

Revista de la Facultad de **CIENCIAS** de la UNI **REVCUNI**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

LIMA - PERÚ

Editor: *Armando Bernui Leo*

Comité editorial:

Félix Escalante Del Águila
Manfred Horn
Holger Valqui Casas

Oficina de publicación:

Facultad de Ciencias - UNI
Av. Túpac Amaru 210 - Rímac
Teléfono: (0051) (1) 481-0824
E-mail: bernui@uni.edu.pe

Ley del Depósito Legal N° 15010199-3597

Revista de la Facultad de
CIENCIAS de la UNI
REVCUNI

Presentación

La revista de la Facultad de Ciencias de la UNI –REVCIUNI– comenzó a publicarse en junio de 1995, con el doble propósito de, por un lado presentar los trabajos de investigación realizados por los miembros de nuestra Facultad y de otro lado divulgar temas interesantes de Ciencias Naturales a la comunidad universitaria en general. El primer objetivo es considerado particularmente importante debido a la poca costumbre que tenemos los docentes de la UNI de publicar nuestros trabajos.

En estos seis años de vida de nuestra revista solamente se han podido publicar seis números, siendo el último de octubre de 1999. A pesar de este modesto resultado no perdemos la esperanza que en un futuro cercano cumplamos la meta de publicar –por lo menos– dos números por año.

Uso del software IRAF para el análisis de una imagen digital astronómica: Cúmulo estelar abierto M7

Nobar Baella Pajuelo

RESUMEN

La intención de este trabajo es ser una pequeña guía introductoria para los que estén interesados en procesar imágenes astronómicas usando el software IRAF.

Se muestran las dificultades encontradas y las posibles mejoras a realizarse.

Todo el trabajo se realizó usando el equipo que posee el Grupo Astronomía de nuestra facultad, sin el cual no hubiera sido posible esta tarea.

**Grupo Astronomía, Facultad de Ciencias, UNI.*

¿Qué pasos se siguieron para hacer esta imagen?

1. El equipo utilizado

- Telescopio Celestron de 8 pulgadas de apertura.
- Cámara CCD Electrim 1000 EDC.
- Reductor/Corrector 6.3 Celestron.

Este último accesorio fue necesario para ampliar el campo de observación del telescopio y poder así registrar la mayor cantidad de estrellas perteneciente al cúmulo.

2. Un buen cielo libre de la contaminación luminosa de las grandes ciudades, el lugar fue el Observatorio de Huayao a 3300 msnm.

¿Por qué se escogió M7?

- Ante todo porque en el momento de efectuar la imagen, éste estaba cerca de nuestro cenit y esta circunstancia favorecía nuestras observaciones.
- La oportunidad de probar la cámara CCD con un cúmulo estelar abierto con estrellas que estarían en el límite de sensibilidad del telescopio + CCD.

1. El paso siguiente es escoger el tiempo de integración (tiempo de exposición de la CCD al objeto). Este tiempo se estimó para probar la sensibilidad de la cámara en: 4000 ms. (Es decir cuatro segundos).

2. Se hicieron entonces las siguientes tomas:

- 01 imagen del cúmulo M7. (Telescopio abierto)
- 05 imágenes BIAS. (Telescopio cerrado)
- 05 imágenes DARK. (Telescopio cerrado)

En total once imágenes, todas con tiempo de integración igual a 4000 ms. con excepción de las imágenes BIAS con el tiempo de exposición mínimo: 1ms.

Esta parte es lo que se llama trabajo de campo. Lo siguiente es el procesamiento de los datos mediante el IRAF (Image Reduction Access Facility).

Una nota importante

Como se puede notar, no se realizó en ningún momento tomas de Flat Field, esto como se verá más adelante tendrá sus consecuencias.

¿Cómo se usó el IRAF para procesar las imágenes?

1. Como el IRAF reconoce sólo imágenes en formato FITS, es necesario convertir los archivos imágenes a este formato. Esto se realizó mediante el programa incluido con la cámara CCD. Se debe mencionar que esta conversión implica cierta pérdida de información en la imagen original. Esto se puede eliminar trabajando con cámaras CCD que graben en forma directa sus imágenes en formato FITS.

2. El siguiente paso es obtener una sola imagen BIAS y una sola imagen DARK. Para esto hacemos un promedio de cada grupo de cinco imágenes.

Es decir, sumamos las cinco imágenes BIAS y dividimos entre cinco, obteniendo una imagen final que sería nuestra imagen BIAS promedio: Bias_prom. En forma similar sumamos las cinco imágenes DARK y el resultado lo dividimos entre cinco, obteniendo una imagen final que sería nuestra imagen DARK promedio: Dark_prom.

Para esto se usó principalmente la tarea IRAF:

IMSUM

Uno de los parámetros que necesariamente debe estar activado para esta tarea es el de:

OPTION = AVERAGE

Una de las formas de activar este parámetro es escribiendo:

EPAR IMSUM

Y con el cursor modificar el parámetro: Option al valor: Average, y a continuación presionar las teclas: CTRL + D para salvar el cambio de parámetro.

3. Se construye así la imagen final. A la imagen del cúmulo debemos restarle la imagen BIAS promedio y también la imagen DARK promedio. Es decir:

Imagen final = Imagen original - Bias_prom - Dark_prom.

Esto se puede hacer mediante la tarea IRAF:

IMARITH

Si la imagen original se llama M7, las instrucciones IRAF a seguir serían:

```
IMARITH M7 - Bias _ prom m7_cor_bias.
```

```
IMARITH m7_cor_bias - Dark_prom m7_cor_dark.
```

Así siguiendo los pasos mencionados el nombre del archivo (imagen) final ya procesado sería el de: m7_cor_dark (Ver Fig. 1)

m7_cor_dark.imh-

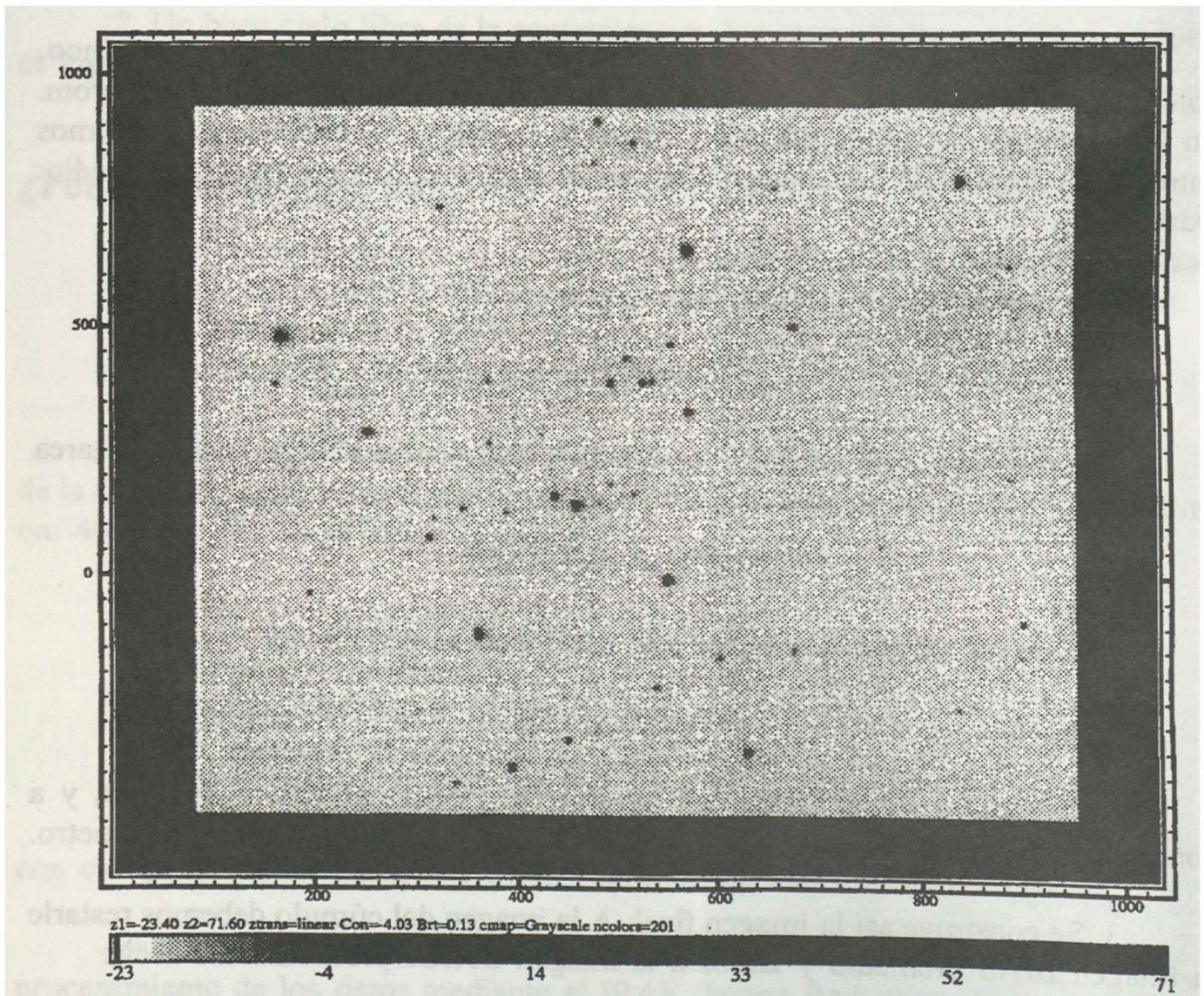


Fig. 1. Imagen final procesada del cúmulo M7.

Se puede observar que la extensión del nombre del archivo usada por el IRAF es: IMH, en realidad se está haciendo referencia a la cabecera (header) de la imagen.

Evaluación de la calidad de la imagen

Como una primera aproximación para evaluar la calidad de nuestra imagen usando el IRAF, se usó la tarea: IMEXAMINE (la cual incluye varias tareas).

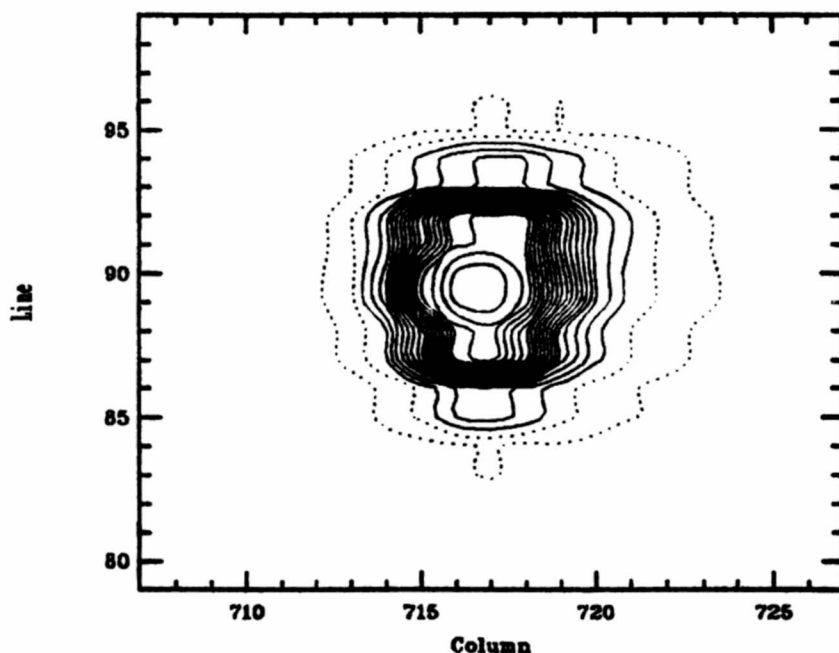
En especial se usaron dos tareas (dentro del imexamine):

- a) CONTOUR PLOT (Tecla: "e") Gráfico de contornos.
- b) RADIAL PROFILE PLOT (Tecla: "r") Perfil radial.

A) GRÁFICO DE CONTORNOS

En una buena imagen se espera que el gráfico de contornos sean circunferencias concéntricas alrededor de la estrella. Lo que hace la tarea es interpolar los valores de los pixels de la imagen que posean el mismo valor, todo esto en torno a la estrella. En realidad se hace alrededor del centroide de la estrella.

Como ejemplo se utilizó la estrella etiquetada como número doce: N12 (ver Tabla 1 y también Figura 3) cuyo centroide tiene las coordenadas: (716.81, 89.83) obteniéndose como resultado la Fig. 2.



NOAO/IRAF V2.11EXPORT nobarin@astronomia Wed 16:48:17 20-Dec-2000
m7_cor_dark.imh: Contoured from -21.4. to 167.6., interval = 9.

Fig. 2. Gráfica de contornos para la estrella N12.

m7_cor_dark.imh-

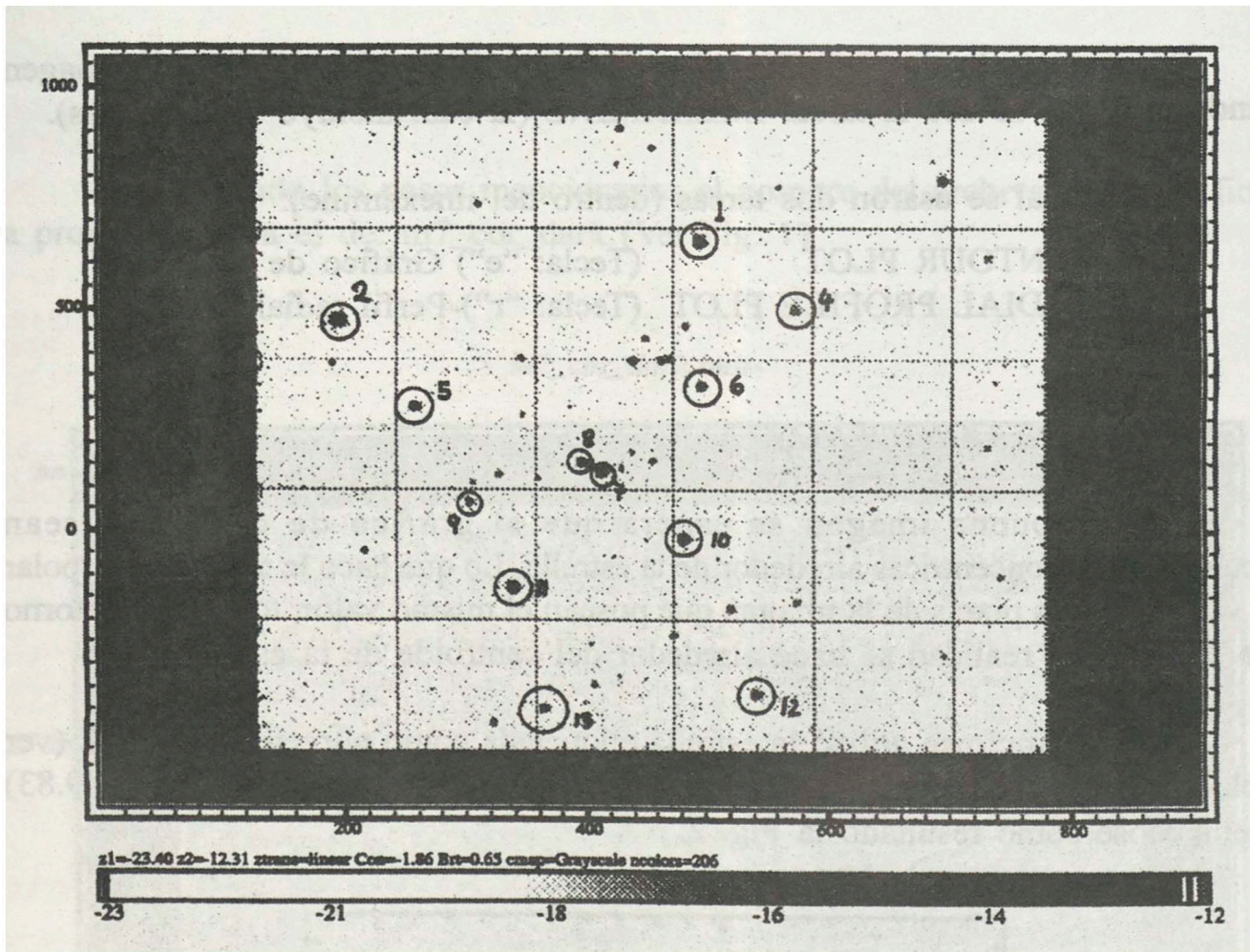


Fig. 3. Imagen procesada de M7 con estrellas analizadas numeradas.

Como se puede observar, no se obtienen circunferencias concéntricas, al menos las primeras dos parecen serlo (desde el interior), pero las que siguen ya no lo son. El resultado es una imagen alargada de la estrella.

Las posibles causas

- Imágenes fuera de foco.
- Como el tiempo de exposición fue de 4000 ms (cuatro segundos), el equipo fue muy sensible a incrementar cualquier tipo de defecto instrumental: entre ellos el error periódico de seguimiento que tienen todos los motores a pasos que se usan en los telescopios, y a una posible desalineación, necesaria para un buen seguimiento.
- Viento lateral que desestabiliza el telescopio.

- Otro factor a tomar en cuenta es el hecho de que hubo una conversión de software (mediante el programa de la cámara CCD) para cambiar el formato original de la imagen a un formato (imagen FIT) que pueda manejar el IRAF.

En todo caso el resultado final fue el de una mala calidad en nuestra imagen.

Number	Catalog	Cat ID	RA(2000)	DEC(2000)	V.MAG.	SPECTRAL TYPE
1	hd	HD 162586	17 53 21.74	-34 43 27.1	6.20	B9
2	hd	HD 162587	17 53 22.23	-34 53 27.1	5.68	K0
3	hd	HD 162588	17 53 22.63	-35 00 27.0		
4	hd	HD 162630	17 53 33.59	-34 41 25.4	8.70	A0
5	hd	HD 162631	17 53 34.20	-34 52 25.4	8.70	A0
6	hd	HD 162656	17 53 39.78	-34 44 24.5	10.70	A2
7	hd	HD 162678	17 53 45.82	-34 46 23.6	6.38	A0
8	hd	HD 162679	17 53 45.96	-34 47 23.6	7.28	A
9	hd	HD 162680	17 53 46.15	-34 50 23.6	7.88	A0
10	hd	HD 162724	17 53 57.77	-34 44 21.9	6.08	B9
11	hd	HD 162725	17 53 58.02	-34 49 21.9	6.45	A0
12	hd	HD 162780	17 54 15.74	-34 43 19.3	6.88	A0
13	hd	HD 162781	17 54 16.01	-34 49 19.2	7.63	A0
14	hd	HD 162804	17 54 22.20	-34 52 18.4		
15	hd	HD 162818	17 54 27.56	-34 40 17.5		
16	hd	HD 162858	17 54 40.18	-34 51 15.7		
17	hd	HD 162889	17 54 51.81	-34 45 14.0		
18	hd	HD 162890	17 54 52.15	-34 50 14.0		

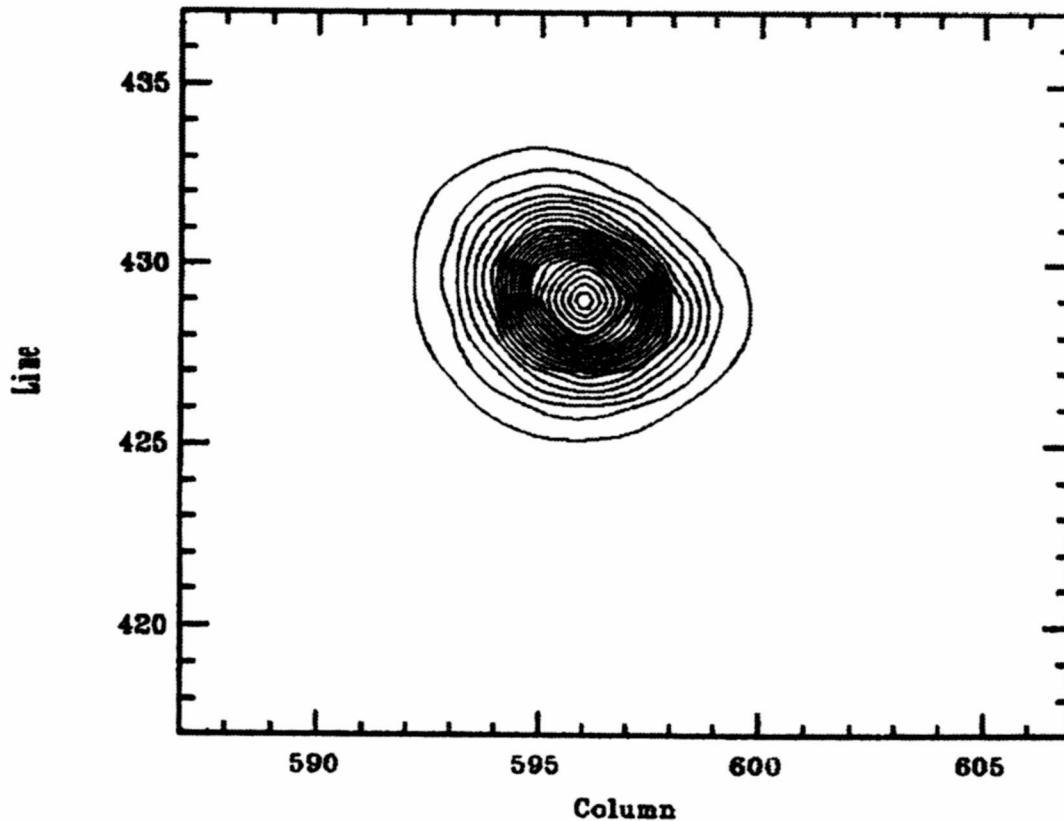
Tabla 1. *Estrellas analizadas de M7 obtenidas del Catálogo Henry Draper.*

A modo de comparación se muestra el gráfico de contornos de una estrella usando un telescopio y equipos diferentes (Fig. 4). El telescopio fue un refractor Takahashi de 15 cm de apertura y la cámara CCD una SBIG de 16 bits. (Colaboración de Julio C. Tello I.G.P)

Como se puede observar la Fig. 4 supera en calidad a la Fig. 2.

