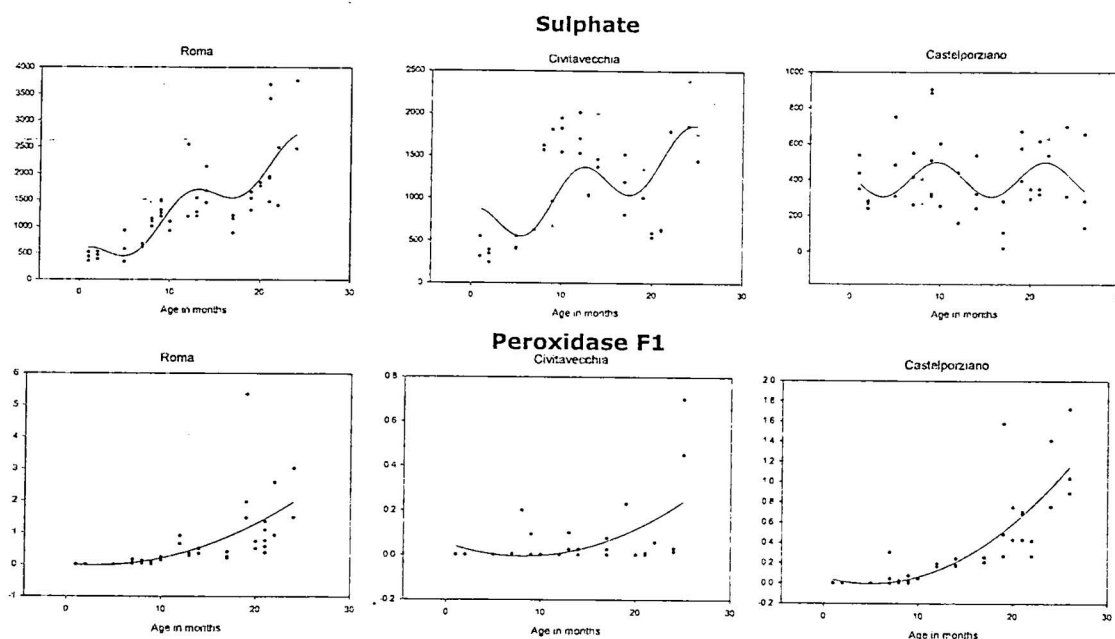


Figure 3. Models according to needles age: the observed values (.) are plotted against the model (line) in the three sampled sites. Above: linear model of sulphate with seasonal fluctuation. Below: quadratic model of peroxidase.

## 7 Conclusion

The analysis showed the different behaviour of the considered indicators, according to their peculiarities, in interacting with pollution. It was also established that the observed differences depend on the different pollution state of the sites. Indeed, the pollution level may be better evaluated by the indicators' trend than by the point values, that depend also on the season, since some recovering in good season was detected.

Concerning the used three-steps procedure, we found it effective in driving our investigation in more suitable directions. Indeed, while planning the study we did not consider the need to model the indicators separately by site and to include a seasonal variation. Both aspects came to our attention in exploratory analysis, when we found the pattern of the sampling dates and the distinc-

tion of the groups of leaves according to the site only after some months of age. This need was further confirmed in ANOVA, by the significance of the interaction between site and leaves age and of the sampling date. This allowed the construction of more adequate models and of their interpretation, giving high importance to the age model coefficient, that is a clear sign of the dependence of the indicators trend on the pollution state of the site.

## Acknowledgement

This paper was written on occasion of an invitation of Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias of the Universidad Nacional de Ingeniería in Lima for a visit period at IMCA in Lima held in October 2007. Its granting is gratefully acknowledged.

1. Anderberg, M.R., 1973. *Cluster analysis for applications*. Academic Press, New York.
2. Arabie, P. and L. Hubert, 1994. "Cluster analysis in mar-

keting research". In: R.J. Bagozzi (ed.), *Advanced Methods of Marketing Research*, London, Blackwell Publishers: pp. 160–189.

3. Benzécri, J.P., 1973-82. *L'analyse des données*. 2 vols., Dunod, Paris.
4. Camiz, S., 1991. "Reflections on Spaces Relationships in Ecological Data Analysis: Effects, Problems, Possible Solutions". *Coenoses*, 6(1): pp. 3-13.
5. Camiz, S., 1993. "Computer assisted procedures for structuring community data". *Coenoses*, 8(2): pp. 97-104.
6. Camiz, S., 2001. "Exploratory 2- and 3-way Data Analysis and Applications". *Lecture Notes of TICMI*, Tbilisi University Press, vol. 2. [www.emis.de/journals/TICMI/Int/vol2/lecture.htm](http://www.emis.de/journals/TICMI/Int/vol2/lecture.htm).
7. Camiz, S., A. Altieri, and F. Manes (2008), "Pollution Bioindicators: Statistical Analysis of a Case Study", *Water, Air and Soil Pollution*, 194: pp. 111-139.
8. Diggle, P.J., K.Y. Liang, and S.L. Zieger, 1994. *Analysis of Longitudinal Data*. Oxford, Clarendon Press.
9. Gordon A.D. 1999. *Classification*. London (UK), Chapman and Hall.
10. Lebart, L., A. Morineau, and K.M. Warwick, 1984. *Multivariate Descriptive Statistical Analysis: Correspondence Analysis and Related Techniques for large Matrices*. John Wiley & Sons, New York.
11. Lebart, L. and A. Salem, 1994. *Statistique textuelle*. Paris, Dunod.
12. Legendre, L. and P. Legendre, 1983. *Numerical Ecology*. Elsevier, Amsterdam.
13. Miller, R.G.Jr., 1981. *Simultaneous Statistical Inference*. Springer Verlag, New York.
14. Mood, A.M., F.A. Graybill and D.C. Boes, 1974. *Introduction to the theory of Statistics*. McGraw-Hill, New York.
15. Scheffé, H., 1959. *The Analysis of Variance*. J. Wiley & Sons, New York.
16. Tukey, J.W., 1953. *The problem of multiple comparisons*. Princeton, Princeton University Press.
17. Tukey, J.W., 1977. *Exploratory Data Analysis*. Reading (Mass.), Addison-Wesley.
18. Whittaker, R.H. (ed.), 1967. *Handbook of Vegetation Science - Part V: Ordination and Classification of Vegetation*. Junk, The Hague.



# Decaimiento del bosón exótico $Z'^0$ en el modelo electrodébil $SU(3)_L \otimes U(1)_N$

David Romero Abad<sup>†</sup> y Orlando Pereyra Ravinez<sup>‡</sup>

*Instituto de Física. Facultad de Ciencias.*

*Universidad Nacional de Ingeniería;*

<sup>†</sup>davidromeroabad@gmail.com, <sup>‡</sup>opereyra@uni.edu.pe

Recibido el 21 de Junio del 2011; aceptado el 21 de Junio del 2011

La expectativa que genera el hallazgo de nuevas partículas fundamentales por la actual generación de colisionadores (Tevatron Run II y LHC), promueve el estudio de modelos que contemplen el incremento del número de partículas. Con tal fin es necesario extender el grupo de calibre del Modelo Estándar (ME). Una de las formas más simples de lograr esto sin perder las características naturales del (ME) es considerar la extensión  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  llamada (331). La prolongación mencionada predice la existencia de nuevas partículas fundamentales, encontrándose entre ellas el bosón exótico  $Z'^0$ . El objetivo principal de este trabajo se concentra en analizar el decaimiento en dos cuerpos del bosón exótico  $Z'^0$  en el modelo electrodébil (331) a primer orden de aproximación (nivel de árbol). La partícula mencionada ( $Z'^0$ ) no ha sido observada experimentalmente pero un amplio número de modelos predicen su existencia. Dicho bosón exhibe una diversidad de canales de decaimiento pero nosotros nos centraremos en el sector bosónico y en particular en los nuevos bosones vectoriales cargados  $V^\pm$  y doblemente cargados  $U^{\pm\pm}$  como productos finales, por ser estos un rasgo característico de nuestro modelo.

**Palabras Claves:** Extensiones del Modelo Estándar, Modelo 331, Bosón exótico  $Z'$ .

The expectation generated by the discovery of new fundamental particles, on the current generation of colliders (Tevatron Run II and LHC), promotes the study of models that include the increase in the number of particles. For this purpose it is necessary to extend the gauge group of the Standard Model (ME). One of the simplest forms to accomplish this without losing the natural features of (ME) is to consider the extension on  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  called (331). The aforementioned prolongation predicts the existence of new particles, including exotic boson  $Z'^0$ . The main objective of this work focuses on analyzing the decay into two bodies of exotic  $Z'^0$  boson in the electroweak model (331) to first order approximation (tree level). Mentioned particle ( $Z'^0$ ) has not yet been observed experimentally but a large number of models predict their existence. This boson exhibits a variety of decay channels but we will concentrate on the bosonic sector in particular in the new charged vector bosons  $V^\pm$  and doubly charged  $U^{\pm\pm}$  as final products, because these are special features of our model.

**Keywords:** Beyond Standard Model, 331 Model,  $Z'$  boson.

## 1. Introducción

En el presente artículo analizamos uno de los posibles canales de decaimiento del bosón exótico  $Z'^0$  en el modelo electrodébil  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ . El modelo mencionado (331) es una extensión del modelo de física de partículas actualmente aceptado llamado Modelo Estándar (ME). Las extensiones que presenta el (ME) proveen de una variedad de posibilidades sobre el nuevo contenido de partículas que el proceso de extensión involucra. Tales extensiones están relacionadas directamente con ampliar el grupo de simetría del sector electrodébil  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  (ME). En nuestro caso, tal como ya hemos mencionado, haremos la extensión al modelo  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ ; dicha elección surge con el propósito de resolver el problema de la violación de la unitariedad que se presentaba al calcular la amplitud de procesos tales como  $\nu + \bar{\nu} \rightarrow W^+ + W^-$  [1]. El modelo mencionado se puede dividir en submodelos que dependen del tipo de representaciones que tomen las partículas. Uno de los primeros trabajos sobre este modelo fue desarrollado por Montero, Pisano y Pleitez [2] donde se centran en tres representaciones principales.

En este trabajo nos vamos a ocupar principalmente del desarrollo del sector bosónico sobre una de las representaciones propuestas en la referencia [2] ya que no se ha encontrado tal estudio en la bibliografía actual. Lo novedoso del trabajo reside en la construcción del lagrangeano bosónico, porque es a partir de él que se van a encontrar los diagramas y reglas de Feynman asociados, necesarios para analizar las interacciones que surgen entre los nuevos bosones que la extensión determina. Dicho desarrollo nos permitirá analizar procesos tales como el decaimiento del bosón exótico  $Z'^0$ , cuya comprobación experimental es posible de determinar en la actual generación de colisionadores que se encuentran en funcionamiento (Tevatron Run II, LHC) [3], [4].

## 2. El Modelo

En el Modelo  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  los bosones de calibre antes del rompimiento espontáneo de la simetría quedan determinados por el álgebra de los generadores del grupo. Independientemente de la representación que se escoja,

dichos bosones son los mismos para los distintos submodelos. Las diferencias se empieza a notar después del rompimiento de la simetría, ya que es en tal proceso se encuentran involucrados los bosones de Higgs. Con el fin de resaltar notoriamente las distintas representaciones, vamos a dividir al modelo en sectores.

## 2.1. Sector Leptónico

En el submodelo que vamos a tratar se escoge la representación triplete para los leptones izquierdos:

$$L_\ell : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \\ E^+ \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \\ M^+ \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \\ T^+ \end{pmatrix}_L \sim (3, 0)$$

y singletes para los leptones derechos:

$$R_\ell : \begin{cases} e_R^-, & \mu_R^-, & \tau_R^- \sim (1, -1) \\ E_R^+, & M_R^+, & T_R^+ \sim (1, +1) \end{cases}$$

La asignación de carga para cada una de las familias de leptones son determinadas por la relación de Gell-Mann-Nishijima, que mostramos a continuación:

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} (\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8) + N \quad (1)$$

Donde  $Q$  es la carga eléctrica,  $\lambda_3$  y  $\lambda_8$  son las matrices diagonales de Gell-Mann y  $N$  es la hipercarga.

La novedad con respecto al (ME) reside en la incorporación de tres nuevos leptones pesados  $E^+$ ,  $M^+$  y  $T^+$ , los cuales aún no han sido observados experimentalmente pero cuyas masas se estima que se encuentren alrededor de 1Tev.

## 2.2. Sector Bosónico

Discutiremos detalladamente el sector bosónico de nuestro modelo, donde se ha trabajado en la representación adjunta del grupo  $SU(3) \otimes U(1)$  para los nueve campos de calibre que la dimensión del grupo predice, obteniéndose un lagrangeano bosónico del tipo electromagnético en función a los campos de la simetría:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad a = 1, \dots, 8.$$

La invariancia de calibre local de la expresión anterior exige que los campos tomen la forma:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned}$$

Donde las constantes de estructura  $f_{bc}^a$ , son determinadas por el algebra que cumplen las matrices de Gell-Mann  $f_{bc}^a = \frac{1}{4i} \text{Tr} \{[\lambda_a, \lambda_b] \lambda_c\}$ , del grupo  $SU(3)$ . Por otro lado se definen los bosones físicos de calibre:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}W^\pm &= A^1 \mp iA^2, \\ -\sqrt{2}V^\pm &= A^4 \pm iA^5, \\ -\sqrt{2}U^{\pm\pm} &= A^6 \pm iA^7. \end{aligned} \quad (2)$$

Lo que nos permite simplificar nuestra notación definiendo, los tensores físicos:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}W_{\mu\nu}^\pm &= (F_{\mu\nu}^1 \mp iF_{\mu\nu}^2), \\ -\sqrt{2}V_{\mu\nu}^\pm &= (F_{\mu\nu}^4 \pm iF_{\mu\nu}^5), \\ -\sqrt{2}U_{\mu\nu}^{\pm\pm} &= (F_{\mu\nu}^6 \pm iF_{\mu\nu}^7). \end{aligned}$$

Con esta nueva notación el lagrangeano bosónico resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & -\frac{1}{4} \{ 2W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} + F_{\mu\nu}^3 F^{3\mu\nu} + 2V_{\mu\nu}^+ V^{\mu\nu-} \\ & + 2U_{\mu\nu}^{++} U^{\mu\nu--} + F_{\mu\nu}^8 F^{8\mu\nu} \} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (3) \end{aligned}$$

Donde el desarrollo explícito en función a los campos (2) para el vértice de nuestro interés se muestra en el apéndice A.

## 2.3. Sector Escalar

Con el propósito de generar masas a las partículas se introducen tres tripletes de Higgs:

$$\begin{aligned} \eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} \sim (3, 0); \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \sim (3, 1); \\ \chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} \sim (3, -1) \end{aligned} \quad (4)$$

Donde la asignación de carga es regida por la relación (1). Proponemos un Lagrangeano basado en el Lagrangeano de Klein-Gordon, en función a los campos escalares introducidos, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) \\ & + V(\eta, \rho, \chi) \end{aligned} \quad (5)$$

El potencial invariante de calibre más general que envuelve los tres tripletes de Higgs es [1]:

$$\begin{aligned} V(\eta, \rho, \chi) = & \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \alpha_1 (\eta^\dagger \eta)^2 \\ & + \alpha_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \alpha_3 (\chi^\dagger \chi)^2 + \alpha_4 (\eta^\dagger \eta) (\rho^\dagger \rho) \\ & + \alpha_5 (\eta^\dagger \eta) (\chi^\dagger \chi) + \alpha_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) \\ & + \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} (f \eta_i \rho_j \chi_k + h.c) \end{aligned} \quad (6)$$

Los valores de expectación del vacío para las componentes neutras de Higgs son [1]:

$$\langle \eta^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \rho^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \chi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix}$$

Para mantener la invariancia de calibre la derivada covariante debe tomar la forma:

$$D^\mu \varphi_i = \left[ \partial^\mu - \frac{ig}{2} \lambda_j A_j^\mu + ig' B^\mu N_\varphi \right] \varphi_i \quad (7)$$

Donde  $\varphi_i = \eta, \rho, \chi$ .

Al evaluar la parte cinética del lagrangeano escalar, se puede observar que la derivada covariante actúa sobre los campos de Higgs, obteniéndose un acople entre los Higgs y los bosones de calibre. Dicho acople nos permite identificar las masas de los bosones al comparar el Lagrangeano resultante de la interacción con el Lagrangeano de Proca. Entonces para el caso de los bosones cargados se encuentran:

$$M_W^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_\eta^2 + v_\rho^2), \quad M_V^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_\eta^2 + v_\chi^2) \\ M_U^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_\rho^2 + v_\chi^2)$$

y para los bosones neutros, se obtiene una matriz de masa:

$$M^2 = \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} v_\eta^2 + v_\rho^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & -2\frac{g'}{g}v_\rho^2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(v_\eta^2 - v_\rho^2) & \frac{1}{3}(v_\eta^2 + v_\rho^2 + 4v_\chi^2) & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) \\ -2\frac{g'}{g}v_\rho^2 & \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g'}{g}(v_\rho^2 + 2v_\chi^2) & 4\frac{g'^2}{g^2}(v_\rho^2 + v_\chi^2) \end{pmatrix}$$

El haber obtenido una matriz no diagonal para los campos neutros es una señal que dichos campos no son los campos físicos que se esperaría encontrar en la naturaleza, entonces para poder encontrar los campos físicos es necesario diagonalizar la matriz de masa. Los vectores propios de dicha matriz nos dan los verdaderos campos y los valores propios sus masas. Después de tal procedimiento se encuentra:

$$M_A^2 = 0, \quad M_{Z'}^2 \approx \frac{g^2}{3} \left( \frac{c_W^2}{1 - 4s_W^2} \right) v_\chi^2 \\ M_Z^2 \approx \frac{g^2}{4} \left( \frac{1}{c_W^2} \right) (v_\eta^2 + v_\rho^2) \quad (8)$$

La relación entre los campos físicos y los campos de calibre es dada por:

$$A_\mu^3 = s_W A_\mu + c_W Z_\mu^0 \\ A_\mu^8 = -\sqrt{3} s_W A_\mu - \sqrt{3} s_W t_W Z_\mu^0 - \frac{\sqrt{1 - 4s_W^2}}{c_W} Z_\mu'^0 \\ B_\mu = \sqrt{1 - 4s_W^2} A_\mu - t_W \sqrt{1 - 4s_W^2} Z_\mu^0 - \sqrt{3} t_W Z_\mu'^0$$

donde  $t = g'/g \equiv \tan \theta$  y  $s_W = \sin \theta_W = t/(1 + 4t^2)^{1/2}$ . Debemos notar que las constantes de acoplamiento introducidas en el modelo via la derivada covariante, quedan fijadas por:

$$e = \frac{g \sin \theta}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{g' \cos \theta}{(1 + 3 \sin^2 \theta)^{1/2}} = g \sin \theta_W$$

### 3. Decaimiento del bosón exótico $Z'^0$ a nivel de árbol: proceso no polarizado

En la FIG.1 se observa el diagrama de Feynman correspondiente al decaimiento  $Z'^0 \rightarrow V^+ + V^-$  a nivel de árbol.

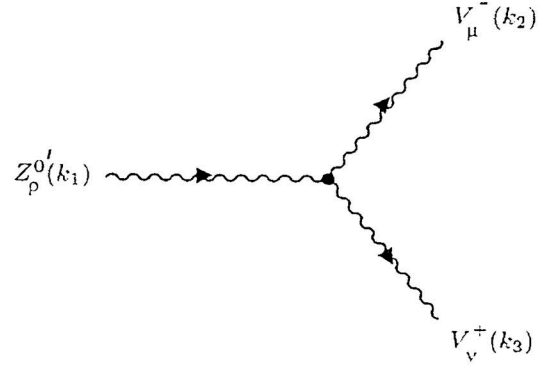


Figura 1. Decaimiento  $Z'^0 \rightarrow V^+ + V^-$

La correspondiente amplitud del proceso es determinada por [5]:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu\nu\rho} \epsilon^\mu(k_2, \lambda_2) \epsilon^\nu(k_3, \lambda_3) \epsilon^\rho(k_1, \lambda_1)$$

Y la regla de Feynman correspondiente [5]:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu\rho} = \frac{ig}{2} \frac{\sqrt{3(1 - 4s_W^2)}}{c_W} \times \\ \times \{ g_{\mu\nu}(k_3 - k_2)_\rho + g_{\mu\rho}(k_2 + k_1)_\nu - g_{\nu\rho}(k_3 + k_1)_\mu \}$$

Después de operar los términos se usó la aproximación para altas energías  $M_V \ll |k| \approx M_{Z'}$ , obteniéndose la amplitud no polarizada:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{3} |C|^2 \left\{ -4|k|^2 - \frac{2|k|^4}{M_{Z'}^2} + \frac{5|k|^4}{M_V^2} + \frac{16|k|^6}{M_V^4} \right\} \quad (9)$$

donde:

$$|C|^2 = \frac{3g^2}{4} \frac{(1 - 4s_W^2)}{c_W^2}, \quad |k| \equiv |k_2| = |k_3|$$

Usando la tasa de decaimiento para nuestro caso con dos partículas en el estado final:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M_{Z'}} \left( \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2} \right) \left( \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2E_3} \right) |\mathcal{M}|^2 \delta^{(4)}(k_1 - k_2 - k_3)$$

Integrando y reemplazando la amplitud (9) obtenemos:

$$\Gamma(Z' \rightarrow V^+ V^-) = M_{Z'} \frac{\alpha (1 - 4s_W^2)}{s_W^2} f(x) \quad (10)$$

Donde:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1-x})^3}{x^2} \left[ \frac{1}{16} x^3 - \frac{13}{16} x^2 - \frac{27}{8} x + 2 \right], \quad x \equiv \frac{4M_V^2}{M_{Z'}^2}$$

## 4. Fenomenología

La existencia de los bosones doblemente cargados tienen en el proceso  $e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-$  su mejor prueba experimental [6], [7]. La extensión del (ME) mencionada es posiblemente la forma más simple de agrandar el grupo de calibre sin perder las características naturales del modelo estándar electrodébil. Los bosones vectoriales  $V^-$  y  $U^{--}$  son muy masivos y sus masas dependen de la escala de rompimiento de simetría cuando se pasa del  $SU_L(3) \otimes U_N(1)$  al  $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ . De la condición  $\sin^2 \theta_W < 1/4$  [7], se obtiene que  $M_{Z'}$  es menor que 3,1 TeV [8]. Las masas de los nuevos bosones de calibre cargados  $V^\pm$  y  $U^{\pm\pm}$  se encuentran limitados por los experimentos de colisión leptónica [9] y por el decaimiento del muón [10]. Actualmente el límite más bajo para el bosón de calibre doblemente cargado se obtiene de la conversión muón-antimuón,  $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$  lo cual nos da  $M_{U^{++}} \geq 850$  GeV [11]. Además la restricción  $M_{V^+} > 440$  GeV fue derivada de los límites en el ancho de decaimiento del muón [12]. Debido a la relación que existe entre  $M_V$  y  $M_{Z'}$  mostrada en [7], se encuentra el límite inferior  $M_{Z'} \geq 1,3$  TeV. Del rango de masas obtenidas para el boson  $Z'$ , se puede concluir que las masas para los nuevos bosones de calibre cargadas son menores que la mitad de  $M_{Z'}$ , por ello el decaimiento  $Z' \rightarrow V^+V^-$  es cinemáticamente posible [13],[7].

Consideramos interesante contrastar nuestro resultado obtenido para la tasa de decaimiento del proceso  $Z' \rightarrow V^+ + V^-$  mostrado en (10) con otro modelo que incorpore la misma simetría de calibre; En la referencia [13], se observa la diferencia del modelo mostrado en nuestro trabajo con el propuesto por Pérez, Tavares-Velasco, Toscano (PTVT). El cambio está en la representación del sector escalar donde introducen un sexteto para los campos de Higgs además de los tres tripletes que mostramos en (4). A continuación mostramos la tasa de decaimiento presentada en el trabajo de PTVT:

$$\Gamma = M_{Z'} \frac{\overbrace{\alpha (1 - 4s_W^2)}^{\kappa}}{s_{2W}^2} g(x) \quad (11)$$

donde

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2} \left[ -\frac{3}{4}x^3 - \frac{17}{4}x^2 + 4x + 1 \right], \quad x \equiv \frac{4M_V^2}{M_{Z'}^2}$$

Al comparar esta expresión con la hallada en (10) observamos que la diferencia reside en las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  por lo que nos parece interesante mostrar las desviaciones que entre ellas se presentan. Para esto fijaremos la masa del bosón  $Z'$  y variaremos  $M_V$  desde cero hasta  $M_{Z'}/2$ , tal como se muestra en la FIG.2. Notemos que en la FIG.2 se tiene la magnitud  $\Gamma/\kappa$ , donde  $\kappa$  vista en (11) no depende de la relación entre las masas  $x$ , por lo que sería una constante si lo que nos interesa analizar es la variación de dicha relación. Dado que dicha constante aparece en ambas tasas de decaimiento, (10) y (11), lo que se grafica es la relación  $\Gamma/\kappa$  versus  $x$ .

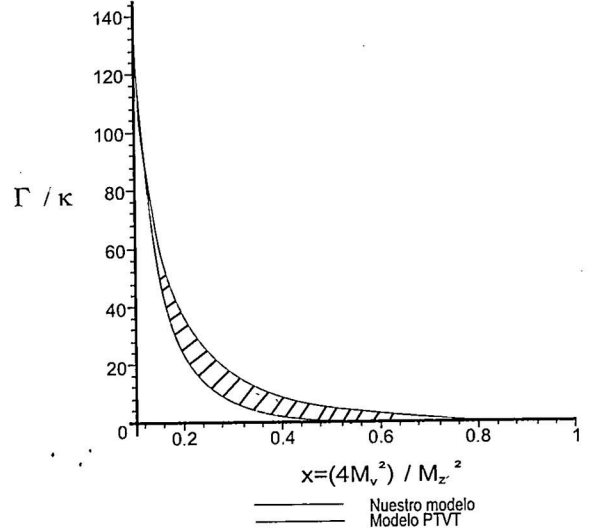


Figura 2. Tasa de decaimiento del boson  $Z'_0$ .

La diferencia entre las curvas se señala en la zona marcada con franjas. Fuera de ésta zona las tasas de decaimiento coinciden, y argumentando que las coincidencias corresponden a los valores correctos de las masas nos encontraríamos en dos posibles escenarios.

En el primer escenario para valores de  $x \approx 0,1$  obtenemos una relación entre las masas de  $M_V \approx 0,16 M_{Z'}$  y considerando el límite máximo para  $M_{Z'} \approx 3$  TeV tendríamos que  $M_V \approx 0,48$  TeV.

En el segundo escenario consideraremos debido a la gráfica  $x \approx 0,8$  lo que nos daría una relación entre las masa de  $M_V \approx 0,4 M_{Z'}$  y escogiendo de manera similar al caso anterior el límite maximo para  $M_{Z'} \approx 3$  TeV tendríamos que  $M_V \approx 1,2$  TeV.

Ambos escenarios nos arrojan valores para las masas de  $M_V$  dentro de los rangos fenomenológicos establecidos.

## 5. Conclusiones

Hemos presentado una extensión del (ME) con simetría de calibre  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ , basado principalmente en los trabajos de Montero, Pisano y Pleitez [1], [2]. El resultado del lagrangeano bosónico y de la tasa de decaimiento del bosón  $Z'$  se contrastó con los trabajos de Pérez, Tavares-Velasco y Toscano [14] y [13], respectivamente.

Un aspecto importante que queremos resaltar es el no haber obtenido en nuestro lagrangeano bosónico, términos de interacción entre el bosón neutro exótico  $Z'$  y los bosones cargados  $W^\pm$ , a diferencia de otros modelos, como en [13], donde si se presenta tal acople. A pesar de que todavía no hay una observación experimental de tal decaimiento, se espera que ésta reacción sea uno de los posibles caminos para detectar al boson  $Z'$  en colisionador Tevatron ( Run II ) [4].

Durante el presente trabajo hemos podido constatar la numerosa cantidad de propiedades que pueden extraerse del modelo estudiado, por lo que consideramos que el desarrollo presentado se encuentra distante de considerarse



completo. Las perspectivas a seguir consistirían en calcular los restantes canales de decaimiento del bosón exótico para luego analizar su branching ratio (Br) con el objetivo de determinar cuál de los decaimientos tienen mayor probabilidad de ocurrir. Dentro del sector bosónico el haber obtenido el lagrangeano completo nos abre un abanico de posibilidades para analizar las propiedades tanto de las nuevas partículas introducidas por el modelo, como de las ya conocidas en el contexto de este nuevo grupo de simetría.

Dentro del programa que traza la actual generación de colisionadores existe una variedad de procesos interesantes que buscan dar cuenta de la existencia del bosón exótico  $Z'$ . Por ejemplo el Tevatron Run II se encuentra realizando búsquedas de esta partícula a través de su decaimiento en  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $e\mu$ ,  $\tau^+\tau^-$ ,  $t\bar{t}$  y  $WW$  [4], es por ello que el cálculo de algunos de estos procesos son considerados dentro de nuestras perspectivas a futuro.