B) PERFIL RADIAL

La idea de un perfil radial es que si nos ponemos en el centroide de la estrella tenemos una lectura máxima, y a medida que nos alejamos de él y hacemos lecturas



*NOAO/IRAF V2.11EXPORT nobarin@astronomia Wed 15:56:28 20-Dec-2000 omega.fit:
Contoured from 163. to 48163., interval = 2000.
OBJECT*

Fig. 4. Gráfico de contornos.

para cada radio alrededor de la estrella, estas lecturas irán disminuyendo en forma aproximada a una gaussiana. Lo que hace esta tarea es graficar los valores de los pixels en función del radio y ajustar la mejor gaussiana a estas medidas.

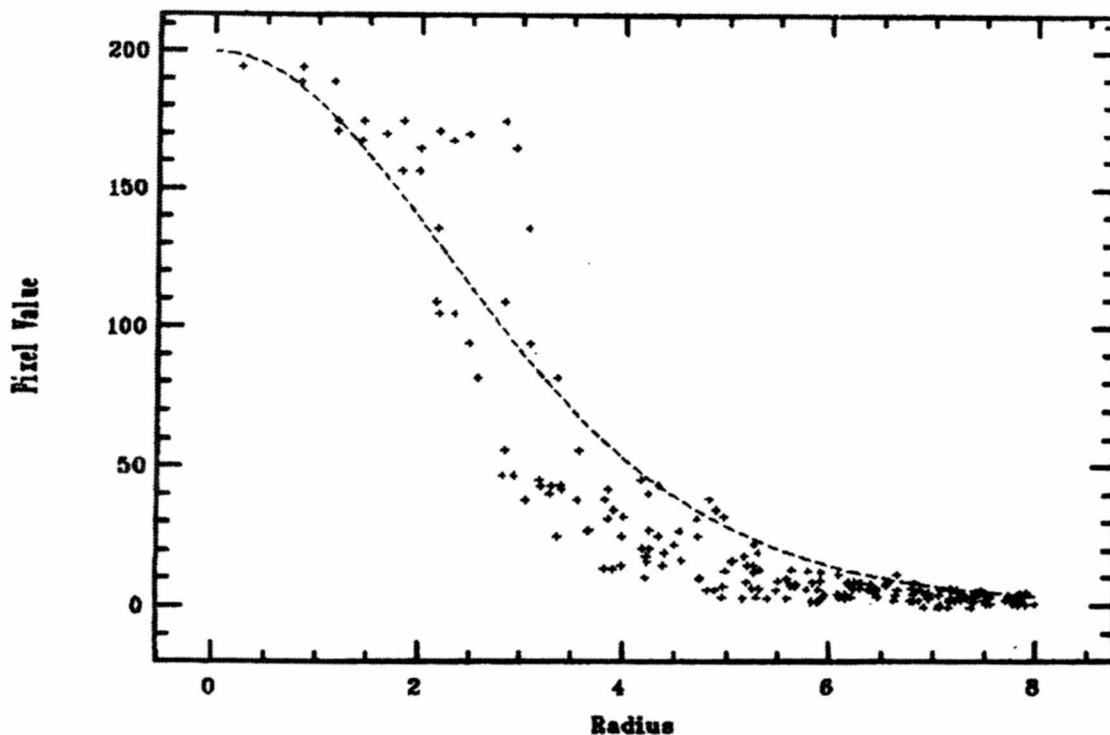
La curva de ajuste se muestra en líneas entrecortadas (Ver Fig. 5), y los datos medidos se muestran con cruces.

El eje X representa la distancia radial medida en pixels a partir del centroide de la estrella.

El eje Y nos muestra el valor de las lecturas para cada radio alrededor del centroide de la estrella.

Nótese que para “r” igual a cero hay un máximo, y a medida que “r” crece la intensidad baja rápidamente.

Se dice que una imagen tiene un buen perfil radial (por lo tanto es de buena calidad) cuando los valores medidos (cruces) coinciden con la gaussiana trazada.



*NOAO/IRAF V2.11EXPORT nobarin@astronomia Wed 19:05:58 20-Dec-2000
m7_cor_dark.imh: Radial profile at 716.81 89.83*

Fig. 5. Perfil radial para la estrella analizada en M7.

En nuestro caso para la estrella N° 12: N12 se obtuvo la Fig. 5.

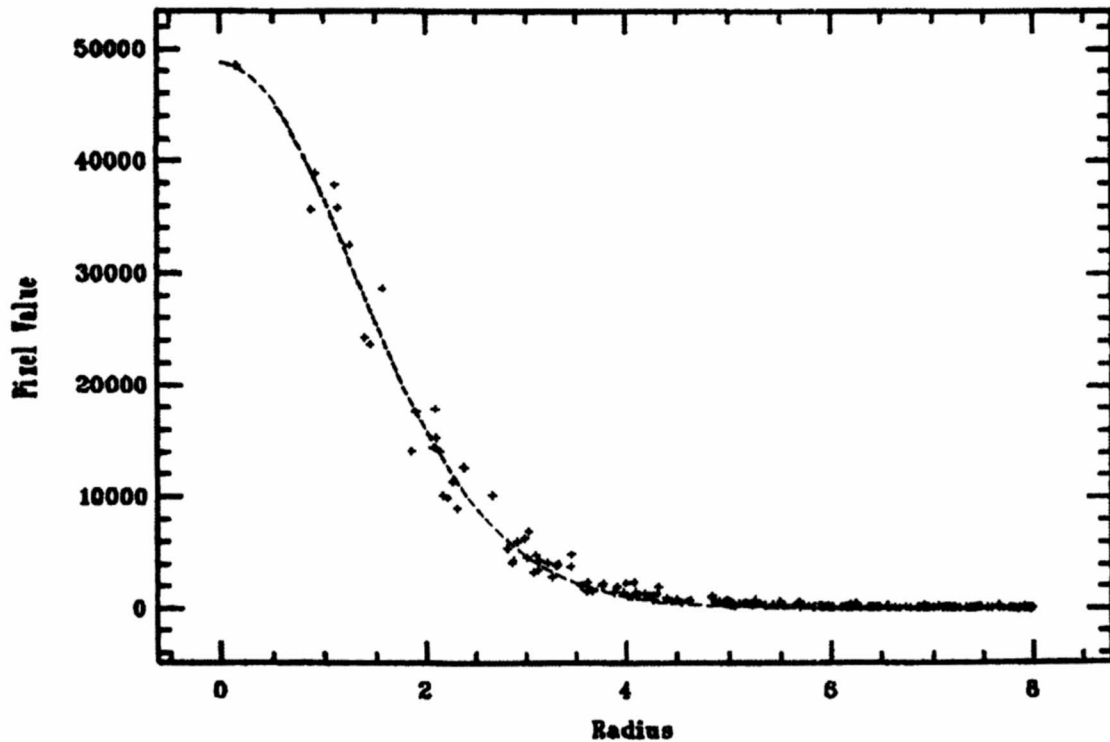
Como puede observarse los valores medidos (cruces) se alejan mucho de la gaussiana trazada, incluso se observa un aumento considerable en las lecturas para $r = 3$ pixels.

Esto nos indica nuevamente que la imagen no es de buena calidad.

Como posibles causas de esto, mencionaríamos lo que se dijo en el punto anterior: tiempo de exposición muy alto como para hacer sensibles errores de seguimiento y alineación, alteración de la imagen original al convertirla al formato IRAF: imagen FIT.

A modo de comparación se muestra también la figura del perfil radial de una estrella usando un telescopio y equipos diferentes (Fig. 6).

En este caso se puede apreciar que los valores medidos se acercan más a la gaussiana trazada. Por lo tanto esta última figura (Fig. 6) nos indica que la imagen es de buena calidad.



*NOAO/IRAF V2.11EXPORT nobarin@astronomia Wed 20:05:21 20-Dec-2000 omega.fit:
Radial profile at 595.87 429.10
OBJECT*

Fig. 6. Perfil radial de otra estrella con otro equipo instrumental.

En conclusión

Los resultados del gráfico de contornos y el de perfil radial nos dicen que nuestras imágenes no son de buena calidad.

Se sugiere

- Extremar los cuidados al hacer la focalización de una imagen.
- Experimentar con una cámara CCD que ofreciera sus imágenes en formato FIT, para no tener que manipularla por software y así descartar esta interferencia como causa de la baja calidad de las imágenes.

- Otra sugerencia es la de diseñar una montura más robusta para el telescopio Celestron y de esta manera eliminar las vibraciones que influirían en la calidad de la imagen.

El ancho de la curva medido a la mitad de la intensidad máxima (“b”) nos da también un parámetro para evaluar la calidad de nuestra imagen, en los dos casos los valores aproximados son:

Fig. 5 b = 3 pixels.

Fig. 6 b = 1,5 pixels.

Number	Catalog	Cat ID	V.MAG.	SPECTRAL TYPE	FLUJO (IRAF)
1	hd	HD 162586	6,20	B9	11972
2	hd	HD 162587	5,68	K0	18470
4	hd	HD 162630	8,70	A0	4600
5	hd	HD 162631	8,70	A0	5963
6	hd	HD 162656	10,70	A2	2958
7	hd	HD 162678	6,38	A0	9748
8	hd	HD 162679	7,28	A	6277
9	hd	HD 162680	7,88	A0	4434
10	hd	HD 162724	6,08	B9	11897
11	hd	HD 162725	6,45	A0	9618
12	hd	HD 162780	6,88	A0	6736
13	hd	HD 162781	7,63	A0	4990

Tabla 2. Estrellas más brillantes en M7.

Para el cálculo del flujo (Columna: Flujo (IRAF)) se usó el comando IMEXAMINE del Iraf sobre la imagen final del cúmulo.

Se escogieron de la tabla 1 las doce estrellas más brillantes, las cuales se muestran en la tabla 2.

Las más brillantes según catálogo HD y menciones CCD + IRAF

Catálogo HG		CCD + IRAF	
Nro.	V-Mag	Nro.	Flujo
2	5,68	2	18470
10	6,08	1	11972
1	6,20	10	11897
7	6,38	7	9748
11	6,45	11	9618
12	6,88	12	6736
8	7,28	8	6277
13	7,63	5	5963
9	7,88	13	4990
4	8,70	4	4600
5	8,70	9	4434
6	10,70	6	2958

Tabla 3. Comparación de flujos y magnitudes para estrellas de M7.

En la tabla 3 estamos comparando cuál estrella es más brillante según el catálogo HD (Henry Draper) y según las mediciones tomadas.

Se observa lo siguiente

1. En las dos listas la más brillante es N2 y la menos brillante N6.
2. Existe un problema con N1 y N10. En el catálogo N10 es la más brillante, pero según las mediciones N1 es la más brillante. ¿Cuál es la causa?
 - Un análisis de los perfiles radiales de las estrellas en la tabla 3 mostró que: N2, N10, N1, N7 y N11 han saturado el número de cuentas que registra la CCD.

Por lo tanto no se usarán éstas para extraer conclusiones.
3. No coinciden los datos (orden de brillo) para las estrellas N13, N9, N4, N5 con las mediciones realizadas. Se puede observar según el cuadro, de mayor a menor brillo:

Catálogo HD : $N13 > N9 > N4 = N5$
 CCD + IRAF: $N5 > N13 > N4 > N9$

¿Por qué esta diferencia?

- El no haber efectuado un FLAT FIELD es una posible causa. Una vez más se nota la importancia de efectuar este tipo de corrección para descartar su influencia en las medidas.
- ¿Se podría culpar esto al no empleo de un filtro? Todo indica que no, ya que las cuatro estrellas son del mismo tipo espectral: A0, por lo tanto se comportan de la misma manera para el sensor CCD.
- ¿Y la sensibilidad al rojo del CCD?: Estas cuatro estrellas (N13, N9, N4, N5) son todas del tipo espectral A0 (no son estrellas rojizas) lo cual descartaría la influencia de la CCD (sensibilidad al rojo) en la aparición de estas diferencias.
- Es probable que de las cuatro estrellas mencionadas algunas de ellas sean estrellas variables, lo cual explicaría las diferencias en el orden de brillo en el momento de ser medidas. En todo caso falta investigar en los catálogos de estrellas variables para descartar totalmente este punto.

Conclusiones

1. La estrella N6 (la menos brillante de las seleccionadas = +10,70 mag. visible) no es la más débil en el campo de estrellas registradas (ver cuadro M7), existen otras menos brillantes. Esto indica por lo tanto que la cámara CCD puede registrar estrellas (según este trabajo) de hasta magnitud +10 (magnitud en el espectro visible) con el equipo usado: Celestron SC 8 pulgadas + reductor corrector Celestron 6.3.
2. La ausencia del flat field provocó que no se realizaran conclusiones definitivas. De aquí que se recomienda la necesidad obligatoria de este tipo de corrección.
3. Fue muy importante tener acceso a bases de datos con registros (en varios catálogos) de las estrellas que se están estudiando ya que esto permite comparar y extraer conclusiones de manera más consistente. Se tuvo acceso a esta información mediante el uso de páginas autorizadas en Internet.
4. Estas conclusiones no son definitivas ya que para esto se tendrían que usar filtros que seleccionan un determinado ancho de banda y realizar así un estudio final. Recordemos que todas las mediciones realizadas en este informe fueron realizadas sin filtros. Por lo tanto se recomienda efectuar (para estudiar las posibilidades de esta cámara) nuevas medidas con los filtros adecuados.

Términos usados en este trabajo

1. Sensor CCD

Son las iniciales de Charge Coupled Device (Dispositivo de carga acoplada). El cual consiste en un arreglo de sensores que convierten la luz incidente en descarga de electrones, el cual se convierte en una señal digital que será convertida en un archivo de imagen.

2. Corrección de BIAS

Las imágenes BIAS se hacen con el telescopio cerrado y con el tiempo de exposición al mínimo para registrar así los errores en la transferencia de datos propia de la cámara.

3. Corrección de DARK

Las imágenes DARK se hacen también con el telescopio cerrado y con el tiempo de exposición igual al de la toma que se desea corregir.

4. Corrección de FLAT FIELD

Esta imagen se hace tomando una fuente de luz uniforme, para así registrar la diferente sensibilidad que tiene la superficie del sensor CCD. En realidad el chip no es completamente uniforme en su sensibilidad, existen zonas que son más sensibles que otras.

5. Centroide una estrella

Son las coordenadas del “centro de masa” de la imagen de una estrella. El cálculo es en forma similar al centro de masa sólo que en vez de la “masa” se escribe el valor del píxel. La “masa total” sería la suma de todos los valores de píxels calculados.

Agradecimientos

Cabe mencionar la ayuda desinteresada de Antonio Pereyra, especialmente en la obtención de los catálogos HD (Henry Draper) pertenecientes al cúmulo M7. Y por supuesto a nuestro asesor Armando Bernui por confiar en este pequeño trabajo.

La forma del universo

Armando Bernui Leo*

RESUMEN

La observación de un cielo nocturno donde la materia luminosa parece estar uniformemente distribuida en la bóveda celeste sugirió durante mucho tiempo que las galaxias se encontraban homogéneamente esparcidas en el universo. Recientemente, con mejores tecnologías para escudriñar el cielo, observamos que las galaxias tienden a juntarse para formar aglomerados y super-aglomerados de galaxias y estos a su vez parecen establecer inmensas estructuras (tipo fibra y tipo pared) que dejan grandes vacíos en el espacio (figura 1). Es decir, a gran escala la materia parece distribuirse de manera no homogénea.

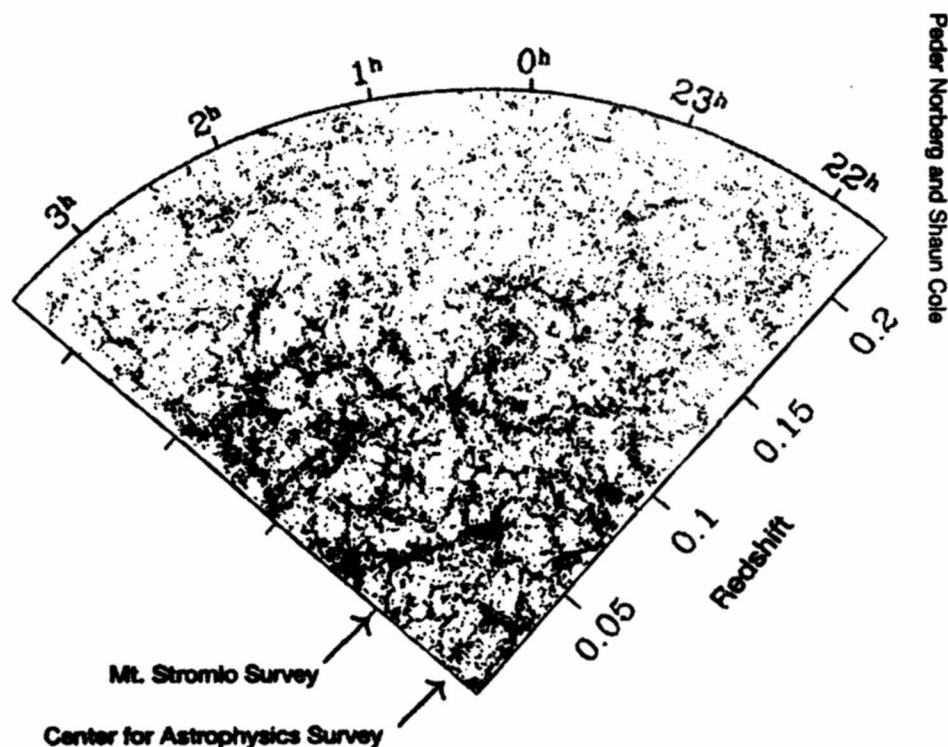
Aunque tal distribución de materia aún no fue comprendida, el papel desempeñado por las propiedades globales (como por ejemplo la forma) del universo en el panorama observado debe haber sido importante. A inicios del siglo XXI, ¿qué sabemos sobre estas propiedades del universo?

Los modelos cosmológicos: ¿Universo finito o universo infinito?

LAS COSMOLOGÍAS ANTIGUAS

Los antiguos griegos fueron los primeros en usar la observación (obviamente limitada por la inexistencia del telescopio) y la lógica del sentido común en su manera

*bernui@uni.edu.pe Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima-Perú.



Slice of the 2dF survey, centered on the south galactic pole. Arrows indicate the depth of two previous galaxy surveys.

Figura 1.

de describir el universo, si bien sin desprenderse del carácter mitológico de los cuerpos celestes. En su *modelo cosmológico* los griegos intentaron explicar como funcionaba el universo, y porque lo hacía de la manera observada y no de otra. También hipotizaron sobre su contenido y más interesante aún, reflexionaron sobre cuestiones como la forma y el tamaño del universo.

El universo griego se dividía en 7 esferas, la tierra ocupaba el *centro*, la luna, el sol y los cinco planetas conocidos las esferas intermedias, y las estrellas- eternas e inmóviles-la última. De este modo fue fácil para ellos pensar que el tamaño del universo era infinito: llegaba hasta la “esfera¹ de las estrellas fijas”, la cual representaba *la frontera* del universo (es decir era la frontera del espacio 3-dimensional en donde estamos localizados nosotros y todo lo que observamos). Nótese que para los pensadores antiguos los conceptos de *frontera* y *centro* estaban íntimamente relacionados.

¹ Una esfera es una superficie 2-dimensional que denotamos por S^2 cuyo ‘volumen’ 2-dimensional (es decir su área) es igual a $4\pi R^2$, siendo R el valor obteniendo al dividir su perímetro máximo entre 2π . Una S^2 es de tamaño finito (i.e. área finita) y tiene la propiedad de no tener borde; el espacio 3-dimensional S^3 , conocido como la tri-esfera, posee estas mismas propiedades: es de volumen finito y carece de borde o frontera.

Desde la antigua Grecia hasta los escolásticos de la edad media la existencia de una *frontera* del universo fue aceptada como evidente (justamente porque la tierra se ubicaba en el centro del universo). La idea de una frontera era también bienvenida por la jerarquía de la Iglesia porque ayudaba a entender la delimitación entre la tierra -lugar donde ocurren las imperfecciones, los hechos mundanos- y los cielos -i.e. el paraíso, lugar de la perfección-. Nótese la confusión existente en el idioma español por el hecho de traducir las palabras inglesas *sky* y *heaven* con la misma palabra: *cielo* que deriva del latín *celestium*.

Sin embargo las cosmogonias evolucionaron y se llegó a la conclusión de que era inaceptable suponer que el universo tuviese *frontera*, *independientemente de si era finito o infinito*. Veamos porque:

- Si el tamaño del universo fuese infinito, es claro que él no tendría frontera, pues si tuviera sería de tamaño finito.
- En cambio si el universo tuviese tamaño finito existe un argumento simple e interesante para concluir que él no tiene *frontera*: como sabemos una frontera representa la separación entre dos regiones (la interior y la exterior), luego si el universo tuviese una frontera la existencia de ésta implica que hay *algo* detrás de ella, así el universo estaría formado por lo que hay en el interior más lo que hay en el exterior por lo tanto ya no sería la *frontera del universo* porque no estaría abarcando todo el contenido (i.e. interior más exterior) del universo.

LAS COSMOLOGÍAS MEDIOEVALES

Los modelos cosmológicos del medievo se basaron en el Principio Copernicano, según el cual “la Tierra no ocupa ningún lugar privilegiado en el universo”, y donde la distribución de estrellas es “homogénea, isotrópica² y en eterno equilibrio”. Esto implicaba que el universo estaba constituido por el espacio Euclidiano \mathcal{K}^3 (el cual es un espacio tri-dimensional con geometría plana, sin frontera, de extensión infinita y -globalmente- homogéneo e isotrópico) y por estrellas esparcidas en dicho espacio de modo tal que mantengan al universo eternamente en el equilibrio observado. La diferencia entre los modelos propuestos estaba en la cantidad y la forma como se distribuían los cuerpos celestes.

² Atribuimos la propiedad de homogeneidad cuando observamos lo mismo desde cualquier punto al cual nos trasladamos; por ejemplo un naufrago en alta mar diría con razón que el mar es homogéneo porque él siempre ve lo mismo, a pesar de estarse moviendo continuamente -respecto a tierra firme- transportado por los vientos y por corrientes submarinas; isotropía es la propiedad que resulta de observar lo mismo independiente de la dirección en la cual miramos.

Así, en 1691 surgió el modelo cosmológico de Isaac Newton (1642-1727). Para Newton, el universo era un espacio tri-dimensional de extensión ilimitada con las estrellas en reposo y en perfecto equilibrio por interacción gravitacional. El espacio apropiado era \mathcal{R}^3 por que careciendo de frontera y siendo ilimitado entonces “el centro estaba en cualquier parte y desde todo punto se observa lo mismo en todas direcciones”. Newton sabía que adoptar un modelo de universo con un centro (de masa) tenía el serio problema de su estabilidad ya que por atracción gravitacional, antes o después, el sistema debía de colapsar al centro de masa. Por esto su modelo consistía de un sistema de cuerpos celestes homogéneamente distribuidos en una región finita del espacio más un número limitado de estrellas “convenientemente” distribuidas alrededor del primer sistema de modo que se equilibren las fuerzas gravitacionales entre ambos sistemas y se mantenga la situación de reposo observada en el cosmos desde tiempos inmemoriales. De esta manera él evitaba asumir una distribución uniforme de masas, es decir una distribución con densidad no-nula, pues en tal caso -dada la extensión ilimitada de \mathcal{R}^3 - la cantidad de masa en el universo es infinita.

Para Newton el espacio y el tiempo eran entidades absolutas cuya existencia era independiente de los objetos materiales ubicados en él. Además de los cuerpos celestes visibles representados por las estrellas similares a nuestro Sol, él imaginaba que el universo estaba lleno de ‘aether’, una sustancia constituida de partículas extremadamente livianas y veloces, sistema que le servía como sistema de referencia absoluto (i.e. sistema de referencia inercial).

El modelo cosmológico de G.W. Leibnitz (1646-1716) suponía al universo como un espacio Euclidiano donde las estrellas se encontraban estática y uniformemente distribuidas por todo el espacio. Leibnitz asumía un espacio de extensión infinita por que creía que solo tal espacio carece de frontera y por que de esta manera -pensaba él- una distribución uniforme de masa está en equilibrio y consigue permanecer eternamente en reposo³.

El modelo cosmológico de Newton no funciona por que una cantidad de masa que rodee a un volumen esférico finito de materia no afectará a las partículas en la superficie del volumen, las cuales serán atraídas al centro de masa resultando en un modelo inestable⁴.

El siguiente razonamiento (paradójico) vino a complicarle la existencia a los modelos cosmológicos como el de Leibnitz con una distribución uniforme de estrellas (i.e. conteniendo una cantidad *infinita* de masa). Un universo Euclidean de tamaño

³ Hoy día sabemos que ambas premisas son falsas: (i) existen los espacios múltiplemente conexos que son de volumen finito y carecen de frontera, (ii) una distribución uniforme de masa en un espacio de extensión infinita tiene masa infinita, luego es inestable.

⁴ El Teorema de Birkhoff no era conocido por Newton: “Si tomamos un cierto volumen finito del espacio conteniendo materia, entonces la aceleración de una partícula de prueba localizada en la superficie que encierra el volumen depende solamente de la masa interior a la superficie”.

infinito, eterno y con una distribución uniforme de estrellas (es decir, un número constante de estrellas por unidad de volumen) contiene entonces un número infinito de ellas. Aún cuando la luminosidad de cada una de ellas fuese bien pequeña, el hecho de haber tantas estrellas contribuiría para iluminar suficientemente el cielo nocturno para que aparezca tan claro como un día soleado. Y a pesar de esto el cielo nocturno se ve oscuro. Esta contradictoria situación parece haber sido observada primero por Kepler (1610), luego por Halley (1720) y J.P.L. de Cheseaux (1744), pero fue Olbers quien la popularizó en 1823 (por esto conocida como la 'Paradoja de Olbers').

Calculemos la luminosidad de una corteza esférica de radio r y espesor dr asumiendo que vivimos en un universo Euclideo (es decir de tamaño infinito) y eterno, homogéneamente lleno de estrellas puntuales todas con la misma luminosidad en promedio. Si r es la distancia de la Tierra a la corteza y dado que el volumen de la corteza crece como r^2 y que la luminosidad aparente de una estrella decrece como $1/r^2$ entonces cada corteza nos enviará la misma cantidad de luz. Pero como el universo es de tamaño infinito entonces hay un número infinito de cortezas, así la potencia integrada recibida sobre la tierra sería infinita. En realidad lo que el cálculo realmente indica es que en cualquier dirección en la que miremos acabaríamos viendo la superficie de una estrella, así el cielo aparecería uniformemente brillante como, por ejemplo, la superficie del Sol. Y sin embargo sabemos que las noches son oscuras. Si se considera que las estrellas no son puntuales se encuentra un resultado aún más paradójico [11].

Es útil mencionar aquí que todos los modelos cosmológicos antiguos y medioevales consideraban el universo como eterno o quasi-eterno (es decir de origen extremadamente remoto).

LAS COSMOLOGÍAS MODERNAS

Una de las ideas modernas más difíciles de asimilar para el ser humano es la de que nuestro planeta Tierra no ocupa ningún lugar privilegiado en el universo. En otras palabras, un observador ubicado en cualquier otro lugar del universo observa esencialmente la misma distribución de materia luminosa que nosotros. Este enunciado -que no puede ser verificado por nuestra imposibilidad de tener información obtenida desde otros puntos del espacio- se conoce como el *Principio Cosmológico*⁵.

Esta forma de entender el universo, que puede parecer obvia para el hombre moderno, demoró más de 3000 años en cimentarse. Durante este largo proceso el Principio Cosmológico tropezó siempre con dos argumentos de peso:

⁵ Este principio equivale a suponer que el espacio es globalmente homogéneo e isotrópico.

- primero, ésta es una idea que va en contra de la intuición pues si lo observado es que planetas y estrellas giren alrededor nuestro el sentido común dice que estamos en el **centro** (de giro), mientras tanto el principio afirma que el espacio -siendo homogéneo e isotrópico- no posee lugares especiales como por ejemplo un centro, y
- segundo, porque nos baja del pedestal de privilegio en que nos colocaron las cosmogonias geocéntricas, fuertemente apoyadas por las diferentes creencias religiosas.

Luego surgió el modelo estacionario, es decir un universo euclideo eterno e inmutable (en inglés *steady state model*), el cual originariamente asumía que la densidad de la materia permanecía constante en el tiempo y que no había colapso porque toda la materia se atraía mutuamente, y no habría ningún lugar especial para tal colapso. Luego que la recesión de las galaxias fuera descubierta por E.K. Hubble en 1928, este modelo tuvo que ser modificado. Aunque los datos sólo indicaban que las galaxias observadas se estaban alejando de nosotros, la aplicación del Principio Cosmológico nos dice que en realidad todas las galaxias se alejan continuamente unas respecto de otras y que mientras más distante se encuentran mayor es su velocidad de alejamiento. Este fenómeno fue atribuido al hecho que es el espacio el que se está expandiendo provocando la recesión observada [1].

Así el modelo *steady state* no tardó en adecuarse para incorporar este fenómeno; sin embargo como la característica fundamental del modelo es que el universo siempre aparece como si fuese inmutable, al incluir la hipótesis de la expansión del espacio el modelo tuvo que postular la creación espontánea de materia de modo de mantener constante en el universo la densidad de materia luminosa.

Después del descubrimiento de Hubble un nuevo modelo cosmológico salió a competir con el “parchado” modelo del estado estacionario⁶. La interpretación de que el universo está en continua expansión implica, yendo hacia atrás en el tiempo, que hubo un momento en que toda la materia y la energía contenida en el universo estuvo concentrada en una región muy pequeña del espacio. Este inicio del universo a partir de una región infinitesimal del espacio donde la densidad $\rho \rightarrow \infty$ y la temperatura $T \rightarrow \infty$ se conoce como la Gran Explosión (en inglés *Big Bang*)⁷.

⁶ Para adaptarse a las observaciones se tuvo que asumir la creación espontánea de materia: Aumenta el volumen del espacio pero también la masa luego la densidad se mantiene constante y así el universo aparece como si nada cambiara: Eterno e inmutable.

⁷ Por tener estas características físicas, denominamos a esta región del espacio-tiempo como una singularidad.

A finales de la década de 1920 ya se sabía que la solución correcta a la ‘Paradoja de Olbers’ implicaba (simultáneamente) que el universo:

- (a) está en continua expansión, y
- (b) tiene una edad finita.

A pesar de esto el modelo *steady state* se resistía a desaparecer y en efecto consiguió sobrevivir hasta 1964 año en que se descubrió la *Radiación Cósmica de Fondo*. Esta radiación electromagnética de microondas, remanente de los primeros instantes del universo cuando materia y radiación se desacoplaron, había sido predicha por el modelo del Big Bang, y por añadidura no tenía cabida en el modelo del estado estacionario.

De la teoría del Big Bang se deduce que nuestro universo fue de tamaño finito en el pasado y -aunque bastante grande actualmente- sigue siendo finito. Así empezaron a estudiarse modelos cosmológicos donde el universo estuviese bien representado por un espacio tri-dimensional (brevemente *tri-espacio*) con las siguientes características básicas: (i) de volumen finito, y (ii) sin frontera.

El pionero en considerar este tipo de tri-espacios en cosmología fue A. Einstein en 1917. Es claro que él aún no sabía que el universo era finito, lo que ocurrió fue que él estaba buscando un tri-espacio con las características antes mencionadas para resolver los problemas creados por los modelos cosmológicos de Leibnitz y Newton. El tri-espacio considerado por Einstein fue la tri-esfera S^3 que es un espacio tridimensional de volumen finito, sin frontera y con curvatura (constante) positiva (por esto se dice que él está dotado de geometría esférica).

Cosmología matemática

Cosmología es el estudio de nuestro universo como un *todo*. Comprende su *contenido* (radiación y materia -luminosa y no luminosa-), su *forma* (plana, esférica, etc.), su *tamaño* (finito o infinito) y su posible *evolución* (¿tuvo un inicio o siempre fue así?).

Cosmología matemática se refiere al estudio de las propiedades matemáticas de los espacios que son usados al construir un modelo cosmológico. La palabra espacio se refiere en general a los espacios-tiempo M_4 de cuatro dimensiones. Usando el principio de Weyl podemos definir un *tiempo cósmico* $t \in R$, de este modo considerar que el espacio-tipo M_4 tiene la forma: $M_4 = R \times M_3$, donde M_3 es el tri-espacio que solemos llamar *universo*. Así, usando este principio, nos podemos

concentrar sólo en las propiedades de los tri-espacios M_3 al estudiar sistemas físicos de naturaleza cosmológica.

Los conceptos más importantes de M_3 que debemos tomar en cuenta son [2,3]:

GEOMETRÍA VS. TOPOLOGÍA

La topología se refiere a las propiedades que permanecen invariables bajo deformaciones continuas (e.g. orientabilidad, conectividad, compacidad, separabilidad, etc.). Sacar puntos o pedazos del espacio en cuestión no es una deformación continua.

La geometría considera solo aquellas propiedades que cambian bajo deformaciones continuas (e.g. distancias, ángulos, áreas, curvatura, etc.). Así por ejemplo, las superficies de un huevo y de una pelota de ping-pong son geométricamente diferentes, sin embargo ambas son topológicamente iguales. Así mismo la superficie de una cámara (de bicicleta) y la superficie de una taza (con asa) poseen igual topología y diferente geometría. En cambio *un plano y un cuadrado con los lados opuestos identificados* poseen igual geometría (plana) pero diferente topología. Dependiendo de la curvatura (nula, positiva o negativa), existen tres geometrías de curvatura constante: plana, esférica e hiperbólica.

PROPIEDADES INTRÍNSECAS VS. PROPIEDADES EXTRÍNSECAS

Las primeras se refieren a aquellas que pueden determinarse por mediciones al interno del espacio en estudio, mientras que las últimas sólo se pueden determinar desde un espacio de dimensión mayor que la contenga. Veamos por ejemplo el caso bi-dimensional: una hoja de papel y una hoja de papel enrollada en forma de cilindro tienen intrínsecamente la misma geometría (la geometría plana), es decir ningún habitante bi-dimensional notará la diferencia entre uno u otro espacio, diferencia que será evidente para un habitante tri-dimensional.

LOCALIDAD VS. GLOBALIDAD

Las propiedades locales son aquellas observadas en entornos o regiones locales. Las propiedades globales son aquellas que consideran al espacio como un todo. La topología determina las propiedades globales del espacio. Consideremos por ejemplo la superficie de una esfera S^2 y un plano R^2 : localmente son iguales pues es posible encontrar entornos arbitrariamente pequeños en ambos espacios que

tengan las mismas propiedades: sin embargo globalmente difieren geométrica y topológicamente pues, mientras S^2 tiene geometría esférica y volumen finito, R^2 tiene geometría plana y volumen infinito.

ABIERTO VS. CERRADO

Los espacios abiertos son aquellos que tienen volumen infinito, mientras que los cerrados (también llamados compactos) tienen volumen finito. Algunos ejemplos de espacios abiertos tri-dimensionales son: R^3 , $R^2 \times S^1$, $R \times S^2$; y como ejemplos de tri-espacios **compactos** tenemos: todos los que tienen geometría esférica, los 6 espacios compactos planos de la tabla 1 (el tri-espacio T_1 es más conocido como el *tri-toro* T^3).

HOMOGENEIDAD E ISOTROPÍA LOCAL Y GLOBAL

La propiedad de homogeneidad local (global) de un espacio se refiere a su invariancia bajo translaciones locales (globales), y la isotropía local (global) se refiere a la invariancia bajo rotaciones infinitesimales (arbitrarias). Estas propiedades resultan particularmente importantes cuando consideramos la evolución de sistemas físicos (como la propagación de ondas electromagnéticas) en espacios con estas propiedades.

Los tri-espacios sin frontera

Las propiedades *topológicas* (o *propiedades globales*) del espacio-tiempo no son generalmente consideradas en el estudio de la evolución de los fenómenos físicos de naturaleza cosmológica porque las leyes físicas usadas son expresadas en términos de ecuaciones diferenciales, que por definición son *locales*. Las ecuaciones de evolución así obtenidas son resueltas conociendo la geometría local del tri-espacio y asumiendo (consciente o inconscientemente) una topología demasiado simple, nos referimos a la denominada *topología trivial*⁸. Decimos esto porque la geometría del tri-espacio restringe pero *no determina* la topología de él. Esto es lo que ha venido ocurriendo al aplicar las teorías geométricas de la gravitación -como por ejemplo

⁸ Decimos que una variedad tiene topología trivial cuando se trata de una variedad **simplemente conexa**.

la teoría de la relatividad general- a los modelos cosmológicos. Para aclarar este punto, a título de ejemplo consideremos los espacios tri-dimensionales M_3 y las tres posibles geometrías con las que se los puede dotar (globalmente): plana, esférica e hiperbólica. La *topología trivial* correspondiente a cada una de estas geometrías es la topología del tri-espacio euclidiano R^3 , de la tri-esfera S^3 y del tri-espacio hiperbólico H^3 respectivamente. Hoy en día sabemos que los espacios M_3 , topológicamente diferentes, que pueden dotarse de geometría plana son 18 (6 de ellos compactos y orientables, ver la tabla 1 y la figura 2), mientras aquellos compatibles con las geometrías esférica e hiperbólica son infinitos.

Tipo topológico	Celda básica	Identificaciones de caras
T_1	cubo	3 pares no rotados
T_2	cubo	2 pares no rotados, 1 par rotado 90°
T_3	cubo	2 pares no rotados, 1 par rotado 180°
T_4	cubo	caras rotadas según la fig.1 (ref.[5])
H_1	prisma hexagonal	caras superior e inferior rotadas a 60°
H_2	prisma hexagonal	caras superior e inferior rotadas a 120°

Tabla 1. Las únicas seis topologías compactas orientables para tri-espacios con geometría plana, obtenidas identificando las caras de una celda básica [6].

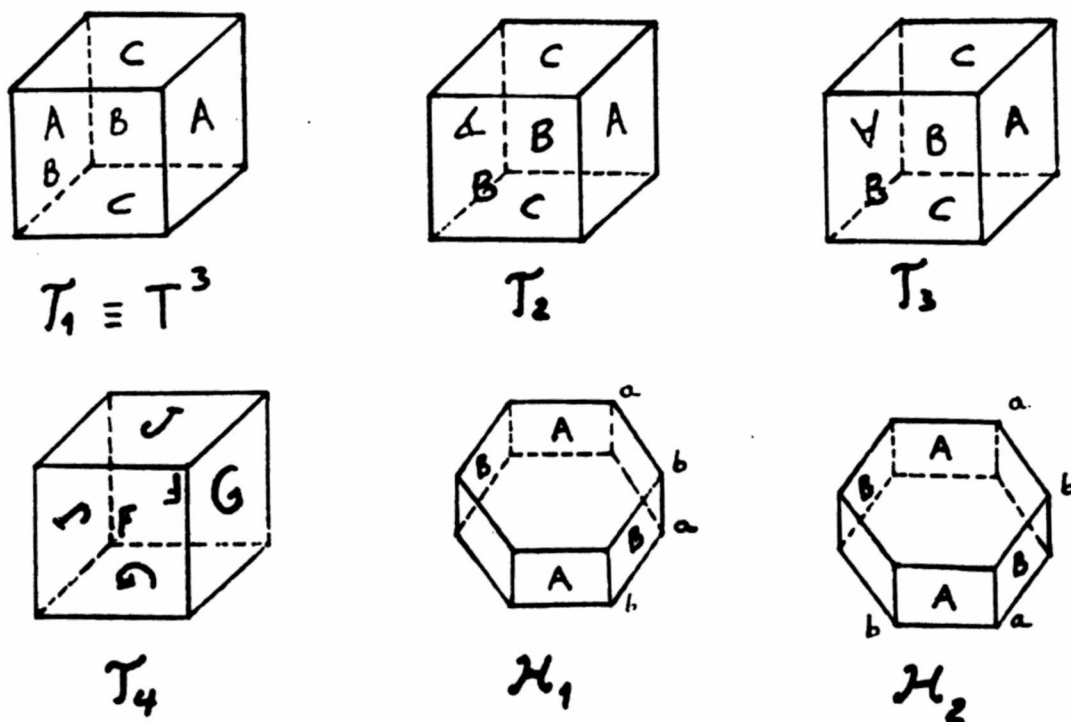


Figura 2.

De todo esto concluimos que no existen argumentos teóricos ni observacionales para considerar solo las topologías triviales en el estudio de los fenómenos a escala cosmológica (vease [3] para una bibliografía actualizada sobre este tema).

Perspectivas

La evolución dinámica del universo primordial, nacido del big bang, debe haber sido determinada **no sólo** por las ecuaciones de evolución (*locales* por definición) sino también por las propiedades *globales* -geométricas y topológicas- del espacio M_3 .

Las mediciones de la radiación cósmica de fondo realizadas recientemente con el satélite COBE, muestran que ella se encuentra distribuida *quasi-isotrópicamente* (al 99,9999%). ¿Significa ésto que nuestro universo es globalmente isotrópico?⁹. Aceptemos como válido el principio cosmológico local según el cual nosotros (*terricolas*) no ocupamos ningún lugar privilegiado en el universo, esto es, lo que observamos desde aquí es lo mismo que observaríamos desde cualquier otro lugar cercano. Luego *sólo* podemos inferir que la radiación cósmica debe verse *quasi-isotrópicamente* distribuida **localmente** (como la observamos desde aquí) alrededor de cualquier lugar del universo. Esto es, nuestro universo no necesariamente es *quasi-isotrópico* globalmente [3].

¿Nuestro universo es globalmente homogéneo? El principio cosmológico y la aparente distribución homogénea de estrellas y galaxias indujo a pensar que nuestro universo sería homogéneo a gran escala (es decir globalmente). Sin embargo, se ha observado que galaxias y cúmulos de galaxias aparecen distribuidos **no homogéneamente** [12], y el problema de la homogeneidad global también continua abierto.

Imaginemos por un momento que conocemos la geometría del tri-espacio M_3 , ¿qué papel desempeñaron las propiedades topológicas (como compacidad, conectividad, homogeneidad global e isotropía global) de M_3 en la evolución del sistema?

Preguntas como estas comenzaron a ser estudiadas solo recientemente. La homogeneidad a gran escala del universo constituye un buen ejemplo de que un

⁹ Decimos que el espacio es globalmente isotrópico cuando vemos lo mismo en cualquier dirección y desde cualquier punto de observación.

fenómeno puede ser explicado no sólo como consecuencia de efectos geometrodinámicos (por ende locales) sino también como resultado de las propiedades topológicas del tri-espacio M_3 . Tradicionalmente dicha homogeneidad fue explicada dentro del modelo estándar como resultado de un breve y veloz período de expansión del universo conocido como *época inflacionaria*. Recientemente Ellis [6] propuso que este hecho podría ser resultado de que nuestro universo sea un universo pequeño, esto es M_3 podría ser (representado por ejemplo por) un cubo con sus caras opuestas identificadas dos a dos (en este caso la geometría es plana) o sea un tri-toro T_1 . Como resultado de la elección de ésta u otra variedad compacta, como variedad M_3 , sólo algunas de las galaxias que observamos serían reales y las restantes serían imágenes de las anteriores debidas a las identificaciones.

Las perspectivas actuales en la comunidad científica apuntan a no descartar a priori la posibilidad que nuestro universo sea un universo pequeño (luego *compacto*), preferentemente con geometría no euclídeana.