## APÉNDICE A

A continuación mostramos el lagrangeano bosónico después del rompimiento espontáneo de la simetría:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^B = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z'_{\mu\nu} Z'^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu-} - \frac{1}{2} V_{\mu\nu}^+ V^{\mu\nu-} - \frac{1}{2} U_{\mu\nu}^{++} U^{\mu\nu--}\end{aligned}$$

### Lagrangeano de Interacción

#### Vértice Trilineal

Interaction  $VVZ'$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Z'VV} = & \frac{ig\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{1-4s_W^2}}{c_W} \{ (V^{\mu+} V^{\nu-} - V^{\mu-} V^{\nu+}) \partial_\mu Z'_\nu{}^{0} \\ & + (\partial_\mu V_\nu^- - \partial_\nu V_\mu^-) V^{\nu+} Z'^{0\mu} - (\partial_\mu V_\nu^+ - \partial_\nu V_\mu^+) V^{\nu-} Z'^{0\mu} \}\end{aligned}$$

1. F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. **D46**, 410 (1992).
2. J.C. Montero, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. **D47**, 2918 (1993).
3. Thomas G. Rizzo, arXiv:hep-ph/0610104v1, (2006).
4. K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group), JPG **37**, 075021, (2010).
5. D. Romero, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Ingeniería (2010).
6. Arthur K.A. Maciel, Brazilian Journal of Physics, vol 34, N° 4A, (2004).
7. Daniel Ng, Phys. Rev. **D49**, 4805 (1994).
8. P. Langacker and Ming-xin Luo, Phys. Rev. **D44**, 817 (1991).
9. P. H. Frampton and Daniel Ng, Phys. Rev. **D45**, 4240 (1991).
10. I. Beltrami *et al.*, Phys. Lett. **B 194**, 326 (1987).
11. L. Willmann *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 49, (1999).
12. M.B. Tully and C.G. Joshi, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 5593, (1998).
13. M.A. Pérez, G. Tavares-Velasco and J.J. Toscano, Phys. Rev. **D69**, 115004 (2004).
14. G. Tavares-Velasco, J.J. Toscano, Phys. Rev. **D65**, 013005 (2001).

# Acople fuerte luz-materia en cavidades micropilares

Misael León Hilario

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería*  
*ludwinml@gmail.com*

Recibido el 26 de Noviembre del 2011; aceptado el 17 de Diciembre del 2011

El estudio del acoplamiento fuerte entre luz y materia en sistemas de microcavidades pilares con puntos cuánticos (QDs) ubicados en su interior permite entender los efectos de interacción de muchas partículas en transiciones ópticas en nanoestructuras semiconductoras. En este trabajo calculamos la densidad espectral de los modos de cavidad y los modos excitónicos de los QDs; para ello desarrollamos un modelo en el que tratamos no perturbativamente el acople entre fotones y excitones e introducimos los efectos de vida media tanto de la componente fotónica como de la excitónica de los estados polaritónicos de manera formal.

**Palabras Claves:** microcavidades semiconductoras, polaritones, puntos cuánticos.

The study of strong coupling between light and matter in semiconductors micropillar cavities with quantum dots (QDs) inside these cavities enables understand the effects of interactions of many particles in optical transitions in semiconductor nanostructures. In this work we calculate the spectral density of the cavity and excitons modes, for this purpose we develop a model in which we treat the exciton-photon coupling nonperturbatively and incorporate lifetime effects in both excitons and photons in a rigorous way.

**Keywords:** semiconductor microcavities, polaritons, quantum dots.

## 1. Introducción

Los sistemas con acoplamiento fuerte entre puntos cuánticos y microcavidades de alta calidad han sido estudiados con gran interés en los últimos años por diferentes motivos, como son en el estudio de la información cuántica, decoherencia cuántica [1, 2]. Por ejemplo, algunos de estos sistemas se han propuesto como un fuente para la realización de computación cuántica [3].

El régimen de acople fuerte se da cuando el fotón emitido por el medio activo (punto cuántico) en un modo dado, puede ser recapturado y volver así a excitar al medio formando otra vez excitones. Entonces lo que sucede es una conversión de un fotón en un excitón. Para poder lograr esto se tiene que conservar tanto la energía como el vector de onda. Esta condición ocurre en el punto en donde las relaciones de dispersión del fotón y del excitón se interceptan, es decir, el modo de cavidad y el estado excitónico tienen que estar en resonancia. La diferencia con el caso de acople débil es que ahora, al tratarse de estados discretos que interactúan, la regla de oro de Fermi no es aplicable, y la imagen perturbativa de la interacción luz-materia carece de validez. Por pequeña que sea esta interacción, es necesario resolver el sistema de autovalores, produciendo un desdoblamiento energético en el lugar de la degeneración, y por lo tanto generando nuevos autoestados que describen el sistema. Estos nuevos autoestados, fotón-excitón acoplados, son conocidos como polaritones excitónicos, o simplemente polaritones de cavidad.

En trabajos recientes de magneto-óptica [1, 4] se estudió el acople fuerte en sistemas de cavidades micropilares con QDs insertados dentro de ellos. También se utilizaron efectos de temperatura para sintonizar la energía de las transiciones electrónicas con los modos de cavidad

y así poder observar acople fuerte en estos sistemas [4]. En estos trabajos, el acople fuerte se pone de manifiesto en experimentos de fotoluminiscencia.

Los resultados experimentales fueron interpretados en términos de una matriz  $2 \times 2$  que mezcla excitón y fotón de cavidad. Para introducir efectos de tiempo de vida media, se utilizaron energías complejas para representar las energías del sistema desacoplado y por lo tanto, las matrices que se obtienen no son hermíticas. Expresiones similares para el desdoblamiento de Rabi se obtuvieron utilizando una ecuación maestra dentro de un marco fenomenológico [5]. Una descripción microscópica del sistema que incluya vida media del excitón y el modo de cavidad de una manera rigurosa no han sido consideradas aún en teorías previas [1, 4, 5].

En este artículo, guiándonos de nuestra experiencia de trabajos previos [6, 7, 8], desarrollaremos un modelo para poder así incluir los ensanchamientos de ambas excitaciones, debido a la mezcla con un continuo de excitaciones bosónicas. El problema puede ser resuelto rigurosamente también para el régimen de acople débil. Compararemos nuestros resultados con experimentos recientes de intensidad de fotoluminiscencia [1, 4].

## 2. Modelo

La parte principal del modelo contiene los modos fotónicos de cavidad, los grados de libertad excitónicos representados por un sistema de espín  $1/2$ , y el acople entre ellos [9]. Incluimos el acoplamiento del modo de cavidad con un continuo de modos radiativos, los cuales dan lugar al ensanchamiento del modo de cavidad. También acoplamos los modos excitónicos con un continuo de excitaciones bosónicas, llevando a un ensanchamiento de

la energía excitónica. El hamiltoniano que planteamos es de la forma

$$H = H_{\text{fot}} + H_{\text{exc}} + H_{\text{mix}}$$

$$H_{\text{fot}} = E_c a^\dagger a + \sum_r \epsilon_r a_r^\dagger a_r + \sum_r (V_r a_r^\dagger a + \text{H.c.}) \quad (1)$$

$$H_{\text{exc}} = E_x S_z + \sum_\nu \epsilon_\nu b_\nu^\dagger b_\nu + \sum_\nu (V_\nu b_\nu^\dagger S^- + \text{H.c.}) \quad (2)$$

$$H_{\text{mix}} = V S^- a^\dagger + \text{H.c.} \quad (3)$$

El primer término,  $H_{\text{fot}}$ , corresponde a la parte fotónica del Hamiltoniano, donde  $a^\dagger$  crea un fotón de cavidad el cual se acopla a un continuo de modos radiativos descritos por el operador de creación  $a_r^\dagger$ . El segundo término,  $H_{\text{exc}}$ , describe la parte excitónica de  $H$ , donde  $S_z$ ,  $S^+$ ,  $S^-$  son los operadores de espín para el sistema de dos niveles del QD con estado fundamental ( $|\downarrow\rangle$ ) y estado excitado ( $|\uparrow\rangle$ ) que representan cero y un excitón respectivamente, los cuales se acoplan a un continuo de excitaciones bosónicas descritos por el operador de creación  $b_\nu^\dagger$ . Finalmente, el último término describe el acople entre luz y materia. Para simplificar la notación, los índices que indican la polarización de los modos serán suprimidos.

El modelo es similar al usado por nosotros para describir experimentos de dispersión Raman en microcavidades con pozos cuánticos en su interior [6, 7, 8]. La principal diferencia es que en los trabajos previos el problema presentaba simetría de traslación en dos dimensiones, llevando así a excitones deslocalizados. Además para cada vector de onda la probabilidad de ocupación de los estados excitónicos era muy pequeña. Esto permitió tratar a los excitones como excitaciones bosónicas con un alto grado de precisión [8]. Esto no es posible en este caso donde hay un sólo modo excitónico, resultando así el modelo un poco más complicado. A pesar de esto, algunos resultados exactos se pueden derivar, teniendo en cuenta que el número total de excitaciones  $N_e$  se conserva. Por ejemplo, el estado fundamental es el estado donde no hay excitación, es decir,  $N_e = 0$ .

En lo que sigue, denotaremos con  $|n, S_z\rangle$  los estados del sistema con  $n$  fotones de cavidad, estado excitónico  $S_z$  y ningún bosón descrito por  $a_r$  ó  $b_\nu$ . Si uno de estos últimos está ocupado, denotaremos el estado correspondiente por  $|n, S_z; r\rangle$  o  $|n, S_z; \nu\rangle$ . El subespacio de Hilbert con  $N_e = 1$  puede ser tratado analíticamente. Este subespacio está constituido por un estado formado por un excitón y ningún fotón de cavidad,  $|0, \uparrow\rangle$ , un modo de cavidad (y ningún excitón)  $|1, \downarrow\rangle$ , y dos continuos de excitaciones bosónicas  $|0, \downarrow; r\rangle$ ,  $|0, \downarrow; \nu\rangle$ . El problema en este subespacio toma una forma similar a la de un modelo de una impureza que interactúa con un continuo (o nivel resonante).

Las mediciones de fotoluminiscencia en cavidades micropilares [1, 4] sugieren que el subespacio relevante para los experimentos es con  $N_e = 1$ . Para ver esto, dejemos por el momento los modos de  $r$  y  $\nu$  responsables del ensanchamiento de los modos cavidad y del excitón. El modelo que resulta de considerar sólo los primeros términos de las Ecs.(1),(2) y (3) puede resolverse exactamente resolviendo una matriz 2x2 [9]. Para cada subespacio de

$N_e$  definido, el modelo consta de dos ramas que tienen un anticruce en función del detuning  $\Delta = E_c - E_x$ . El valor del desdoblamiento de Rabi es  $2V\sqrt{N_e}$ .

Debido a la decoherencia inducidas por decaimientos y excitaciones, no se logran observar experimentalmente anticruces de estados de excitación mayor que  $N = 1$  [4]. En estos tipos de experimentos sólo se observa un anticruce, por ello, para este caso particular bastará con tomar  $N_e = 1$  para poder describir los resultados experimentales.

### 3. Funciones de Green

De lo discutido anteriormente, podemos suponer que la fotoluminiscencia observada es proporcional a la densidad de fotones de cavidad en el subespacio con  $N_e = 1$ . En otras palabras, la intensidad observada es proporcional a la densidad [6]:

$$\rho_{11}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_{11}(\omega), \quad (4)$$

donde  $G_{11}(\omega)$  es la función de Green de muchos cuerpos, obtenida del elemento diagonal del operador  $G$  en la base de los estados  $|1, \downarrow\rangle$  (por simplicidad denotaremos  $|1\rangle \equiv |1, \downarrow\rangle$ ,  $|0\rangle \equiv |0, \uparrow\rangle$ ,  $|r\rangle \equiv |0, \downarrow; r\rangle$ ,  $|\nu\rangle \equiv |0, \downarrow; \nu\rangle$ ). El operador  $G$  está dado por la inversa del hamiltoniano en el subespacio  $N_e = 1$ :

$$G(\omega) = (\omega + i0^+ - H)^{-1}; \quad G_{11}(\omega) = \langle 1|G(\omega)|1\rangle. \quad (5)$$

El elemento de matriz del operador  $G(\omega)$  puede ser evaluado de la ecuación  $G(\omega - H) = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad. Tomando el elemento  $\{11\}$  de esta ecuación, obtenemos

$$G_{11}(\omega)(\omega - E_c) - V G_{10}(\omega) - \sum_r V_r G_{1r}(\omega) = 1. \quad (6)$$

Procediendo de manera similar para los elementos de matriz  $\{10\}$ ,  $\{1r\}$ , y los índices de las nuevas funciones de Green que aparecen, el sistema de ecuaciones para  $G_{ij}$  se cierra. En particular, las relaciones

$$\begin{aligned} G_{10}(\omega) &= \frac{V_r G_{11}}{(\omega - E_x - S_x)} \\ G_{1r}(\omega) &= \frac{V_r}{(\omega - \epsilon_r)} G_{11}, \end{aligned} \quad (7)$$

reemplazadas en la Ec. (6) dan una expresión cerrada para la función de Green  $G_{11}$ :

$$G_{11}(\omega) = \frac{1}{\omega - E_c - S_c - \frac{V^2}{\omega - E_x - S_x}}, \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \sum_r \frac{V_r^2}{\omega + i0^+ - \epsilon_r}, \\ S_x(\omega) &= \sum_\nu \frac{V_\nu^2}{\omega + i0^+ - \epsilon_\nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Por simplicidad supondremos (como es usual en este tipo de problemas) constantes  $V_r$ ,  $V_\nu$  y las densidades de los modos  $r$  y  $\nu$ , cerca del punto de detuning cero

$\Delta = E_c - E_x = 0$ . Luego, excepto por algún corrimiento de energía real que puede ser incorporado en  $E_x$  y  $E_c$  [6], las sumas de arriba se reducen a constantes imaginarias que pueden ser tomadas como parámetros [6],

$$S_c(\omega) = -i\delta_c, \quad S_x(\omega) = -i\delta_x. \quad (10)$$

Podemos ver que si intercambiamos el índice  $x$  por  $c$ , Ecs. (8) y (10) nos darán la densidad excitónica del estado  $|0, \uparrow\rangle$ .

## 4. Análisis y discusiones

En esta sección calcularemos la densidad de estados de los modos de cavidad, la posición de los máximos de esta densidad de estados y la densidad espectral para detunings diferentes.

### A) Densidad de estados como suma de dos Lorentzianas asimétricas:

La Ec. (8) se puede escribir como una suma de dos fracciones, con denominadores lineales en  $\omega$ . Reemplazando en la Ec. (4), la densidad  $\rho_{11}$  puede ser separada como

$$\begin{aligned} \rho_{11}(\omega) &= \rho_{11}^1(\omega) + \rho_{11}^2(\omega), \\ \rho_{11}^1(\omega) &= \frac{1}{\pi} \frac{\delta_1 a_1 + d(\omega - \omega_1)}{(\omega - \omega_1)^2 + \delta_1^2}, \\ \rho_{11}^2(\omega) &= \frac{1}{\pi} \frac{\delta_2 a_2 - d(\omega - \omega_2)}{(\omega - \omega_2)^2 + \delta_2^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde

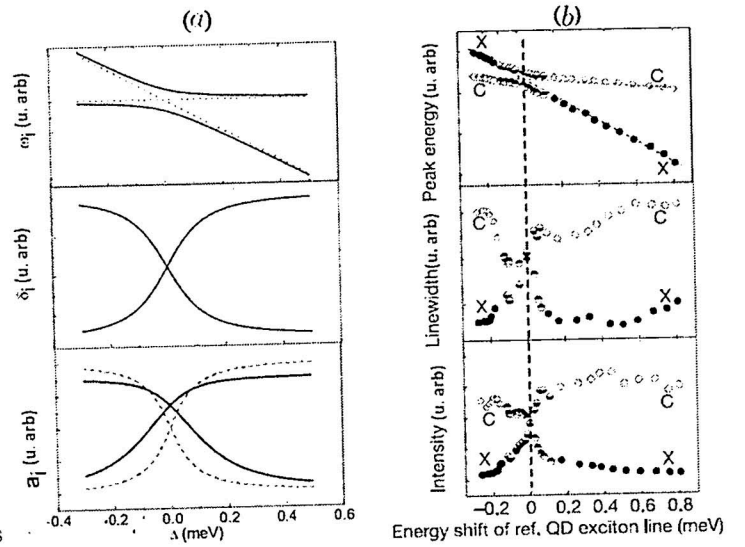
$$\begin{aligned} a_{1(2)} &= \frac{1}{2} \pm \frac{x\Delta - y\delta}{4(x^2 + y^2)} \\ \omega_{1(2)} &= c \pm x \\ \delta_{2(1)} &= c' \pm y \\ d &= \frac{y\Delta - x\delta}{4(x^2 + y^2)} \end{aligned} \quad (12)$$

con

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \sqrt{A + \frac{1}{2}\sqrt{B}} \\ y &= \frac{\Delta\delta}{4x} \\ c &= \frac{E_c + E_x}{2} \\ c' &= \frac{\delta_c + \delta_x}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

y

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta^2 - \delta^2 + 4V^2}{2} \\ B &= (\Delta^2 + \delta^2)^2 + 8V^2(\Delta^2 - \delta^2) + 16V^4 \\ \delta &= \delta_c - \delta_x. \end{aligned} \quad (14)$$



**Figura 1.** a) Pico de energías ( $\omega_i$ ), ancho de línea ( $\delta_i$ ) e intensidad ( $a_i$ ) en función del detuning para los parámetros de la Ref. [4]:  $\delta_c = 0,09$  meV,  $\delta_x = 0,036$  meV,  $V = 0,075$  meV. La línea entrecortada en la figura inferior corresponde al máximo de  $\rho_{11}(\omega)$ . (b) Figura tomada de la Ref. [4].

El resultado puede ser interpretado como la suma de dos Lorentzianas asimétricas, con asimetrías opuestas controladas por  $d$ . Despreciando el efecto de  $d$ , la posición, amplitud y ancho de la Lorentziana están dadas por  $\omega_i$ ,  $a_i$  y  $\delta_i$  respectivamente con  $\omega_1 < \omega_2$  excepto para detuning  $\Delta = E_c - E_x = 0$  si  $2V \leq \delta$ . El resultado para  $\omega_i$ , y  $\delta_i$  está de acuerdo con la parte real e imaginaria de la raíz compleja de una matriz  $2 \times 2$ , dada por la ecuación [10]:

$$E_{1,2} = \frac{E_c + E_x}{2} - i \frac{\delta_c + \delta_x}{4} \pm \sqrt{V^2 - \frac{(\delta_c - \delta_x - 2i\Delta)^2}{16}}, \quad (15)$$

Los resultados que hemos obtenido proporcionan una justificación microscópica para esa expresión.

Es fácil de ver de las Ecs. (11)-(14) que en el límite  $\delta_c \rightarrow \delta_x$ ,  $d \rightarrow 0$ , la densidad está dada por la suma de dos Lorentzianas separadas  $2x$  con  $x = \sqrt{((E_c + E_x)/2)^2 + V^2}$  y con anchos  $\delta_c$  y  $\delta_x$ .

En la Figura 1(a) se muestran los picos de energías, ancho de línea e intensidad en función del detuning, para los parámetros de la Ref. [4]. En la Figura 1(b) mostramos las curvas experimentales de la Ref. [4]. Podemos ver que hay un acuerdo cualitativo entre los resultados obtenidos con el modelo desarrollado en este capítulo y los resultados experimentales.

En la Figura 2 se presentan las posiciones de los picos  $\omega_i$  para el caso en el cual no hay desdoblamiento de energía para detuning cero, esto corresponde a reducir  $V$  hasta  $V_c = 0,022$  meV. En el inset de esta figura se muestra un acercamiento de la región del cruce. Se puede apreciar que aun se nota un pequeño anticruce. En esta región, y en estas condiciones, no se puede resolver bien la separación de ambas lorentzianas.

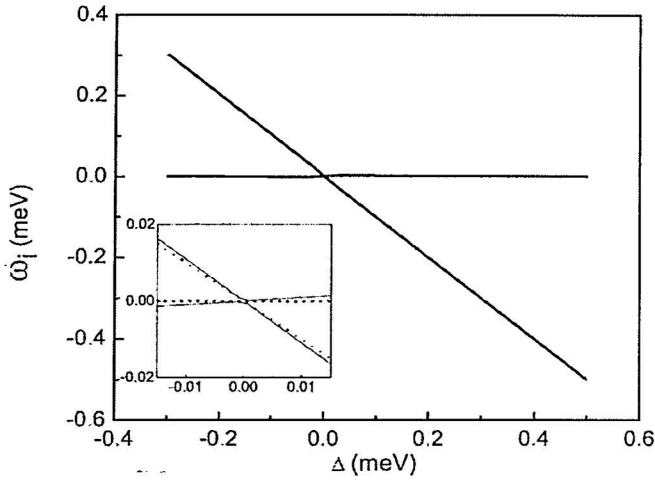


Figura 2. Pico de energías para el caso de acople débil. Los parámetros utilizados son  $\delta_c = 0.09$  meV,  $\delta_x = 0.036$  meV,  $V = 0.022$  meV.

### B) Posición del máximo:

Cuando  $V \gg \delta_c, \delta_x$ , la densidad espectral  $\rho_{11}(\omega)$  presenta dos máximos para todos los valores del detuning  $\Delta$ . La posición del máximo está dada por una de las raíces reales del polinomio de quinto grado obtenida de la condición  $\partial\rho_{11}(\omega)/\partial\omega = 0$ . Cuando  $V$  decrece, los dos máximos se van acercando, y para un valor crítico  $V_c$  y detuning cero los dos máximos se unen en uno solo llegando así al régimen de acople débil, tal como se puede ver en la Figura 2.

En la Figura 3 se representa el acople crítico  $V_c$  como función de los anchos  $\delta_c$  o  $\delta_x$ , manteniendo constante uno de ellos para cada caso. Podemos ver que cuando  $\delta_x$  aumenta,  $V_c$  también aumenta. Sin embargo, la tendencia es opuesta cuando  $\delta_c$  aumenta. Además vemos que la variación de  $V_c$  es más rápida con el ancho de los excitones  $\delta_x$  que con el ancho de los fotones de cavidad  $\delta_c$ . Esto es esperado de acuerdo con los experimentos de fotoluminiscencia reportados en la Ref. [4], en donde se observa que el pico de los excitones de los puntos cuánticos cambia más rápido que el pico de los fotones de cavidad.

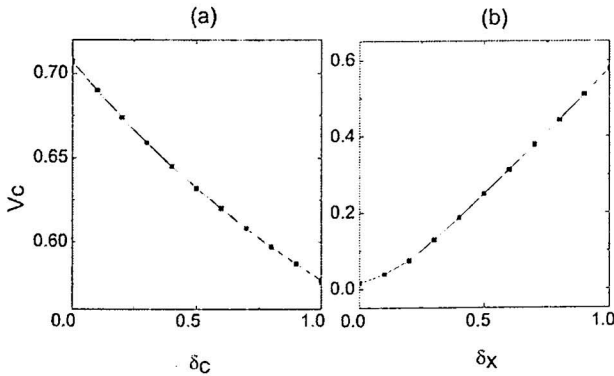


Figura 3. Acople crítico como función de (a) ancho de línea de los modos de cavidad  $\delta_c$ , y (b) ancho de línea de los modos excitones  $\delta_x$ .

En la Figura 4 se muestra la diferencia entre los dos máximos  $\Delta E$  como función de  $V$  para el caso que  $\delta_x = \delta_c$ . La medida experimental de los desdoblamiento de Rabi podría ser identificado con  $\Delta E$ , pero otra posibilidad es relacionar el desdoblamiento de Rabi con  $\omega_2 - \omega_1 = 2x$  [ver Eqs. (11)-(14)]. Creemos que esta última aproximación es más adecuada si el ancho de línea puede ser ajustado con la Ec. (11).

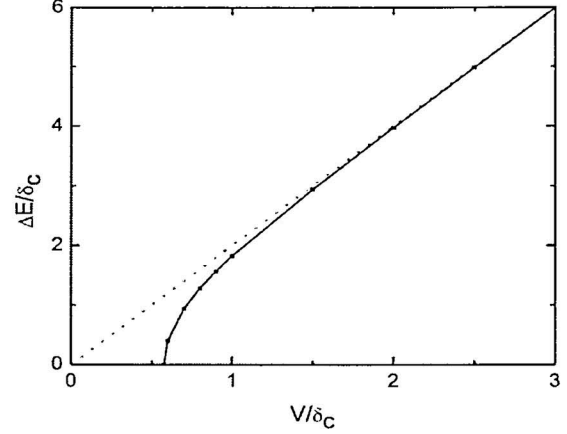


Figura 4. Diferencia entre los máximos de  $\rho_{11}(\omega)$  como función de la constante de acople  $V$  para  $\delta_x = \delta_c$  y  $E_x = E_c$ .

Podemos ver también en esta figura que  $\Delta E$  tiene un comportamiento de raíz cuadrada como función de  $\Delta V = V - V_c$  para  $V_c$  pequeño. Mientras que para  $V$  grande,  $\Delta E$  es proporcional a  $2V$ , como es esperado.

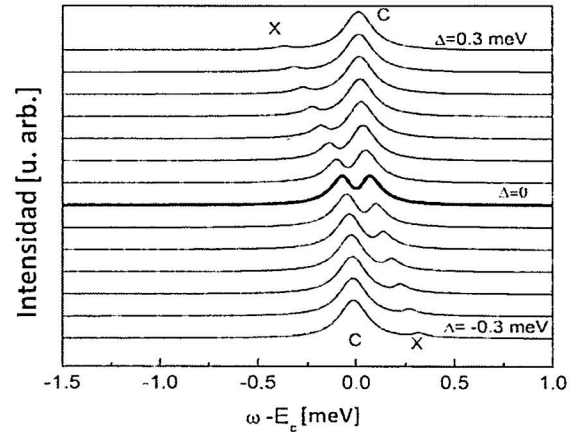


Figura 5. Espectro de fotoluminiscencia calculado para varios valores de detuning  $\Delta$ .

### C) Densidad espectral para detunings diferentes:

En la Figura 5 se presenta la densidad espectral (la cual estamos suponiendo proporcional a la intensidad de fotoluminiscencia) para diferentes valores de detuning  $\Delta = E_c - E_x$ , desde  $\Delta = -0.3$  meV hasta  $\Delta = 0.3$  meV. Los parámetros utilizados en esta figura son  $\delta_c = 0.09$  meV,  $\delta_x = 0.036$  meV,  $V = 0.075$  meV, son extraídos del trabajo experimental de Reithmaier *et al.* [4] donde el detuning es controlado por la temperatura. Estos mismos parámetros son los que utilizamos en la Figura 1.



En esta misma figura se puede observar claramente el anticruce característico del acople fuerte entre el modo de cavidad y el modo excitónico, y las correspondientes ramas polaritónicas. También se puede ver que la variación de la intensidad del perfil es similar a la observada experimentalmente. Para detunings negativos y a bajas energías, la rama polaritónica superior (pico de la derecha) tiene un carácter más excitónico, por lo tanto tiene menos intensidad que la rama polaritónica inferior (pico de la izquierda). El comportamiento es inverso para detunings positivos.

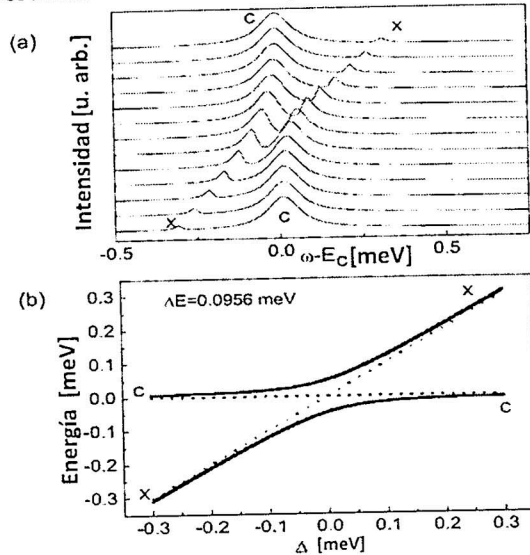


Figura 6. (a) Espectro de fotoluminiscencia para 13 valores de detuning diferentes. (b) Ramas polaritónicas en función del detuning. Los modos desacoplados son indicados con líneas punteadas. Los parámetros usados son  $\delta_c = 0.06$  meV,  $\delta_x = 0.01$  meV,  $V = 0.046$  meV.

En la Figura 6 (a) se muestra el cálculo de intensidad de fotoluminiscencia para varios valores de detuning. En la Figura 6(b) se muestran las ramas polaritónicas en función del detuning.