REFERENCIAS

- [1] **Steven Weinberg**; *I primi tre minuti* (A.Mondadori Ed., Milano 1977).
- [2] **J.R. Weeks**, *The Shape of Space*, "Pure and Applied Mathematics" Vol. 26, (Marcel Dekker Inc., New York 1985).
- [3] **M. Lachièze-Rey & J.-P. Luminet**, *Phys. Rep.* **254**, 135 (1995).
- [4] **R. Lehoucq, J.-P. Luminet & J.-P. Uzan**, *astro-ph/9811107* (1998).
- [5] **A. Bernui, M. Rebouças, A.F.F. Teixeira & G. Gomero**, *Phys Rev D*, **57**, 4699 (1998).
- [6] **G.F.R. Ellis & G. Schreiber**, *Phys. Lett. A* **115**, 97 (1986).
- [7] **S. Gregory & L. Thompson**, *Investigación y Ciencia*, pag. 76, **68**, (Mayo 1982).
- [8] **Stephen Hawking**; *Historia del tiempo* (Alianza Editorial, Madrid 1994).
- [9] **Paul Davies**; *El universo desbocado* (Salvat Editores, Barcelona 1985).
- [10] **Rudolf Kippenhahn**; *Luz del confin del universo* (Salvat Ed., Barcelona 1987).
- [11] **Frank Shu**; *The Physical Universe* (Univ. Science Books, California 1982).
- [12] **Ron Cowen**; *Science News*, **158**, 104 (August 2000).

Estudios de nanoindentación en recubrimientos de TiVN y TiN sobre acero AISI-316 y HSS

Robinson Figueroa, Fernando Chirinos, Arturo Talledo*

RESUMEN

El presente trabajo trata de aplicar estudios de nanoindentación sobre recubrimientos duros tales como TiVN y TiN sobre acero rápido HSS y acero inoxidable AISI - 316. Las muestras fueron producidas mediante la técnica de pulverización catódica "REACTIVE DC MAGNETRON SPUTTERING". Los resultados obtenidos indican un incremento en la dureza propiamente del recubrimiento independientemente del sustrato en el cual se depositó. La carga máxima de impresión dado por el indentador es alrededor de $5,00E + 0,1mN$ para un espesor del recubrimiento de $4,31\mu m$.

Introducción

Para determinar la dureza Vickers en películas, la influencia del sustrato en la medida es un problema. La técnica de nanoindentación [1], nos permite medir

* Laboratorio de recubrimientos duros.

Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería, Lima-Perú

con mayor precisión la dureza de las películas y a su vez obtener el módulo elástico Y . La validez de esta técnica está sustentado mediante observaciones que fueron probados experimentalmente con instrumentación avanzada.

Teoría

El proceso de nanoindentación para esta técnica es algo parecido a lo que se realiza en el proceso de indentación Vickers. Se pueden apreciar dos etapas en el proceso de esta técnica:

PROCESO DE CARGA

Al indentador se le programa para incrementar su carga P desde una carga inicial $P_{\text{inicial}} = 0$ mN, en el punto de contacto con la superficie inicial, hasta una carga máxima, P_{max} , esto provoca un desplazamiento h del vértice de la indentación hasta h_{max} , ver figura 1-a. Se produce además deformaciones fuera del área de contacto entre indentador - superficie de la muestra, donde el desplazamiento de la superficie en el perímetro de contacto es denotado por h_s . Por otra parte, lo más importante a considerar aquí es la distancia de la profundidad, h_c , desde el nivel del perímetro del área de contacto y el vértice de la indentación en h_{max} .

PROCESO DE DESCARGA

Cuando se llega al valor máximo P_{max} de la carga, preestablecido, el movimiento es revertido y el indentador se mueve hacia fuera.

De los procesos anteriormente señalados es importante resaltar lo siguiente:

- (1) El diámetro de la impresión de contacto de la superficie formada por indentadores no se recupera durante la descarga; solo se recupera la profundidad, ver figura 1-a.
- (2) La indentación debe ser cargada y descargada en poco tiempo antes del comportamiento que el desplazamiento-carga llegue a ser perfectamente reversible; por decir una cantidad limitada de plasticidad algunas veces ocurre en cada una de las primeras cargas y descargas.

- (3) Los efectos de indentadores no rígidos sobre el comportamiento carga desplazamiento pueden ser efectivamente considerados por la definición de un módulo reducido, Y_r , a través de la ecuación:

$$\frac{1}{Y_r} = \frac{(1 - \beta^2)}{Y} + \frac{1 - \beta_i^2}{Y_i} \quad (1)$$

Donde Y y β son módulos de Young y la relación de Poisson para la muestra y Y_i y β_i , son los mismos parámetros para el indentador.

Luego de adquirir los datos de la carga P y el desplazamiento h , tanto en la carga y en la descarga, analizamos la curva correspondiente a la descarga de P vs h , figura 2. Este análisis proporciona un procedimiento físicamente justificable para determinar la profundidad h_c que deberá ser usado de acuerdo con la función de forma del indentador para establecer el área proyectada de contacto A en P_{max} .

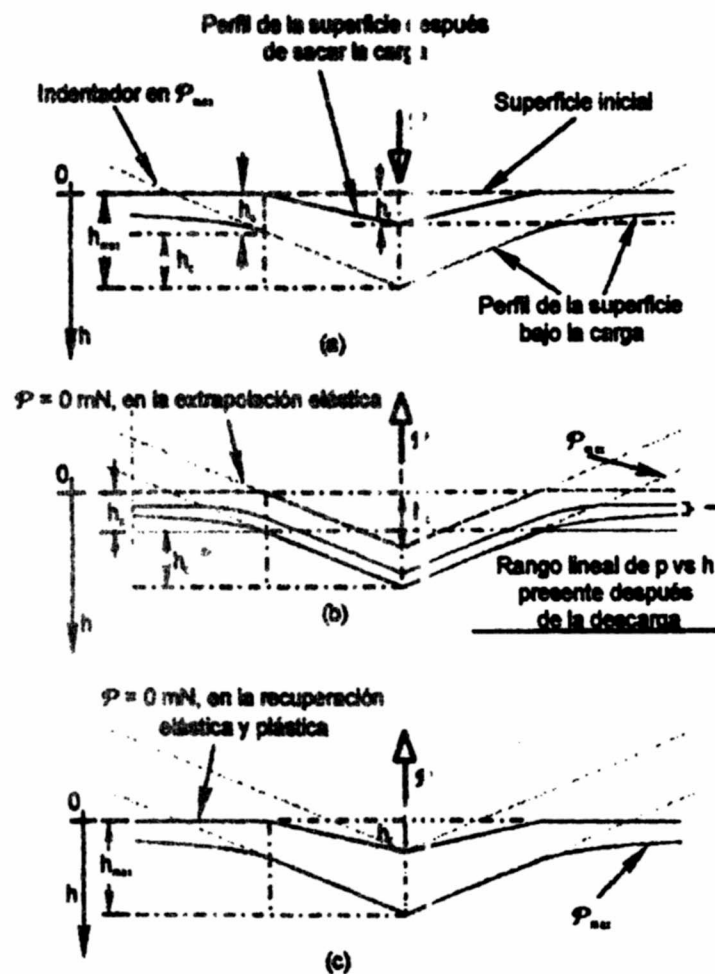


Figura 1:Proceso de la indentación (a) en el momento de la carga y descarga, (b)modelo geométrico en la recuperación elástica, (c) modelo geométrico en la recuperación elástica y plástica.

El modelo geométrico de deformación que permite determinar la profundidad h_c es netamente elástico, y consiste en considerar, que después de alcanzar P su máximo valor, el comportamiento P vs h en la descarga es inicialmente lineal, figura 2. Ese rango lineal se puede aprovechar y considerar como un comportamiento elástico, entonces la forma recuperada elásticamente, hasta $P = 0$ mN, tendrá la forma tal como la figura 1-b. Esa situación es equivalente a realizar una extrapolación en el rango lineal de la descarga, figura 2, y determinar así la profundidad h_c . Esto es en realidad una aproximación ya que en la realidad sucede una recuperación elástica y plástica en conjunto, figura 1-c, y esto se refleja en la curva de descarga después de la descarga.

El paso siguiente es hallar el área de contacto A , en función de h_c , en forma similar al hallado en la dureza Vickers, referencias [2] y [3]. Este cálculo depende de la forma del indentador y en nuestro caso vamos a usar un indentador Berkovich que tiene forma piramidal con base triangular, entonces:

$$A = 24,5 \times h_c^2 \quad (2)$$

Calculados h_c y A , estos se pueden usar para proporcionar medidas separadas de Y y H . Por ejemplo de los datos P vs h de indentación tal como se muestran esquemáticamente en la figura 2, se analiza de acuerdo a la ecuación 3, ver referencia [1].

$$R = \frac{dP}{dh} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Y_r \sqrt{A} \quad (3)$$

Aquí, $R=dP/dh$ es la rigidez medida experimentalmente de la porción superior de los datos de descarga, y A el área de contacto.

Entonces el coeficiente reducido Y_r puede ser determinado midiendo la rigidez de la descarga inicial y asumiendo que el área de contacto A es igual al área medido de la impresión de dureza.

Además, del área de contacto A podemos determinar la dureza da la película a partir de la definición normal que es:

$$H = \frac{P_{\max}}{A} \quad (4)$$

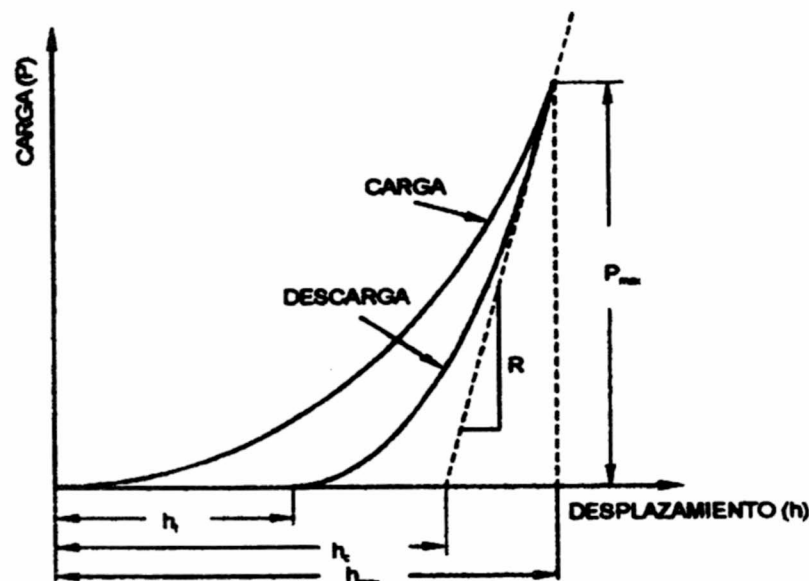


Figura 2: Representación esquemática de carga versus desplazamiento del indentador mostrando cantidades en el análisis, también como la interpretación gráfica de la profundidad de contacto.

Procedimiento experimental

El equipo que se utiliza para la obtención de las muestras, a través de la técnica de pulverización catódica, es "REACTIVE DC MAGNETRON SPUTTERING". Este equipo pertenece a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería. Antes de realizar la deposición se requiere un vacío de fondo de la cámara alrededor de 10^{-5} mbar. Las condiciones de deposición se realizaron bajo una corriente de 400 mA, temperatura de 440°C , en un tiempo de deposición de 140 minutos; los parámetros de deposición están indicados en el cuadro 1.

Cuadro N° 1

Parámetros de deposición para la obtención de recubrimiento de TiN y TiVN.

Recubrimiento	P_{N_2} (mbar) $\times 10^{-4}$	$P_{(N+Ar)}$ (mbar) $\times 10^{-3}$
TiN	5,2	6,1
TiVN	5,6	6,3

Las medidas de nanoindentación se realizaron en Uppsala University Department of Technology, Materials Science Division. El nanoindentador utilizado

fue Nano Instruments, Inc. Knoxville, TN. El esquema ilustrativo se presenta en la figura 3. El indentador se mueve hacia la superficie de la muestra, buscando el contacto, para calibrar los sensores de desplazamiento medidos capacitivamente.

Después de esto se realiza la medida de la indentación donde el desplazamiento y la fuerza son continuamente registrados por un computador que, a parte de coleccionar los datos, tiene la función de controlar todo el aparato. El sistema tiene resoluciones de desplazamiento y carga de 0,16 nm y 0,3 μN , respectivamente.

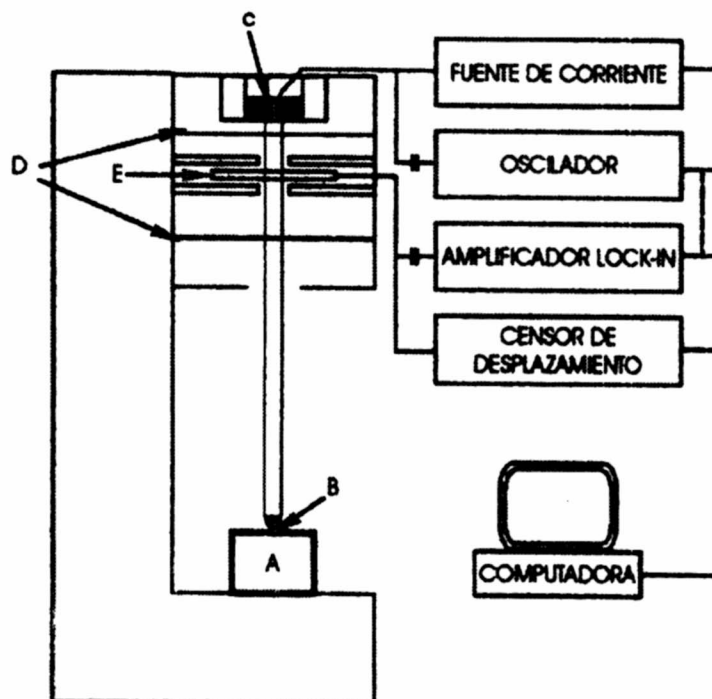


Fig 3: Diagrama esquemático del nanoindentador.

Las medidas de las cargas (P) y desplazamiento h_c , producto de las indentaciones que se realizaron fueron sobre muestras de TiN/AISI-316, TiNV/AISI-316, TiN/HSS, TiNV/HSS, TiN/Si, TiNV/Si. Con el propósito de obtener los resultados con mejor estimación se realizaron 10 indentaciones sobre cada muestra. Entonces cada muestra tiene 10 base de datos de P versus h . Luego, para el caso del TiN/AISI -316, cada uno de los 10 base de datos son graficados y que por similitud de estas se presenta solamente una de ellas, figura 4. De cada grafica se obtiene su profundidad respectiva h_c , a partir de la línea tangente cercana en puntos cercanos que corresponden en el inicio de la descarga. Con este valor h_c determinado se obtiene el área de la indentación, según la ecuación 2 pero adicionada por un factor de corrección propio del equipo, esto es:

$$A = 24,5h_c^2 + 1850 \times h_c \quad (5)$$

Luego se determinan el módulo de Young Y y la dureza H , según las ecuaciones 3 y 4 respectivamente.

Como se realizaron 10 indentaciones sobre el TiN/AISI-316, los valores determinados de Y y H se promedian. Similar procedimiento, para determinar el h_c , al realizado para la muestra TiN/AISI-316 se aplica para las muestras de TiNV/AISI-316, TiN/HSS, TiN/Si, TiNV/Si. Para cada una de estas muestras se presenta una de sus graficas de P versus h , figura 5,6,7 y 8. Una vez determinado el h_c , pasamos a calcular sus respectivas áreas de indentación según, por la ya señalada, ecuación 5.

Resultados y discusiones

El espesor de los recubrimientos es alrededor de $4,31 \mu\text{m}$ de espesor. El análisis químico realizado fue por la técnica de Espectroscopia de rayos X-XPS, [4] y [5], y los resultados para las muestras de TiN fueron 40,033% para el nitrógeno y 49,967% para el titanio. En el caso del recubrimiento TiVN fueron 49,8% para el nitrógeno; 10,1% para el vanadio; 40,03% para el titanio.

Los resultados obtenidos de Y y H promediados de los 10 ensayos que se realizaron sobre cada muestra se presenta en el cuadro 2. Cabe señalar la importancia de las cargas máximas que se aplican para producir una impresión sobre el recubrimiento [6], pues estas cargas no deben exceder más de los $5,00 \text{ E} + 01 \text{ mN}$.

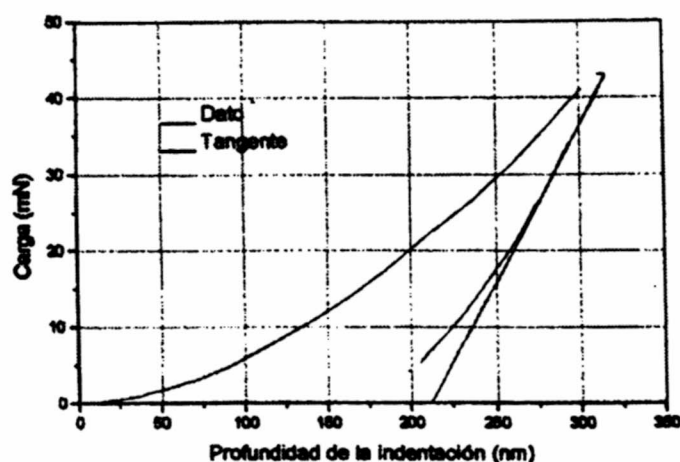


Fig.4: TiN/AISI-316, el valor de la pendiente de la recta es $0,41011 \text{ mN/nm}$ y la profundidad en la indentación h_c es $2,11 \text{ E} + 0,2 \text{ nm}$ para este ensayo.

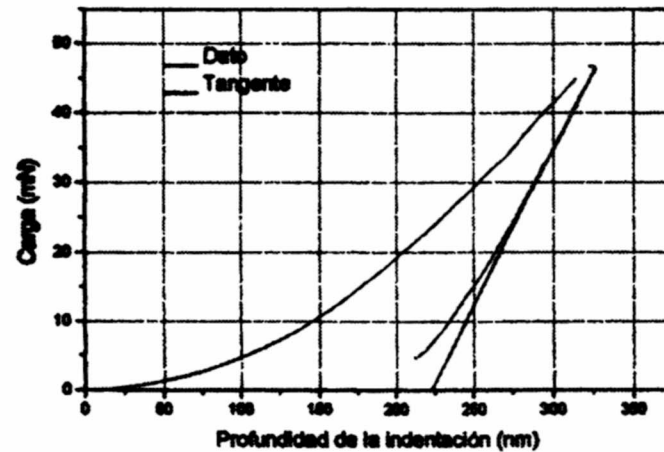


Fig.5: TiN/HSS, el valor de la pendiente de la recta es $0,4473 \text{ mN/nm}$ y la profundidad en la indentación h_c es $2,22E+0,2\text{nm}$ para este ensayo.

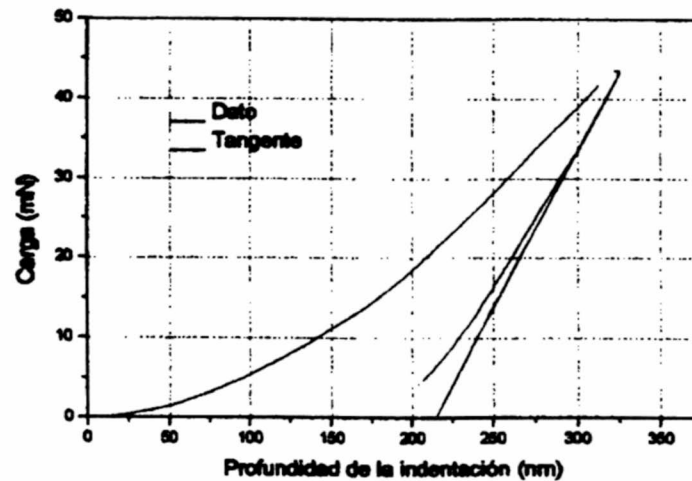


Fig.6: TiN/Si, el valor de la pendiente de la recta es $0,39031 \text{ mN/nm}$ y la profundidad en la indentación h_c es $2,14E+0,2\text{nm}$ para este ensayo.

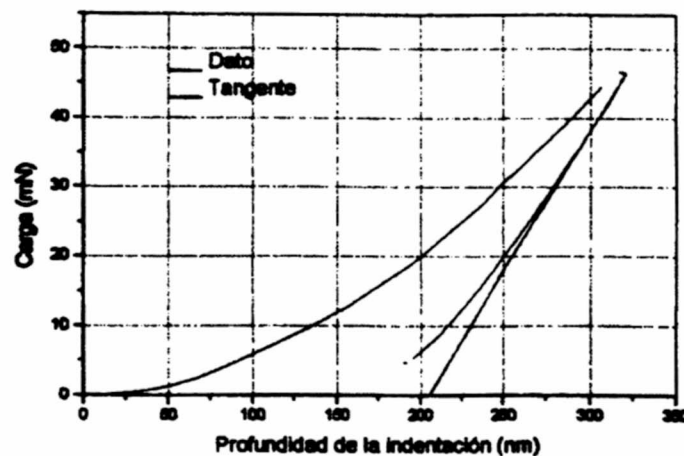


Fig.7: TiVN/AISI-316, el valor de la pendiente de la recta es $0,40184 \text{ mN/nm}$ y la profundidad en la indentación h_c es $2,05E + 02 \text{ nm}$ para este ensayo.

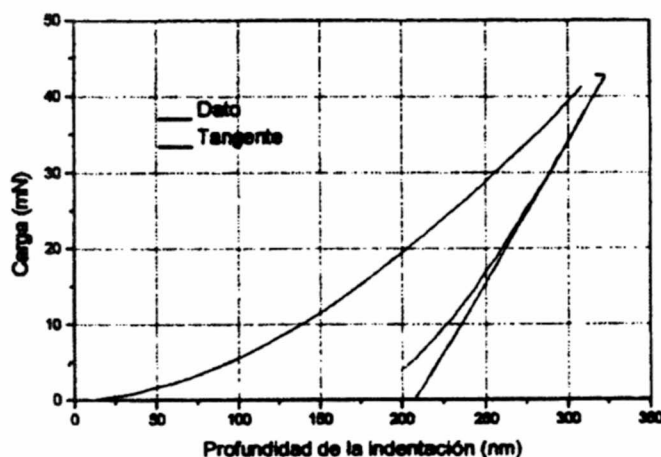


Fig.8: TiVN/Si, el valor de la pendiente de la recta es $0,39031 \text{ mN/nm}$ y la profundidad en la indentación h_c es $2,14e + 0,2 \text{ nm}$ para este ensayo.