La constante de acople  $V = 0.046$  meV fue ajustada de tal manera que la diferencia entre los máximos en  $\rho_{11}(\omega)$  corresponda al desdoblamiento de Rabi reportado experimentalmente (0.0956 meV) y el semiancho de línea corresponda a la mitad del ancho a la mitad de la altura máxima (half width at half maximum) de los modos de cavidad y excitónico  $\delta_c = 0.06$  meV y  $\delta_x = 0.01$  meV respectivamente, extraídos del trabajo experimental de la Ref. [4], donde el detuning es controlado por la aplicación de un campo magnético.

Se observa que la intensidad de fotoluminiscencia en este caso presenta el mismo comportamiento cualitativo que el caso anterior, donde el detuning es controlado por la temperatura.

Los resultados presentan buen acuerdo cualitativo con los experimentos de Reitzenstein y colaboradores [4].

## 5. Conclusiones

Hemos desarrollado un modelo microscópico, similar al modelo de nuestros trabajos previos, que acopla un modo excitónico de un QD con un modo óptico de la cavidad. Hemos incluido también el acople de estos modos a dos continuos de excitaciones bosónicas, que son los responsables del ensanchamiento de los modos cavidad y del excitón.

Si bien el modelo no es exactamente soluble en caso general, el espectro de bajas energías se puede tratar exactamente, proporcionando así expresiones para la densidad espectral de los modos de cavidad y los modos excitónicos. Los resultados que obtuvimos presentan un buen acuerdo cualitativo con medidas experimentales de fotoluminiscencia.

Nuestro enfoque proporciona una justificación microscópica para expresiones fenomenológicas simples de la posición y el ancho de los dos modos mezclados entre el modo de cavidad y del excitón, cuando ambos modos tienen un ensanchamiento homogéneo.

1. J. P. Reithmaier, G. Seik, A. Löffler, C. Hofmann, S. Kuhn, S. Reitzenstein, L. V. Keldysh, V. D. Kulakovskii, T. L. Reinecke, and A. Forchel, *Nature* **432**, 197 (2004).
2. T. Yoshie, A. Scherer, J. Hendrickson, G. Khitrova, H. M. Gibbs, G. Rupper, C. Ell, O. B. Shchekin and D. G. Deppe, *Nature* **432**, 200 (2004).
3. A. Imamoglu, D. D. Awschalom, G. Burkard, D. P. DiVincenzo, D. Loss, M. Sherwin, and A. Small, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4204 (1999).
4. S. Reitzenstein, S. Munch, P. Franek, A. Rahimi-Iman, A. Löffler, S. Hofling, L. Worschech, and A. Forchel, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 127401 (2009).
5. H. J. Carmichael, R. J. Brecha, M. G. Raizen, H. J. Kimble, and P. R. Rice, *Phys. Rev. A* **40**, 5516 (1989).
6. L. M. León Hilario, A. Bruchhausen, A. M. Lobos, and A. A. Aligia, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 176210 (2007).
7. L. M. León Hilario, A. A. Aligia, A. M. Lobos, and A. Bruchhausen, *Superlattices Microstruct.* **43**, 532 (2008).
8. A. Bruchhausen, L. M. León Hilario, A. A. Aligia, A. M. Lobos, A. Fainstein, B. Jusserand, R. André, *Phys. Rev. B* **78**, 125326 (2008).
9. L. C. Andreani, G. Panzarini, and J-M Gérard, *Phys. Rev. B* **60**, 13276 (1999).
10. D. Press, S. Gotzinger, S. Reitzenstein, C. Hofmann, A. Löffler, M. Kamp, A. Forchel and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 117402 (2007).

# Dinámica efectiva para un ión atrapado en un cavidad EDC

Oscar Miculicich<sup>†</sup> y Eduardo Massoni<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>*Facultad de Ciencias UNI*, <sup>‡</sup>*Departamento de Física de la PUCP*

Recibido el 30 de Junio del 2011; aceptado el 1 de Julio del 2011

En este trabajo se utiliza el método de la Series de Dyson para obtener el Hamiltoniano efectivo de un sistema formado por un ión atrapado que interactúa con un láser en el interior de una cavidad electrodinámica cuántica (EDC). Como resultado se muestra una dinámica efectiva equivalente a un sistema de solo dos niveles cuya evolución, de acuerdo a la ecuación de Schrödinger y al Hamiltoniano efectivo, posee solución analítica.

**Palabras Claves:** Hamiltoniano efectivo, iones atrapados, cavidad EDC.

This paper uses the method of the Dyson series in order to obtain the effective Hamiltonian of a system consisting of a trapped ion that interacts with a laser inside a quantum electrodynamics (EDC) cavity. The result is a dynamic effect equivalent to a single two-level system whose evolution, according to the Schrodinger equation and the effective Hamiltonian, has analytical solution.

**Keywords:** Effective Hamiltonian, trapped ions, QED cavity.

## 1. Introducción

Desde la primera demostración experimental, en 1984, del intercambio de fotones entre un átomo Rydberg (átomos con valores relativamente grandes del número cuántico principal que permiten un acoplamiento dipolar eléctrico relativamente fuerte) y un modo de una cavidad superconductora en el espectro de microondas [1], las técnicas experimentales con respecto a una cavidad EDC han sido sustancialmente desarrolladas inclusive en el dominio óptico [2].

Por otro lado, el desarrollo de las técnicas de enfriamiento láser y de confinamiento de iones permiten diversas posibilidades en cuanto a la preparación, estudio y control de estados de movimiento no clásicos de los iones atrapados [3], [4], [5].

En cuanto a la dinámica de cada sistema, es bien conocido que el modelo de Jaynes-Cummings [6], para el caso de la cavidad EDC, tiene su contraparte generalizada para el sistema del ión atrapado dirigido por el láser; por ejemplo, la dinámica vibracional de un ión de dos niveles atómicos interactuando con un láser puede ser descrita, bajo ciertas condiciones, por un modelo Jaynes-Cummings no lineal [7].

Con el espíritu de contribuir en el estudio de sistemas realizables que permitan generar estados no clásicos de la radiación y/o del movimiento, este trabajo presenta un sistema constituido por un ión atrapado que debe interactuar con un láser en el interior de una cavidad EDC de alta calidad.

En este caso, se consideran tres niveles atómicos del ión ( $g$ ,  $e$  y  $c$ ) en una configuración Raman (tipo  $\Lambda$ ), de tal forma que, dos de los niveles ( $g$  y  $c$ ) se encuentran acoplados fuertemente al modo del campo electromagnético (EM) en la cavidad, y el tercer nivel ( $e$ ) se acopla con uno de los anteriores ( $c$ ) por medio del láser.

Se muestra que, un acoplamiento efectivo entre los estados vibracionales del ión y el modo del campo EM en

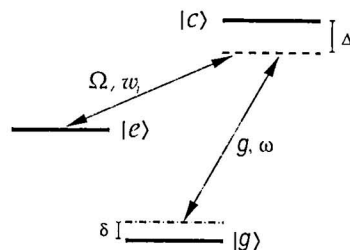
la cavidad es mediado por los grados de libertad de la estructura interna del ión.

Con dicho fin, se utiliza técnicas estándar para obtener el Hamiltoniano efectivo del sistema y como resultado se muestra la posible eliminación adiabática de uno de los niveles atómicos del ión.

## 2. Hamiltoniano del sistema

El sistema físico (SF) consiste en un ión atrapado interactuando con dos campos electromagnéticos externos. El primero de ellos corresponde al campo asociado a un láser (caso clásico); mientras que el segundo es un modo del campo electromagnético (caso cuántico) en una cavidad EDC de alta calidad.

Con el objetivo de aplicar el formalismo Hamiltoniano, se asume que la frecuencia de la trampa es mucho mayor que la tasa de decaimiento atómico (límite de confinamiento fuerte), con lo cual se pueden omitir las contribuciones no unitarias.



**Figura 1.** Esquema energético de la interacción de los niveles atómicos del ión con los campos EM [ $\Omega$  es el acoplamiento con el láser, y  $g$  con la cavidad EDC].

De acuerdo a lo anterior y en la aproximación de onda rotante para el acoplamiento átomo-cavidad, el Hamilto-

niano del SF esta dado por:

$$\begin{aligned} H &= H_o + H_1 \\ H_o &= \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c |c\rangle\langle c| \\ H_1 &= \hbar g \cos(k_o x + \phi) [a\sigma_1^+ + a^\dagger\sigma_1^-] \\ &\quad + \hbar\Omega e^{-i(k_l x - \omega_l t)} \sigma_2^- + \hbar\Omega^* e^{i(k_l x - \omega_l t)} \sigma_2^+ \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la cavidad,  $\nu$  es la frecuencia vibracional del ión,  $g$  es la constante de acoplamiento entre el átomo y la cavidad, y  $\Omega$  es la constante de acoplamiento entre el átomo y el laser, este último caracterizado por su frecuencia,  $\omega_l$ , y número de onda,  $k_l$ . Los operadores de creación de fotones y fonones son denotados por  $a^\dagger$  y  $b^\dagger$ , respectivamente.

Se asume que el ión oscila en sólo una dirección (definiendo así el eje X de oscilación), y las frecuencias asociadas a los campos electromagnéticos son tales que sólo 3 niveles  $|g\rangle$ ,  $|e\rangle$ , y  $|c\rangle$ , de la estructura interna del átomo, participan principalmente en la dinámica del SF. Los operadores asociados a las transiciones entre dichos niveles son denotados por  $\sigma_1^- = |g\rangle\langle c|$  y  $\sigma_2^- = |e\rangle\langle c|$ , así como sus correspondientes operadores adjuntos  $\sigma_1^+ = |c\rangle\langle g|$  y  $\sigma_2^+ = |c\rangle\langle e|$ .

La posición del átomo respecto al campo cuantizado en la cavidad se especifica a través de la fase  $\phi$ . En la representación de interacción, la ecuación de Schrödinger esta dada por:

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle_I = \mathcal{V}(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &\equiv U_o^\dagger(t) |\psi(t)\rangle \\ \mathcal{V}(t) &\equiv (H_1)_I \equiv U_o^\dagger(t) H_1 U_o(t) \\ U_o(t) &\equiv e^{-iH_o t/\hbar} \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. Hamiltoniano efectivo por método de la serie de Dyson

En esta sección se muestra el método por el cual se obtiene el Hamiltoniano efectivo del SF, bajo ciertas condiciones específicas para la interacción. Para ello se trabaja en la representación de interacción del Hamiltoniano (1), donde el operador evolución es expresado como una expansión en serie de Dyson; luego, la aproximación se presenta al establecer las condiciones necesarias para truncar la serie al primer orden en términos del tiempo.

#### 3.1. Expansión en serie de Dyson

El Hamiltoniano del sistema (1) en la representación de interacción (3), esta dado por:

$$\mathcal{V}_t = \hbar g_t \Gamma_{\beta_t} a \sigma_1^+ + \hbar\Omega_t^* D_{\alpha_t} \sigma_2^+ + h.c. \quad (4)$$

donde,  $\Omega_t \equiv \Omega e^{-i\Delta t}$ ,  $g_t \equiv g e^{i(\Delta+\delta)t}$ , y las funciones de operador:

$$\Gamma_{\beta_t} \equiv \frac{1}{2} [D_{\beta_t}^+ e^{-i\phi} + D_{\beta_t} e^{i\phi}] \quad (5)$$

$$D_{\alpha_t} \equiv e^{\alpha_t b^\dagger - \alpha_t^* b} \quad (6)$$

con:

$$\beta_t \equiv i\eta_o e^{i\nu t} \quad y \quad \alpha_t \equiv i\eta_e e^{i\nu t} \quad (7)$$

Por otro lado, si se considera el operador:

$$\Pi \equiv a^\dagger a + \frac{1}{2} [|c\rangle\langle c| + |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|] \quad (8)$$

se verifica que  $[\Pi, \mathcal{V}_t] = 0 \quad \forall t$ . Además, los autovectores de  $\Pi$  se pueden expresar como:

$$|\Phi^{(n)}\rangle = \Phi_e |e, n\rangle + \Phi_g |g, n+1\rangle + \Phi_c |c, n\rangle \quad (9)$$

de tal forma que  $\Pi |\Phi^{(n)}\rangle = (n + \frac{1}{2}) |\Phi^{(n)}\rangle$ .

Luego, el Hamiltoniano (4), en la base canónica  $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle, |c, n\rangle\}$ , es diagonal por bloques del tipo:

$$\mathcal{V}_t \rightarrow \hbar \begin{pmatrix} |e, n\rangle & |g, n+1\rangle & |c, n\rangle \\ 0 & 0 & \Omega_t D_{\alpha_t}^+ \\ 0 & 0 & g_{nt}^* \Gamma_{\beta_t} \\ \Omega_t^* D_{\alpha_t} & g_{nt} \Gamma_{\beta_t} & 0 \end{pmatrix} \equiv V_t^{(n)} \quad (10)$$

donde  $g_{nt} \equiv g_t \sqrt{n+1}$ .

Con lo anterior, el operador de evolución (en serie de Dyson) es diagonal por bloques del tipo:

$$\begin{aligned} U_t^{(n)} &\equiv 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 V_{t_1}^{(n)} \\ &\quad + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V_{t_1}^{(n)} V_{t_2}^{(n)} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

#### 3.2. Dinámica efectiva del sistema

Para determinar la contribución de cada término en la serie anterior, se evaluará la contribución en cada elemento de matriz:

$$\begin{aligned} \langle N | U_t^{(n)} | M \rangle &= \delta_{NM} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt_1 \langle N | V_{t_1}^{(n)} | M \rangle \\ &\quad + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle N | V_{t_1}^{(n)} V_{t_2}^{(n)} | M \rangle \end{aligned}$$

donde se obtienen integrales del tipo:

$$\begin{aligned} I_{NM}(q, t) &\equiv \int_0^t \langle N | D_{\eta_{t_1}} | M \rangle e^{-iq t_1} dt_1 \\ &= \langle N | D_{\eta_0} | M \rangle \int_0^t e^{i[(N-M)\nu - q] t_1} dt_1 \end{aligned} \quad (12)$$

que presentan dos comportamientos bien definidos:

$$I_{NM}(q, t) = \langle N | D_{\eta_0} | M \rangle t, \quad \text{si } q = (N-M)\nu \equiv q_o \quad (13)$$

$$= \langle N | D_{\eta_0} | M \rangle \frac{e^{i(q_o - q)t} - 1}{i(q_o - q)}, \quad \text{si } q \neq q_o \quad (14)$$

Ahora, teniendo en cuenta los elementos de matriz involucrados en el Hamiltoniano (10), se observa que en las integrales del tipo (12) el valor de  $q$  solo toma valores del orden de  $\Delta$  ("detuning" entre los campos y el nivel  $|c\rangle$ ), lo cual hace posible establecer un conjunto de condiciones que permitan diferenciar las contribuciones a la evolución de cada término de la serie de Dyson.

En dicho sentido, las condiciones que se deben satisfacer son:

1. El “detuning” del nivel  $|c\rangle$  debe ser de mayor orden que la frecuencia de vibración del ión; esto es, se exige  $\Delta \gg N_e \nu$  (con  $N_e$  elegido en la estadística fonónica inicial, tal que para  $N > N_e$  la población fonónica es insignificante).
2. Las constantes de acoplamiento del ión con la cavidad,  $g$ , y del ión con el láser,  $|\Omega|$ , deben ser del mismo orden.
3. Las constantes de acoplamiento,  $g$  y  $|\Omega|$ , deben ser

de menor orden que el “detuning”; esto es, se debe cumplir  $g|\Omega| \ll \Delta^2$ .

Se verifica que, en acuerdo con las tres condiciones previas, el segundo término de la expansión (11) posee el orden del factor  $\sqrt{g|\Omega|}/\Delta \ll 1$ ; por tanto, las contribuciones de dicho término (a la evolución del sistema) son insignificantes.

En el caso del tercer término de la expansión en serie (11), se observa que el integrando tiene la forma:

$$\mathcal{V}_{t_1} \mathcal{V}_{t_2} \rightarrow \hbar^2 \begin{pmatrix} \Omega_{t_1} \Omega_{t_2}^* D_{\alpha_{t_1}}^+ D_{\alpha_{t_2}} & \Omega_{t_1} g_{nt_2} D_{\alpha_{t_1}}^+ \Gamma_{\beta_{t_2}} & 0 \\ g_{nt_1}^* \Omega_{t_2}^* \Gamma_{\beta_{t_1}} D_{\alpha_{t_2}} & g_{nt_1}^* g_{nt_2} \Gamma_{\beta_{t_1}} \Gamma_{\beta_{t_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{t_1}^* \Omega_{t_2} D_{\alpha_{t_1}} D_{\alpha_{t_2}}^+ + g_{nt_1} g_{nt_2}^* \Gamma_{\beta_{t_1}} \Gamma_{\beta_{t_2}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

donde se manifiesta la posibilidad de eliminar el nivel  $|c\rangle$  de la dinámica del sistema. Para este término se obtienen integrales del tipo:

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \langle N | D_{\eta_{t_1}} D_{\mu_{t_2}} | M \rangle e^{-i q_1 t_1} e^{i q_2 t_2} dt_1 dt_2 \quad (16)$$

y de forma análoga al término anterior, se obtienen contribuciones del orden  $g|\Omega|/\Delta^2$  cuando  $(q_2 - q_1)$  es del orden de  $\Delta$ . Sin embargo, cuando  $q_2 - q_1 = \delta = \pm k\nu$  las contribuciones (a la serie) son del orden  $g|\Omega|/\Delta t$ .

Finalmente, teniendo en cuenta las condiciones mencionadas y en una escala de tiempo del orden  $[g|\Omega|/\Delta]^{-1}$ , el operador de evolución en la representación de interacción, se expresa como:

$$U(t) \simeq 1 - \frac{i}{\hbar} H_{ef}^\pm t + \dots \equiv \exp \left( -\frac{i H_{ef}^\pm t}{\hbar} \right) \quad (17)$$

es decir, el SF evoluciona de manera efectiva de acuerdo al Hamiltoniano  $H_{ef}^\pm$  que, en el subespacio generado por los vectores  $|e, n, N\rangle$  y  $|g, m, M\rangle$ , esta dado por:

$$\begin{aligned} H_{ef}^\pm &= -\frac{g^2 \hbar}{2\Delta} \left[ e^{-2\eta_0^2} \cos(2\phi) f_0(2\eta_0) + 1 \right] a^\dagger a |g\rangle \langle g| \\ &\quad - \frac{|\Omega|^2 \hbar}{\Delta} |e\rangle \langle e| - \frac{g\Omega^* \hbar}{2\Delta} F_{k,\pm}(\eta_0, \eta) a^\dagger |g\rangle \langle e| \\ &\quad - \frac{g\Omega \hbar}{2\Delta} (F_{k,\pm}(\eta_0, \eta))^\dagger a |e\rangle \langle g| \end{aligned} \quad (18)$$

donde las funciones evaluadas en operadores,  $F_{k,\pm}$ , están dadas por:

$$\begin{aligned} F_{k,+}(\eta_0, \eta) &\equiv e^{-\frac{1}{2}(\eta_0+\eta)^2} e^{i\phi} [i(\eta_0+\eta)b^\dagger]^k f_k(\eta_0+\eta) \\ &\quad + e^{-\frac{1}{2}(\eta_0-\eta)^2} e^{-i\phi} [i(\eta-\eta_0)b^\dagger]^k f_k(\eta-\eta_0) \\ F_{k,-}(\eta_0, \eta) &\equiv e^{-\frac{1}{2}(\eta_0+\eta)^2} e^{i\phi} f_k(\eta_0+\eta) [i(\eta_0+\eta)b]^k \\ &\quad + e^{-\frac{1}{2}(\eta_0-\eta)^2} e^{-i\phi} f_k(\eta-\eta_0) [i(\eta-\eta_0)b]^k \end{aligned}$$

con el operador  $f_k(y)$  (en orden normal) dado por:

$$f_k(y) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^s (b^\dagger)^s b^s}{(k+s)! s!}$$

Se puede verificar que tomando  $\phi = 0$ ,  $k = \pm 1$ , y en el régimen de Lamb-Dicke, el Hamiltoniano efectivo (18) se

reduce a:

$$\begin{aligned} H_{ef}^+ &= -\frac{g^2 \hbar}{\Delta} a^\dagger a |g\rangle \langle g| - \frac{|\Omega|^2 \hbar}{\Delta} |e\rangle \langle e| \\ &\quad - \frac{ig\eta \hbar}{\Delta} [\Omega^* a^\dagger b^\dagger |g\rangle \langle e| - \Omega ab |e\rangle \langle g|] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_{ef}^- &= -\frac{g^2 \hbar}{\Delta} a^\dagger a |g\rangle \langle g| - \frac{|\Omega|^2 \hbar}{\Delta} |e\rangle \langle e| \\ &\quad - \frac{ig\eta \hbar}{\Delta} [\Omega^* a^\dagger b |g\rangle \langle e| - \Omega ab^\dagger |e\rangle \langle g|] \end{aligned} \quad (20)$$

donde el Hamiltoniano (19) (asociado al caso  $\delta = +\nu$ ) corresponde a un átomo de dos niveles interactuando con dos modos bosónicos ( $a$  y  $b$ ), de tal forma que, en la absorción (emisión) atómica se aniquilan (crean) dos bosones, un fotón y un fonón.

Así mismo, el Hamiltoniano (20) (asociado al caso  $\delta = -\nu$ ) corresponde a un átomo de dos niveles interactuando con dos modos bosónicos ( $a$  y  $b$ ), de tal forma que, en la absorción (emisión) atómica se aniquila (crea) un fotón y se crea (aniquila) un fonón.

## 4. Evolución efectiva del sistema

Por lo visto en la sección previa, (18) representa un Hamiltoniano tipo Jaynes-Cummings generalizado; esto es, para el caso de  $H_{ef}^-$ , la absorción (emisión) atómica tiene como resultado la aniquilación (creación) de un fotón en la cavidad y la creación (aniquilación) simultánea de  $k$  fonones en el estado vibracional del átomo.

De manera análoga, para el caso de  $H_{ef}^+$ , la absorción (emisión) atómica tiene como resultado la aniquilación (creación) de un fotón en la cavidad y la aniquilación (creación) simultánea de  $k$  fonones en el estado vibracional del átomo.

#### 4.1. Autovalores y autovectores de $H_{ef}^{\pm}$

Ahora, el problema de autovalores de  $H_{ef}^{\pm}$  puede ser resuelto exactamente al tomar autovectores de la forma  $\alpha |e, n, N\rangle + \beta |g, n+1, N \pm k\rangle$ , donde  $n$  (autovalores de  $a^{\dagger}a$ ) representa el número de fotones en la cavidad, y

$N$  (autovalores de  $b^{\dagger}b$ ) representa el número de fonones del estado vibracional del átomo.

Después de un proceso de diagonalización estándar [8], se muestra que los autovalores para  $H_{ef}^{\pm}$  y sus correspondientes autovectores, están dados por:

$$E_{n,N,\pm}^+ = \frac{\hbar}{4\Delta} (4|\Omega|^2 - \Delta_{n,N,k}^+) \pm \frac{\hbar}{4\Delta} R_{n,N,k}^+ \quad ; \text{ con } N \geq 0 \quad (21)$$

$$E_{n,N,0}^+ = \frac{\hbar g^2}{2\Delta} (n+1) \left[ e^{-2\eta_o^2} \cos(2\phi) L_N(4\eta_o^2) + 1 \right] \quad ; \text{ con } N < k \quad (22)$$

$$|\psi_{n,N,+}^+\rangle = \cos\left[\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right] e^{-i\frac{\xi}{2}} |e, n, N\rangle + \sin\left[\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right] e^{i\frac{\xi}{2}} |g, n+1, N+k\rangle \quad (23)$$

$$|\psi_{n,N,-}^+\rangle = -\sin\left[\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right] e^{-i\frac{\xi}{2}} |e, n, N\rangle + \cos\left[\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right] e^{i\frac{\xi}{2}} |g, n+1, N+k\rangle \quad (24)$$

$$|\psi_{n,N,0}^+\rangle = |g, n+1, N\rangle \quad (25)$$

de tal forma que  $H_{ef}^+ |\psi_{n,N,i}^+\rangle = E_{n,N,i}^+ |\psi_{n,N,i}^+\rangle$ , con  $i = +, -, 0$ ; además:

$$\Delta_{n,N,k}^+ \equiv 2|\Omega|^2 - g^2(n+1) \left[ e^{-2\eta_o^2} \cos(2\phi) L_{N+k}(4\eta_o^2) + 1 \right]$$

$$R_{n,N,k}^+ \equiv \left[ (\Delta_{n,N,k}^+)^2 + 4g^2 |\Omega A_N^k|^2 (n+1) \right]^{1/2}$$

$$\theta_{n,N,k}^+ \equiv \arccos\left(\frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+}\right)$$

Los  $A_N^k$  son definidos por:

$$F_{k,+}(\eta_o, \eta) |N\rangle = A_N^k(\eta_o, \eta) |N+k\rangle \quad (26)$$

y de forma explícita:

$$A_N^k(\eta_o, \eta) \equiv i^k \sqrt{\frac{N!}{(N+k)!}} \left[ (\eta + \eta_o)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta + \eta_o)^2 + i\phi} \times L_N^k((\eta + \eta_o)^2) + (\eta - \eta_o)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_o)^2 - i\phi} L_N^k((\eta - \eta_o)^2) \right]$$

El factor de fase,  $e^{i\xi/2}$ , es definido a partir de los elementos no-diagonales del Hamiltoniano bidimensional correspondiente al sub-espacio generado por los vectores  $|e, n, N\rangle$  y  $|g, n+1, N+k\rangle$ , de la siguiente manera:

$$e^{i\xi} \equiv \frac{\Omega(A_N^k)^*}{|\Omega(A_N^k)^*|} \quad (27)$$

Finalmente, se obtienen expresiones similares para el Hamiltoniano  $H_{ef}^-$ :

$$E_{n,N,\pm}^- = \frac{\hbar}{4\Delta} (4|\Omega|^2 - \Delta_{n,N,k}^-) \pm \frac{\hbar}{4\Delta} R_{n,N,k}^- \quad ; \text{ con } N \geq k \quad (28)$$

$$E_{n,N,0}^- = \frac{\hbar|\Omega|^2}{\Delta} \quad ; \text{ con } N < k \quad (29)$$

$$|\psi_{n,N,+}^-\rangle = \cos\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{-i\frac{\xi}{2}} |e, n, N\rangle + \sin\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{i\frac{\xi}{2}} |g, n+1, N-k\rangle \quad (30)$$

$$|\psi_{n,N,-}^-\rangle = -\sin\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{-i\frac{\xi}{2}} |e, n, N\rangle + \cos\left[\frac{\theta_{n,N,k}^-}{2}\right] e^{i\frac{\xi}{2}} |g, n+1, N-k\rangle \quad (31)$$

$$|\psi_{n,N,0}^-\rangle = |e, n, N\rangle \quad (32)$$

de tal forma que  $H_{ef}^- |\psi_{n,N,i}^-\rangle = E_{n,N,i}^- |\psi_{n,N,i}^-\rangle$ , con  $i = +, -, 0$ ; además:

$$\Delta_{n,N,k}^- \equiv 2|\Omega|^2 - g^2(n+1) \left[ e^{-2\eta_o^2} \cos(2\phi) L_{N-k}(4\eta_o^2) + 1 \right]$$

$$R_{n,N,k}^- \equiv \left[ (\Delta_{n,N,k}^-)^2 + 4g^2 |\Omega C_N^k|^2 (n+1) \right]^{1/2}$$

$$\theta_{n,N,k}^- \equiv \arccos\left(\frac{\Delta_{n,N,k}^-}{R_{n,N,k}^-}\right)$$



Los  $C_N^k$  son definidos por:

$$F_{k,-}(\eta_o, \eta)|N\rangle = C_N^k(\eta_o, \eta)|N-k\rangle \quad (33)$$

y de manera explícita:

$$\begin{aligned} C_N^k(\eta_o, \eta) &= i^k \sqrt{\frac{(N-k)!}{N!}} [(\eta + \eta_o)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta + \eta_o)^2 + i\phi} \\ &\quad \times L_{N-k}^k((\eta + \eta_o)^2) \\ &\quad + (\eta - \eta_o)^k e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_o)^2 - i\phi} L_{N-k}^k((\eta - \eta_o)^2)] \end{aligned}$$

## 4.2. Evolución del sistema

Teniendo en cuenta los resultados previos, se puede considerar el problema de la evolución del SF. Suponiendo que en el instante inicial,  $t = 0$ , la estructura interna del ión se encuentra desacoplada de la cavidad y de sus propios estados de movimiento, el estado inicial del SF se puede expresar como:

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi_{ion}\rangle \otimes \sum_{m,M} \chi_{m,M} |m, M\rangle \quad (34)$$

donde  $\chi(m, M)$  representa la amplitud de probabilidad de obtener  $m$  fotones en la cavidad y  $M$  fonones en el estado vibracional del ión. Ahora, para un ión inicialmente en su estado excitado, el vector de estado en instantes posteriores (debido a la evolución con el hamiltoniano  $H_{ef}^+$ ) esta dado por:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n,N} a_{n,N,+} e^{-iE_{n,N,+}^+ t/\hbar} |\psi_{n,N,+}^+\rangle \\ &\quad + a_{n,N,-} e^{-iE_{n,N,-}^+ t/\hbar} |\psi_{n,N,-}^+\rangle \quad (35) \end{aligned}$$

donde:

$$a_{n,N,+} = \langle \psi_{n,N,+}^+ | \psi(0) \rangle = \cos\left(\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right) e^{i\xi/2} \chi_{n,N} \quad (36)$$

$$a_{n,N,-} = \langle \psi_{n,N,-}^+ | \psi(0) \rangle = -\sin\left(\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right) e^{i\xi/2} \chi_{n,N} \quad (37)$$

Luego, la inversión (en este caso) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} W_e^+(t) &\equiv \langle \psi(t) | \sigma_z | \psi(t) \rangle \\ &= 1 - 2 \sum_{n,N} \chi_{n,N}^2 \left[ 1 - \left( \frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \sin^2\left(\frac{R_{n,N,k}^+}{4\Delta} t\right) \quad (38) \end{aligned}$$

En la figura 2 se muestra un gráfico de la inversión  $W_e^+(t)$  como función del tiempo, donde la banda de oscilación cubre un mayor rango conforme se incrementa los valores de los parámetros de Lamb-Dicke.