Valores mayores que este provocaría en nuestros resultados una influencia del sustrato.

Conclusiones

Las conclusiones correspondientes a nuestro trabajo son:

- Por esta técnica se puede apreciar que los resultados de la dureza del recubrimiento es independiente del sustrato. Esto se consigue con un

Cuadro N° 2

TiN/SS. Valores promedios de las principales variables que intervienen en la determinación del módulo elástico y la dureza promedio.

Cada valor obtenido es resultado de 10 ensayos en cada muestra.

Muestra	Carga máxima (mN) x E+01	Profundidad en la indent h_c (nm) x E+02	Área de la indentación (nm ²) x E+06	Módulo Y (Gpa) x E+02	Dureza H (GPa) x E+01
TiN / SS	4,46	2,15	1,54	2,99	2,91
TiN / HSS	5,00	2,19	1,58	3,34	3,18
TiN / Si	4,47	2,16	1,54	2,88	2,90
TiVN / SS	4,66	2,07	1,43	2,98	3,26
TiN / Si	4,39	2,10	1,48	2,88	2,99

conveniente espesor del recubrimiento y una carga máxima aplicada. En nuestro caso para 4,31 μm de espesor se requiere una carga máxima de 5,00E + 0,1 mN.

- En los resultados de la dureza se aprecia un ligero incremento en las muestras de TiVN respecto a las muestras de TiN, sin embargo para el caso del modulo elástico no se aprecia cambios para ambas muestras.
- En los recubrimientos de TiN, para el espesor mencionado anteriormente, la dureza obtenida es muy buena y en este aspecto se presenta una notable mejoría si tomamos como referencia la publicación [7].

Reconocimiento

Los autores queremos agradecer al Dr. Bendorf por analizar nuestras muestras con el espectrómetro de electrones ESCA 3 Mark II de VG en la Universidad de Hamburgo - Alemania.

REFERENCIAS

- [1] **W.C. Oliver and G.M. Pharr**; "An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments"; **J. Mater. Res.**, Vol.6, N°6, June 1992, 1564-1580.
- [2] **P.Coca R, J.Rosique. J**; "Ciencia de Materiales - Teoría, Ensayos, Tratamientos"; Ediciones Pirámide, S.A, Madrid (1984), 282-287.
- [3] **B. Jönsson, S. Hogmark**; "Hardness Measurements of Thin Films"; *Thin Solid Films*, 114(1984), 257-269.
- [4] **Ana C. Agudelo Henao y Juan Z. Dávalos Prado**; "A.E.S. y X.P.S.-fundamentos y aplicaciones"; *Lectura de especialización*, Agosto 1995.
- [5] **J.F. Moulder, W.F. Stickle, P.E. Sobol and K.D. Bomben**; "Handbook of X - ray photoelectron Spectroscopy"; *Physical Electronics, Inc-* October 1995.
- [6] **P.A. Steinmann and H.E. Hintermann**; "Adhesion of TiC and TiCN coating on steel"; **J.Vac. Sci. Tecnol. A3** (6), Nov/Dec 1985.
- [7] **D.S . Rickerby & P.J. Bumett**; "Correlation of process and system parameters with structure and properties of physically vapour-deposited hard coatings"; *Thin Films*, 157 (1988) 195-222.

Cómo construir un telescopio reflector

Orlando Martínez*

RESUMEN

Para hacer observaciones astronómicas con un mínimo de 390 aumentos y una buena resolución de imagen es necesario utilizar un telescopio de apertura mayor que 10 cm. Sin embargo, el costo relativamente alto que puede significar su compra es desalentador para muchas personas potencialmente interesadas en la astronomía. Por ello, decidí pulir un espejo de 10 cm. de diámetro y, con la experiencia adquirida, conseguí pulir otros espejos de mayor tamaño.

En este trabajo se muestra en forma detallada cómo construir un telescopio reflector de bajo costo, incluyendo las técnicas de pulido de espejos cóncavos de distancias focales previamente establecidas en el diseño del telescopio.

Introducción

Un telescopio es un instrumento que sirve para observar objetos situados a gran distancia. En un telescopio reflector, el espejo cóncavo concentra en un sólo «punto» (foco del espejo) el haz luminoso proveniente del objeto, luego esta imagen es aumentada con un ocular. La configuración del telescopio reflector (Newtoniano) puede observarse en la figura 1.

* Universidad Nacional de Ingeniería/ Facultad de Ciencias/ Grupo Astronomía. Lima-Perú.
e-mail: orlandomartinez@hispavista.com

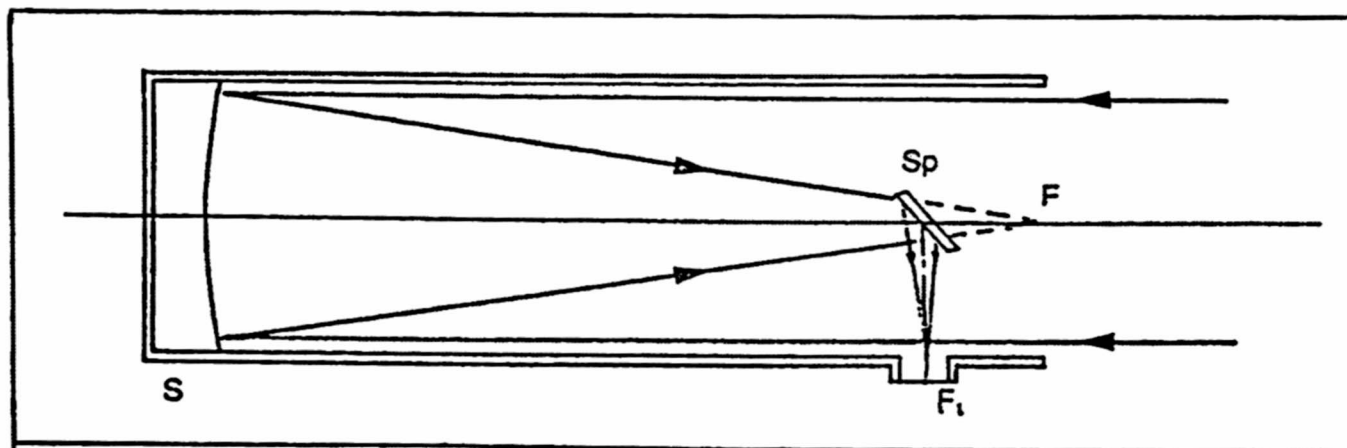


Fig 1. El montaje newtoniano. Delante del foco F del espejo parabólico S se pone un espejito plano S_p que refleje los rayos de luz lateralmente a F_1 , donde se coloca el ocular o la placa fotográfica, o los otros aparatos para el examen de la luz.

El primer telescopio que utilizó un espejo como objetivo lo construyó Isaac Newton en 1688; dicho espejo era metálico (aleación de estaño y cobre), con un diámetro de 3,5 cm y una distancia focal de 16,5 cm. El espejo metálico más grande fue construido por William Parsons, Conde de Rosse con un diámetro de 1,8 m. Si bien el empleo de espejos corregía la aberración cromática de los primeros telescopios refractores (como el anteojo de Galileo) y permitía además ampliar el diámetro del objetivo sin repercutir en el peso del telescopio, en cambio ellos tenían un problema serio: «se oxidaban», motivo por el cual debían pulirse periódicamente.

Por aquellos tiempos se regresó al empleo de los telescopios refractores hasta que se diseñaron técnicas apropiadas para pulir espejos cóncavos sobre un trozo de vidrio común, que luego sería **plateado** (y en la época moderna, **aluminizado**).

Entre las ventajas del **telescopio reflector** podemos mencionar:

- No tiene aberración cromática.
- Recomendable para trabajo de astrofotografía.
- Refleja imágenes con buen brillo.
- Bajo costo por cm. de apertura comparado con los de tipo refractor.
- Razonablemente compacto y cómodamente transportable para distancias focales comparables a 100 cm.

Entre las desventajas tenemos:

- El tubo abierto en la parte delantera recibe corrientes de aire y contaminaciones.

- Requiere mantenimiento: Esto es, colimación periódica.
- Para grandes aperturas (mayores a 8") son pesados y requieren montura especial.
- Generalmente no se usan para aplicaciones terrestres porque las imágenes observadas en el ocular se ven invertidas.

Los aspectos más importantes en la construcción de un telescopio reflector son:

- **Apertura (D).** Es la medida del diámetro del espejo. A mayor apertura, mejor resolución, mayor contraste, imagen más brillante.
- **Distancia focal (f).** Distancia desde el espejo hasta donde converge el haz luminoso que proviene del infinito. A mayor distancia focal se obtiene mayor potencia, mayor tamaño de imagen y menor campo de visión.
- **Poder resolvente o poder de separación.** Es la capacidad para separar dos objetos, por ejemplo una estrella binaria, en 2 imágenes distintas separadas unos segundos de arco. El poder resolvente es función directa de la apertura. Este es uno de los aspectos más importantes a tomar en cuenta.

La medida angular de la mancha de difracción (disco de Airy) vale, en radianes: $1,22 \lambda / D$ y, en segundos de arco: $1,22 (206265) \lambda / D$.

El radio lineal de dicha mancha mide entonces: $r = 1,22 \lambda (f/D)$.

Así, cuanto mayor es el diámetro del objetivo, menor es la imagen de la estrella y por tanto el disco de Airy. Esta característica no depende del ocular o de otras lentes intermedias, sólo del objetivo. En los telescopios, generalmente la figura de difracción no se puede apreciar con facilidad debido a la turbulencia de la atmósfera y a otros defectos.

- **Potencia o magnificación (M).** Nos dice cuán grande vemos el objeto utilizando el telescopio y, depende de 2 parámetros independientes: las distancias focales del espejo y del ocular: $M = f(\text{obj}) / f(\text{ocular})$. Como regla general la máxima potencia de uso es $M=60$ por cada pulgada de apertura del telescopio. Por ejemplo: para una apertura de 8", $M = 60 \times 8 = 480$ aumentos como máximo; pero las mejores observaciones se hace en el rango de 20 a 35 de poder por cada pulgada de apertura, o sea, 160 hasta 280 para el espejo de 8".

- **Magnitud límite (M.L).** Existe un sistema numérico que indica cuánto brilla un objeto estelar. A mayor magnitud el objeto tiene menor brillo. Por ejemplo, Sirio (ubicada en la constelación del Can Mayor) es la estrella más brillante con una magnitud de $-1,46$; Rigel (ubicada en la túnica de la constelación de Orión) tiene una magnitud $0,08$; la estrella polar tiene magnitud $2,12$.

La estrella más débil que puede verse con un telescopio es la magnitud límite y está relacionada directamente con la apertura:

$$M.L = 7,5 + 5 \log (D)$$

- **Límite de la imagen de difracción.** (Criterio de Rayleigh). Rayleigh encontró que si la onda defectuosa real producida por imperfecciones del objetivo, no se aparta de la onda esférica en más de $1/4$ de longitud de onda de la luz, la imagen de difracción no sufre más que débiles alteraciones. Así, en un espejo se puede tolerar un máximo de $(0,56/4)/2 = 0,07 \mu\text{m}$. como mayor defecto.

Fundamento teórico

FORMA DEL ESPEJO PRINCIPAL

Las leyes elementales de reflexión permiten prever fácilmente que un espejo esférico cóncavo dará una buena imagen de un objeto colocado cerca de su centro de curvatura. La observación de un astro que puede considerarse como infinitamente alejado exige por el contrario, que todos los rayos paralelos al eje convergan en un solo punto (foco), y esto se logra con un espejo parabólico (ver figura 2). Todo espejo parabólico puede aproximarse a un espejo esférico teniendo en cuenta el criterio de Rayleigh, esto es, el espejo esférico debe tallarse de tal modo que:

$$f^3 \geq 34,9 D^4$$

Veamos algunos ejemplos:

D (cm)	f mínimo (cm)
10	70
15	120
20	177
25	240

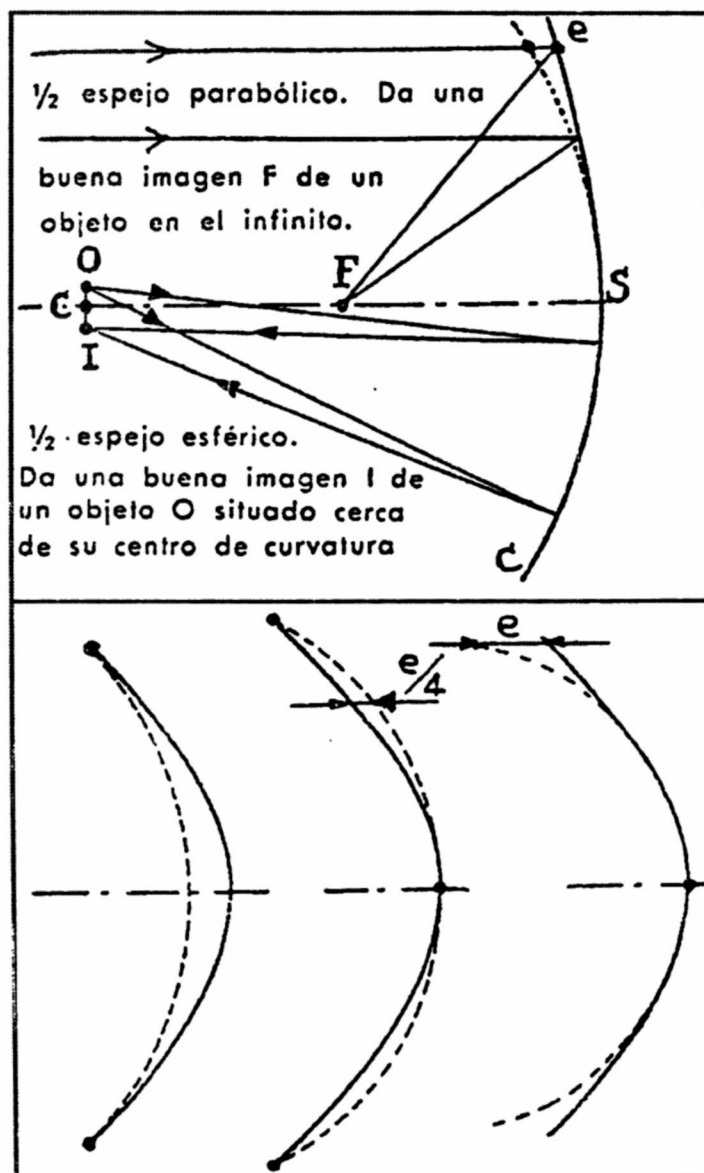


Fig. 2 (Arriba). Necesidad de un espejo parabólico.

Fig. 2 (Abajo). Comparación de una parábola con 3 esferas de radios decrecientes.

TRABAJO CON EL VIDRIO Y TÉCNICA DEL PULIDO.

El trabajo de pulido de alta precisión de las superficies del vidrio está dominado por dos hechos esenciales conocidos (o inconscientemente aplicados) desde la edad de piedra: el aprovechamiento de los procedimientos de ajuste por frotamiento y la 'ley de los grandes números'.

Ajustar por frotamiento una superficie es frotarla contra otra de extensión comparable, que toma ahora el nombre de 'herramienta', con la interposición de un abrasivo, es decir, un polvo compuesto por pequeños granos cortantes más duros

que el cuerpo a trabajar. La combinación del movimiento de traslación y de la presión que se le hace sufrir a las piezas -presión repartida sobre las duras y agudas aristas de los granos de abrasivo- provoca en un material frágil como el vidrio una multitud de fracturas y de pequeños fragmentos, principalmente en las zonas sobresalientes, que tienden entonces a aplanarse.

Si la ley del movimiento relativo de las piezas es tal, que un régimen de presiones iguales pueda existir en todas partes, se obtendrá automáticamente la nivelación de las superficies con una precisión del orden del diámetro de los granos interpuestos. Si este movimiento está dirigido en todos los sentidos, las superficies tomarán necesariamente una forma esférica (o plana como caso particular) puesto que ésta es la única que permite el contacto con todas las posiciones. El vidrio de arriba toma la forma cóncava y el de abajo (herramienta) se vuelve convexo. Los accidentes elementales, pequeños pozos y fracturas, son también comparables en dimensiones al tamaño de los granos interpuestos. Pero una pequeña desigualdad en la presión, por ejemplo repetida siempre sobre el mismo punto de la carrera, puede crear una notable deformación; para evitarla, es necesario volver improbable esta repetición exacta y aprovechar la 'ley de los promedios'. Como el trabajo exige en total varias centenas de millares de carreras de frotación se concibe que, si el movimiento está dado por la mano de una persona que sabe más o menos la amplitud que debe dar al movimiento, se producirá a la larga una asombrosa compensación exacta de los errores individuales. En cierto sentido podría decirse que cuantas más torpezas cometa el operador, tanto mejor resultará el pulido.

Equipo y materiales

Se construyó un banco de trabajo de madera de superficie superior circular, de 3 patas estabilizado mediante pesas en su base. Además en una mesa adicional se colocó un porta-espejos (de madera) para mantener orden y limpieza.

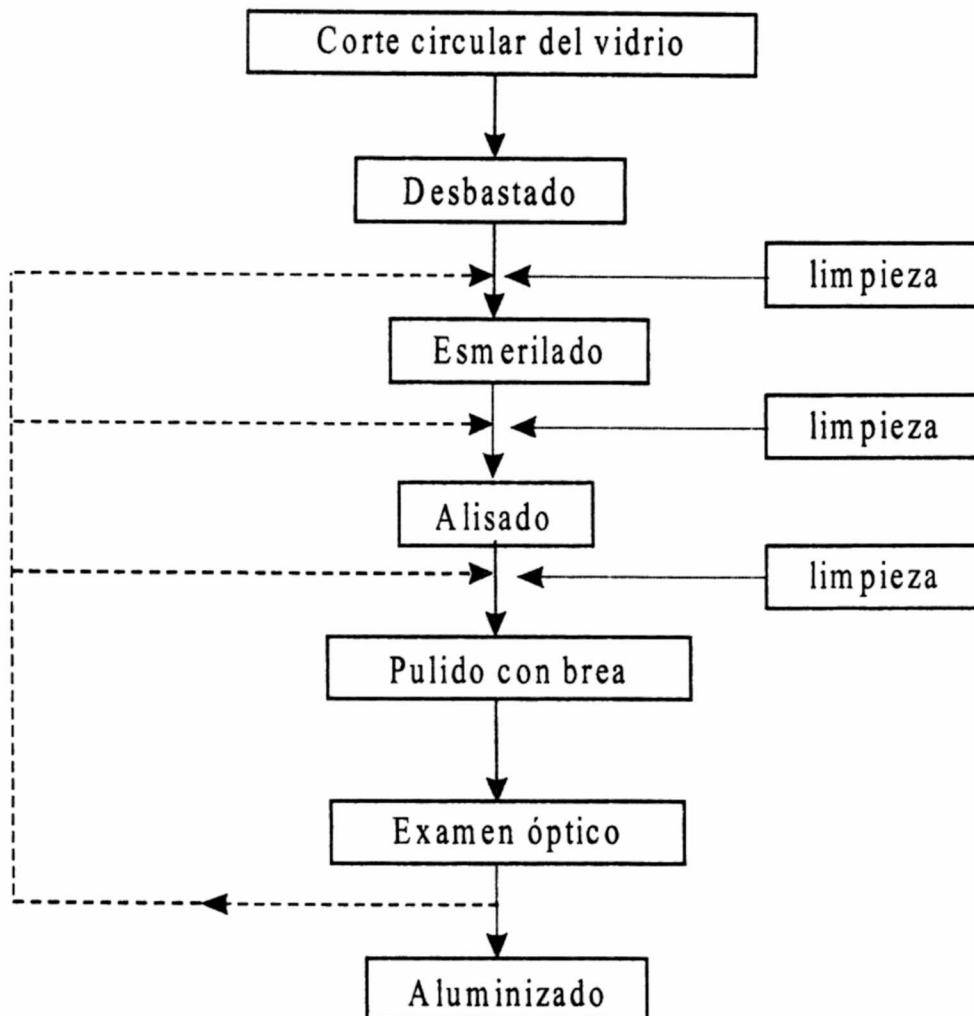
Es necesario disponer de baldes pequeños con agua para lavar el espejo y recoger los abrasivos usados, pinceles y esponjas.

Los materiales e insumos usados fueron:

- Esmeril en polvo: Carborundum #50, #120, #220.
- Óxido de aluminio.
- Óxido de cerio.
- Brea.
- Vidrio plano de 19 mm. de espesor.

Metodología para el pulido del espejo

Se usa el método de pulido de espejo a mano. Las etapas para el pulido del espejo se muestran en el diagrama de flujo adjunto:



CORTE CIRCULAR DEL VIDRIO

Como los cortadores de diamante sólo pueden cortar vidrios circulares hasta de 6 mm de espesor, fue necesario desbastar el contorno circular del vidrio con una herramienta de corte y esmeril #50. Se desbastó 6 mm por cada cara del vidrio, luego se procedió a cortar con una cuchilla diamantada sobre el contorno hueco y finalmente a lijar las imperfecciones de este último corte; además se hizo un bisel de 3 mm.

El esmeril usado fue recogido, lavado y guardado para uso posterior.

DESBASTADO

Se coloca el vidrio llamado ‘herramienta’ sobre el banco de trabajo apoyado sobre 1 ó 2 franelas, se vierte un poquito de esmeril #120 mojado y con el disco superior presionado se recorre su superficie según lo indica la figura 3. Así se logra que el espejo superior se vuelva cóncavo y el inferior convexo. Antes que las 2 superficies logren acoplarse por completo se cambia de tamaño de esmeril. Para ello debe lavarse todos los materiales utilizados, botar todos los papeles y/o plásticos que sirvieron de protección, lavar y cubrir con una capa de laca el banco de trabajo, guardar el esmeril #120. ¡¡Es mejor tomar todas las precauciones aunque parezcan innecesarias!!