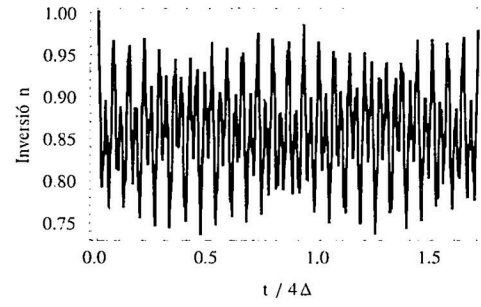


Figura 2. Inversión  $W_e^+(t)$  como función del tiempo. Parámetro  $\eta \simeq 0.7707$ , y se considera una distribución inicial fotónica y fonónica coherente.

En las mismas condiciones, la figura 3 representa la evolución del sistema en cuanto a la distribución fotónica y fonónica. Se observa que un instante posterior al inicial, el subespacio  $|g, m, M\rangle$  comienza a poblarse con una distribución oscilante en acuerdo con el gráfico de inversión.

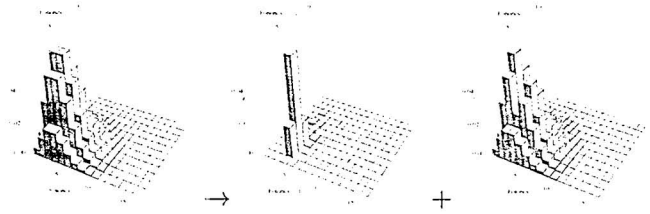


Figura 3. Evolución a partir del ión en estado excitado, y una estadística inicial coherente para los fotones y fonones ( $k = 12$  y  $\eta \simeq 0.7707$ )

## 5. Conclusiones

Se ha establecido el régimen para el cual el SF evoluciona de manera efectiva con el Hamiltoniano (18). Dicho Hamiltoniano obtenido por el método de la serie de Dyson muestra como resultado la posible eliminación adiabática de uno de los niveles atómicos del ión; en este sentido, será necesario establecer y verificar las condiciones para la evolución adiabática del SF.

Así mismo, teniendo en cuenta que el Hamiltoniano efectivo es independiente del tiempo, se muestra que la ecuación de evolución posee solución analítica, lo cual muestra la posibilidad de predecir completamente (desde el punto de vista de la teoría cuántica) la dinámica efectiva del sistema y los valores medios de cualquier observable. En este sentido, queda abierta la posibilidad de controlar la evolución del sistema y así obtener estados cuánticos "preseleccionados" tanto en la cavidad como en los estados de movimiento del ión.

1. D. Meschede, H. Walther, and G. Muller, *One-atom maser*, Phys. Rev. Lett., vol. 54, p. 551, 1985.
2. P. Munstermann, T. Fischer, P. Maunz, P. Pinkse, and G. Rempe, *Dynamics of single-atom motion observed in*

*a high-finesse cavity*, Phys. Rev. Lett., vol. 82, p. 3791, 1999.

3. C. Monroe, D. Meekhof, B. King, S. Jefferts, W. Itano, D. Wineland, and P. Gould, *Resolved-sideband Raman cool-*

- ing of a bound atom to the 3D zero-point energy*, Phys. Rev. Lett., vol. 75, p. 4011, 1995.
4. D. Meekhof, C. Monroe, B. King, W. Itano, and D. Wineland, *Generation of nonclassical motional states of a trapped atom*, Phys. Rev. Lett., vol. 76, p. 1796, 1996.
  5. D. Leibfried, D. Meekhof, B. King, C. Monroe, W. Itano, and D. Wineland, *Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom*, Phys. Rev. Lett., vol. 77, p. 4281, 1996.
  6. E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE, vol. 51, p. 89, 1963.
  7. W. Vogel and R. de Matos Filho, *Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion*, Phys. Rev. A, vol. 52, p. 4214, 1995.
  8. O. Miculicich and E. Massoni, *Hamiltoniano Efectivo para un ión atrapado interactuando con un láser en el interior de una cavidad QED*. Facultad de Ciencias UNI: Tesis de Licenciatura, 2011.

# El efecto túnel clásico

Holger G. Valqui

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería

Recibido el 03 de marzo del 2011; aceptado el 12 de abril del 2011

El Efecto Túnel es considerado como una característica típica del modelo cuántico. En el presente trabajo se muestra que tal efecto también se presenta en el modelo clásico, cuando se considera que los valores de los observables físicos provienen de mediciones y las correspondientes incertidumbres.

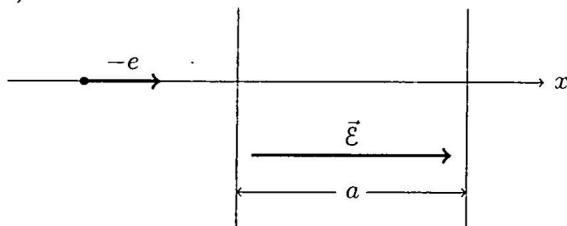
**Palabras Claves:** Medición Experimental, incertidumbre en las mediciones, efecto túnel.

The Tunnel Effect is a well known result of the quantum theory. In this paper we shown that such phenomenon should also appear in the classical theory if one takes into account that the values of physical observables are obtained by measurements and its proper uncertainties.

**Keywords:** Experimental measurements, measurement's uncertainties, tunnel effect.

## 1. Un problema planteado dentro del esquema clásico

Consideremos el siguiente problema. Un electrón avanza libremente con velocidad (constante)  $V$ , perpendicularmente a las placas de un condensador; ingresa al campo entre dichas placas y, eventualmente, las atraviesa (pues dichas placas tienen agujeros que no causan difracción).



**Figura 1.** Un electrón avanza para introducirse al interior del condensador, donde será desacelerado por el campo  $\vec{E}$ .

Se trata de un condensador ideal, de placas infinitas, sin espesor, en el exterior del cual el campo es nulo; en el interior el campo  $\vec{E}$  es uniforme, de manera que la energía potencial del electrón en el interior del condensador crecerá linealmente con la distancia:

$$U = e\mathcal{E}x, \quad \text{donde} \quad \mathcal{E} \equiv |\vec{E}|;$$

la distancia  $x$  está medida a partir de la placa del lado izquierdo.

Por conservación de la energía, la velocidad del electrón en el interior del condensador, en la posición  $x$ , está expresada por:

$$v^2 = V^2 - 2\frac{x}{m}e\mathcal{E}$$

Sea la distancia crítica  $x_c$  tal que

$$0 = V^2 - 2\frac{x_c}{m}e\mathcal{E}$$

es decir, la distancia a la cual (si el electrón permanece en el campo uniforme) el electrón se detendría, para luego regresar por efecto del campo. De manera que el electrón pasará, o no pasará, según que  $a \leq x_c$  ó que  $a > x_c$ , respectivamente. Nótese que:

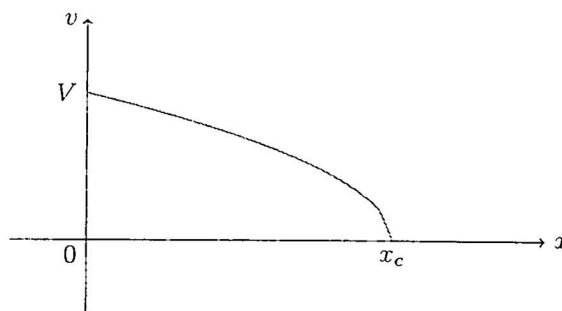
$$x_c = m \frac{V^2}{2e\mathcal{E}}$$

Es decir, para que el electrón pueda recorrer la distancia,  $a$ , entre las placas, y salir al exterior, resulta necesario que

$$V^2 > 2\frac{a}{m}e\mathcal{E},$$

donde la velocidad,  $v_f$ , de salida quedará expresada por

$$v_f^2 = V^2 - 2\frac{a}{m}e\mathcal{E}$$



**Figura 2.** Variación de la velocidad del electrón en el interior del condensador.

Con respecto al problema planteado, mi afirmación es la siguiente:

En un caso real, a pesar de no satisfacerse la condición anterior, es decir, a pesar de cumplirse la condición:

$$V^2 < 2\frac{a}{m}e\mathcal{E}$$

existe cierta probabilidad de que el electrón emerja por el lado derecho del condensador. Esto es lo que llamo el Efecto Túnel Clásico.

## 2. Sobre las mediciones físicas y el valor de los observables

Una medición física es el resultado de un proceso en el cual se realiza un número infinito (es decir, un número suficientemente grande) de **mediciones singulares**, cada una de las cuales proporciona un resultado numérico, que aisladamente no es significativo para el valor de la propiedad física en consideración. El valor de la propiedad física se obtiene –generalmente– como el promedio aritmético de todas las mediciones singulares. Además, se obtiene lo que se conoce como **incertidumbre de la medición** o el **error de medición**. Este último nombre es desafortunado, pues induce a creer que dicho error es subsanable, eventualmente reducible a cero.

Mientras que los físicos experimentales se sintieron obligados a reconocer que sus mediciones no pueden ser exactas, e incluían al error de medición,  $\sigma$ , en sus informes; en cambio, hasta comienzos del siglo XX, los físicos teóricos prefirieron asumir que dicho supuesto error era subsanable, y –asumieron que idealmente debería cumplirse la condición  $\sigma = 0$ .

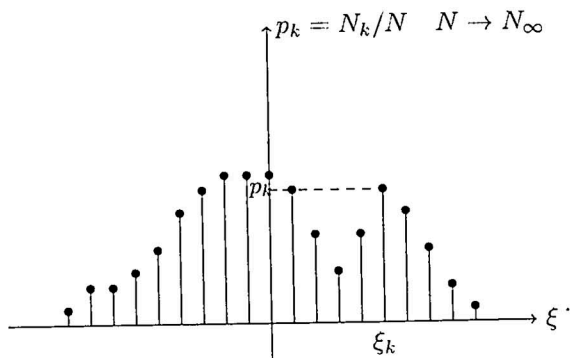


Figura 3. Resultados de un proceso de medición.

Al realizar  $N$  mediciones singulares de un observable físico,  $\xi$ , el resultado particular  $\xi_k$  se obtiene  $N_k$  veces; es decir, el valor  $\xi_k$  se ha obtenido con la frecuencia

$$f_k = \frac{N_k}{N}$$

En el modelo clásico se define la probabilidad  $p_k$  de obtener el resultado  $\xi_k$  como  $p_k = \lim_{N \rightarrow \infty} f_k$  para  $N \rightarrow \infty$ , para lo cual basta que  $N_\infty$  sea un número suficientemente grande.

En la figura 4 se muestra aproximadamente la curva gaussiana típica de una distribución (continua por comodidad) de mediciones de alguna propiedad observable (es decir, medible),  $\xi$ , de un Sistema Físico. También se muestra la medición ideal,  $P = 1$ , según el modelo teórico clásico, cuyo valor coincide con el supuesto valor medio,  $\langle \xi \rangle$ , de las mediciones singulares obtenidas en el laboratorio.

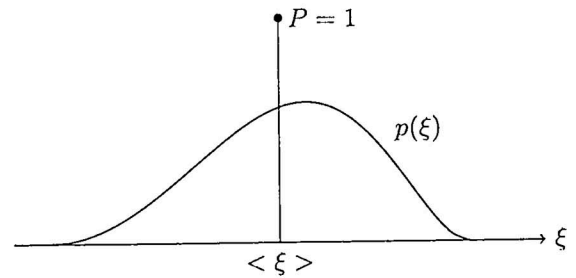


Figura 4. Distribución experimental y medición clásica

## 3. Cálculo de la probabilidad de que el electrón atravesase el condensador

Assumiremos que la velocidad  $V$  del electrón incidente se encuentra en el intervalo finito  $(V_1, V_2)$ , donde la distribución de valores de dicha velocidad están indicados por la curva de densidad de probabilidad,  $\nu$ ; y que los valores del campo producido por el condensador se encuentran en el intervalo  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ , con una densidad de probabilidad indicada por la función  $\eta$ .

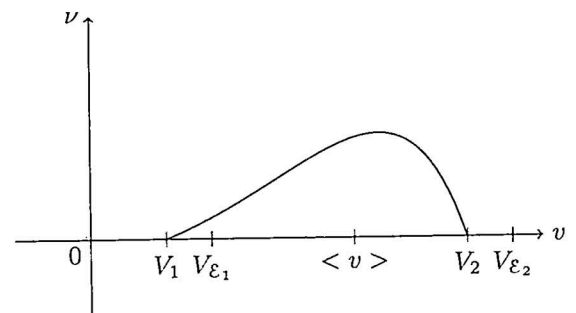


Figura 5. Curva de densidad de probabilidad  $\nu$  de la velocidad  $V$  del electrón incidente, de valor no nulo, en el intervalo  $(V_1, V_2)$ .

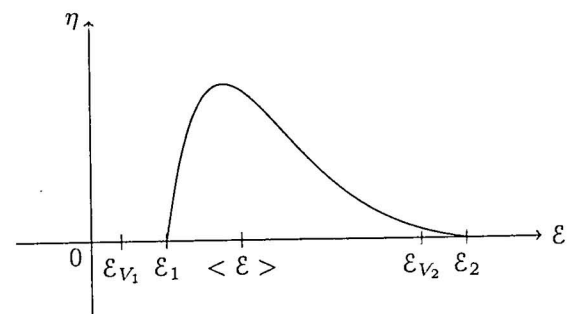


Figura 6. Curva de densidad de probabilidad  $\eta$  del valor del campo eléctrico  $\mathcal{E}$  entre las placas.

Las densidades de probabilidad deberán cumplir:

$$\int_{V_1}^{V_2} \nu(V) dV = 1$$

$$\int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} \eta(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 1$$

(En la Teoría Cuántica los extremos de integración suelen ser infinitos)

Sean las

$$V_{\varepsilon_1}^2 = 2\frac{a}{m}\varepsilon_1, \quad V_{\varepsilon_2}^2 = 2\frac{a}{m}\varepsilon_2,$$

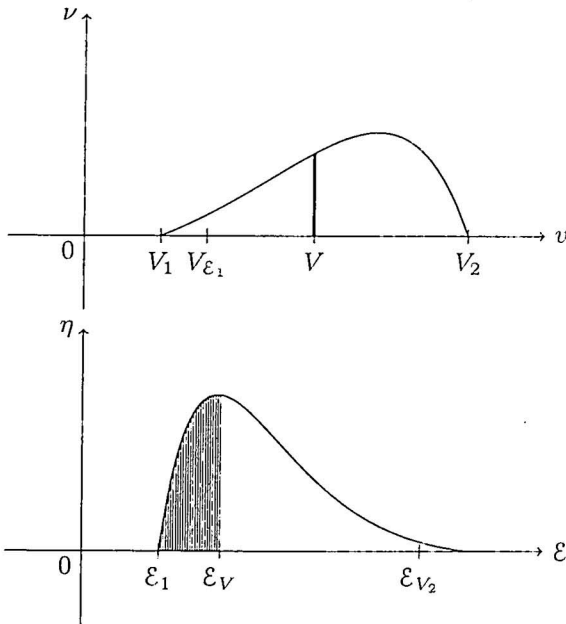
$$V_1^2 = 2\frac{a}{m}\varepsilon_{V_1}, \quad V_2^2 = 2\frac{a}{m}\varepsilon_{V_2}$$

donde dichos valores significan:

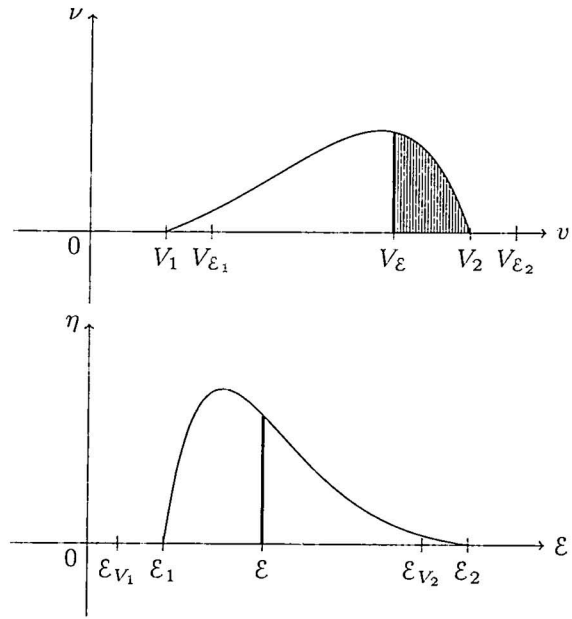
- $V_{\varepsilon_1}$  es la (mínima) velocidad que debería tener el electrón para poder atravesar el condensador si el campo tuviese el valor (mínimo)  $\varepsilon_1$ .
- $V_{\varepsilon_2}$  es la (mínima) velocidad que debería tener el electrón para poder atravesar el condensador si el campo tuviese el valor (máximo)  $\varepsilon_2$ .
- $\varepsilon_{V_1}$  es el máximo valor que podría tener el campo eléctrico para que el electrón, incidiendo con la (mínima) velocidad  $V_1$ , pueda atravesar al condensador.
- $\varepsilon_{V_2}$  es el máximo valor que podría tener el campo eléctrico para que el electrón, incidiendo con la (máxima) velocidad  $V_2$ , pueda atravesar al condensador.

Designaremos con  $\varepsilon_V$  el valor máximo que debería tener el campo eléctrico para que un electrón incidiendo con la velocidad  $V$  pueda pasar al otro lado. Es decir, el electrón, con velocidad  $V$ , pasará si se cumple que  $\varepsilon < \varepsilon_V$ .

Designaremos con  $V(\varepsilon)$  la velocidad mínima que debería tener el electrón para atravesar el condensador cuyo campo eléctrico es precisamente  $\varepsilon$ . Es decir, si el campo vale  $\varepsilon$ , el electrón pasará si se cumple que  $V > V(\varepsilon)$ .



**Figura 7.** Si el electrón incide con velocidad  $V$ , entonces, la zona achurada, entre  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_V$  indica la probabilidad de que dicho electrón atraviese el condensador. Nótese que si se tuviese el caso  $\varepsilon_V < \varepsilon_{V_1}$ , el electrón no pasaría.



**Figura 8.** Si la intensidad del campo eléctrico fuese igual a  $\varepsilon$ , entonces, la zona achurada, entre  $V_{\varepsilon}$  y  $V_2$ , indica la probabilidad de que el electrón atraviese al condensador. Nótese que si se tuviese el caso  $V_{\varepsilon} > V_2$ , el electrón no pasaría.

Supongamos que el electrón incidiese con velocidad  $V$ . ¿Cuál será la probabilidad de que atraviese el condensador? Con tal velocidad, el electrón atravesará al condensador solamente si el campo no es mayor que  $\varepsilon_V$ ; la probabilidad que  $\varepsilon$  no sea mayor que  $\varepsilon_V$  es igual a:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_V} \eta(\varepsilon) d\varepsilon$$

Es claro que la probabilidad de que el electrón tenga precisamente la velocidad  $V$  es igual a cero; en cambio la probabilidad  $p(V, V + dV)$  de que el electrón tenga una velocidad que se encuentre en el intervalo  $(V, V + dV)$  es  $p(V, V + dV) = \nu(V)dV$ . Por otra parte, la probabilidad (compuesta) de que la velocidad del electrón se encuentre en el intervalo  $(V, V + dV)$  y pase, estará dada por el producto de las dos probabilidades:

$$P \left( \begin{array}{l} \text{El electrón tiene} \\ \text{la velocidad casi} \\ \text{igual a } V, \text{ y pase} \end{array} \right) = \nu(V)dV \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_V} \eta(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1)$$

Si ahora dividimos el intervalo de velocidades con posibilidades de pasar,  $(V_{\varepsilon_1}, V_2)$ , en  $N$  subintervalos, cada uno de ellos dará una cierta probabilidad de pasar, y la probabilidad total será la suma de dichas probabilidades. Es decir, la probabilidad de que el electrón pase al otro lado del condensador estará dada por:

$$P \left( \begin{array}{l} \text{probabilidad} \\ \text{de que el} \\ \text{electrón} \\ \text{atraviese al} \\ \text{condensador} \end{array} \right) = \int_{V_{\varepsilon_1}}^{V_2} dV \nu(V) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_V} \eta(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2)$$



donde, la igualdad  $\mathcal{E}_V = \frac{m}{2a} V^2$ , implica que  $\exists F$  tal que:

$$\int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_V} \eta(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \equiv F(V)$$

Dadas la (distribución de) probabilidad de la velocidad del electrón,  $\nu$ , y la (distribución de) probabilidad de la intensidad del campo eléctrico,  $\eta$ , el procedimiento para calcular numéricamente la probabilidad de que el electrón (o un chorro de electrones) atraviese el condensador, es lo que se conoce como el Método de Montecarlo.

El cálculo anterior se realizó partiendo de considerar un electrón con velocidad incidente  $V$ . Pero también podríamos haber partido de considerar un campo eléctrico de intensidad  $\mathcal{E}$ ; en tal caso el resultado tendría la forma:

$$P \left( \begin{array}{l} \text{probabilidad} \\ \text{de que el} \\ \text{electrón} \\ \text{atraviese al} \\ \text{condensador} \end{array} \right) = \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_{V_2}} \eta(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \int_{V_{\mathcal{E}}}^{V_2} \nu(V) dV \quad (3)$$

donde, la igualdad  $\mathcal{E} = \frac{m}{2a} V_{\mathcal{E}}^2$ , implica que  $\exists G$  tal que

$$\int_{V_{\mathcal{E}}}^{V_2} \nu(V) dV \equiv G(\mathcal{E})$$

donde, por supuesto, las dos maneras de calcular la probabilidad de que el electrón atraviese el condensador deben dar resultados coincidentes.

#### 4. Análisis de los intervalos de integración

En el cálculo de la probabilidad según la ecuación (2), partiendo de un electrón que incide con velocidad  $V$  hemos supuesto que el intervalo de integración de la velocidad es  $(V_{\mathcal{E}_1}, V_2)$ , pero tal intervalo es solamente un caso particular, como veremos a continuación.

A.- Notemos que para que el intervalo de integración sea no vacío, deberá cumplirse que

$$(V_1, V_2) \cap (V_{\mathcal{E}_1}, V_{\mathcal{E}_2}) \neq \emptyset$$

entonces habrán cuatro casos posibles (a la derecha se indica los intervalos de integración):

1.  $V_{\mathcal{E}_1} < V_1 < V_{\mathcal{E}_2} < V_2$ ,  $(V_1, V_{\mathcal{E}_2})$
2.  $V_{\mathcal{E}_1} < V_1 < V_2 < V_{\mathcal{E}_2}$ ,  $(V_1, V_2)$
3.  $V_1 < V_{\mathcal{E}_1} < V_{\mathcal{E}_2} < V_2$ ,  $(V_{\mathcal{E}_1}, V_{\mathcal{E}_2})$
4.  $V_1 < V_{\mathcal{E}_1} < V_2 < V_{\mathcal{E}_2}$ ,  $(V_{\mathcal{E}_1}, V_2)$

B.- En el caso del cálculo alternativo según la ecuación (3) procedemos análogamente,

$$(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \cap (\mathcal{E}_{V_1}, \mathcal{E}_{V_2}) \neq \emptyset$$

entonces habrán cuatro casos posibles (a la derecha se indica los intervalos de integración):

1.  $\mathcal{E}_{V_1} < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_{V_2} < \mathcal{E}_2$ ,  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_{V_2})$
2.  $\mathcal{E}_{V_1} < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_{V_2}$ ,  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$
3.  $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_{V_1} < \mathcal{E}_{V_2} < \mathcal{E}_2$ ,  $(\mathcal{E}_{V_1}, \mathcal{E}_{V_2})$
4.  $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_{V_1} < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_{V_2}$ ,  $(\mathcal{E}_{V_1}, \mathcal{E}_2)$

#### 5. Un ejemplo con densidades triangulares

Como un ejercicio de aplicación, uno podría dar las distribuciones de las probabilidades. Veamos el caso en el que las dos densidades son triangulares. Para una densidad triangular,  $\nu(z)$ , con vértice en  $Z_3$ , pendientes  $\alpha > 0$  y  $\beta < 0$ , tenemos

$$\nu(z) = \begin{cases} \alpha(z - Z_1) & \text{para } z \in (Z_1, Z_3) \\ \beta(z - Z_2) & \text{para } z \in (Z_3, Z_2) \end{cases}$$

que deberá satisfacer dos condiciones:

i) Para continuidad en  $Z_3$ , debe cumplirse

$$\alpha(Z_3 - Z_1) = \beta(Z_3 - Z_2)$$

ii) Para que  $\nu(z)$  sea densidad de probabilidad deberá cumplirse que:

$$\frac{1}{2}(Z_3 - Z_1)\alpha(Z_3 - Z_1) + \frac{1}{2}(Z_2 - Z_3)\beta(Z_3 - Z_2) = 1$$

Entonces:

$$\alpha(Z_3 - Z_1)^2 - \beta(Z_2 - Z_3)^2 = 2$$

Luego, de (i) y (ii) obtenemos,

$$\alpha(Z_3 - Z_1)(Z_2 - Z_1) = \beta(Z_3 - Z_2)(Z_2 - Z_1) = 2$$

donde, como debe ser,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ .

Es decir,

$$\nu(z) = 2 \frac{z - Z_1}{(Z_3 - Z_1)(Z_2 - Z_1)}, \quad \text{para } z \in (Z_1, Z_3)$$

$$\nu(z) = 2 \frac{z - Z_2}{(Z_3 - Z_2)(Z_2 - Z_1)}, \quad \text{para } z \in (Z_3, Z_2)$$

con

$$\nu(Z_3) = \frac{2}{Z_2 - Z_1}$$

Entonces, para la densidad de probabilidad triangular de la velocidad incidente, deberá cumplirse:

$$\nu(V) = \frac{2(V - V_1)}{(V_3 - V_1)(V_2 - V_1)}, \quad \text{para } V \in (V_1, V_3)$$

$$\nu(V) = \frac{2(V - V_2)}{(V_3 - V_2)(V_2 - V_1)}, \quad \text{para } V \in (V_3, V_2)$$

cuyo valor promedio,  $\langle v \rangle$ , como puede verificarse, es igual a:

$$\langle v \rangle = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{3}$$

y, en el caso del campo eléctrico,

$$\eta(\mathcal{E}) = \frac{2(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1)}{(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}, \quad \text{para } \mathcal{E} \in (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$$

$$\eta(\mathcal{E}) = \frac{2(\mathcal{E} - \mathcal{E}_2)}{(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}, \quad \text{para } \mathcal{E} \in (\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2)$$

con el valor promedio,

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{3}$$

donde, recordemos, dichos valores medios son los que la teoría clásica considera como los valores "idealmente correctos".

Con estos valores ideales, de acuerdo con el modelo clásico,

$$\begin{aligned} &\text{si } \frac{m}{2} < V <^2 < a < \mathcal{E} > \text{ ó} \\ &\text{si } \frac{m}{2a} \frac{(V_1 + V_2 + V_3)^2}{9} < \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{3} \end{aligned}$$

entonces el electrón no puede atravesar el condensador.

Por otra parte, observemos que:

- i) Cuidando que en las integraciones, el extremo superior no sea menor que el inferior, entonces la probabilidad que se obtenga será no negativa
- ii) Si se eligiesen  $V_2$  y  $\mathcal{E}_2$  tales que

$$\mathcal{E}_2 < \frac{m}{2} V_2^2$$

entonces, para  $V$  perteneciente al intervalo  $(V_{\mathcal{E}_2}, V_2)$  el electrón pasará con toda seguridad,  $F(V) = 1$ , de manera que:

$$\begin{aligned} p(V_{\mathcal{E}_2}, V_2) &= \int_{V_{\mathcal{E}_2}}^{V_2} \nu(V) F(V) dV \\ &= \int_{V_{\mathcal{E}_2}}^{V_2} \nu(V) dV > 0 \end{aligned}$$

En el caso de la densidad triangular

$$\nu(V) = \beta(V - V_2)$$

para

$$V \in (V_{\mathcal{E}_2}, V_2)$$

obtenemos

$$p(V_{\mathcal{E}_2}, V_2) = \frac{-\beta}{6} (V_{\mathcal{E}_2} - V_2)^2 (2V_{\mathcal{E}_2} + V_2) > 0,$$

pues  $\beta < 0$ .

## 6. Conclusiones

Aquí he mostrado que como consecuencia de la inevitable incertidumbre en la medición experimental de los valores observables de las propiedades de un sistema físico, se produce lo que he designado como el efecto túnel clásico. En la Mecánica Cuántica se presenta el llamado Efecto Túnel, donde, por ejemplo, electrones con energía  $E$  menor que el valor de la energía potencial de una barrera finita, pueden atravesar dicha barrera, con cierta probabilidad. Sin embargo, la Energía  $E$  considerada, no es la energía que se mide en el laboratorio, la misma que inevitablemente también estaría afectada de cierta incertidumbre es lo que más arriba he llamado valor clásico, con incertidumbre de medición nula. Pero, si consideramos que los valores correctos de los observables físicos están inevitablemente afectados de una incertidumbre no nula, entonces también se obtiene un Efecto Túnel, que aquí he llamado clásico.

# La Pseudo Paradoja de los Gemelos

Holger G. Valqui

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería*

Recibido el 03 de marzo del 2011; aceptado el 12 de abril del 2011

Resulta realmente extraordinario que después de casi un siglo no se haya encontrado una explicación transparente para la llamada paradoja de los gemelos. Sobre el tema existen muchas publicaciones que tratan de explicar la paradoja, inclusive recurriendo a la Relatividad General. Dos hermanos gemelos, A y B, se someten al siguiente experimento: Mientras A permanece en Tierra, B parte en un cohete (con velocidad constante  $V$ ) hasta llegar a una lejana estrella, donde “aterriza”, para inmediatamente emprender el viaje de regreso con la misma rapidez  $V$ . La paradoja surge porque, al final del viaje, cada uno de los gemelos, aplicando la dilatación temporal relativista, concluye que su hermano debe ser más joven que él mismo. En el presente artículo, además de demostrar que no existe ninguna situación paradójica, se muestra que los pequeños intervalos de aceleración (al partir el cohete; al invertir el sentido de la velocidad, y finalmente al aterrizar) no influyen significativamente en el envejecimiento del viajero B.

**Palabras Claves:** Relatividad Especial, Simultaneidad, Transformación de Lorentz, paradoja de los gemelos.

It is really amazing that after almost a century there is no satisfactory explanation for the so called twin paradox. This subject has been analyzed in many books and articles, recurring to the most varied arguments, including even General Relativity. Two twin brothers, A and B, undergo the following experiment: While A remains on Earth, B starts a travel in a spaceship (which moves with constant velocity  $V$ ) directed to a distant star, where he lands to, immediately, start the return travel at the same velocity  $V$ . The paradox arises because each twin thinks that, according to the relativistic time expansion effect, his brother must be younger than himself. In this article, it is shown that there does not exist any paradoxical situation, and that the small intervals of acceleration of the ship (when it starts, when it changes the velocity direction and when it lands finishing its travel) do not appreciably influence the age process of the travelling twin.

**Keywords:** Special Relativity, Simultaneity, Lorentz transformation, twin paradox.

## 1. Introducción

Teniendo en cuenta que se han publicado un gran número de artículos tratando de “explicar” la supuesta paradoja, y que gran parte de dichos trabajos ofrecen conclusiones propiamente correctas, pero parcialmente crípticas o equivocadamente justificadas, el presente artículo trata con detalle ciertos aspectos “ampliamente conocidos” que permiten superar las dudas que algunos resultados “paradójicos” pudiesen suscitar.

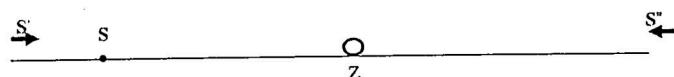
Por otra parte, debe quedar claro que las fórmulas de transformación de Lorentz no requieren que la velocidad relativa,  $V$ , entre los sistemas de referencia considerados, sea cercana a la velocidad de la luz.

Adicionalmente resulta conveniente enfatizar que la descripción del proceso, en el cual el gemelo A permanece ligado a la Tierra, mientras que el gemelo B permanece ligado al cohete, exige el uso de tres sistemas de referencia. Un primero ligado a la Tierra, un segundo sistema ligado al cohete en su viaje de ida, y un tercer sistema ligado al cohete en su viaje de retorno.

Primeramente debemos identificar los sistemas de referencia en juego. Por una parte tenemos el Sistema de referencia Tierra,  $S$ , en el cual, tanto el gemelo A, como cierta estrella Z, se encuentran en reposo.

Por otra parte, tenemos el cohete que en el viaje de ida constituye una referencia  $S'$ , que se desplaza con velocidad  $V$  con respecto a  $S$ ; y “el mismo cohete”, que en su viaje de retorno, de Z a la Tierra, se desplaza con

velocidad  $-V$  con respecto a  $S$ , constituyendo un tercer sistema de referencia  $S''$ . La configuración de las referencias se muestra esquemáticamente en el siguiente dibujo:



**Figura 1.** Configuración colineal de las referencias  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ , la Tierra y la estrella Z.

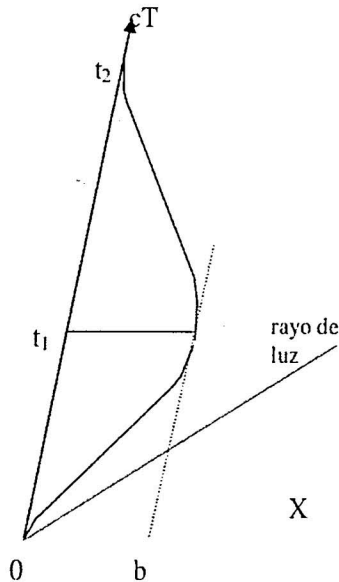
Con el objeto de mantenernos dentro de las exigencias de la relatividad especial, recurriremos a una idealización (que más adelante se verá no produce cambios significativos). Supondremos que el gemelo B procede de la siguiente manera:

- i) B se encuentra en el origen de  $S$ , de manera que cuando  $S'$  pasa cerca de  $S$  (los orígenes de  $S'$  y  $S$  coinciden) B salta de  $S$  a  $S'$ , y sigue como pasajero,
- ii) Más tarde, cuando  $S'$  y  $S''$  se cruzan (en Z), B salta de  $S'$  a  $S''$ , iniciando su viaje de retorno,
- iii) Finalmente, cuando  $S''$  pasa cerca de  $S$ , el pasajero B salta desde  $S''$  a la estación en el origen de  $S$ , completando así su viaje de ida y vuelta.

[Para descartar la preocupación por el maltrato que pudiese sufrir B en sus saltos para cambiar de referencia, podemos asumir que las velocidades de los cohetes son

adecuadamente pequeñas, sin que ello afecte la validez de los resultados del proceso]

Cuando los orígenes de  $S'$  y  $S$  coincidan, ambos observadores colocan sus relojes en "0". En tal instante el origen de  $S''$  se encuentra (según  $S$ ) en la posición  $x = 2b$ . En dicho punto se ha colocado una señal, por ejemplo un "árbol", de manera que cuando  $S''$  pase por dicho árbol deberá colocar su reloj en "0". Es decir, la coincidencia (de los orígenes) de  $S$  y  $S'$  es un evento de coordenadas  $(0, 0)_S$  y  $(0, 0)_{S'}$ ; mientras que la coincidencia de  $S$  y  $S''$  es un evento de coordenadas  $(0, 2b)_S$ ,  $(0, 0)_{S''}$ .



**Figura 2.** Se muestra la aceleración inicial del cohete, su aceleración es al llegar y partir de la estrella Z (instante  $t_1$ ) y su aceleración al aterrizar en el punto de partida (instante  $t_2$ ).

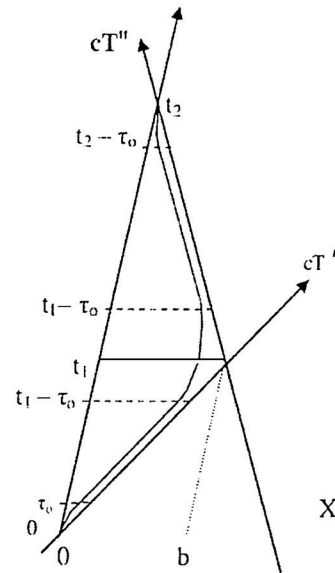
## 2. La transformación de Lorentz para la aceleración

Las fórmulas de transformación de Lorentz no requieren que la velocidad relativa,  $V$ , entre los sistemas de referencia considerados, sea cercana a la velocidad de la luz. La validez de las fórmulas de transformación no es afectada aún cuando  $V$  tenga un valor cercano a cero.

La importancia de que el valor de  $V$  sea cercano al de la velocidad de la luz es de carácter experimental, pues en tales condiciones los efectos relativísticos se manifiestan apreciablemente, facilitando su detección por los aparatos de medición.

Podemos suponer que en los 4 casos la aceleración (o desaceleración) es constante; ella será entonces

$$a_o = \frac{V}{\tau_o}$$



**Figura 3.** Se muestra el tiempo  $\tau_o$  que el cohete necesita para alcanzar la velocidad  $V$ ; el tiempo  $\tau_o$  que requiere el cohete para "aterrizar" en la estrella Z; el tiempo  $\tau_o$  que requiere para volver a adquirir la velocidad  $V$  de regreso, y el tiempo  $\tau_o$  que requiere para el aterrizaje final en Tierra. Entonces, si según la referencia  $S$ , la duración total del viaje es  $2T_{ida}$ , entonces las fórmulas de transformación de Lorentz son estrictamente válidas durante el tiempo  $T_{ida} - 2\tau_o$  para el viaje de ida, y durante  $T_{ida} - 2\tau_o$  para el viaje de vuelta.

Como un ejemplo, los autos de carrera pueden obtener la aceleración de  $10\text{m/s}^2$ , que aplicada durante un mes dará una velocidad de:

$$V = 60 \times 60 \times 24 \times 30 \times 10 \approx 26000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx \frac{1}{10}c;$$

de donde  $\gamma \approx 1,005$ , con lo el gemelo viajero resultaría aproximadamente 0,5% más joven que el que se quedó en Tierra. En este ejemplo, el tiempo de aceleración sería de 4 meses o 0,33 años. Si el viaje de ida y vuelta durase 50 años, entonces el tiempo de aceleración es de sólo 0.66%.

El mencionado valor de la aceleración  $a_o$  y los valores de las duraciones de los intervalos de aceleración han sido considerados con respecto a la referencia  $S$ ; pero la transformación de Lorentz permite calcular los correspondientes valores en las otras referencias,  $S'$  o  $S''$ .

Si un vehículo se desplaza con velocidad  $v$  y aceleración  $a$  con respecto a una referencia  $S$ , entonces, en una referencia  $S^*$  que se desplace con velocidad  $V$  con respecto a  $S$ , la velocidad  $v^*$  y la aceleración  $a^*$  de dicho vehículo con respecto a  $S^*$  están dada por:

$$v^* = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}, \quad a^* = \frac{a}{\gamma^3(1 - \frac{vV}{c^2})^3} \quad (1)$$

donde debe tenerse presente de que no se trata de una referencia acelerada, sino de un vehículo acelerado, observado desde las referencias  $S$  y  $S^*$ .

Está claro que, para el caso de los seres humanos sería muy difícil verificar la mencionada diferencia de edades;

pero tal dificultad experimental no invalida los resultados teóricos. Como comparación, podemos mencionar:

- i) El caso del avance del perihelio de Mercurio, que es de  $42''$  por siglo, predicho por la teoría de la Relatividad General.
- ii) La aplicación de la ecuación de Schrödinger para calcular el movimiento de un péndulo macroscópico: el cálculo sería oneroso e impráctico, pero nadie pondrá en tela de juicio la validez de tal procedimiento.

Debido a la posibilidad de reducir los tiempos de aceleración a fracciones insignificantes del tiempo de duración del viaje de ida y vuelta, y por otra parte, la participación de tres referencias espacio-temporales, permite la idealización del proceso, en el que se ha reducido a cero las duraciones de las 4 aceleraciones, como se muestra en las figuras 2 y 3, donde además, se muestran las 3 referencias, cuyas coordenadas espacio-temporales están relacionadas por las correspondientes transformaciones de Lorentz.

En una referencia  $S$  se puede analizar la posición, la velocidad y la aceleración de, digamos, una partícula (o un vehículo) que se desplaza con respecto a  $S$ . A partir de las fórmulas de Lorentz para la 4-posición se calcula la transformación de la 3-velocidad; pero también se puede calcular la transformación de la 3-aceleración del vehículo, con respecto a alguna otra referencia  $S'$ .

### 3. En un instituto espacial, en la Tierra

En el Instituto, que designaremos con  $H$ , han decidido realizar algunos experimentos relativistas. Se considera que  $H$  está en el origen de una referencia unidimensional,  $S$ , complementada con un reloj atómico.

Además, en reposo con respecto a la referencia  $S$  se encuentra la estrella  $Z$ , situada en la coordenada espacial

$$x_Z = |HZ|$$

y en ella hay otro reloj atómico, cuidadosamente sincronizado con el reloj de la estación, de manera que ambos relojes siempre indican la misma hora (es decir, el mismo valor del tiempo). Si se considerase una segunda referencia  $S'$ , que se acerca a la Tierra con velocidad  $V = V_{S'S}$ , y que cuando los dos orígenes espaciales coinciden los relojes se han puesto en cero,  $t = 0$ ,  $t' = 0$ , entonces las fórmulas de transformación de los tiempos y las coordenadas espaciales correspondientes a un mismo evento  $E$ , son:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - Vt), \quad (2)$$

y recíprocamente

$$t = \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right), \quad x = \gamma (x' + Vt'), \quad (3)$$

donde

$$\gamma = \left( \frac{1}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{1 - \left(-\frac{V}{c}\right)^2} \right)^{1/2}, \quad 0 < V < c$$

Como consecuencia de lo anterior se producen dos efectos:

- i) La dilatación del tiempo, consistente en que si el reloj fijo a  $S'$  marca dos instantes de tiempo  $t'_1$  y  $t'_2$ , entonces para los correspondientes instantes medidos en el reloj de  $S$  se cumple que:

$$t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1) > t'_2 - t'_1 \quad (4)$$

- ii) La contracción de la longitud, que consiste en lo siguiente: Si a lo largo de  $S'$  se coloca una varilla (que podría ser la longitud de la nave), cuyo extremos tienen coordenadas  $x'_1$  y  $x'_2$ , de manera que su longitud sería  $\ell' = x'_2 - x'_1$ , entonces la longitud de dicha varilla,  $\ell$ , obtenida en  $S$  por las correspondientes coordenadas espaciales  $x_1$  y  $x_2$ , medidas por coincidencia (simultánea en  $S$ ) con las coordenadas  $x'_1$  y  $x'_2$ , respectivamente, cumple con:

$$\ell = x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} \ell' < \ell' \quad (5)$$

Por otra parte, y esto tiene un carácter crítico en los análisis que realizaremos, una de las consecuencias directas de la invariancia de la velocidad de la luz en las diferentes referencias que elijamos, consiste en lo siguiente: Dos eventos,  $A$  y  $B$ , que son simultáneos en alguna referencia  $S$  no pueden ser simultáneos en ninguna otra referencia que se mueva con respecto a  $S$ .

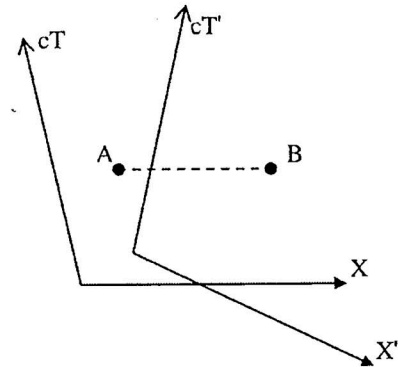


Figura 4. Los eventos  $A$  y  $B$  son simultáneos en  $S$ , pero no pueden serlos en  $S'$  (salvo que  $V_{SS'} = 0$ ).

## 4. Contracción de la longitud

### 4.1. Primer Experimento

En el Instituto espacial  $H$  desean verificar la validez de la fórmula de la contracción de la longitud. Para ello preparan dos naves que se acerquen a Tierra con la misma velocidad  $V$  (para lo cual deberán mantenerse a distancia constante):



- i) Las dos naves tienen la orden (que por supuesto pueden cumplir) de mantenerse a una distancia fija  $|Q'P'|_{S'} = b'$ , donde se ha calculado, en  $S$ , que  $b' = \frac{b}{\gamma}$  (para que desde  $S$  la separación de las naves sea  $b = \gamma b' = |HZ|_S$ ).
- ii) Las dos naves deben mantener la velocidad constante  $V$ .
- iii) Cuando  $P'$  coincida con  $H$  (es decir,  $P'$  pase muy cerca de  $H$ ) tanto el reloj de la nave como el reloj del Instituto deberán colocarse en cero, es decir, para  $x' = x = 0 \implies t' = t = 0$ . Por supuesto, el reloj de  $Q'$  se mantendrá isócrono con el de  $P'$ , y el reloj de  $Z$  se mantendrá isócrono con el de  $H$ . Eso es posible porque cada par de relojes pertenece a una misma referencia.
- iv) Debe suponerse que los cuatro laboratorios,  $Q'$ ,  $P'$ ,  $H$ ,  $Z$ , tienen medios para detectar en qué instante (según los correspondientes relojes) dos de dichos laboratorios coinciden espacialmente (o mejor, cuándo uno de ellos pasa junto a uno de los otros).
- v) El resultado del experimento es positivo, debido a que, según  $S$ ,  $|Q'P'| = |HZ|$ ; es decir, cuando  $P'$  coincide con  $Z$ , simultáneamente  $Q'$  coincide con  $H$ . La simultaneidad se verifica en la referencia  $S$ .
- vi) Es decir, en este experimento se verifica que, efectivamente, se produce la contracción de la longitud,  $|HZ|_S = \gamma|Q'P'|_{S'}$ , como lo establece la ley de transformación de Lorentz.
- vii) Si se preguntase al piloto de  $P'$  si ellos también habrían coincidido simultáneamente ( $P'$  con  $Z$ , y  $Q'$  con  $H$ ) con los laboratorios de  $S$ , la respuesta sería negativa: "No, primero  $Q'$  coincidió con  $H$ , más tarde yo coincidí con  $Z$ ".

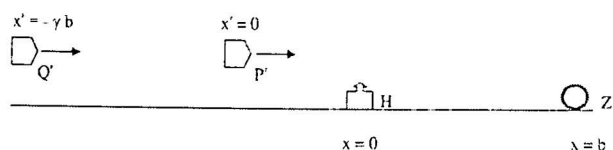


Figura 5. Desde la referencia  $S$  se cumple que  $|Q'P'|_S = |HZ| = b$ . Pero, según  $S'$  se cumple que  $|Q'P'|_{S'} = b' = \frac{b}{\gamma}$ .

## 4.2. Segundo Experimento

Ahora las instrucciones para los pilotos de los laboratorios  $P'$  y  $Q'$  son casi las mismas que en el primer experimento, con la diferencia que ahora deben mantener, según  $S'$ , la distancia  $b' = \gamma b$  (ya que, según  $S'$ , la distancia entre los laboratorios  $H$  y  $Z$  es  $|HZ|_{S'} = \gamma b = |Q'P'|_{S'}$ ).

- i) Esta vez, el piloto  $P'$  informaría que, efectivamente, cuando  $P'$  coincidió con  $Z$ , simultáneamente  $Q'$  coincidió con  $H$ .

- ii) En cambio, desde el instituto  $H$  verificarían que primeramente  $Q'$  coincidió con  $H$ , y más tarde  $P'$  coincidió con  $Z$ .

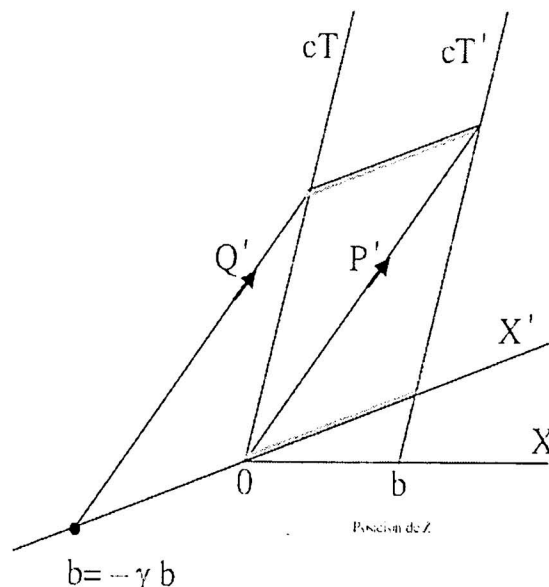


Figura 6. Cuando la nave  $Q'$  (es decir,  $S'$ ) alcanza al instituto  $H$ , entonces según  $S'_1$ , la nave  $S'_2$  (es decir,  $P'$ ) alcanza a la estrella  $Z$ . Aquí,  $|HZ|_{S'} = b'$ .

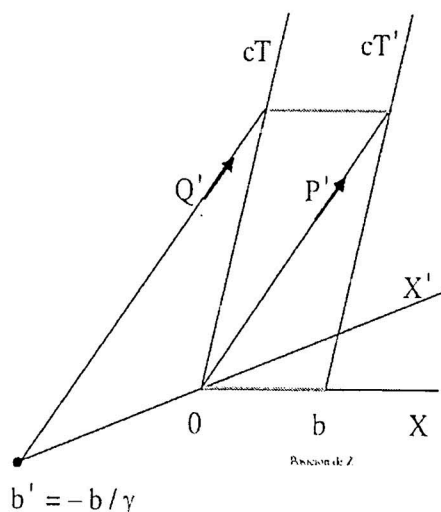


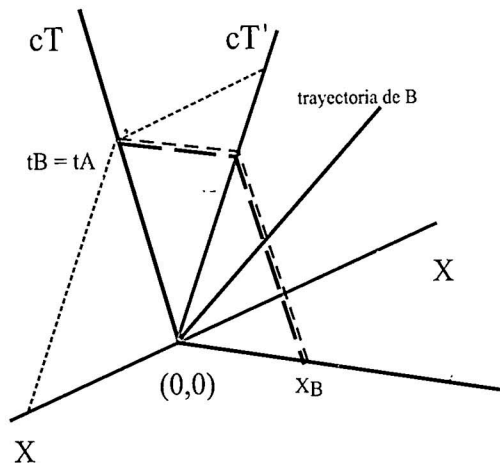
Figura 7. Cuando la nave  $Q'$  (es decir,  $S'$ ) alcanza al instituto  $H$ , entonces según  $S'$ , la nave  $S'_2$  (es decir,  $P'$ ) alcanza a la estrella  $Z$ . Aquí,  $|Q'P'|_S = b$ .

## 4.3. Dilatación del Tiempo

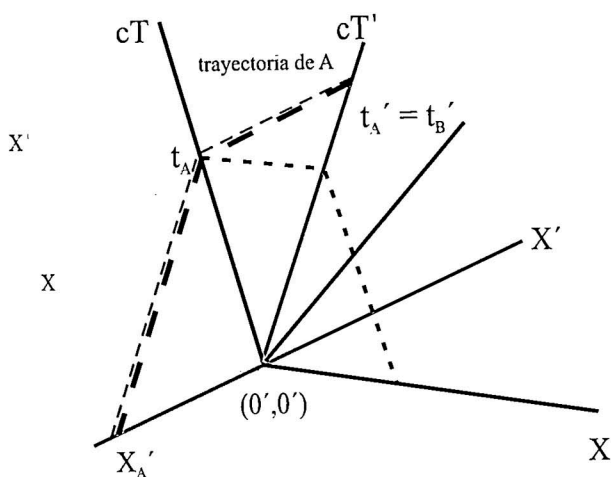
En los dos siguientes experimentos se desea verificar la validez de la ley de la dilatación temporal. Pero primeramente debemos aclarar ciertas circunstancias y conceptos:

- i) Tenemos dos eventos descritos en la referencia  $S$ , donde  $B$  avanza con la velocidad  $V$ : el envejecimien-

to de  $A$  dado en las coordenadas  $(t_A, 0)$  y el correspondiente envejecimiento de  $B$  expresado en las coordenadas  $(t_B, Vt_B)$ . Si exigiésemos que  $t_B = t_A$ , estaríamos exigiendo que ambos eventos sean simultáneos en la referencia  $S$ .



**Figura 8.** El gemelo  $A$  se mantiene en el origen espacial de la referencia  $S$  ( $X, cT$ ), avanzando sólo temporalmente durante  $t_A$  segundos, mientras que  $B$  avanza desde el origen  $(0', 0')$  con velocidad  $V = V_{S'S}$ , siendo sus coordenadas  $(t_B, x_B)$ , con  $t_B = t_A$ ,  $x_B = Vt_B$ . En su propia referencia,  $B$  avanza temporalmente durante  $t'_B = \gamma(t_B - \frac{V}{c^2} x_B) = \frac{t_B}{\gamma}$  segundos.

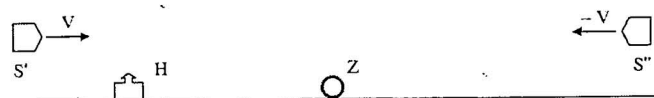


**Figura 9.** El gemelo  $B$  se mantiene en el origen espacial de la referencia  $S'$  ( $X', cT'$ ), avanzando sólo temporalmente durante  $t'_B$  segundos, mientras que  $A$  avanza desde el origen  $(0, 0)$  con velocidad  $-V = V_{SS'}$ , siendo sus coordenadas  $(t'_A, x'_A)$ , con  $t'_A = t'_B$ ,  $x'_A = -Vt'_A$ . En su propia referencia,  $A$  avanza temporalmente durante  $t_A = \gamma(t'_A - \frac{V}{c^2} x'_A) = \frac{t'_A}{\gamma}$  segundos.

- Por otra parte, cuando examinamos los dos eventos desde la referencia  $S'$ , el envejecimiento de  $A$  queda expresado en las coordenadas  $(t'_A, -Vt'_A)_{S'}$ , y el correspondiente envejecimiento de  $B$ , queda expresado en las coordenadas  $(t'_B, 0)$ . Si ahora exigiésemos que en  $S'$  se cumpla  $t'_A = t'_B$ , entonces estaríamos exigiendo que ambos eventos también sean simultáneos en la referencia  $S'$ .
- Pero, **no es posible** que los dos eventos mencionados, el envejecimiento de  $A$  y el envejecimiento de  $B$  sean simultáneos tanto en la referencia  $S$  como en la referencia  $S'$ .
- Es decir, si deseamos comparar los envejecimientos de los dos gemelos, y que dicha comparación pueda ser verificada por diferentes referencias, debemos lograr que tanto al comenzar el experimento, como al terminarlo, ambos gemelos coincidan espacialmente. Tal situación la presentamos en el tercer experimento.

#### 4.4. Tercer Experimento

El Instituto  $H$ , en el origen de la referencia  $S$ , invita a dos hermanos gemelos, jóvenes,  $A$  y  $B$ , a participar en un experimento que permitiría verificar si uno de ellos, por viajar, es decir, por permanecer un tiempo en otra referencia  $S'$ , que se desplazará con velocidad  $V = V_{S'S}$  con respecto a la primera, envejecerá menos o, más, que el gemelo que ha quedado en  $S$ . Inicialmente los dos gemelos han estado espacialmente reunidos en el instituto; y por la dicho anteriormente, ellos deberán terminar el experimento nuevamente reunidos espacialmente en algún lugar, posiblemente, en el mismo Instituto. Ello exige la intervención de una tercera referencia  $S''$ , que vuelva a reunir a los gemelos.



**Figura 10.** El gemelo  $B$  viajará, a bordo de la referencia  $S'$ , desde  $H$  hasta  $Z$ ; luego retornará a bordo de la referencia  $S''$ .

Teniendo presente que las fórmulas de Lorentz son válidas independientemente del valor de la velocidad,  $0 < V < c$ , entonces el viaje podría ser realizado a baja velocidad, de manera que las mencionadas aceleraciones (de partida, de cambio de rumbo y de llegada) no sean demasiado grandes, y se evitaría que el gemelo  $B$  sufra maltratos debido a tales aceleraciones.

Además dichas aceleraciones podrían realizarse durante intervalos bastante cortos,  $\Delta_k \approx 0$ , que sin error notable, puedan ser considerados intervalos nulos, y consecuentemente, las dos líneas de viaje puedan ser representadas por segmentos de rectas.

Usando este "truco" podemos suponer que la referencia  $S'$  viene desde la izquierda ya con velocidad  $V$ , y que

al pasar cerca del instituto  $H$ , el gemelo  $B$  la aborda, saltando de la referencia  $S$  a la referencia  $S'$ . Posteriormente, cuando  $S'$  haya llegado a la estrella  $Z$ , donde (por previo acuerdo) se cruzaría con la referencia  $S''$ , el gemelo  $B$  saltará de  $S'$  a  $S''$  (sin sufrir mayor maltrato).