ESMERILADO

Se usó el carborundum #220 en cantidades más pequeñas que en el caso anterior (este esmeril corta más rápido). Justo antes de lograr un buen acople de superficies, intercambiar los espejos de posición para bajar la velocidad de desbaste y lograr una mayor homogeneidad en la superficie. Las picaduras del grano anterior deben desaparecer usando este grano.

Una vez terminado este proceso, y lograda la curvatura deseada se puede recoger el grano, lavarlo, decantarlo, separar los granos pequeños de los grandes y utilizarlos de nuevo (los más pequeños). Para lograr una mejor superficie, de ahora en adelante debe intercambiarse los espejos arriba y abajo. Obviamente se hizo primero el ritual de limpieza descrito más arriba.

ALISADO

Se utiliza óxido de aluminio, el cual tiene un grano muy fino, por lo cual la limpieza en el taller debe ser muy rigurosa. Aparte de lo descrito anteriormente debe contemplarse la limpieza general de todos los materiales; si es posible sacar primeramente los abrasivos gruesos del taller, cambiarse de ropa de trabajo y luego (al siguiente día) volver a hacer la limpieza de materiales. ¡¡ En estas circunstancias del proceso un sólo granito de esmeril #220 puede malograrnos horas (o días) de trabajo!!

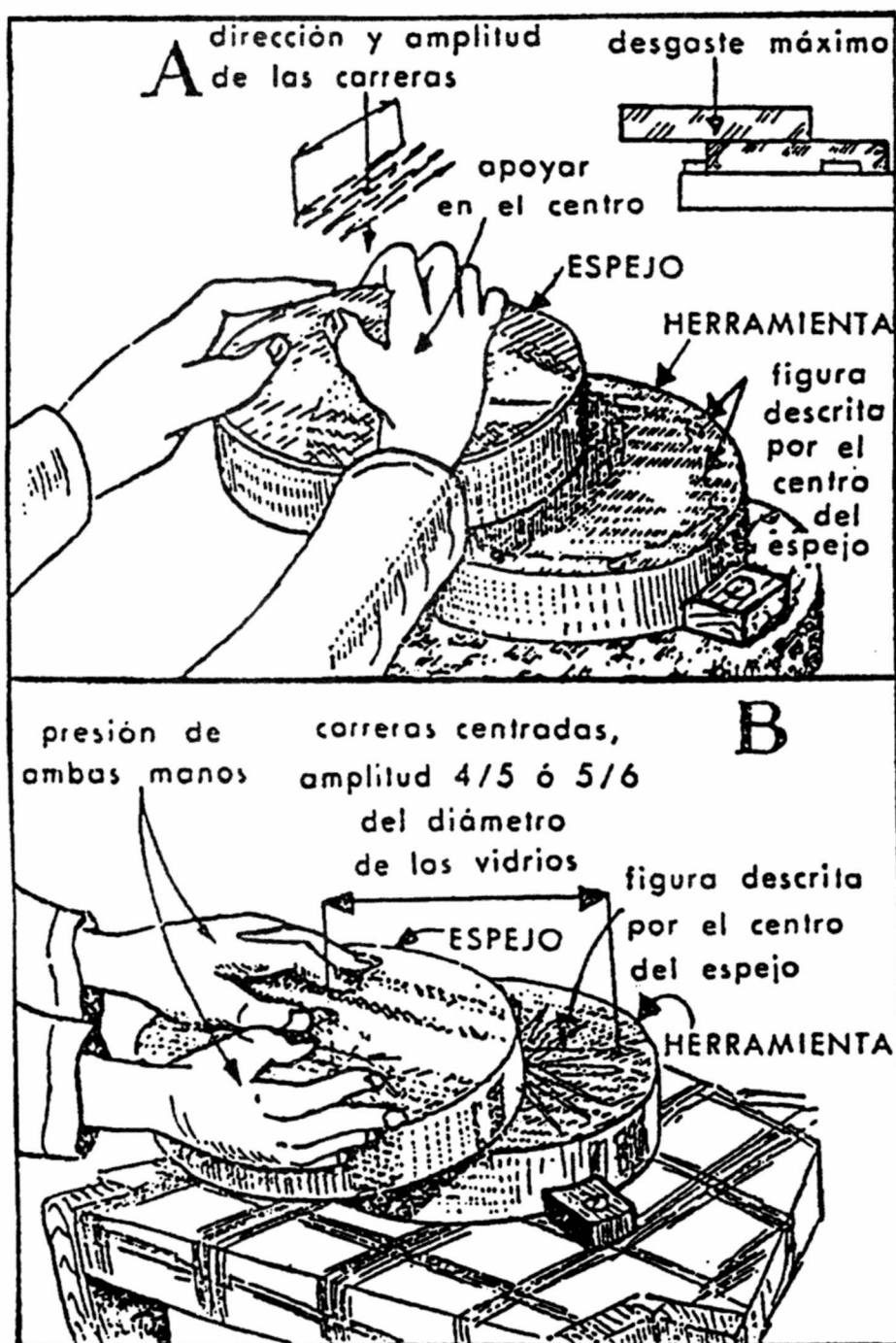


Figura 3. Carreras del desbastado:

A. Rectilíneas.

B. En forma de 8.

El alisado tiene el mismo proceso de trabajo anterior y termina cuando ya no se vea ninguna picadura grande y la superficie del espejo pueda reflejar la luz de una bombilla a un ángulo de 30° a 45° debemos tener presente que el agua utilizada en el alisado se seca rápidamente, corriéndose el riesgo de que los discos queden pegados.

PULIDO CON BREA

Para un buen pulido las superficies deben estar completamente amoldadas bajo el mismo radio de curvatura. Esto se logra cambiando el molde convexo de vidrio por uno de brea, el cual es más blando y se amoldará en todo momento a la superficie del espejo.

Sobre la superficie del molde convexo se vierte brea líquida (calentada lo suficiente) y se practica surcos de unos 5 mm. de ancho para formar cuadraditos de 2 cm. de lado. Se prensa con el espejo interponiendo un papel enjabonado o plástico. Se deja enfriar y luego se puede volver a prensar. También es buena idea usar kerosene sobre la brea al momento de prensar. Una vez que el molde de brea tiene todas las garantías de trabajo se le pasa con un pincel de óxido de cerio húmedo y se procede a realizar el pulido con la misma técnica anterior, intercambiando los discos. El final del pulido se logra cuando no existan más picaduras (o sean muy pocas y pequeñas) y la superficie se presente transparente.

TEST DE FOUCAULT

Es un método simple pero muy útil para examinar la esfericidad de espejos cóncavos. El instrumento consiste de una rendija iluminada que sirve de fuente de luz la cual iluminará el espejo, y éste convergerá esa luz sobre su foco. Una cuchilla de filo paralelo a la rendija cortará los haces como en la figura 4; si el espejo es perfectamente esférico cóncavo la sombra que uno puede apreciar será vertical; si tiene deformaciones entonces éstas se verán como en la figura 4 D. Este aparato de prueba fue también construido.

ALUMINIZADO

El espejo ya pulido debe ser aluminizado en su cara anterior. En el presente proyecto, el aluminizado fue realizado en el laboratorio de películas delgadas de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por el profesor César Chung, usando la técnica de evaporación al vacío.

CONSTRUCCIÓN DE LA MONTURA

El espejo debe ser colocado en un tubo acondicionado para el telescopio. En el presente caso se usó tubo de PVC de 6" de diámetro el cual presenta suficiente rigidez.

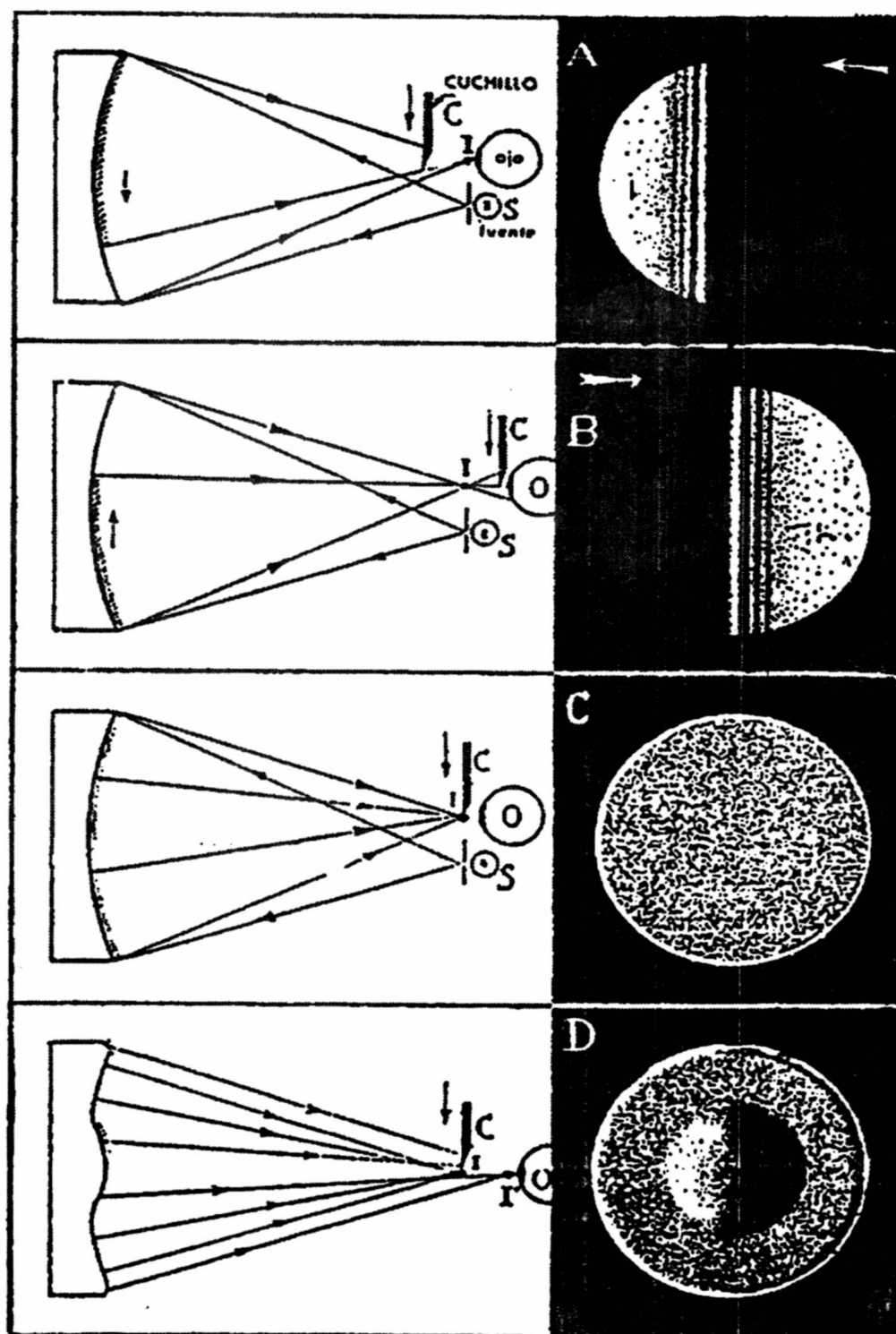


Fig 4: Explicación geométrica del método de Foucault.

La montura usada es del tipo azimutal, con movimiento en 2 ejes: vertical y horizontal. En verdad, una vez colocado el espejo en el tubo y dispuesto sus otros componentes, éste puede ser colocado en cualquier tipo de montura, siendo uno de los más sencillos el tipo dobsoniano por su facilidad de fabricación.

PRODUCCIÓN EN SERIE

Con la experiencia de haber pulido el espejo de 10 cm y comprobado que era demasiada la inversión de tiempo e insumos, se procedió a realizar un pulido de 4 espejos simultáneamente. Asimismo se pretendía con ello lograr pulir espejos con igual curvatura para así homogenizar criterios de fabricación o que se pueda utilizar en telescopios de espejos múltiples como el ubicado en el Monte Hopkins o el del Monte Palomar (U.S.A.).

Por otra parte, la fabricación individual del espejo trae consigo movimientos repetitivos que pueden ocasionar deformaciones que fueron comprobadas en el trabajo anterior mencionado (espejo de 10 cm de diámetro). Al tener una base más amplia de elementos, estos movimientos deben ser disipados sobre todos ellos, lo cual también fue comprobado (al menos en 2 de los espejos que llegaron a terminarse de pulir a la fecha). Para reforzar este último criterio se utilizó espejos de diferentes diámetros, dos espejos de 13 cm (para lograr distancias focales iguales), uno de 12 cm y uno de 9 cm (este último sólo como un espejo de prueba).

Los espejos se pulieron según una secuencia: disco de 13 cm., disco de 9 cm., disco de 13 cm., disco de 12 cm.

Durante el proceso de esmerilado, los dos discos de 13 cm fueron intercambiados cada cierto número de recorridos de las herramientas, lográndose curvaturas casi idénticas que fueron corregidas durante el alisado por simple inspección al contacto de las 2 superficies (espejo 1 con herramienta 2 y, espejo 2 con herramienta 1).

La prueba óptica se hizo para el espejo de 13 cm. Al finalizar la primera prueba se notó serias anomalías en forma concéntrica, pero de magnitud pequeña (según el contraste que ofrecía las sombras), siendo necesario prensar el espejo sobre la brea y reiniciar el pulido.

En la segunda prueba la superficie mejoró notablemente aunque en el centro del espejo no se logró mejora. Se prensó una vez más el espejo al molde y en la siguiente prueba no se notaron mejoras sustanciales; lo mismo sucedió la siguiente vez, procediéndose entonces a seguir con el pulido sin volver a prensar.

Al final del trabajo se obtuvo una superficie aceptable con una pequeña zona ligeramente hundida en el centro del disco que no pudo ser superada. Sin embargo al estar el espejo secundario en el centro del diámetro del tubo óptico, esa área quedará tapada, además dicha superficie es pequeña comparada con el total del espejo.

Al finalizar el pulido del espejo 1 (de 13 cm) y estando a la mitad del pulido del espejo 2 (de 13 cm) sus distancias focales son: $f_1 = 100,8$ cm; $f_2 = 101,2$ cm con un margen de error, al tomar las medidas con el aparato de Foucault; de 0,5 cm.

Al finalizar el alisado se tuvo un gasto de 44 horas efectivas de trabajo sobre los discos, sin contar el tiempo para cortar los discos, pulir sus dorsos y las tareas de limpieza. El tiempo de pulido es variable según la calidad de la superficie obtenida luego del alisado, no menos de 6 horas si el resultado en la primera prueba óptica fuera satisfactoria.

Aplicaciones

- La aplicación obvia y directa es el uso que le puede dar un aficionado a la astronomía, como es la observación planetaria, estelar y otros.
- Siendo un telescopio económico (más precisamente el pulido del espejo), puede estar al alcance de cualquier persona o institución y ser utilizado con fines de enseñanza. Por ejemplo, un colegio puede adquirir el espejo con el montaje óptico en el tubo y diseñar su propio soporte.
- Logrando fabricar varios espejos de distancias focales muy similares pueden ser utilizados por alguna institución para construir un telescopio de espejos múltiples cuya apertura equivalga a alguno de tamaño grande.
- Los espejos pueden servir como concentradores de luz de diferentes tamaños.

Conclusiones

- Terminado el pulido y realizado el control de calidad, se midieron y calcularon las características del espejo de 13 cm:

Abertura libre (D)	: 12,7 cm.
Distancia focal (f)	: 100,8 cm.
Poder resolvente	: (1,1)"
(Para $\lambda = 0,56 \mu\text{m.}$)	
Potencia máxima (M)	: 300X
Magnitud límite observable (M.L.)	: 13

- Sin tomar en cuenta la inversión en horas de trabajo, el costo del telescopio fue económico comparándolo con uno importado:
 - El vidrio para los 8 discos costó S/.5 (5 nuevos soles).
 - Conseguir oculares es un problema a solucionar.
 - Los abrasivos, si bien son caros, se gastan poco y, si se lavan adecuadamente pueden utilizarse varias veces.
 - El gasto por aluminizado fue por cuenta del laboratorio de películas delgadas de la Facultad de Ciencias Físicas de la UNMSM.
 - El costo de la montura es variable (se estima un mínimo de 30 dólares para una montura sencilla de madera).
 - La montura de madera y algunas piezas metálicas se pueden construir en cualquier taller.
 - El soporte metálico del tubo óptico fue construido por el personal del taller de mantenimiento en la Facultad de Ciencias de la UNI utilizando materiales sobrantes que pude conseguir a bajo precio.
- Los espejos de 13 cm de apertura lograron una distancia focal cuyo error de comparación no excede a 0,6 cm. Se puede mejorar la técnica para disminuir el error.

Agradecimientos

- *Agradezco al profesor César Chung del laboratorio de películas delgadas de la Facultad de Ciencias Físicas de la UNMSM por su gentil apoyo en el aluminizado de los espejos de 10 cm y 13 cm.*
- *Agradezco además al señor José Farfán, jefe del taller de mantenimiento de la Facultad de Ciencias de la UNI, por su apoyo en la construcción del soporte metálico del tubo óptico para la montura azimutal.*
- *También agradezco al profesor Alcides López por sus consejos y datos útiles al iniciarme en la actividad de pulido de espejos.*
- *Además agradezco la colaboración brindada por el Grupo Astronomía de la Facultad de Ciencias de la UNI en la realización de este proyecto.*

REFERENCIAS

- [1] **Texereau, Jean**; *"El telescopio del aficionado"*; Eudeba; Buenos Aires; 1961.
- [2] **Twyman**; *"Optical Glassworking"*; Hilger and Watts Limited; Londres; 1955.
- [3] **Celestron international**; *"Celestar instruction manual"*; 1997.
- [4] **Sarpe**; *"El Universo, enciclopedia Sarpe de la astronomia"*; Madrid; 1982 Volumen 3 pág. 1133-1139; Volumen 4 pág. 1170-1181, 1277, 1506.

Estudio de la estrella binaria V505 Sgr por el método de fotometría diferencial

Julio César Tello Gálvez *

RESUMEN

En este estudio, se midió la magnitud de la estrella binaria eclipsante V505 Sgr y se hizo un análisis de la variación de su brillo. Para este fin, se empleó por primera vez, el fotómetro fotoeléctrico OPTEC modelo SSP-5 instalado en el telescopio refractor Takahashi de 15 cm de diámetro y 1050 mm de distancia focal. Las observaciones se efectuaron en junio del año 2000 desde el fundo El Almendral (Ica) localizado a 300 Km al sur de la ciudad de Lima.

Introducción

No todas las estrellas que vemos en el firmamento tienen un brillo constante¹. Aquellas estrellas cuyo brillo cambia en periodos relativamente cortos de tiempo se denominan **estrellas variables**. Ellas comprenden una fase crítica en la vida de las estrellas. Es posible estudiar esta fase mediante observaciones en diferentes longitudes

* Grupo Astronomía, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería.

¹ El cambio apreciable de brillo aquí considerado ocurre en algunos días. Aquí no estamos considerando el centelleo de las estrellas debido a la refracción de la luz estelar al pasar por la atmósfera terrestre.

de onda a fin de poder construir modelos que expliquen el comportamiento observado (Ripero, 1986). La investigación de las estrellas variables proporciona mucha información acerca de las propiedades estelares como masa, radio, luminosidad, temperatura, estructura interna y externa, composición y edad. Por ejemplo, el determinar la relación entre período y luminosidad de las estrellas variables llamadas **cefeidas** ha servido para calcular las distancias astronómicas hasta más allá de unos centenares de años-luz.

Según la variación de su brillo las estrellas variables se clasifican en: **Variables intrínsecas**, si la variación se debe a pulsaciones o erupciones que ocurren dentro de las estrellas mismas; y **variables extrínsecas**, si la variación se debe a la intervención de otra estrella que se interpone entre ella y el observador.

En astronomía es costumbre referirse al brillo aparente de una estrella como magnitud aparente (Kaufmann, 1999). Originalmente el término "magnitud" se refería a la sensación visual producida por una estrella. En el siglo II dc el astrónomo griego Hiparco inventó la escala de magnitud llamando estrellas de primera magnitud a las estrellas más brillantes. Aquéllas con un brillo de casi la mitad de las de primera magnitud las denominó estrellas de segunda magnitud y continuaba así hasta las estrellas de sexta magnitud que eran las más débiles que él podía ver. Así pues las magnitudes no eran sino estimados de sensación visual sin definición cuantitativa. Pero ya que la respuesta del ojo no es lineal, nuestra vista no puede percibir el brillo absoluto de las estrellas; sólo puede percibir aproximadamente sus diferencias relativas. Según Sterken (1992), Pogson (1856) asumió una escala logarítmica que relacionaba la diferencia de magnitud observada entre dos estrellas con la correspondiente proporción del brillo entre ambas. A mediados del siglo XIX se desarrollaron mejores técnicas para medir la energía luminosa que provenía de una estrella. En base a mediciones que efectuaron los astrónomos se definió que a una diferencia de 5 magnitudes entre dos estrellas le debía corresponder una relación en brillo de 100 ó $(2,512)^5$, por lo que a una diferencia de 1 magnitud le corresponde un factor en brillo de $(100)^{1/5}$ ó también 2,512. Se redefinió entonces la moderna escala de magnitud de modo que una estrella de 1^{era} magnitud es:

$$\begin{aligned}(2.512)^{2-1} &= 2,512 \text{ más brillante que una estrella de 2da magnitud; y} \\ (2.512)^{3-1} &= 6,310 \text{ más brillante que una estrella de 3ra magnitud; y} \\ (2.512)^{4-1} &= 15,851 \text{ más brillante que una estrella de 4ta magnitud;}\end{aligned}$$

Sean las magnitudes aparentes m_1 y m_2 , y sus correspondientes brillos aparentes B_1 y B_2 , entonces se cumple:

$$(2,512)^{m_2 - m_1} = \left(\frac{B_1}{B_2} \right)$$

De donde se obtiene la denominada **fórmula de Pogson**:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \left(\frac{B_2}{B_1} \right) \quad \dots(1)$$

La escala de magnitud es una escala inversa, es decir que a estrellas más brillantes le corresponden magnitudes con números bajos. Actualmente con la ayuda de los telescopios y otros equipos se ha podido determinar la magnitud de objetos tan débiles que alcanzan magnitud 25 y se ha corregido la magnitud de otros objetos muy brillantes de tal manera que su magnitud incluso llega a ser negativo como es el caso de la estrella Sirio (magnitud $-1,4$).

El brillo aquí mencionado está relacionado con la **luminosidad L** o cantidad de energía luminosa emitida por una estrella cada segundo. Cuando la energía luminosa se transmite desde una fuente, se emite en todas direcciones distribuyéndose sobre regiones de espacio cada vez más grandes. Considerando una esfera imaginaria de radio d con centro en una fuente de luz, se tiene que la luminosidad L dividido por el área total de la superficie esférica nos da la cantidad denominada brillo aparente B . Esta cantidad es el flujo de energía o energía luminosa que pasa cada segundo por metro cuadrado de la esfera (Kauffmann, 1999); de modo que:

$$B = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Actualmente, y gracias a la evolución de la tecnología de los instrumentos de observación, la investigación de las estrellas variables comprende diversas técnicas visuales, fotográficas y fotoeléctricas. Con estas técnicas es posible confeccionar las denominadas **curvas de luz**, que son representaciones en las cuales se grafica las variaciones del brillo estelar versus el tiempo. El tipo de estrellas variables que han sido objeto de nuestro estudio se denomina **estrellas binarias eclipsantes** y pertenecen al grupo de las variables extrínsecas mencionadas anteriormente.

Las estrellas binarias son sistemas compuestos por dos estrellas que están girando una alrededor de la otra y se mantienen unidas por la fuerza de gravedad existente entre ellas (Echevarría, 1997). En general, el plano orbital de estos sistemas puede no estar cerca de la línea visual del observador; pero en el caso especial en que este plano se encuentre muy cerca de la **línea de visión**, una de las componentes pasará frecuentemente delante de la otra ocultándola y provocando en consecuencia una variación del brillo total del sistema (Campbell y Jacchia, 1946). De allí el nombre de binarias eclipsantes. Las componentes de estos sistemas están tan próximas entre sí que aún a través de un telescopio aparecen como si fuera una sola

estrella y sólo podemos percibir de ellas el cambio de su brillo en períodos que pueden ser de algunos años, días u horas.

Para descubrir si una estrella es realmente una binaria se emplea generalmente el espectroscopio de tal modo que a pesar de que las componentes de este sistema están muy cerca entre sí, es posible obtener sus espectros y determinar su período de revolución analizando la oscilación de las líneas espectrales de una componente respecto a las líneas de la otra. Otra forma de realizar estos descubrimientos se produce en el caso de las binarias eclipsantes donde es posible inferir su naturaleza binaria analizando su curva de luz que se caracteriza por tener en cada período dos mínimos que corresponden justamente a los eclipses de cada una de las componentes. Sin embargo aún dentro de las estrellas binarias se distinguen diferencias entre sus curvas de luz, dependiendo entre otras cosas del tipo de eclipse estelar (total o parcial) o de las características de las estrellas componentes.

De acuerdo al General Catalogue of Variable Stars (GCVS) se tienen tres tipos de sistemas binarios (ver figura 1) : En a) se tiene un sistema de estrellas binarias

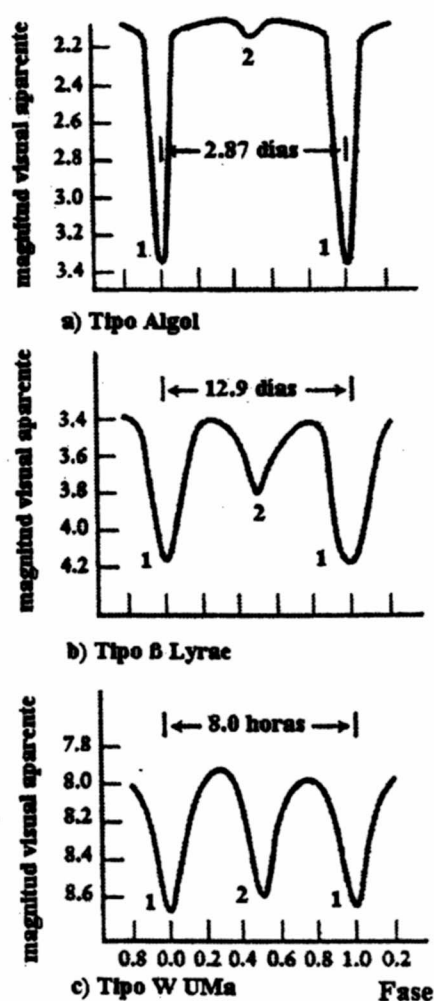


Figura 1. Tipos de estrellas binarias.

tipo Algol. Su curva de luz presenta dos mínimos bien definidos (puntos 1 y 2 en la Fig. 1a) que difieren entre sí por algunas magnitudes y entre los eclipses la luz permanece constante o varía de manera insignificante. Sus períodos pueden ser desde 0,2 hasta 10000 días. En b) se tiene una binaria tipo β Lyrae. Este es el caso de dos estrellas tan cercanas que sus componentes tienen forma elipsoidal y por esta razón no están bien determinadas los tiempos de inicio y fin de sus eclipses. Se puede ver en su curva de luz que la magnitud nunca permanece constante en ningún momento y sus mínimos (puntos 1 y 2) difieren en magnitud aunque no tanto como en el caso anterior. Sus períodos en general son mayores de un día. En c) se tiene un sistema tipo W UMa, cuyas componentes están casi en contacto y comparten por tanto sus atmósferas externas. Las profundidades de sus mínimos (puntos 1 y 2) son casi iguales. Tienen una curva de luz en la que no se pueden definir exactamente los tiempos de inicio y fin de los eclipses. Sus períodos son menores de un día.

Fundamentos de la fotometría astronómica

Básicamente, las técnicas para realizar fotometría son dos (Galadí-Enriquez, 1998):

FOTOMETRÍA ABSOLUTA

Mediante el cual se intenta medir el brillo de unas cuantas estrellas teniendo como referencia el brillo de un cierto número de estrellas esparcidas a lo largo de la noche, con diferentes alturas sobre el horizonte y con un rango de magnitudes que englobe al valor del brillo que podrían tener nuestras estrellas de interés.

FOTOMETRÍA DIFERENCIAL O RELATIVA

Según la cual se mide el brillo de una estrella teniendo en cuenta un reducido número de estrellas de referencia denominadas estrellas de comparación, las mismas que deben encontrarse en el cielo relativamente cerca a nuestra estrella problema. La fotometría diferencial mide la diferencia de brillo entre dos o más estrellas en un mismo campo. La fotometría absoluta, en cambio, mide el brillo absoluto de una estrella en una escala definida de magnitudes.

Un instrumento que permite medir el brillo de una estrella es el **fotómetro fotoeléctrico** que consiste de un tubo fotomultiplicador (Kitchin, 1984). En uno de los extremos de este tubo se encuentra el *fotocátodo* donde incide la luz de la estrella. El fotocátodo se encarga de liberar fotoelectrones que son acelerados por un potencial positivo hacia un electrodo cargado negativamente (primer dínodo). Cada

fotoelectrón incidiendo sobre el primer dínodo es capaz de excitar electrones a estados de energía más alta de modo que aquéllos con suficiente energía para superar la función trabajo del primer dínodo serán emitidos y luego acelerados mediante un potencial más alto al siguiente dínodo donde nuevamente se produce emisión secundaria. Este proceso se repite en cada dínodo hasta obtener una avalancha de electrones que finalmente son recogidos por el **ánodo** y producen una corriente eléctrica que es proporcional al número de fotones que interactúan con el fotocátodo. Finalmente la señal eléctrica producida por el ánodo es digitalizada por un convertidor V/F y liberado como un tren de pulsos que pueden ser contados. Por lo tanto la señal de salida es directamente proporcional al brillo de la luz incidente y su medición se reduce a la medida de corrientes eléctricas o a un cierto número de **cuentas** si el circuito está digitalizado.

Como el brillo B que incide en el detector es igual a la energía neta de la estrella por unidad de área A incidente y por unidad de tiempo t , entonces

$$B = \left(\frac{En}{A * t} \right)$$

La energía neta de una estrella es la energía después de corregida la contribución del fondo² del cielo en la zona próxima a la estrella. Así pues si I_V es el total de cuentas medido al observar la estrella variable y I_S es el total de cuentas medido del fondo del cielo de la estrella variable entonces la energía neta de la estrella variable En_V será proporcional a In_V :

$$En_V \propto In_V = I_V - I_S \quad \dots(2)$$

Análogamente, para el caso de la estrella de comparación C también se mide su energía neta En_C :

$$En_C \propto In_C = I_C - I_{SC} \quad \dots(3)$$

Siendo

I_C : el total de cuentas medido al observar la estrella de comparación C .

I_{SC} : el total de cuentas medido del fondo del cielo en la zona próxima a la estrella de comparación.

² La contribución del fondo puede deberse a otras fuentes de luz no deseadas (otras estrellas, luz zodiacal, luz artificial, etc.)

Entonces la razón de los brillos B_V y B_C (debido a la estrella variable V y a la estrella de comparación, respectivamente) será:

$$\frac{B_V}{B_C} = \left(\frac{I_{n_v}}{I_{n_c}} \right) \quad \dots(4)$$

En fotometría diferencial utilizamos la fórmula de Pogson (ecuación 1) algo modificada:

$$m_v = -2,5 \log \left(\frac{I_{n_v}}{I_{n_{cl}}} \right) + m_c \quad \dots(5)$$

donde

m_v, m_c : Las magnitudes de la estrella variable y de la estrella de comparación, respectivamente.

Ya que una fuente de luz, en general, está compuesta de diferentes longitudes de onda y todos los detectores no tienen la misma respuesta para cada longitud de onda, se tendrán diferentes magnitudes de acuerdo a aquella que se está detectando. Para obtener una medida en una determinada longitud de onda se emplean los filtros que dejan pasar la luz en una determinada banda. De esta manera, y de acuerdo al conjunto de filtros que se emplean se tienen diferentes sistemas. Por ejemplo el sistema Johnson-Morgan se compone de los siguientes tipos de filtros: U (365 nm), B (440 nm), V (550 nm), R (720 nm), I (900 nm). Si nosotros tuviéramos el espectro completo de una estrella podríamos ver que la curva graficada alcanzaría un pico en una determinada frecuencia. Luego de acuerdo a la ley de Wien se podría determinar la temperatura de dicha estrella para esa frecuencia pico.

Observación de la estrella binaria V505 Sgr

Para las observaciones se emplearon el telescopio refractor Takahashi (1050 mm de distancia focal y 15 cm de diámetro) y el fotómetro fotoeléctrico marca OPTEC modelo SSP-5. Este último llegó como donación al Instituto Geofísico del Perú y empezó a usarse justamente para este trabajo de astronomía.

Se eligió la estrella variable V505 Sgr, entre otros motivos por ser representativa de las binarias tipo Algol, porque sus respectivas estrellas de

comparación tienen casi el mismo tipo espectral y porque eran lo suficientemente brillantes para ser observadas por nuestro telescopio. Información sobre estas estrellas fue obtenida de las páginas web SIMBAD y VSNET (ver Tabla 1). Para ubicar estas estrellas en el cielo empleamos los mapas Sky Atlas 2000.0 adquiridos por el Grupo Astronomía (Ver Figura 2). El objetivo fue realizar mediciones del brillo de esta estrella según la técnica de fotometría diferencial, empleando para ello 2 distintas estrellas de comparación (las estrellas HD187664 y HD187411). Las observaciones se efectuaron durante las horas en que estas estrellas estaban cerca del cenit y cuando la reducción de la intensidad de radiación debido a la absorción y dispersión de la atmósfera terrestre es mínima. El tiempo de exposición empleado se fijó en 10 segundos. El filtro empleado fue V, que corresponde a la longitud de onda de 550 nm.

De ahora en adelante a la estrella binaria eclipsante V505 Sgr se le denominará indistintamente V505 Sgr o estrella variable V; mientras que a las estrellas HD 187664 y HD187411 se les denominará estrellas de comparación C1 y C2, respectivamente. Para este estudio se tuvieron ue observar 6 objetos: las estrellas V, C1 y C2, y el cielo que rodea a cada una de estas estrellas S_V , S_{C1} , S_{C2} . Se procedió a medir el número de cuentas en el detector de estos últimos 3 objetos para obtener las energías netas, según las relaciones (2) y (3). Para cada objeto se realizaron 3 lecturas seguidas del número de cuentas y se obtuvo el promedio de las mismas.

Objeto ¹	COORD. Ecuatoriales ¹ (2000.0)		Magnitud (Filtro V)	Tipo Espectral ¹ (Filtro V)
	Asc Recta	Declinación		
V505 Sgr	19 ^h 53 ^m 06,39 ^s	-14°36' 11,5"	6,46 - 7,51 ²	A1V
HD187664	19 ^h 51 ^m 41,84 ^s	-14°46' 36,7"	6,887 ¹	A3III
HD187411	19 ^h 50 ^m 22,59 ^s	-14°56' 12,2"	8,1 ¹	A7V

Tabla 1. Datos de la Estrella V505 Sgr y de sus estrellas de comparación

Período : 1.18287156 días²

1 Fuente : SIMBAD

2 Fuente : VSNET

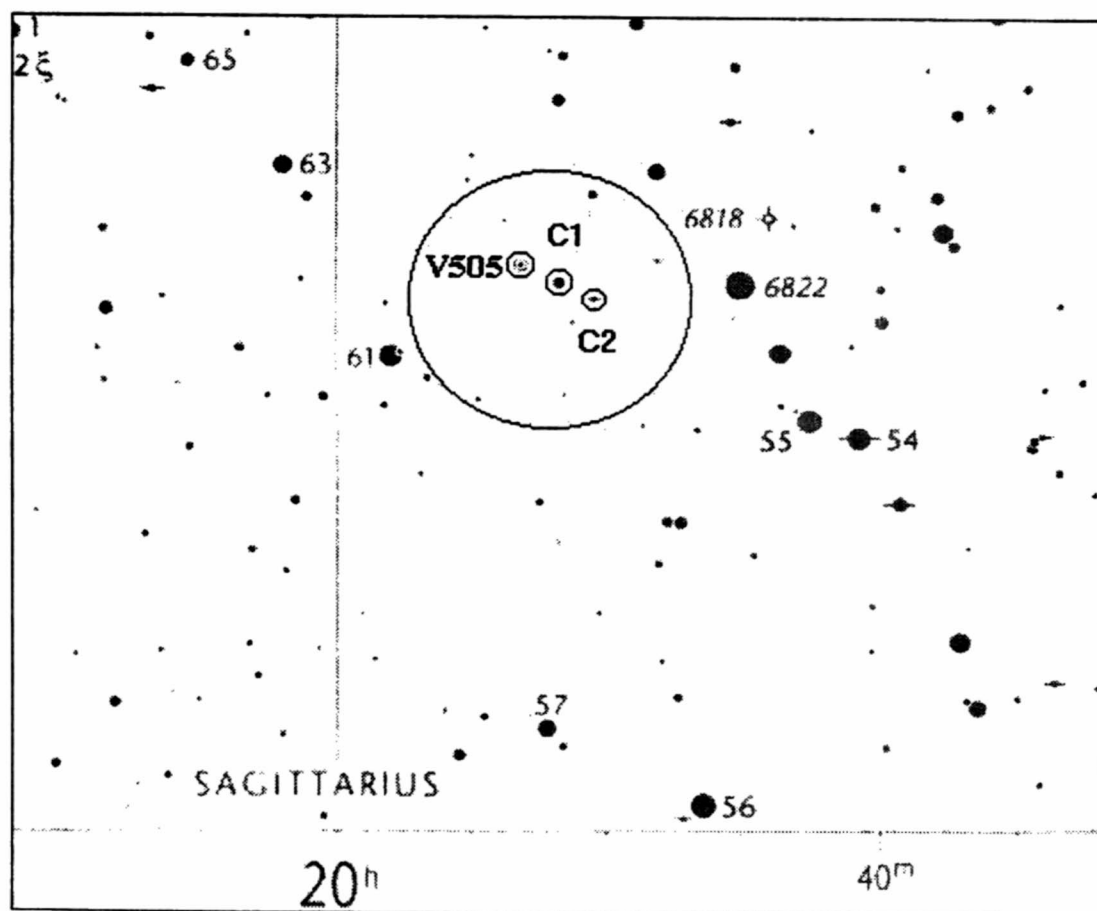


Figura 2. Estrella variable V505 Sgr y sus estrellas de comparación C1 y C2.

Con los valores promedio de I_V , I_S , I_{C1} , I_{SC1} , I_{C2} y I_{SC2} obtenidos en cada observación (sea una estrella o el fondo del cielo) se calculó por diferencia In_V , In_{C1} , In_{C2} , según se indica en las relaciones (2) y (3). Luego se calculó la magnitud de V empleando la relación (5) y tomando la estrella de comparación C1 como referencia. De igual manera se calculó la magnitud de V tomando la estrella de comparación C2 como referencia. Por lo tanto se obtuvieron 2 curvas de luz de la estrella variable.

Resultados y discusión

Debido a que la escala de magnitud es una escala inversa (mayor número corresponde a estrellas menos brillantes) se acostumbra trazar el eje vertical de magnitud en forma creciente hacia abajo. De esta manera cuando se produce un eclipse en una estrella binaria el brillo total del sistema decrece y esto se manifiesta en una caída de su curva de luz desde las magnitudes de valores bajos a magnitudes de valores más altos.

Por las referencias se sabe que la estrella V505 Sgr es una binaria del tipo Algol y según los datos de VSNET el período es de 1,18 día y la magnitud varía entre 6,46 y 7,51 (Ver Tabla 1). También se muestra las magnitudes de las estrellas de comparación según la base de datos SIMBAD.

En la Tabla 2, se presenta un resumen de las observaciones realizadas cada noche. Las horas que se efectuaron las observaciones aparecen en Tiempo Universal (T.U.) y corresponden a la hora en Perú más 5 horas. También se muestra el tiempo transcurrido desde las observaciones de la primera noche, algunos valores de la magnitud medida de V505 Sgr, mediante las dos estrellas de comparación (C1 y C2) y la magnitud medida de estas estrellas de comparación.

Día	T.U. h m s	Tiempo (Horas)	Magnitud Medida			
			mV (C1)	mV (C2)	MC1 (6.89)	MC2 (8.10)
28 Sep.	01:44:35	0,00	6,64	6,69		
	03:14:36	1,50	6,59	6,59	6,90±0,02	8,09±0,02
	04:41:46	2,95	6,54	6,59		
29 Sep.	01:33:36	23,82	6,64	6,64		
	03:47:16	26,04	7,51	7,51	6,86±0,05	8,13±0,05
	04:48:46	27,07	7,27	7,28		

Tabla 2. *Observaciones de V505 Sgr*

Los resultados pueden verse en las figuras 3, 4 y 5. Se puede notar que para un instante determinado la magnitud de la variable medida mediante las estrellas C1 y C2 coinciden aproximadamente durante toda la sesión de observación. Además puede notarse en las figuras 3 y 5 la magnitud de la estrella de comparación C2 mientras que en la figura 4 aparece la magnitud de la estrella de comparación C1. Se observa que la magnitud medida de las estrellas de comparación no varía significativamente por lo que se les puede considerar de brillo constante.

En la figura 3 se tienen las magnitudes medidas de la estrella V505 Sgr entre los días 28 y 29 de septiembre de 2000 (Tiempo universal). En esta figura, la forma

de la curva de luz parece indicar que durante las observaciones de la estrella variable se registraron dos eventos separados: uno, mientras terminaba un eclipse (en la primera noche de observación) y el segundo, al inicio de otro eclipse (segunda noche de observación).

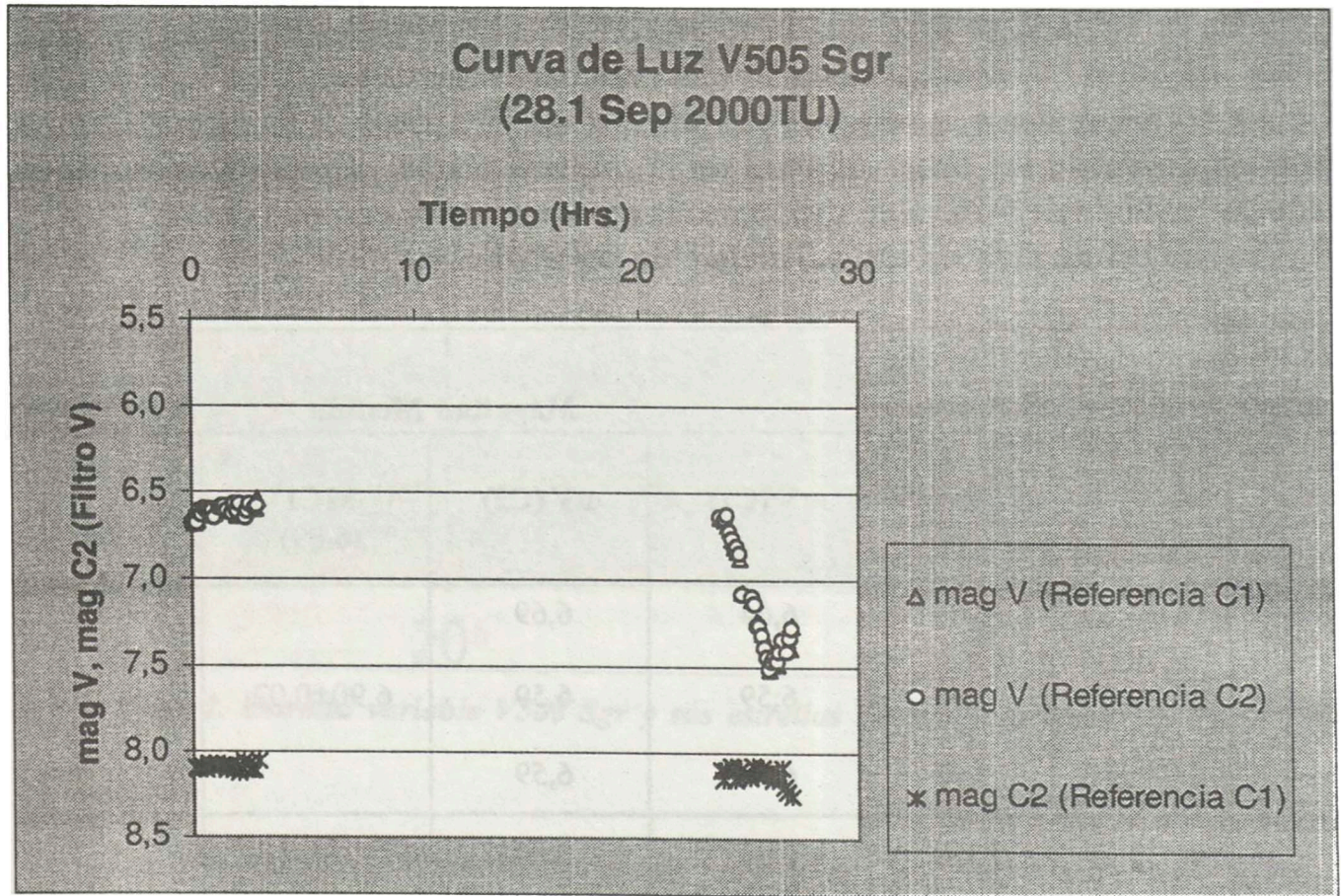


Figura 3. Observaciones de estrella variable V505 Sgr (28-29 septiembre 2000 TU).