Finalmente, cuando  $S''$  haya alcanzado a la Tierra, pasando cerca del Instituto, el gemelo  $B$  saltará a Tierra, cerrando su ciclo de viaje. Ese es el proceso que se muestra en la figura siguiente.

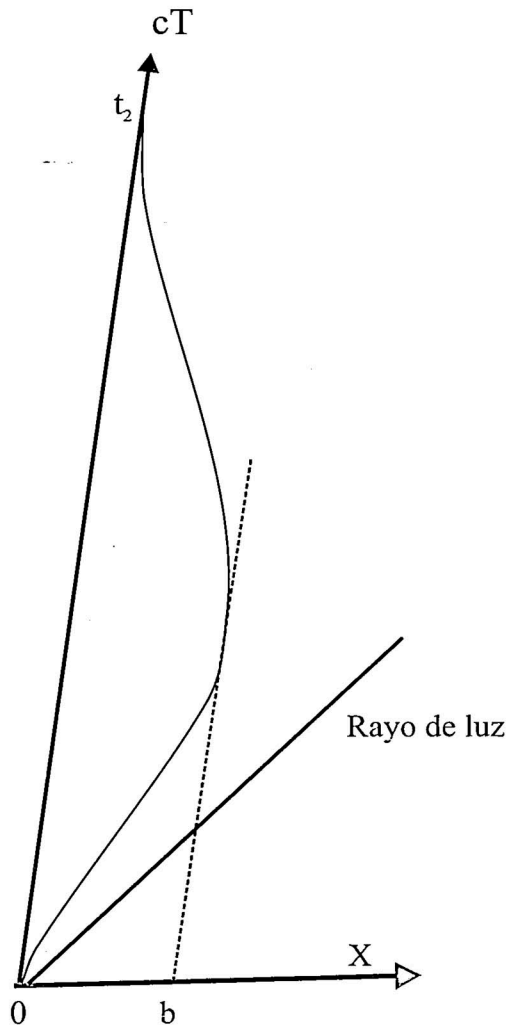


Figura 11. Trayectoria del vehículo-laboratorio en el espacio de Minkowski.

La referencia  $S'$  representa a un vehículo-laboratorio que, después de una corta aceleración, de duración  $\Delta_o$ , alcanzará la velocidad  $V$ , avanzando hacia la estrella  $Z$ , donde después de una corta desaceleración (o frenado) de duración  $\Delta_o$ , "aterrizará" sobre la superficie de  $Z$ , para inmediatamente dar un giro de  $180^\circ$  y arrancar hacia la Tierra, recurriendo a una corta aceleración de duración  $\Delta_o$  que le permita alcanzar la velocidad  $-V$ . Posteriormente, al llegar a la Tierra, nuevamente por medio de una corta desaceleración, de duración  $\Delta_o$ , aterrizará en el Instituto  $H$  en el instante  $t_2$ , cerrando así un viaje de ida y vuelta.

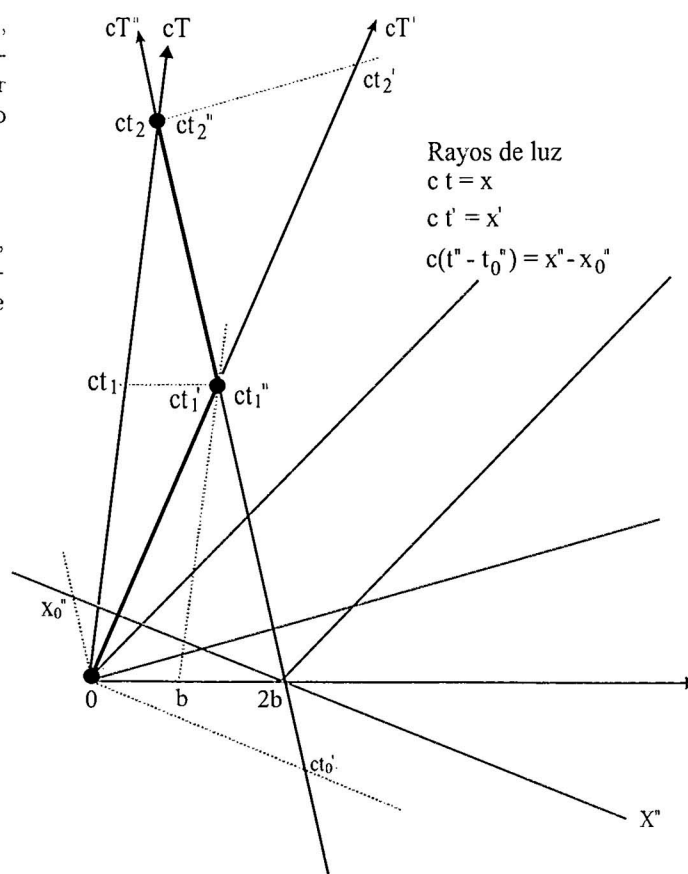


Figura 12. Representación de los tres sistemas de referencia  $S$ ,  $S'$  y  $S''$

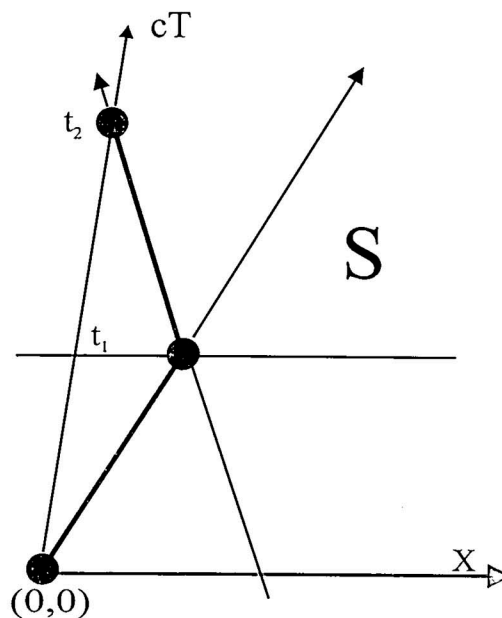


Figura 13. Sistema de referencia  $S$ .

En la figura 12 se presenta las tres referencias  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ . Los ejes temporales de las referencias  $S'$  y  $S''$  constituyen una idealización de la trayectoria realizada por una única nave espacial, cuyos intervalos de aceleración y desaceleración suficientemente pequeños, han sido considerados nulos.

En las figuras, 13, 14, 15, se muestran las versiones de los envejecimientos del gemelo A y del gemelo B, según cada una de las referencias  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ .

En la referencia  $S$ , la duración del viaje de ida,  $t_1 - 0$ , y la duración del viaje de vuelta,  $t_2 - t_1$ , del gemelo B. También se muestra el correspondiente envejecimiento del gemelo A,  $t_2 - 0$ . Las rectas paralelas al eje espacial  $X$  son rectas de tiempo constante; así se ha localizado el instante  $t_1$ .

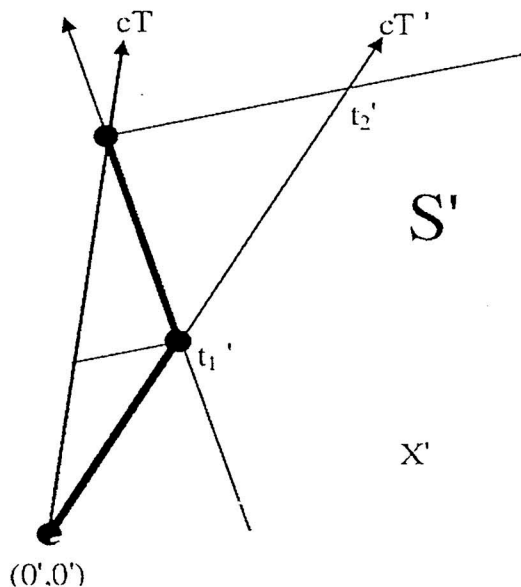


Figura 14. Sistema de referencia  $S'$ .

En la referencia  $S'$ , la duración del viaje de ida,  $t'_1 - 0$ , y la duración del viaje de vuelta,  $t'_2 - t'_1$ , del gemelo B. También se muestra el correspondiente envejecimiento del gemelo A,  $t'_2 - 0$ . Las rectas paralelas al eje espacial  $X'$  son rectas de tiempo constante, así se ha localizado el instante  $t'_2$ .

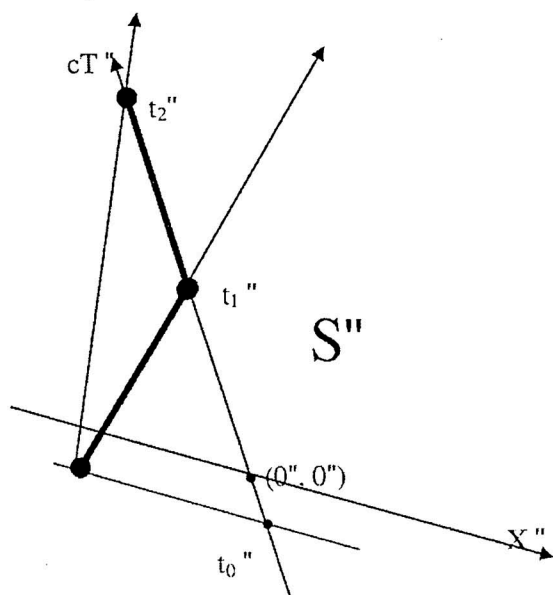


Figura 15. Sistema de referencia  $S''$ .

Se muestra, en la referencia  $S''$ , la duración del viaje de ida,  $t''_1 - t''_0$ , y la duración del viaje de vuelta,  $t''_2 - t''_1$ , del gemelo B. También se muestra el correspondiente envejecimiento del gemelo A,  $t''_2 - t''_0$ . Las rectas paralelas al eje espacial  $X''$  son rectas de tiempo constante, así se ha localizado el instante  $t''_0$ .

#### 4.5. Descripción del viaje de B

Habiendo justificado el "truco" de que los intervalos de aceleraciones de la nave  $N$  pueden ser arbitrariamente pequeños, podemos asumir que las instrucciones enviadas a las referencias  $S'$  y  $S''$  desde el Instituto, son las siguientes:

- i) Cuando el piloto  $S'$  (que constituye el origen de la referencia  $S'$ ), acercándose desde la izquierda con velocidad  $V = V_{S'S}$  pasa por el Instituto (origen de  $S$ ), entonces tanto el piloto de  $S'$  como el director del Instituto pondrán sus relojes en cero; es decir,  $x' = x = 0 \Rightarrow t' = t = 0$ . En dicho mismo instante (según  $S$ ) el origen de la referencia  $S''$  estará pasando por el punto de coordenada  $2b = 2|HZ|$ , acercándose a la Tierra con velocidad  $V_{S''S} = -V$ .

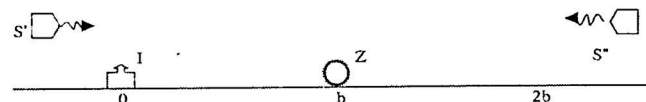


Figura 16.  $S'$  y  $S''$  se acercan a  $Z$ .

Es decir, inicialmente tenemos los dos eventos:  $E_0$ , constituido por la coincidencia de los orígenes de  $S$  y  $S'$ , cuyas correspondientes coordenadas son  $(0, 0)$  y  $(0', 0')$ , y el evento  $E_3$ , constituido por la coincidencia del origen de  $S''$  con el "árbol" en  $2b$ , en el punto  $x = 2b$ , en el instante  $t = 0$ ; las correspondientes coordenadas son  $(0'', 0'')_{S''}$  y  $(0, 2b)_S$ .

- ii) Las correspondientes fórmulas de transformación de Lorentz serán

$$t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right), \quad x' = \gamma (x - Vt) \quad (6)$$

$$t'' = \gamma \left( t + \frac{V}{c^2} (x - 2b) \right), \quad x'' = \gamma (x - 2b + Vt) \quad (7)$$

y sus expresiones inversas:

$$t = \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right), \quad x = \gamma (x' + Vt') \quad (8)$$

$$t = \gamma \left( t'' - \frac{V}{c^2} x'' \right), \quad x - 2b = \gamma (x'' - Vt'') \quad (9)$$

- iii) Las transformaciones entre las correspondientes coordenadas en  $S'$  y  $S''$ , que se obtienen de reem-

plazar (8) en (7), son:

$$t'' = \gamma^* \left( t' + \frac{W}{c^2} x' \right) - 2\gamma \frac{bV}{c^2} \quad (10)$$

$$x'' = \gamma^* (x' + Wt') - 2\gamma b, \quad (11)$$

donde

$$W = \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}}, \quad \gamma^* = \left( 1 - \frac{W^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

y las relaciones inversas,

$$t' = \gamma^* \left( t'' - \frac{W}{c^2} x'' \right) - 2\gamma \frac{bV}{c^2} \quad (12)$$

$$x' = \gamma^* (x'' - Wt'') + 2\gamma b \quad (13)$$

iv) El viaje del gemelo  $B$  puede ser descrito por tres eventos principales:

- $E_0$ , que es el evento de partida de  $B$ ;
- $E_1$ , que es el evento de llegada de  $B$  a la estrella  $Z$ , y
- $E_2$ , que es el evento de llegada de  $B$  a la Tierra, donde finaliza el viaje.

Más un evento auxiliar  $E_3$ , que es el encuentro de la  $S''$  con el árbol en 2b.

Cada uno de dichos eventos será descrito en las coordenadas de cada referencia,  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ , de manera que a partir de dichos resultados podremos determinar el envejecimiento de cada uno de los gemelos,  $A$  y  $B$ , y podemos verificar si tales resultados son consistentes.

v) El evento que indica la iniciación del viaje,  $E_0$ , está dado por las coordenadas  $(0,0)$  en  $S$ , por las coordenadas  $(0,0)$  en  $S'$ , y por las coordenadas  $(t_0'', x_0'')$  en  $S''$ , donde:

$$t_0'' = -2\gamma \frac{bV}{c^2}, \quad x_0'' = -2\gamma b$$

calculadas de (10) y (11). Es decir, la iniciación del viaje es un evento  $E_0$  cuyas coordenadas son:

$$(0,0)_S, (0,0)_{S'}, \left( -2\gamma \frac{bV}{c^2}, -2\gamma b \right)_{S''}$$

vi) Las coordenadas del evento  $E_1$  en la referencia  $S$  son  $(t_1, Vt_1)$ , de donde podemos obtener:

$$t_1' = \gamma \left( t_1 - \frac{V}{c^2} x_1 \right) = \frac{t_1}{\gamma}, \quad x_1' = \gamma (x_1 - Vt_1) = 0$$

$$t_1'' = \gamma \left( t_1 + \frac{V}{c^2} (x_1 - 2b) \right) = \gamma \left( 1 + \frac{V^2}{c^2} \right) t_1 + t_0''$$

$$= \frac{\gamma^*}{\gamma} t_1 + t_0''$$

$$x_1'' = \gamma ((x_1 - 2b) + Vt_1) = 2\gamma Vt_1 + x_0''$$

Es decir, las correspondientes coordenadas del evento  $E_1$  son:

$$(t_1, Vt_1)_S,$$

$$\left( \frac{t_1}{\gamma}, 0 \right)_{S'}, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\gamma^*}{\gamma} t_1 + t_0'', 2\gamma Vt_1 + x_0'' \right)_{S''}$$

vii) Las coordenadas del evento  $E_2$  en la referencia  $S$  son  $(t_2, 0)$ , donde  $B$  ha regresado al origen espacial de  $S$ . Dicho evento tendrá en  $S'$  y  $S''$ , respectivamente, las coordenadas:

$$t_2' = \gamma t_2 = 2\gamma t_1, \quad x_2' = -\gamma Vt_2 = -2\gamma Vt_1$$

$$t_2'' = \gamma \left( t_2 - 2b \frac{V}{c^2} \right) = 2\gamma t_1 + t_0'', \quad x_2'' = 2\gamma Vt_1 + x_0''$$

viii) Las duraciones del viaje de ida son, respectivamente:

$$T_{ida} = t_1 - 0 = t_1$$

$$T_{ida}' = t_1' - 0 = \frac{T_{ida}}{\gamma}$$

$$T_{ida}'' = t_1'' - t_0'' = \frac{\gamma^*}{\gamma} T_{ida}$$

En este tramo del viaje se cumple que

$$T_{ida}' < T_{ida} < T_{ida}''$$

es decir, según  $S'$  el gemelo  $B$  envejece menos que el gemelo  $A$ , mientras que según  $S''$  el asunto es al contrario: el gemelo  $B$  envejece más que el gemelo  $A$ .

ix) Las duraciones del viaje de vuelta son, respectivamente:

$$T_{vuelta} = t_2 - t_1 = T_{ida}$$

$$T_{vuelta}' = t_2' - t_1' = \frac{\gamma^*}{\gamma} T_{ida}$$

$$T_{vuelta}'' = t_2'' - t_1'' = \frac{T_{ida}}{\gamma}$$

En este segundo tramo del viaje se cumple que:

$$T_{vuelta}' > T_{vuelta} > T_{vuelta}''$$

es decir, se han invertido los resultados calculados por  $S'$  y  $S''$  en el viaje de ida: según  $S'$  el gemelo  $B$  envejece más que el gemelo  $A$ , mientras que según  $S''$ , el gemelo  $B$  envejece menos que el gemelo  $A$ . Como es de esperarse ambos resultados son complementariamente simétricos.



x) Las duraciones totales del viaje,

$$T_{via} = T_{ida} + T_{vuelta}$$

son, respectivamente:

$$T = 2T_{ida}$$

$$T' = \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma^*}{\gamma} \right) T_{ida} = 2\gamma^3 T_{ida}$$

$$T'' = \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma^*}{\gamma} \right) T_{ida} = 2\gamma^3 T_{ida}$$

Es decir, tanto según  $S'$  como según  $S''$ , cuando el gemelo  $B$  retorna al Instituto H, resulta que ha envejecido menos que el gemelo  $A$ :

$$T > T' = T''$$

xi) Debe tenerse presente que los resultados aquí expuestos han sido calculados en cada una de las referencias,  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ , y tienen validez en cada una de ellas. Son resultados de un mismo proceso físico que tiene diferentes representaciones en diferentes sistemas de referencia relativistas. Dichas representaciones son equivalentes por medio de las fórmulas de transformación de Lorentz.

xii) Por otra parte debe tenerse presente que no es válida (no tiene sentido) la suma de resultados obtenidos en una de las referencias, por ejemplo en  $S$ , con resultados obtenidos en alguna otra referencia, por ejemplo, la referencia  $S'$  o la referencia  $S''$ .

xiii) Por su parte, el gemelo  $B$ , que ha viajado en una nave única, podría verse tentado a realizar el siguiente razonamiento: En el viaje de ida yo era pasajero de  $S'$ , donde se cumplía que  $T'_{ida} = \frac{T_{ida}}{\gamma}$ , y en el de regreso, como pasajero de  $S''$ , se cumplía:

$$T''_{vuelo} = \frac{T_{vuelo}}{\gamma}$$

entonces, al obtener la duración total del viaje resultaría que:

$$T_B = T'_{ida} + T''_{vuelo} = \frac{T}{\gamma} \Rightarrow T_B > T$$

es decir,  $A$  deberá ser más joven que yo. Este equivocado cálculo realizado por el gemelo  $B$  (al suponer que una única nave constituye una única referencia), contradice el resultado obtenido por el gemelo  $A$  (y también contradice los resultados obtenidos por los supuestos pilotos de las otras referencias). Este razonamiento es lo que produce la mal llamada paradoja de los gemelos.

xiv) Debo insistir que el efecto de la aceleración sufrida por el gemelo  $B$  al cambiar de referencia, es propiamente insignificante bajo alguno de los dos supuestos:

- Que los intervalos de aceleración sean muy cortos con relación a la duración de los viajes, o
- Que la velocidad  $V$  sea mucho menor que la velocidad de la luz, lo que permitiría recurrir a bajas aceleraciones. Con viajes a baja velocidad  $V$  los efectos relativistas serían notablemente pequeños, pero ese no es un aspecto que interese para la validez de las ecuaciones de transformación de Lorentz.

## 5. Conclusiones

Las fórmulas de transformación de Lorentz no exigen que las velocidades de las referencias sean cercanas de la de la luz, por lo cual las aceleraciones necesarias para cambiar de una referencia a otra pueden ser pequeñas.

Considerando los sistemas  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  aisladamente. Es cierto que cada uno de ellos pueda afirmar que el tiempo que pasa en el otro sistema (en movimiento con respecto a él) es menor que el suyo propio.

Pero, puesto que la simultaneidad sólo es válida en cada referencia separadamente, la comparación de las edades de los gemelos debe realizarse cuando ellos coinciden espacialmente.

Los cálculos desde las tres referencias,  $S$ ,  $S'$  y  $S''$ , producen resultados consistentes, no paradójicos. Pero no es válido sumar los resultados obtenidos en una referencia con otros resultados obtenidos en otra referencia.

1. T. Debs, M. Redford - The twin paradox and the conventionality of simultaneity, Am.J.Phys, Vol 64 N°4 April 96.
2. M. Readhead - The conventionality of Simultaneity, Philosophical problems of internal and external worlds, University of Pittsburg 1993.
3. D. Mermin - It is about time, Princeton 2005.
4. D. Styer - How do moving clocks fall out of sync? Am.J. of Phys 2007.
5. R.J. Buenker - Time dilation and the concept of an objective Rest System, Apeiron Vol 17 N°2, April 2010.
6. R. Lasky, Scientific American, Feb 2006.
7. B. Schutz - A general course of General Relativity, Cambridge U. Press, 2002.
8. J.M. Lévy- A simple derivation of the Lorentz transformation and the related velocity and acceleration formulae, Feb. 2007.
9. Sears-Zemansky-General Physics, Chap. 37, Pearson Education, 2008
10. J. Baglio, M. Bethermin- Acceleration in Special Relativity. What is the meaning of "uniformly accelerated movement", 2007.
11. H. Valqui- Notas de Mecánica II, 1992

# No existen fotones vírgenes

Holger G. Valqui

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería*

Recibido el 03 de marzo del 2011; aceptado el 12 de abril del 2011

Para un mejor análisis de la polarización de la luz, se plantean las características de los modelos científicos, y los procesos de medición (pues las mediciones singulares no son útiles aisladamente) que refuerzan o descartan los modelos propuestos. Se presentan 10 experimentos de polarización de rayos de luz, en particular el experimento que sustenta la Ley de Malus (clásica). Luego, usando el concepto de fotón se plantea la Ley de Malus Cuántica, de carácter probabilístico, la misma que explica satisfactoriamente los resultados experimentales con rayos luminosos, y que también pone en evidencia la imposibilidad de medir la polarización de un fotón aislado o de algunos pocos fotones, a pesar de que dichos fotones hayan sido previamente, pero disimuladamente, polarizados.

**Palabras claves:** Modelos científicos, proceso de medición, polarización, entanglement.

In order to analyze the phenomenon of polarization of light, we highlight the characteristics of scientific models and processes of measurement (for unique measurements are not meaningful in isolation) that reinforce or discard the proposed models. We also present succinctly 10 experiments on light polarization, in particular the experiment that supports the Law of Malus (classical). Then, using the photon model, we present the quantum Malus law, probabilistic in nature, which explains satisfactorily the experimental results with beams, and also demonstrates the impossibility of measuring the polarization of one or a few photons, though these photons have been previously, but surreptitiously polarized.

**Keywords:** Scientific models, measurement, polarization, entanglement.

## 1. Introducción

Los modelos científicos para los objetos microscópicos (no observables directamente) deben satisfacer dos condiciones fundamentales:

- i) Ser lógico y matemáticamente consistentes,
- ii) Construirse a partir de ciertas “evidencias” experimentales, lo cual propiamente implica haber realizado algunas mediciones de propiedades relacionadas con los objetos en consideración,
- iii) Explicar los correspondientes fenómenos macroscópicos y predecir nuevos efectos macroscópicos.

Ninguna de tales condiciones es trivial, pues no es posible construir un modelo estructural sin recurrir a variadas asunciones, algunas de ellas bastante “evidentes”, otras aceptadas ingenua o descuidadamente. Por otra parte, el resultado de toda medición debe ser inevitablemente interpretado, y dicha interpretación depende parcialmente del modelo que queremos justificar. Este parece ser el caso del entanglement de fotones, fenómeno que se explica y justifica bajo la asunción de que los fotones adquieren un estado de polarización recién después de haber sido medida su polarización, al pasar por un polarizador. Esta exposición pretende mostrar que la existencia de fotones sin polarización (fotones vírgenes), aparte ser inconsistente, contradice una serie de hechos experimentales.

Al observar las manifestaciones de un objeto físico, o de un conjunto de objetos, los científicos construyen un modelo de tales objetos y de sus interacciones, de manera

que dicho modelo pueda representar adecuadamente a los citados objetos y a sus correspondientes interacciones.

*¿Todos los objetos y todas las interacciones?*

Aquí es necesario enfatizar que todo modelo se limita a representar solamente los objetos más significativos (para describir la interacción entre dos planetas se suele ignorar la presencia de los planetas restantes, y de los posibles asteroides) y sus interacciones también más significativas (al recurrir a un cañón de electrones se suele ignorar las interacciones entre los electrones de dicho cañón)

*¿Cuáles son los objetos y las interacciones que son significativas?*

Este es un problema cuya solución depende fuertemente de los criterios e intereses de los científicos que trabajan con el modelo del caso.

*¿Acaso las mediciones que realizan los científicos no son objetivas?*

Una de las exigencias para calificar a una medición de científica consiste en su reproducibilidad. Por ejemplo, las mediciones paranormales de algunos fenómenos no cumplen esta exigencia; por ello no son considerados resultados científicos. En tal sentido, desde hace mucho tiempo, la Ciencia ha considerado que una medición singular de algún fenómeno solamente puede tener validez referencial, mientras no sea confirmada o descartada por otras mediciones “independientes”. Esto nos lleva a distinguir entre lo que llamaremos mediciones singulares (realizadas una sola vez) y los procesos de medición. Para obtener el “valor objetivo” de la medición de alguna propiedad de un sistema, se consideran dos tipos de procesos de medición (ergódicamente) equivalentes:

- i) La repetición,  $N$  veces, de una medición singular, cada vez en condiciones “idénticas”, ó
- ii) La realización de una única medición de  $N$  subsistemas “idénticos”, que no interactúan entre sí.

Los resultados de las correspondientes mediciones singulares resultan ser de carácter probabilístico, pero no arbitrario. El desconocimiento de las características que tienen los resultados probabilísticos de un proceso de medición ha permitido esclarecer algunos fraudes cometidos por científicos. Por supuesto que las mediciones se realizan bajo ciertas condiciones de contorno y ciertas condiciones iniciales, las mismas que deben ser especificadas, para permitir su reproducibilidad. El carácter probabilístico de las mediciones (es decir, de los procesos de medición), que “desde siglos” ha sido aceptado por los físicos experimentales, constituye una de las más notables diferencias entre el modelo (teórico) clásico y el modelo cuántico de la Física. En el caso de interacciones entre objetos microscópicos, debe tenerse muy presente que las mediciones que se realicen deben ser interpretadas según el modelo teórico que se haya adoptado. Esto conlleva el peligro de círculos viciosos

Primeramente el médico T. Young (1773-1829), para explicar el fenómeno experimental de la doble refracción de la luz, al atravesar un romboedro de espato de Islandia (calcita,  $\text{CaCO}_3$ ); luego, el matemático A. Fresnel (1788-1827), establecieron el carácter transversal de las ondas de luz.

Posteriormente Maxwell (1831-1879) estableció que la luz era una forma de onda electromagnética, y en 1905 Einstein (para explicar el Efecto Fotoeléctrico) propuso el modelo según el cual la luz está constituida por “partículas” microscópicas, de energías bien determinadas, los que posteriormente recibieron el nombre de fotones. Debe aceptarse que los fotones no son las partículas usuales, sino partículas especiales que, entre otras propiedades, se difractan cuando pasan muy cerca del borde de una superficie (lo que aparentemente no sucede con las partículas “macroscópicas”). Un experimento para verificar que el modelo de fotones no contradice el carácter ondulatorio en su manifestación más característica, fue realizado por G.I. Taylor en 1909 quien, con un foco de luz muy débil, iluminó una aguja durante 2 000 horas ( $\approx 3$  meses), lo que permitía que los fotones llegasen prácticamente aislados. La imagen formada coincidía con la imagen de difracción producida por un foco luminoso intenso en muy corto tiempo.

## 2. Polarizadores

Para las ondas electromagnéticas, en particular para la luz en el rango visible se conocen dos clases de luz: Luz Natural,  $\ell N$ , y luz polarizada,  $\ell P$ . Recibe el nombre de  $\ell N$  la luz emitida por el Sol o por algún material incandescente; mientras que  $\ell P$  es la luz que posee ciertas características transversales, que se ponen en evidencia cuando ella es dirigida a, y atraviesa, ciertos objetos llamados polarizadores: polarizador lineal,  $PL$ , polarizador

circular dextrógiro,  $PCD$ , polarizador circular levógiro,  $PCL$ , un cristal birrefringente, en particular un romboedro de calcita,  $RC$ . Los  $PL$ ,  $PCD$ ,  $PCL$ , tienen la virtud de dejar pasar la mitad de la luz natural que incide sobre ellos, y absorber la otra mitad. Adicionalmente, la luz pasante adquiere ciertas propiedades, características de cada polarizador, y recibe el nombre de luz polarizada (linealmente, circularmente dextrógiro o circularmente levógiro). Un  $PL$  tiene una orientación característica, por lo que alguna vez escribiremos  $PL(\theta)$ , para indicar tal orientación. Un  $RC$  tiene la virtud de dividir el rayo incidente en dos rayos ortogonalmente polarizados; y posee lo que se conoce como Plano Principal, caracterizado por un ángulo  $\psi$ .

Por otra parte la luz posee energía, cuyo transporte se mide como intensidad,  $J$  (energía por unidad de tiempo por unidad de área). Midiendo la intensidad de la luz dirigida (perpendicularmente) hacia un polarizador, y la intensidad de la luz que logra atravesar el polarizador, se puede conocer qué fracción de la luz incidente es absorbida por el polarizador, y qué fracción atraviesa dicho polarizador, adquiriendo la polarización inducida por tal polarizador, sin cambiar sus frecuencias características. La fracción de luz reflejada es pequeña y suele ser ignorada.

## 3. Experimentos con polarizadores

Experimentalmente se conocen los siguientes resultados:

### a.- Experimento 1

Luz natural de intensidad  $J(\ell N)$  incide sobre un polarizador,  $PL$ ,  $PCD$  ó  $PCL$ ; entonces la intensidad de la luz polarizada emergente es la mitad de la incidente

$$J(\ell P) = \frac{1}{2} J(\ell N)$$

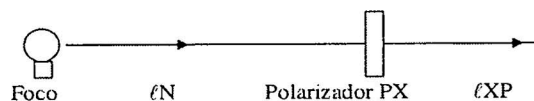


Figura 1.

### b.- Experimento 2

La luz emergente de un polarizador  $PX$ , con intensidad  $J(\ell P)$ , incide sobre un segundo polarizador “idéntico”,  $PX$ ; entonces todo el rayo incidente atraviesa este segundo polarizador; es decir,

$$J(\ell PX) = J(\ell P)$$

donde  $PX \equiv PL(\alpha)$ ,  $PCD$  ó  $PCL$ .

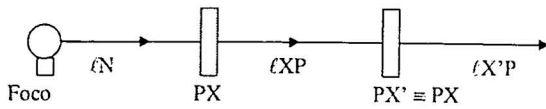


Figura 2.

## c.- Experimento 3

Ley de Malus: Si la luz emergente de un polarizador lineal  $PL(\alpha)$ , con intensidad  $J(\alpha)$  incide sobre un segundo polarizador  $PL(\beta)$ , entonces la intensidad  $J(\beta)$  de la luz emergente de este segundo polarizador cumple con:

$$J(\beta) = J(\alpha) \cos^2(\beta - \alpha).$$

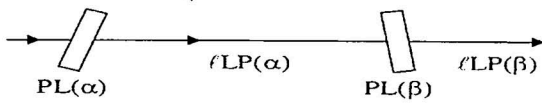


Figura 3.

## d.- Experimento 4

Si la luz emergente de un polarizador lineal  $PL(\alpha)$  incide sobre un polarizador circular, dextrógiro o levógiro, entonces la intensidad de la luz emergente de este segundo polarizador, se reduce a la mitad,

$$J(\ell PC) = \frac{1}{2} J(\ell PL(\alpha)).$$

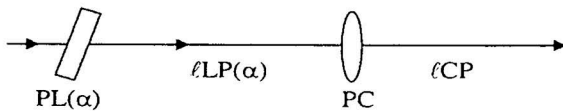


Figura 4.

## e.- Experimento 5

Si la luz emergente de un polarizador circular, dextrógiro o levógiro, incide sobre un polarizador lineal, la intensidad emergente de este segundo polarizador se reduce a la mitad,

$$J(\ell PL(\alpha)) = \frac{1}{2} J(\ell PC),$$

donde  $PC \equiv PCD$  ó  $PCL$ .



Figura 5.

## f.- Experimento 6

Si la luz emergente de un polarizador circular, dextrógiro o levógiro, incide sobre un polarizador circular levógiro o dextrógiro, respectivamente; entonces este segundo polarizador absorbe toda la luz que incide sobre él.

$$J(\ell CP) = 0.$$

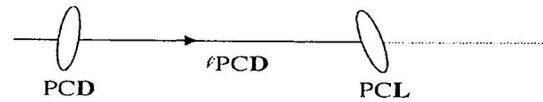


Figura 6.

## g.- Experimento 7

Si un rayo de luz natural incide sobre un romboedro de calcita, entonces, del otro extremo del romboedro emergen dos rayos de igual intensidad (igual a la mitad de la intensidad incidente), linealmente polarizados, con polarizaciones ortogonales entre sí.

$$J(LP(\alpha)) = J(LP(\alpha + \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} J(\ell N)$$

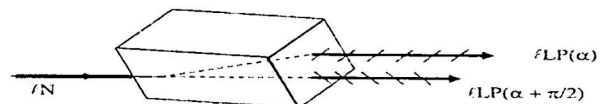


Figura 7.

## h.- Experimento 8

Si la luz emergente de un polarizado circular,  $PC$ , dextrógiro o levógiro, incide sobre un romboedro de calcita; entonces del romboedro emergen dos rayos polarizados linealmente, con polarizaciones ortogonales entre sí, y cada uno con intensidad mitad de la incidente.

$$J(LP(\alpha)) = J(LP(\alpha + \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} J(CP)$$

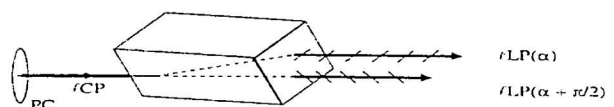


Figura 8.

## i.- Experimento 9

Si la luz emergente de un polarizador lineal  $PL(\alpha)$  incide sobre un romboedro de calcita; entonces del romboedro emergen dos rayos polarizados linealmente, con polarizaciones ortogonales entre sí, y la suma de las intensidades emergentes es igual a la intensidad incidente.

$$J(LP(\beta)) + J(LP(\beta + \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2} J(LP)$$

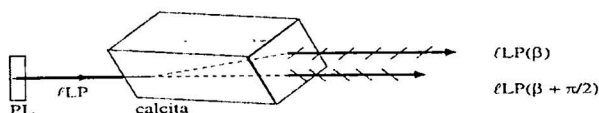


Figura 9.

## j.- Experimento 10

Si un rayo linealmente polarizado en una dirección  $\alpha$  incide sobre un romboedro, cuyo plano principal está caracterizado por el ángulo  $\psi$ , entonces, los rayos emergentes cumplen con,

$$J_1 = J(LP(\alpha)) \sin^2(\psi - \alpha),$$

$$J_2 = J(LP(\alpha)) \cos^2(\psi - \alpha)$$

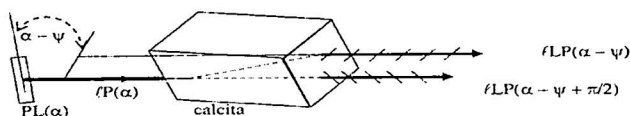


Figura 10.

[Notemos que el caso (9) es un caso particular del caso (10), y que para  $\psi - \alpha = 45^\circ$  los dos rayos emergentes tienen la misma intensidad, igual a la mitad de la intensidad incidente.]

Los resultados anteriores son independientes de la magnitud de las intensidades  $J$  de los rayos incidentes, bajo la asunción de que dichas intensidades sean medibles, lo que depende de la sensibilidad de los aparatos de medición; es decir, las intensidades no pueden ser arbitrariamente pequeñas.

Por otra parte se sabe que existe luz "natural" polarizada; por ejemplo, por scattering en la atmósfera, por reflexión de la luz solar en la superficie marina y otras superficies, por incidencia de la luz solar en trozos de cristales naturales. Adicionalmente, desde fines del siglo XIX se conoce el efecto Zeeman, según el cual la luz emitida por átomos colocados en un campo magnético resulta polarizada. Además, ciertos animales, como las abejas son sensibles a la luz polarizada y usan tal información para orientarse; también se cree que ese es un recurso de algunas aves migratorias. Es decir, la existencia de luz polarizada no requiere de un proceso de

medición. De otro lado, tenemos las llamadas Reglas de Selección de los fotones es parte de la conservación del momento angular.

Si, como lo propuso Einstein, la luz está constituida por partículas especiales, llamadas fotones, todos los experimentos macroscópicos mencionados pueden ser explicados bajo la asunción de que los fotones poseen estados de polarización, que pueden cambiar cuando interactúan con algunos objetos. De (Experimento 2) se puede inferir que cada uno de los fotones, una vez que han atravesado el polarizador  $PX$ , al volver a incidir en un polarizador similar e igualmente orientado, lo atravesará (es decir, no será absorbido). Esa es la manera experimental de decir que un fotón tiene determinada polarización (la polarización inducida por un determinado polarizador).

Por otra parte, teniendo presente (Experimento 3) puede suponerse la existencia de una Ley de Malus Cuántica, según la cual, los fotones atraviesan el segundo polarizador con probabilidad igual a  $\cos^2(\beta - \alpha)$ . Dicha asunción también permite considerar que los fotones de la luz natural poseen direcciones de polarización aleatoriamente distribuidas, lo que, considerando el gran número de fotones, explica los efectos clásicos. Es decir, si asumimos la validez de la Ley de Malus Cuántica, entonces podemos explicar todos los resultados experimentales expuestos anteriormente.

## 4. El caso de pocos fotones

Arriba, para medir la polarización de un rayo de luz, comparábamos las energías del rayo incidente y del rayo emergente de un polarizador. Tal cosa ya no parece posible en el caso de un fotón aislado, o de unos pocos fotones aislados (aunque igualmente polarizados). Ese es un problema clave en los análisis de los resultados experimentales de los casos de fotones aislados.

Aquí debemos aclarar que en el caso del experimento de Taylor, propiamente se puede decir que los fotones llegaban aislados a la pantalla; pero a la pantalla llegaban un gran número de fotones aislados. Por otra parte, podemos suponer algunas situaciones en las que se encuentran solamente un único fotón o algunos fotones, que no forman parte de algún conjunto mayor que también esté interviniendo en el proceso.

[Bloqueando un chorro de fotones tipo-Taylor, y desbloqueándolo por un cortísimo intervalo de tiempo, se podría decir que al polarizador  $PL(\theta)$  (para determinar la polarización de esa media docena de fotones) han llegado unos pocos fotones, algunos de los cuales serán absorbidos por el polarizador, y los otros lo atravesarán para ser contados en el detector. Aquí, además, debemos tener presente que el número de fotones que pasan durante el desbloqueo solamente será conocido en promedio.]

Es decir, el modelo del fotón funciona satisfactoriamente en los casos de una gran número (miles de billones) de fotones, donde se pueden considerar insignificantes ciertos errores de aproximación:



- i) Polarizadores perfectos que no reflejan parte de los fotones,
- ii) Polarizadores que orientados adecuadamente dejan pasar el 100 de los fotones incidentes, y que a  $90^\circ$  de la dirección anterior no dejan pasar ningún fotón,
- iii) Polarizadores que efectivamente poseen una dirección de polarización bien definida, etc.

En el caso de trabajar con pocos fotones, además de no poder medir la intensidad (o energía) de los fotones incidentes o emergentes, las aproximaciones mencionadas ya no pueden considerarse insignificantes.

En el caso de trabajar con pocos fotones, además de no poder medir la intensidad (o energía) de los fotones aislados, la llamada Interpretación de Copenhague (la solución de Bohr) optó por asumir que los fotones no poseen polarización mientras dicha propiedad no sea medida. Tal postulado resuelve algunos problemas con respecto a las mediciones de las propiedades de los sistemas microscópicos, pero también crea otras dificultades. Por ejemplo: Suponiendo que efectivamente existen fotones virginales, es decir, fotones que (todavía) no poseen polarización:

- i) La propiedad de ser fotones vírgenes se manifestaría también en el caso de grandes números de fotones; es decir, en el caso de los rayos de luz, existirían rayos de luz vírgenes?
- ii) En el caso de los rayos de luz se sabe que existen rayos 'naturalmente' polarizados (es decir, su polarización no ha sido causada por algún acto intencional de medición), por ejemplo, los rayos dispersados por las moléculas de agua de la atmósfera,
- iii) ¿Cuál sería una propiedad que permitiría diferenciar a los fotones vírgenes de los fotones polarizados?. Por ejemplo, un colaborador de G. I. Taylor nos dice que en el próximo minuto deben aparecer por esta ventanilla vertical 5 ó 6 fotones; que determinemos si ellos están polarizados o son vírgenes. [Notemos que el asunto sería diferente si el citado colaborador nos dijese que por esa ventanilla van a aparecer 5 ó 6 fotones por minuto; y que disponemos de todo el tiempo que queramos para realizar nuestras mediciones]

Debemos tener presente que la medición de la polarización de un único fotón aislado propiamente carece de sentido, puesto que una medición física exige que ella sea repetible; y que la medición física es el resultado de un proceso de medición. Supongamos (con mucha fantasía) que efectivamente se trata de un único fotón (previamente polarizado, pero de dirección de polarización desconocida para el operador) que incide sobre un polarizador lineal de dirección  $\alpha$ ; y que el foto-multiplicador colocado después del polarizador,

- i) Indica la presencia de un fotón,
- ii) Permanece sin señal de haber recibido un fotón

¿Qué podemos concluir en cada uno de los casos?

- i\*) Solamente podemos afirmar que el fotón pasó el polarizador; es decir que su dirección de polarización no era igual a  $\alpha \pm 90^\circ$ .
- ii\*) Solamente podemos afirmar (suponiendo que el foto-multiplicador es 100 % eficiente) que la polarización del fotón incidente no era en la dirección  $\alpha$ .

Notemos también que no hay ninguna duda que existen fotones polarizados según alguna dirección  $\alpha$ , como lo certifica el experimento 2, en el que todos los fotones de un rayo de luz pasan un polarizador cuya dirección es  $\alpha$ . Tampoco hay duda de que si fotones con dirección de polarización  $\alpha$  inciden sobre un polarizador de dirección  $\beta$ , entonces algunos de los fotones incidentes pasarán, mientras que otros serán absorbidos, como lo certifica lo que hemos llamado la Ley de Malus. Es decir, no hay dudas sobre la existencia de fotones polarizados; lo que está en entredicho es la existencia de fotones vírgenes.

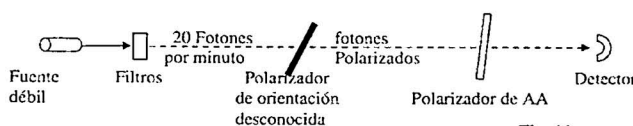


Figura 11.

Supongamos la siguiente situación: Imitando a G.I. Taylor hemos preparado un foco luminoso muy débil, de manera que por una ventanilla pasan (según nuestros cálculos) 20 fotones por minuto. Luego, en el marco de dicha ventanilla colocamos un polarizador lineal de dirección  $\alpha$ , por lo que suponemos que, en promedio, de dicha ventanilla emergerán 10 fotones por minuto. A continuación pedimos a algún físico experimentado, AA, que prepare los equipos para determinar la polarización de los fotones que pasen entre las 9:00 y 9:01. De lo que actualmente se conoce, el físico AA no podrá medir la polarización de la decena (aproximadamente) de fotones que, en el intervalo de tiempo señalado, emergen de la indicada ventanilla. El físico AA puede afirmar que no puede medir la polarización de los fotones mencionados; pero ello no indica que dichos fotones carezcan de polarización. Es decir, el hecho de que sea imposible medir una cierta propiedad de algún objeto (o conjunto de objetos), no implica necesariamente que el citado objeto no posea tal propiedad.

En el caso del experimento 3, Ley de Malus, podemos ver que de un gran conjunto de fotones polarizados en la dirección  $\alpha$ , aproximadamente la fracción  $\cos^2(\alpha - \beta)$  de ellos ha cambiado su polarización a la dirección  $\beta$ . Es decir, el polarizador no ha creado la polarización de cada uno de los fotones pasantes, sino les ha cambiado la dirección de polarización, de la dirección  $\alpha$  a la dirección  $\beta$ . [Esta interpretación es discutible, pero sin mayores efectos para la presente discusión.]

Adicionalmente, los supuestos fotones vírgenes de la luz natural, al atravesar un polarizador se comportan como si las polarizaciones de los fotones componentes se encontrasen aleatoriamente orientadas, lo cual es consistente con la generación de los fotones por átomos que no están necesariamente correlacionados en sus excitaciones ni en sus instantes de emisión.

Finalmente consideremos el siguiente conjunto de experimentos aplicados a un rayo de intensidad  $J$ .

- i) Hacemos incidir tal rayo sobre un polarizador de orientación  $\alpha$ , encontrando que el rayo emergente tiene intensidad  $\frac{J}{2}$ . Cambiamos la dirección del polarizador y la intensidad emergente no cambia. Al parecer se trata de un rayo de luz natural o un rayo polarizado circularmente.
- ii) Hacemos incidir el rayo sobre un polarizador circular, dextrógiro o levógiro, y obtenemos que en ambos casos la intensidad emergente es  $\frac{J}{2}$ .  
Aparentemente se trata de luz natural.
- iii) Al mismo rayo anterior ahora lo hacemos incidir sobre un romboedro de calcita y obtenemos dos rayos emergentes de igual intensidad. Con este resultado estamos casi convencidos de que el rayo en cuestión es un rayo de luz natural.

Pero si el experimento lo hubiésemos realizado superponiendo dos rayos de igual intensidad, linealmente polarizados, con polarizaciones ortogonales entre sí (pero con fases no coherentes) podemos verificar que los resultados de las intensidades, emergentes de los polarizadores o romboedro, serían las mismas que las obtenidas en cada uno de los casos mencionados más arriba. El mismo resultado obtendríamos si se tratase ya no de la superposición de dos rayos no coherentes, ortogonales entre sí, sino de la superposición de  $N$  rayos no coherentes, de igual intensidad, con polarizaciones orientadas según las diagonales

de un polígono regular de  $N$  lados. Los resultados de los experimentos mencionados son los que básicamente justifican que se considere que los fotones de la luz natural se encuentren polarizados con direcciones de polarización aleatoria, estadísticamente simétrica (mientras no exista alguna razón que permita suponer cierta preferencia por determinadas orientaciones).

## 5. Conclusiones

Existen fotones con estado de polarización definida (equivalente a una dirección de polarización). Esto puede suceder en forma natural (por efecto de un polarizador natural) como se menciona en (3), o intencionalmente, recurriendo a un polarizador de laboratorio.

Como se muestra en (4), cuando se trata de un único fotón aislado o de pocos fotones aislados, pero ciertamente polarizados (en una dirección no conocida para el experimentador), resulta imposible para dicho experimentador determinar la polarización de dichos fotones, lo cual no implica que dichos fotones no posean un estado de polarización antes de incidir en el polarizador o el romboedro de calcita.

Los polarizadores absorben los fotones o les cambian el estado de polarización, pero no les "generan" el estado de polarización (en el sentido de que los fotones recién adquieren un estado de polarización al pasar el polarizador).

El octaedro de calcita, y otros cristales, también modifican (en dos direcciones ortogonales) los estados de polarización de los fotones incidentes.

El postulado de la existencia de fotones vírgenes parece tener más el carácter de un postulado de la metafísica, que el carácter de un postulado propio de la física.

1. Bergman Schaeffer III-Lehrbuch der Experimentalphysik, Wellenoptik, W. Gruyter 1962
2. J. Simons, States- Waves and Photons,
3. M. Born- Optik, Springer, 1966
4. R. Feynman-Lectures on Physics I, Addison Wesley
5. E. Hecht- Optics, Addison-Wesley, 2002
6. D. Perovich- Observation of polarization of light reflected from sea ice, Journal of Geophysical Research Oceans, 2009
7. R. Turner, C.M. Ankenbrandt, R.C. Larsen- Polarization of cosmic-ray Muons, Phys. Rev, D4, 17 (1971)
8. K. Able- Sky light polarization patterns at dusk influence migratory orientation in birds, Natur, 299, 1982
9. F. Moore, J.B. Phillips-Sunset sky light polarization and the migratory orientation of yellow-rumped warblers, Animal Behaviour, Vol 26, 6, 1988.

# Al rescate de la Segunda Ley de Newton

Holger G. Valqui  
*Facultad de Ciencias-Universidad Nacional de Ingeniería*

Recibido el 03 de marzo del 2011; aceptado el 12 de abril del 2011

La Segunda Ley de Newton (SLN), es posiblemente la ley física más conocida; ella es presentada y aplicada desde los estudios de secundaria, los primeros años de la universidad, y en niveles más avanzados de algunas especialidades. Pero, dicha ley física es generalmente presentada como una mera receta, eventualmente fundamentada con palabrería metafísica. Sin embargo, la segunda ley de Newton es una primera y magnífica oportunidad de presentar lo que es una ley física, fundamentada en definiciones operacionales y en procesos experimentales, sin necesidad de recurrir a un lenguaje sofisticado ni a aparatos especializados. Aún en el nivel de secundaria puede ser presentada en forma experimental aceptable, esclareciendo conceptos que son decisivos en la visión de lo que constituye una cultura científica propia del hombre moderno.

**Palabras Claves:** Ley física, definición operacional, Proceso experimental, segunda ley de Newton.

Newton's second law is perhaps the best known physical law; it is presented and applied from the high school, the first year of college, and at advanced levels of certain specialties. But that physical law is generally presented as a simple recipe, eventually substantiated with metaphysical talk. However the SNL is the first and great opportunity to present what is a physical law, based on operational definitions and experimental processes, without resorting to sophisticated language or specialized equipment. Even at the secondary level that law can be presented adequately in its experimental aspect, clarifying that are essential for the vision of what should be a scientific culture proper of modern man.

**Keywords:** Physical law, operational definition, experimental process, second law of Newton.

## 1. Introducción

En secundaria los "buenos alumnos" deben ser capaces de memorizar y recitar algo así como la fuerza que actúa sobre un cuerpo puntual es igual producto de la masa por la aceleración que adquiere dicho cuerpo. Posteriormente, en la universidad, en el curso de Física General I, se trata dicho tema con menos ligereza, pero introduciendo una serie de equívocos y simplificaciones justificados (cuando surge tal demanda) por supuestas razones pedagógicas.

Así, la SLN ha sido condenada a ser considerada como una mera receta, sacrificando su valiosa riqueza de modelo científico, en aras de (repito) razones pedagógicas oscuras.

Por otra parte, el proceso de obtención de la SLN no requiere de conocimientos avanzados, ni de técnicas sofisticadas, ni de análisis complicados (aunque sí deben ser cuidadosos).

En tal sentido, en este trabajo se analizan los siguientes puntos:

- i) Sobre todo, en el laboratorio, no existen cuerpos puntuales; por ejemplo, la Tierra puede ser considerada como un cuerpo puntual, mientras que una molécula puede ser considerada como un cuerpo compuesto;
- ii) Una fuerza que actúa sobre un cuerpo, K, es la representación matemática de la acción mecánica que

algún otro cuerpo ejerce sobre K;

- iii) Una fuerza no puede ser bien representada por un vector; una fuerza tiene una Línea de Acción;
- iv) Una fuerza que actúe sobre K producirá, salvo en casos especiales, que dicho cuerpo se desplace y simultáneamente rote alrededor de un cierto eje;
- v) Bajo ciertas condiciones especiales puede lograrse, en cada caso, que la resultante de todas las fuerzas que actúen sobre K le produzcan solamente el correspondiente desplazamiento; eliminando de tal manera el efecto de rotación;
- vi) Para definir una propiedad primitiva (de un cuerpo) se recurre a un procedimiento experimental, llamado **definición operacional**, que en el caso de la masa es precisamente la SLN;
- vii) Para la obtención de la SLN no es necesario contar con el concepto de masa de un cuerpo; al contrario, el proceso de obtención de la SLN, genera el concepto de masa (inercial) del cuerpo K.
- viii) Todas las resultantes que sólo producen la traslación, sin rotación, del cuerpo K, se intersectan en un punto fijo a K. Dicho punto, hallado experimentalmente, recibe el nombre de Centro de Masa de K;
- ix) No existe un Sistema de Referencia Inercial ideal. Solamente existen aproximaciones aceptables según cada situación que se considere.

- x) Bajo las consideraciones anteriores se describirá la obtención sensata y actualizada de la SLN.
- xi) Además de su carácter antipedagógico, las no existentes fuerzas ficticias, son innecesarias;

## 2. La versión más o menos oficial de la SLN

Consideremos un cuerpo puntual, de masa  $m$ , sobre el que actúa una fuerza, representada por el vector  $F$ .

Consideremos una Referencia Inercial; entonces, experimentalmente se cumple que el cuerpo adquiere una aceleración  $a$ , tal que:  $F = ma$

Una Referencia es inercial si en ella se cumple la SLN, o equivalentemente, si cuando sobre el cuerpo puntual no actúa ninguna fuerza, entonces dicho cuerpo se desplaza con velocidad constante,  $v$ .

Luego, si la referencia no es inercial, es decir está acelerada, suele recetarse que, a las fuerzas actuantes debe añadirse la fuerza ficticia del caso (por ejemplo, en un ascensor acelerado, en la Tierra rotante, en un tren acelerado, un camión en una curva).

De vez en cuando, además, pueden presentarse algunos esclarecedores Diagramas de Cuerpo Libre, DCL; por ejemplo, para el siguiente caso cuando un bloque al que se aplica la fuerza  $F$ , pero permanece en reposo sobre una mesa rugosa:

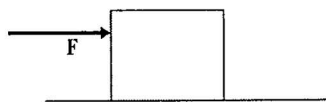


Figura 1. Bloque inmóvil sobre una mesa rugosa.

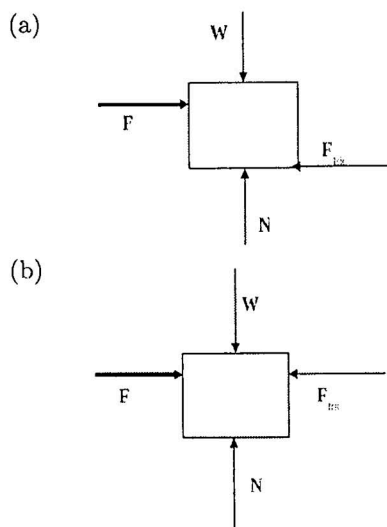


Figura 2. Dos "posibles DCL"; en (a) aparece un torque; en (b) se trata de evitar la aparición del torque.

## 3. Análisis de situaciones claves, y de ciertos conceptos

Sobre todo, en el laboratorio, no existen cuerpos puntuales. Cuando a un cuerpo "no puntual" se le aplica una fuerza, dicho cuerpo, en general, sufrirá simultáneamente un movimiento de desplazamiento puro y un movimiento de rotación pura, de manera que diferentes puntos del cuerpo tendrán diferentes aceleraciones. Entonces, en general, no tiene sentido hablar de la aceleración de un cuerpo (no puntual).

[MOVIMIENTO ARBITRARIO DE  
UN CUERPO RÍGIDO]



[TRASLACIÓN PURA  
+  
ROTACIÓN  
alrededor de un cierto eje]

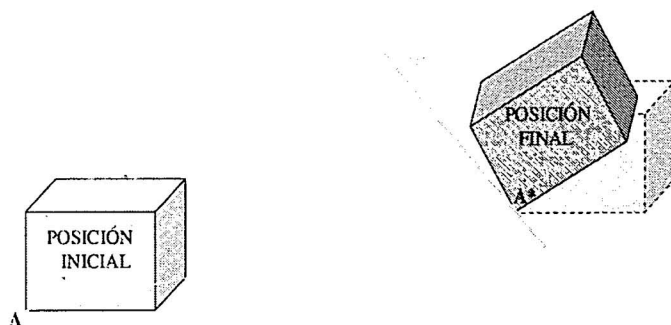


Figura 3. Para llevar un cuerpo rígido de una posición inicial a una posición final arbitraria, basta trasladarlo paralelamente a sí mismo, llevando  $A$  hasta  $A^*$ , y luego rotarlo adecuadamente alrededor de un cierto eje que pasa por el punto  $A^*$ .

En determinadas condiciones conviene considerar que un cuerpo es "puntual", en el sentido de que no tiene dimensiones y, por lo tanto, no estará sometido a torques. A continuación presentamos algunos ejemplos:

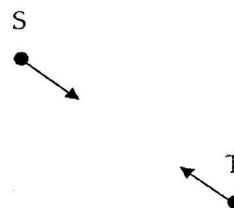


Figura 4. En el problema astronómico de los dos cuerpos, tanto el Sol como la Tierra son considerados como "puntos".

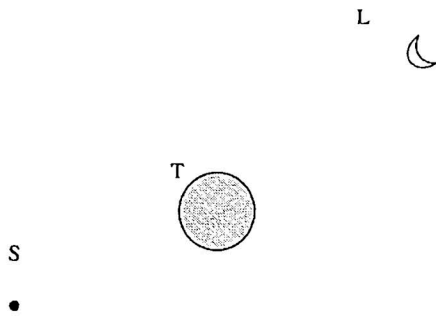


Figura 5. En el estudio de las mareas, tanto el Sol como la Luna son "puntos", mientras que la Tierra es una esfera

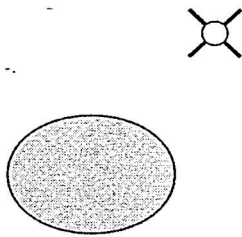


Figura 6. Para determinar la trayectoria de un satélite, la Tierra puede ser considerada como un elipsoide de revolución.

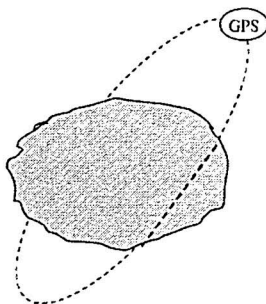


Figura 7. Para la localización por medio de los GPS la Tierra debe ser considerada como un geoide.

*Es decir, existen situaciones en las que resulta sensato considerar a un cuerpo como si se tratase de un cuerpo puntual, pero tal asunción (por tratarse de un problema físico) debería ser discutida y fundamentada (evitando así que la SLN sea tratada como un pseudo problema matemático), y para que el estudiante vaya captando el significado del aforismo: "La matemática es el lenguaje de la Física"*

Una fuerza que actúa sobre un cuerpo,  $K$ , es la representación matemática de la acción mecánica que ejerce algún otro cuerpo  $C$  sobre el cuerpo  $K$ ; dicha representación matemática puede dar lugar a objetos matemáticos (resultantes y componentes) que no son fuerzas, pero que matemáticamente se comportan como ellas, y pueden ser fuente de confusiones (como sucede en el caso de las "fuerzas" ficticias).

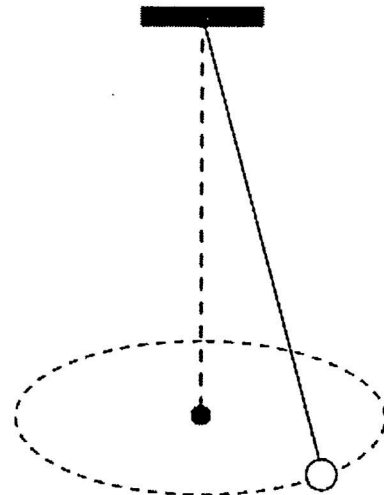


Figura 8. Péndulo simple.

Un péndulo simple, cuya peonza describe una circunferencia horizontal como se muestra en la figura 8. La peonza está sometida a dos fuerzas físicas: la tensión del hilo de soporte y la atracción de la Tierra (peso). Sin embargo dicha peonza se mueve como si la única fuerza que actuase sobre ella fuese una fuerza centrípeta rotante (es una fuerza matemática, resultante matemática de las dos fuerzas físicas mencionadas). Esta fuerza resultante es una fuerza matemática porque no representa ninguna interacción con algún otro cuerpo, como sí es el caso de las fuerzas físicas.

Una fuerza no puede ser bien representada por un vector; una fuerza tiene una Línea de Acción, LdA. A las fuerzas que tienen un mismo vector de fuerza las llamaremos equipolentes (entre sí).

*Las fuerzas equipolentes mostradas son todas diferentes entre sí, pero tienen un mismo vector de fuerza, y por tener diferentes LdA causan efectos diferentes.*



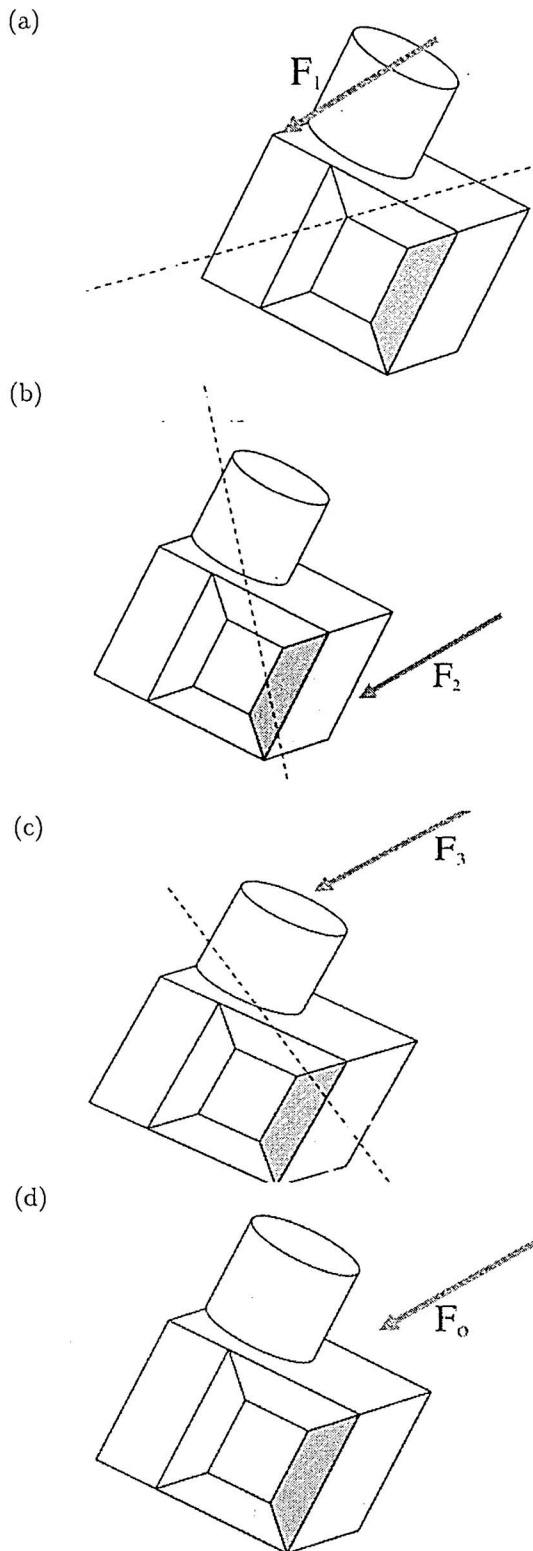


Figura 9. (a),(b),(c) Fuerzas equipolentes y Líneas de Acción: Las fuerzas equipolentes  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  producen, al ser aplicadas al cuerpo  $K$ , un desplazamiento más una rotación de  $K$ , cada vez, con respecto a cierto eje; (d) una de las fuerzas equipolentes,  $F_0$  sólo produce desplazamiento paralelo del cuerpo.

Experimentalmente se encuentra que si una o varias fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido, éste se desplazará y rotará alrededor de un cierto eje. Si las fuerzas actuantes son reemplazadas por otras equipolentes con las anteriores (es decir, se les cambia las LdA), se verifica que también cambia el eje de rotación. También se verifica experimentalmente que, eligiendo adecuadamente las correspondientes LdA, se puede lograr que el cuerpo rígido no rote, y solamente se desplace paralelamente a sí mismo. Esos son los casos de las fuerzas que hemos designado con  $F_0$ .

La masa, al igual que los otros conceptos primitivos de la Ciencia se obtienen **NO** por medio de definiciones metafísicas, **sino** por medio de procedimientos experimentales, conocidos como **definiciones operacionales**. La operación, en el caso de la masa es, precisamente, el experimento de la Segunda Ley de Newton; como se muestra en la sección 4.

La masa inercial es una propiedad intrínseca de un cuerpo; ese es también el caso del CM. En cambio, el peso y Centro de Gravedad de un cuerpo son resultados de la posición geométrica del cuerpo con respecto a la Tierra.

El concepto de masa de un cuerpo no es necesario para la obtención experimental de la SLN; al contrario, como se muestra en la sección 4, el proceso de obtención de la SLN genera el concepto de masa (inercial) del cuerpo  $K$ .

El peso de un cuerpo es el resultado de la interacción de la Tierra con el cuerpo considerado.



Figura 10. Un astronauta, lejos de la Tierra, pierde peso; pero su masa permanece invariante.

El centro de masa de un cuerpo, CM, no es una definición matemática, como habitualmente se considera. Para el caso de un cuerpo rígido, la localización del CM es sencilla; es un punto tal que por él pasa la LdA de la resultante de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo; como consecuencia, en una referencia inercial, dicho cuerpo se desplazará paralelamente a sí mismo, sin rotar.

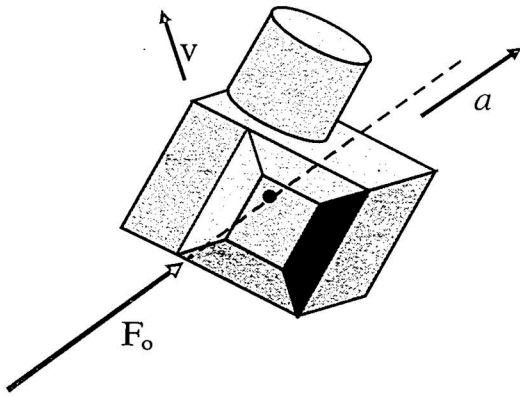


Figura 11. Experimento para obtener el CM de un cuerpo.

En la figura 11 se muestra el experimento para obtener el CM de un cuerpo: primeramente consideremos la resultante de las fuerzas que al actuar sobre el cuerpo  $K$ , solamente le producen desplazamiento sin rotación. Luego consideremos las resultantes en los diferentes casos en los que las fuerzas que actúan sobre  $K$  solamente le producen desplazamiento sin rotación; experimentalmente se obtiene que las correspondientes Líneas de Acción de tales resultantes se intersecan en un único punto ligado rígidamente al cuerpo  $K$ . El punto de intersección recibe el nombre de Centro de Masa,  $CM$ , del cuerpo  $K$ .

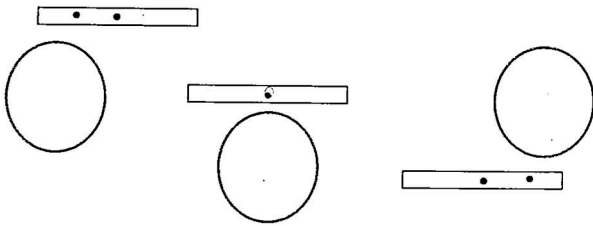


Figura 12. Una varilla homogénea, muy larga, tiene su centro de gravedad,  $CG$ , variable, según su posición con respecto a la Tierra. El  $CM$  de la varilla permanece invariable.

No existen sistemas Inerciales de Referencia, salvo como una aproximación, (Referencia inercial asteroidal, RIA; referencia inercial lunar, RIL; referencia inercial terrestre, RIT; referencia inercial solar, RIS; referencia inercial Estelar, RIE.)

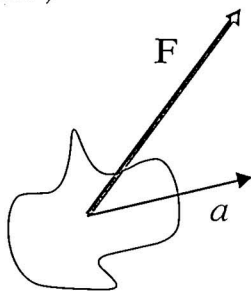


Figura 13. En una RIA, experimentalmente se obtiene que  $F$  y  $a$  no son paralelas.

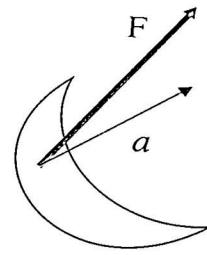


Figura 14. En una RIL, experimentalmente se obtiene que  $F$  y  $a$  son poco paralelas.

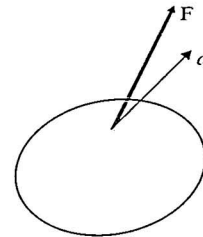


Figura 15. En una RIT, experimentalmente se obtiene que  $F$  y  $a$  son aceptablemente paralelas.

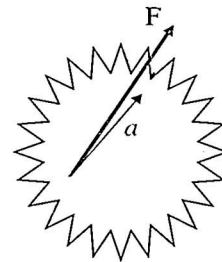


Figura 16. En una RIS, dentro de la exactitud de los instrumentos modernos, se obtiene que  $F$  y  $a$  son prácticamente paralelas.

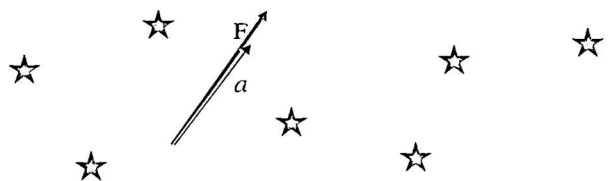


Figura 17. En un RIE, dentro de la exactitud de los instrumentos modernos,  $F$  y  $a$  sí son paralelas.

La cadena de Referencias Inerciales y la tendencia al paralelismo entre  $F$  y  $a$ :

Asteroide  $\rightarrow$  Luna  $\rightarrow$  Tierra  $\rightarrow$  Sol  $\rightarrow$   
Estrellas fijas  $\rightarrow$  Estrellas fijas supermasivas (Principio de Mach)

Bajo las consideraciones anteriores veamos primeramente el resultado obtenido por Newton:

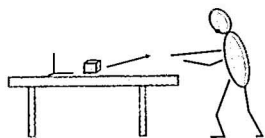


Figura 18. Newton realizó sus experimentos en un laboratorio fijo a la Tierra. Por suerte para la Física, las mediciones realizadas por Newton con los instrumentos de entonces, que tenían una incertidumbre no menor que 10 %, Newton encontró (dentro de esa incertidumbre) que  $a$  y  $F$  eran paralelas.

#### 4. Nueva versión de la Segunda Ley de Newton

Consideremos un sistema de referencia apropiado. Para el caso de un laboratorio, una referencia adecuada es una fija a Tierra, tal como lo consideró Newton (para el caso de un satélite artificial se puede considerar una referencia fija a la Tierra, o una con origen fijo al Sol, apuntando hacia las estrellas lejanas). Si en tal laboratorio, a un cuerpo rígido  $K$  se aplican varias fuerzas, cuya resultante pasa por el CM de  $K$ , entonces (dentro de cierta aproximación) la aceleración,  $a$ , de cualquier punto de  $K$ , resulta paralela a la fuerza-resultante aplicada; es decir,  $a = \lambda F$ , donde  $\lambda$  resulta ser una constante característica del cuerpo  $K$ . Si con dos cuerpos rígidos  $K_1$  y  $K_2$  se construye un nuevo cuerpo rígido  $K_{12}$ , entonces se verifica que

$$\frac{1}{\lambda_{12}} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

El valor inverso de la constante  $\lambda$  recibe el nombre de “masa” del cuerpo  $K$ , es decir,  $m \equiv \frac{1}{\lambda}$ .

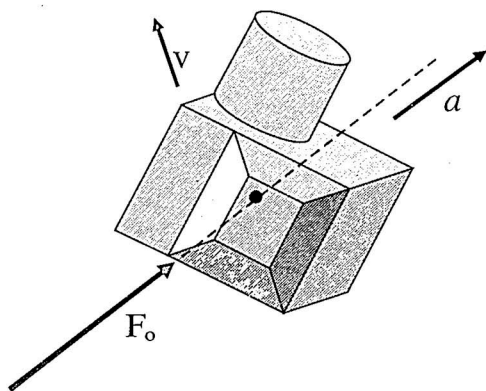
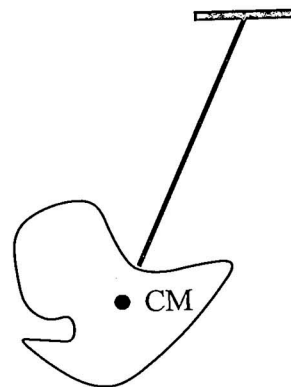


Figura 19. Caso cuando la LdA resultante pasa por el CM.

Si la LdA de la resultante (de las fuerzas aplicadas al cuerpo  $K$ ) pasa por el CM, entonces el cuerpo se desplazará paralelamente a sí mismo, y todos sus puntos tendrán la misma velocidad y la misma aceleración. La fuerza no tiene porque ser constante, ni mantenerse par-

alela a sí misma, pero su LdA debe pasar continuamente por el CM; entonces éste se mantendrá paralelo a sí mismo.

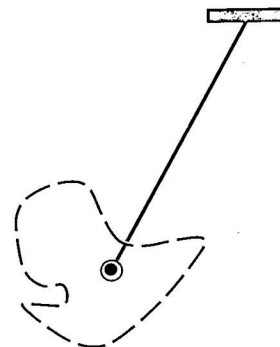
Ejemplo de un caso sencillo con resultante variable tanto en dirección como en intensidad.



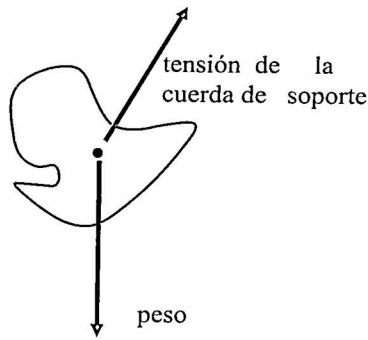
(a) Un péndulo cuya cuerda de soporte pasa por el CM; entonces la resultante también pasará por el CM.



(b) Vista lateral del péndulo desde la izquierda de la figura (a), donde la cuerda está atada por medio de un lazo a la varilla horizontal, que conecta las dos placas “paralelas” que constituyen la parte masiva del péndulo.



(c) Detalle del lazo alrededor del eje de conexión. Si el lazo estuviese muy ajustado, entonces la cuerda de soporte produciría un torque sobre el eje.



(d) Diagrama de Cuerpo Libre; las dos fuerzas actuantes pasan por el CM -

Figura 20. Vistas diferentes del péndulo.

Además de su carácter antipedagógico, las no existentes **fuerzas ficticias**, son innecesarias; por ejemplo: “fuerza” de Coriolis, la “fuerza” centrífuga sobre un cuerpo acelerado, la “fuerza” centrífuga sobre un camión en una curva.

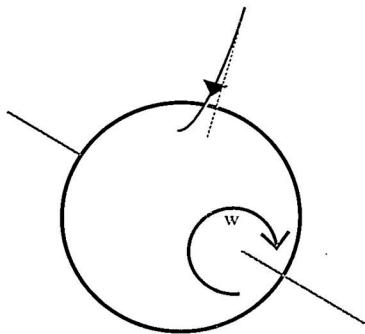


Figura 21. La “fuerza de Coriolis” en la Tierra rotante, sobre un cuerpo que cae por efecto de su peso. La Tierra rotante no es una referencia inercial adecuada para un cuerpo que se desplaza lejos de la superficie terrestre. Por ejemplo, para un GPS.

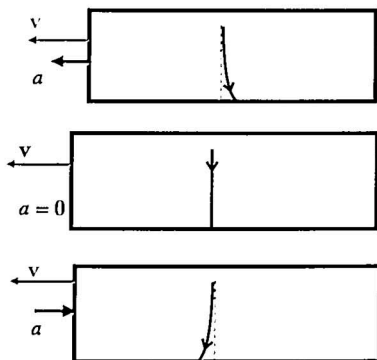


Figura 22. La “fuerza de Coriolis” dentro de un tren acelerado, para un cuerpo que cae por efecto de su peso. Se trata de una fuerza metafísica

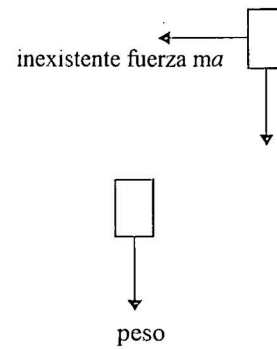


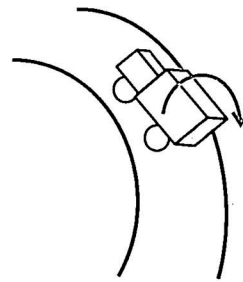
Figura 23. Diagramas de cuerpo libre de un cuerpo que cae dentro de un tren.

En la figura 23(a) se muestra el DCL metafísico de un pequeño cuerpo, de masa  $m$ , que cae dentro de un tren, el cual avanza con aceleración  $a$ , hacia la izquierda.

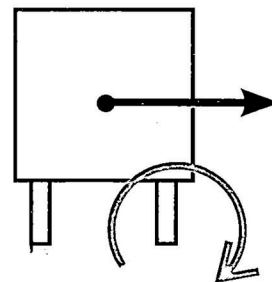
En la figura 23(b) se muestra el DCL correcto para un cuerpo, de masa  $m$ , que cae dentro de un tren acelerado. La única fuerza es el peso, y el cuerpo adquiere, con respecto a un sistema inercial terrestre, la aceleración vertical causada por dicha fuerza. Si el cuerpo, dentro del tren, ha sido soltado en el instante  $t_0$ , cuando el tren tenía la velocidad horizontal  $v_0$ , entonces la velocidad total del cuerpo, en un instante posterior (pero antes de tocar el piso) será

$$v = v_0 + a(t - t_0) + g(t - t_0),$$

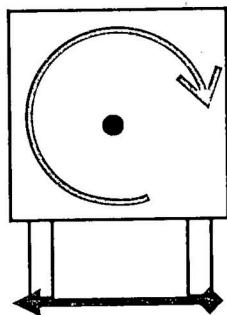
de donde puede obtenerse la trayectoria con respecto a Tierra, o la trayectoria con respecto al tren.



(a) En una curva un camión tiende a volcarse “hacia afuera” por efecto de



(b) ... por efecto de la “fuerza centrífuga” sobre el CM. El eje de rotación pasaría por los puntos de apoyo de las dos ruedas exteriores. (Explicación Metafísica)



(c) ...por efecto de la fuerza centrípeta de fricción. El eje de rotación pasa por el CM. (Explicación Física)

Figura 24. Fuerzas que producen el vuelco de un camión en una curva.

## 5. Conclusiones

La obtención de la Segunda Ley de Newton puede ser la construcción de un modelo pseudo matemático; pero

también puede ser un excelente modelo físico, el cual requiere el análisis de una serie de aspectos complementarios que ponen de relieve algunas valiosas consideraciones científicas propias de la elaboración de toda ley Física.

Aquí hemos mostrado, ojala convincentemente, una serie de errores conceptuales acerca de la SLN que suelen ser aceptados sin mayores reticencias; en particular hemos presentado la forma correcta de la SLN, que no requiere el conocimiento previo de las masas de los cuerpos considerados; la existencia de una cadena de referencias inerciales y el carácter experimental (no meramente matemático del centro de masa de un cuerpo). Adicionalmente también se ha mostrado la no existencia de las llamadas fuerzas ficticias, cuyo uso sólo incrementa la confusión sobre el conocimiento de las fuerzas como representaciones de ciertas interacciones mecánicas entre los cuerpos.

1. HGValqui, Apuntes de mecánica teórica I
2. HGValqui, Apuntes de mecánica Teórica II
3. Sears-Zemansky, Física Universitaria. Vol. I, Pearson Education.
4. Alonso-Finn, Física. Vol. I, Fondo Educativo Interamericano.
5. Tipler Mosca, Física para la Ciencia y la Tecnología, Reverté.
6. Goldstein, Classical Mechanics, Addison Wesley. (Texto muy conocido. Desde el inicio prefiere eludir el problema del planteamiento de la SLN, recurriendo a un enfoque "filosófico")
7. Saletan-Cromer, Theoretical Mechanics, (Texto de reconocido prestigio. Define la fuerza sobre una partícula como el producto de su masa por la aceleración de dicha partícula. Esto es, además, una confusión entre lo que es una definición y lo que es una ley física.)



## Reglas para la Preparación de Artículos para la Revista REVCIUNI

En la revista de la Facultad de Ciencias de la UNI (REVCIUNI), se publican artículos de investigación actual y divulgación científica en las áreas de física, matemática y química. Los artículos se reciben en el Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias de la UNI.

Los artículos deben de ser originales, inéditos, que no se hayan publicado previamente ni se encuentran bajo consideración para ser publicados en otras revistas. Los artículos no deben de presentar conclusiones conocidas, triviales, obvias y sin fundamento.

Los artículos serán recibidos por el Comité Científico el cual los enviará a uno o más árbitros para su revisión. El Comité Científico comunicará a los autores que sometieron el artículo la decisión de publicación así, como las observaciones de los árbitros. Todos los artículos serán traducidos de forma confidencial hasta su publicación.

Los artículos deben de ser escritos en laTex2e tal que la redacción y el formato del artículo deben seguir las siguientes indicaciones:

- El tipo de letra es normal Roman o equivalentes.
- Los márgenes son: de los lados derecho e izquierdo 1,5cm y de arriba y abajo 2cm.
- El título debe de estar centrado y escrito con letra normal de tamaño 14pt y negritas.
- Debajo del título deben de ir los nombres completos de los autores con letra normal tamaño 10pt. Después del nombre de cada autor, deben indicarse el lugar de trabajo y el correo electrónico con letra cursiva y tamaño 10pt.
- El resumen debe escribirse en inglés y español, con letra normal tamaño 9pt. con un ancho del texto de 16,2cm. debe contener entre 50 y 150 palabras e indicar al final las palabras claves. Primero va el resumen en el idioma en que se redactó el artículo.
- El texto se escribe con letra normal tamaño 10pt. En dos columnas separadas en 0,7cm. Y debe ser dividido en secciones numeradas con números arábigos. El nombre de las secciones deben ser escritas en negritas tamaño 12pt. y centradas. Las subsecciones con letras negritas y centradas. Se recomienda que

los artículos contengan las siguientes secciones: Introducción, Conclusiones y Agradecimientos (esta última no se numera).

- Al último va la sección sin numerar designada como Apéndice: Nombre del apéndice, en caso de haber varios apéndices van en secciones designadas como Apéndice A, Apéndice B, etc.
- Las fórmulas deben ser numeradas con números arábigos entre paréntesis en la margen derecha. La referencia de las fórmulas en el texto debe de haberse colocado entre paréntesis su número correspondiente.
- Toda letra latina que se utiliza en las fórmulas debe estar escrita en cursiva.
- Las funciones seno, coseno, logaritmo natural, y otras en esta categoría, se escriben sen, cos, ln, etc.
- Las tablas y figuras se enumeran con números arábigos. En la parte superior de la tabla e inferior de la figura, se colocará: Tabla y Figura correspondiente después el número, punto con letra negrita y la leyenda con letra cursiva, todo en tamaño 10pt.
- Las citas del texto se hacen colocando el número correspondiente de la lista de referencias entre corchetes
- La lista de referencias que se citan en el artículo es con número arábigos, en el orden de citación y va al final del artículo debajo de una línea horizontal, en dos columnas separadas en 0,7cm. El tamaño de las letras es de 9pt. Por ejemplo:
  1. S. Frittelli, C. Kozameh, and E.T. Newman, J. Math. Phys. 36 (1995) 4975.
  2. V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics (Springer, Berlín, 1980).

Detalles mas completos para la preparación de los artículos se encuentran en la página web <http://fc.edu.pe/revciuni>. Los artículos serán presentados previamente en formato Portable Document Format (PDF) al e-mail: [investiga\\_fc@uni.edu.pe](mailto:investiga_fc@uni.edu.pe) para su revisión.

# Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI – REVCIUNI

Volumen 14, Número 1, enero-agosto 2011

ISSN: 1813-3894

Publicada por el Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias  
de la Universidad Nacional de Ingeniería

## CONTENIDO

- Three-Steps Procedure for the Analysis of Ecological Data: a Case Study 1 – 8  
*Sergio Camiz*
- Decaimiento del bosón exótico  $Z'^0$  en el modelo electrodébil  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  9 – 13  
*David Romero Abad y Orlando Pereyra Ravinez*
- Acople fuerte luz-materia en cavidades micropilares 14 – 18  
*Misael León Hilario*
- Dinámica efectiva para un ión atrapado en un cavidad EDC 19 – 24  
*Oscar Miculicich y Eduardo Massoni*
- El efecto túnel clásico 25 – 29  
*Holger G. Valqui*
- La Pseudo Paradoja de los Gemelos 30 – 38  
*Holger G. Valqui*
- No existen fotones vírgenes 39 – 44  
*Holger G. Valqui*
- Al rescate de la Segunda Ley de Newton 45 – 52  
*Holger G. Valqui*

# CONTENIDO

■	<b>Three-Steps Procedure for the Analysis of Ecological Data: a Case Study</b> <i>Sergio Camiz</i>	1 - 8
■	<b>Decaimiento del bosón exótico <math>Z'^0</math> en el modelo electrodébil <math>SU(3)_L \otimes U(1)_N</math></b> <i>David Romero Abad y Orlando Pereyra Ravinez</i>	9 - 13
■	<b>Acople fuerte luz-materia en cavidades micropilares</b> <i>Misael León Hilario</i>	14 - 18
■	<b>Dinámica efectiva para un ión atrapado en una cavidad EDC</b> <i>Oscar Miculicich y Eduardo Massoni</i>	19 - 24
■	<b>El efecto túnel clásico</b> <i>Holger G. Valqui</i>	25 - 29
■	<b>La Pseudo Paradoja de los Gemelos</b> <i>Holger G. Valqui</i>	30 - 38
■	<b>No existen fotones vírgenes</b> <i>Holger G. Valqui</i>	39 - 44
■	<b>Al rescate de la Segunda Ley de Newton</b> <i>Holger G. Valqui</i>	45 - 52