Para analizar con más detalle la curva de luz de la estrella V505 Sgr en la figura 4 se muestran los resultados correspondientes a la primera noche de observación y la magnitud de la estrella de comparación C1 con respecto a la estrella de comparación C2. Durante esta noche de observación la magnitud medida de la estrella de comparación C1 fue de $6,90 \pm 0,02$ (la magnitud de C1 en promedio fue de 6,90, con una desviación estándar de 0,02). El resultado es muy cercano al valor de referencia de SIMBAD (6,887), lo que significa que las mediciones fueron correctas. Con respecto a la estrella variable, en ese mismo intervalo de tiempo se presentó una ligera variación de la magnitud desde 6,66 al inicio hasta 6,56 después de transcurridos 2,95 horas haciendo una variación de $-0,10$ (aumentó su brillo).

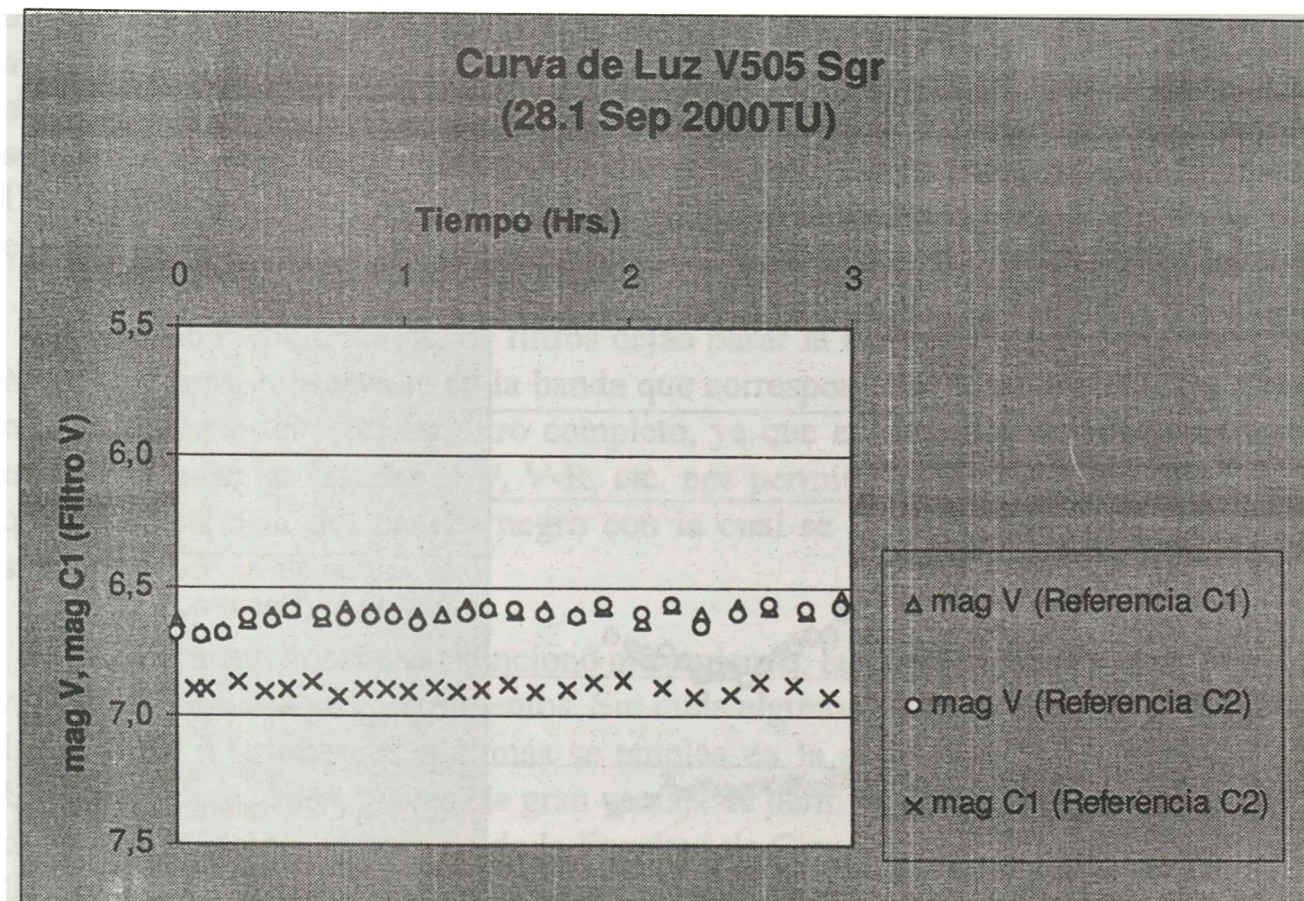


Figura 4. Observaciones de estrella variable V505 Sgr (28 Septiembre 2000 TU).

En la figura 5 se tiene la curva de luz de V505 Sgr para la segunda noche de observación. Aquí, la magnitud medida de la estrella de comparación C2 respecto de la estrella de comparación C1 es $8,13 \pm 0,05$ (la magnitud de C2 en promedio fue de 8,13; con una desviación estándar de 0,05) lo cual indica que es casi constante y cerca del valor de referencia 8,1 (Ver cuadro 1). Con este resultado podemos confiar en la precisión de nuestras mediciones de la magnitud de V505 Sgr. La segunda noche de observación la magnitud de la variable fue inicialmente 6,64 en promedio y luego hubo una tendencia a disminuir su brillo hasta alcanzar 7,51 de magnitud en promedio. De allí vuelve a aumentar su brillo hasta que finalmente, después de 3,25 horas; alcanza la magnitud 7,27 (+0,63 de variación en magnitud en todo el intervalo de observación).

La forma de la curva de luz indica que se estaba produciendo un eclipse (la variación máxima fue de 0,87 magnitudes en 2,22 horas). Para saber si se trataba del eclipse de la estrella principal (la más brillante) revisamos las referencias. Según éstas, la magnitud mínima debe ser 7,51; que es cuando se produce el eclipse de la estrella más brillante. Se obtuvo justamente este valor. La magnitud máxima debe ser 6,46 y los resultados obtenidos fueron 6,64.

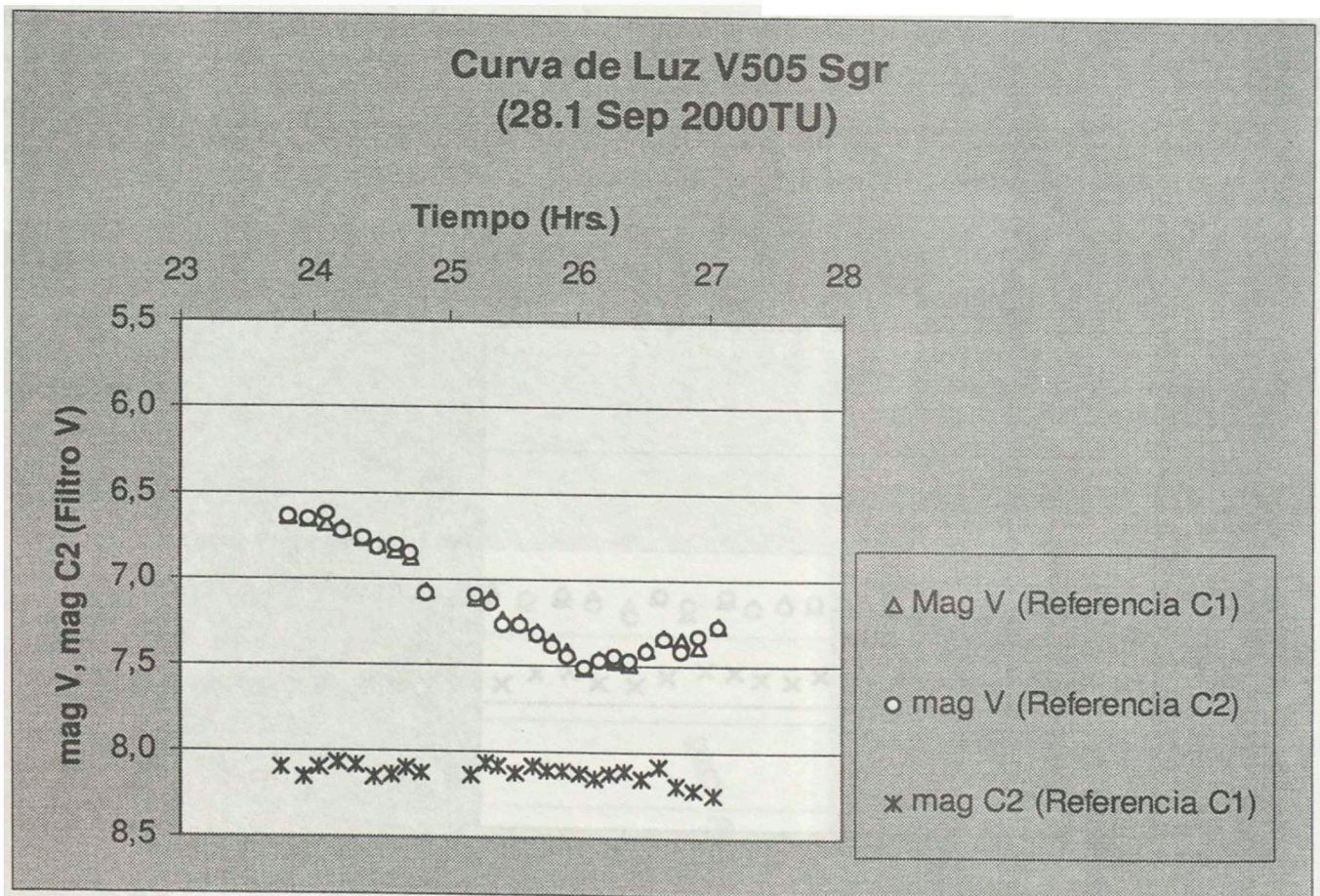


Figura 5. Observaciones de estrella variable V505 Sgr (29 septiembre 2000 TU).

Con la finalidad de explicar la forma de la curva de luz de la estrella V505 Sgr en la figura 5 se hará una revisión de qué ocurre al producirse el eclipse. Por las referencias (Tabla 1), cuando no hay ningún eclipse la magnitud de la estrella variable debe ser máxima e igual a 6,46. Luego cuando la estrella más brillante empieza a ser eclipsada por su compañera, su brillo empieza a descender y por tanto su magnitud varía del valor inicial mencionado; pasando por 6,64 (magnitud medida cuando se inició la observación), hasta alcanzar el valor de 7,51 cuando el eclipse de la estrella principal es máximo (este valor fue registrado durante las observaciones). De allí la magnitud vuelve a cambiar pasando por 7,27 (registrado cuando se terminó la observación) hasta alcanzar nuevamente el valor de 6,46. Con estos resultados se puede deducir que se ha observado una parte del eclipse principal.

Conclusiones

Se ha visto que la técnica de fotometría diferencial empleando un fotómetro fotoeléctrico produce resultados muy cercanos a las referencias por lo que se puede

afirmar que, los resultados obtenidos son bastante precisos. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede realizar observaciones de las estrellas y con mayor precisión aquéllas como las variables, siendo de gran interés en el área de astronomía. Aquí sólo se ha obtenido una parte de la curva de luz de la estrella variable mencionada. De la curva completa, se podría deducir el período de esta curva que viene a ser el período de rotación del sistema binario.

Como mencionamos los filtros dejan pasar la luz en una determinada banda. Nosotros hemos observado en la banda que corresponde al filtro V (550 nm). Pero no es necesario tener el espectro completo, ya que en una estrella la diferencia de magnitud entre las bandas B-V, V-R, etc. nos permite inferir la curva del espectro que se ajusta a la del cuerpo negro con la cual se puede obtener la temperatura superficial de la estrella.

Finalmente, como se mencionó al comienzo, las técnicas fotométricas pueden realizarse con diversos instrumentos. Sin duda algunos serán más precisos que otros. Uno de los instrumentos que más se emplea en la actualidad es la cámara CCD. Este instrumento tiene además la gran ventaja de permitir obtener imágenes de dichos objetos. El Grupo Astronomía de la Facultad de Ciencias cuenta ya con una cámara CCD con la cual podrán realizarse estudios fotométricos.

Agradecimientos

Agradezco, a los profesores Armando Bernui, Holger Valqui y Antonio Pereyra de la Universidad Nacional de Ingeniería por revisar este artículo; al Grupo Astronomía de la UNI por los mapas y la bibliografía que fueron de mucha utilidad; al Sr. Shin-ya Narusawa y al Dr. José Ishitsuka en Japón por su valiosa información. También al Instituto Geofísico del Perú, en especial al personal del Observatorio de Ancón, bajo la dirección del Dr. Mutsumi Ishitsuka, por el apoyo y las facilidades brindadas para desarrollar este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] **Ripero, J.**, (1986): *Revista Tribuna de Astronomía, Equipo Sirius, S.A., España.*
- [2] **Kaufmann, W y Freedman, R.**, (1998): *Universe, W.H. Freeman and Company, USA.*
- [3] **Echevarría, J.**, (1997): *Estrellas Binarias Interactivas, Fondo de Cultura Económica, México.*
- [4] **Campbell, L y Jacchia, L.**, (1946): *Historia de las Estrellas Variables, Pleamar, Argentina.*

- [5] **Galadi-Enriquez, D. y Ribas Canudas, I.**, (1998): *Manual Práctico de Astronomía con CCD*, Omega S.A., España.
- [6] **Sterken, Chr.**, (1992): *Astronomical Photometry a Guide*, Kluwer Academic Publishers, USA.
- [7] **Kitchin, C. R.**, (1984): *Astrophysical Techniques*, Adam Hilger Ltd, Gran Bretaña.
- [8] **Tello, Julio** (2001): *Estudio de Estrellas Binarias por el método de fotometría diferencial. Compendio de Trabajos de Investigación realizados por estudiantes durante el año 2000*, pág. 9, volumen 2. Instituto Geofísico del Perú.

Mapas:

- [9] **Sky Atlas 2000.0**, Sky Publishing Corporation, USA, 1998.

Internet:

- [10] **AAVSO**, American Asociation of Variable Stars Observers : (<http://www.aavso.org>)
- [11] **GCVS**, General Catalogue of Variable Stars:
(<http://www.sai.msu.su/groups/cluster/gcvs/gcvs/iii/vartype.txt>)
- [12] **SIMBAD**, Astronomical Database : (<http://cdsweb.u-strasbg.fr/Simbad.html>)
- [13] **VSNET**, Variable Star Network :
(<http://www.kusastro.kyoto-.ac.jp/vsnet/index.html>).

Solución local completa para un punto material sobre la tierra rotante

H.G. Valqui*

RESUMEN

En los más conocidos textos de Mecánica [ver Referencias] existe cierta confusión con respecto: i) Al uso de la segunda Ley de Newton en una referencia no inercial, ii) Al uso de varias referencias, entre las que exista rotaciones. Adicionalmente se suele obtener las ecuaciones diferenciales locales resultantes en forma (innecesariamente) sólo aproximada. En el presente artículo se eligen las referencias de manera que se aplica la SLN sólo en una referencia inercial (sin recurrir al artificio antipedagógico de las fuerzas ficticias) y se obtiene las ecuaciones diferenciales de las coordenadas sin aproximaciones. Interesantemente, en el caso particular de un proyectil, la solución resulta (contraintuitivamente) periódico-senoidal. Se muestra que, sin embargo, tal solución es consistente con el caso límite de la Tierra no rotante.

ABSTRACT

The usual Classical Mechanics books (see Ref.) contains some confusing ideas about:

*Facultad de Ciencias / Universidad Nacional de Ingeniería.

- i) *The application of the Second Newton's Law in not inertial references,*
 ii) *The transformations of coordinates between references which rotate with relation to each other. Furthermore the differential equation for the local coordinates are unnecessarily gotten only approximately.*

In this article the Second Law is applied only in an inertial reference (thus avoiding the use of fictive forces) and the corresponding differential equation are constructed exactly. In the particular case of a projectile, although the equations for the coordinates are mathematically periodic it is shown that they are physically sound and in agreement with the limit case of a non-rotating Earth.

Consideremos tres referencias, donde los \mathbf{e}_k^0 , \mathbf{e}_k' y \mathbf{e}_k son vectores geométricos que caracterizan a los ejes de tales referencias:

- i) S^0 es una **referencia inercial**, cuyo origen está en el centro de la Tierra esférica, O^0 , y cuyos ejes apuntan a la estructura rígida de las estrellas lejanas, siendo el tercer eje $O^0\mathbf{e}_3^0$ coincidente con el eje polar terrestre,
- ii) S' es una referencia auxiliar, fija a la Tierra, cuyo origen y tercer eje, $O'\mathbf{e}_3'$, coinciden con el origen y tercer eje de S^0 (y cuyos dos ejes están en el plano ecuatorial). Esta referencia rota, alrededor del eje $O^0\mathbf{e}_3^0$ con velocidad angular w , de manera que $w = w \cdot \mathbf{e}_3^0$.
- iii) S es una **referencia local**, fija a la Tierra, cuyo origen, O , está sobre la superficie de la Tierra, en el plano formado por $O\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, de manera que O^0O forma el ángulo geográfico ψ con el eje $O\mathbf{e}_2'$.

Como puede apreciarse del dibujo, los vectores unitarios de S' se obtienen de los de S^0 , según:

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1^0 \cos wt + \mathbf{e}_2^0 \sin wt \quad [1]$$

$$\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1^0 \sin wt + \mathbf{e}_2^0 \cos wt \quad [2]$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3^0 \quad [3]$$

$$\text{con } \mathbf{e}_1' \times \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_3^0$$

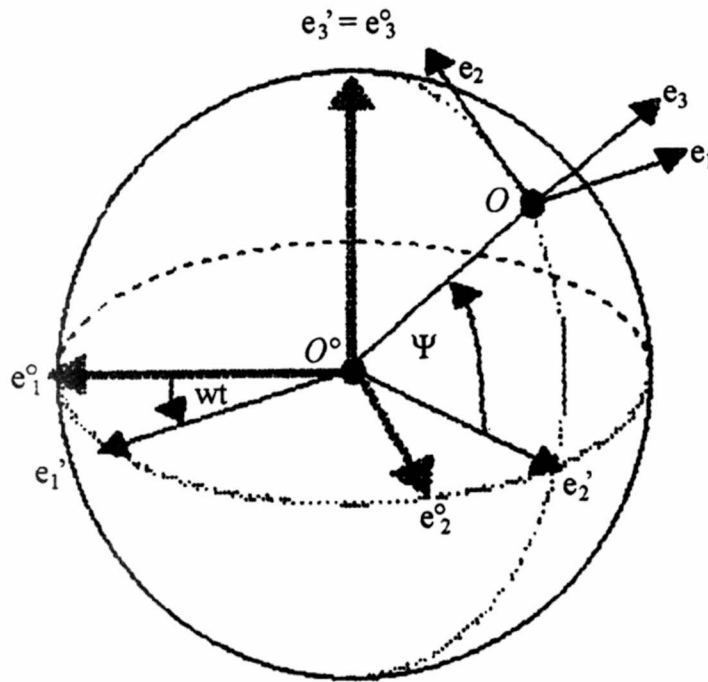
Por otra parte, también obtenemos:

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1' \quad [4]$$

$$\mathbf{e}_2 = -\sin \psi \cdot \mathbf{e}_2' + \cos \psi \cdot \mathbf{e}_3' \quad [5]$$

$$\mathbf{e}_3 = \cos \psi \cdot \mathbf{e}_2' + \sin \psi \cdot \mathbf{e}_3' \quad [6]$$

cumpléndose que, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$.



Entonces los vectores geométricos unitarios de la referencia local S quedarán expresados, como combinaciones lineales de los vectores unitarios de la referencia inercial S^0 , de la siguiente manera:

$$e_1 = -\cos wt \, e_1^0 - \sin wt \, e_2^0 \quad [7]$$

$$e_2 = \sin \psi \cdot \sin wt \, e_1^0 - \sin \psi \cdot \cos wt \, e_2^0 + \cos \psi \cdot e_3^0 \quad [8]$$

$$e_3 = -\cos \psi \cdot \sin wt \, e_1^0 + \cos \psi \cdot \cos wt \, e_2^0 + \sin \psi \, e_3^0 \quad [9]$$

En lo que sigue usaremos las igualdades [4], [5] y [6], sin que nos interese el significado geométrico de los vectores e_k (direcciones de los ejes de S').

Consideremos un punto material P del espacio (en la vecindad del origen de S). Diremos que un observador es **un observador propio de una referencia** cuando dicho observador use a tal referencia para localizar los puntos materiales.

Para un observador propio de S el **vector geométrico de posición** de dicho punto material será \mathbf{OP} , mientras que para un observador propio de S^0 el correspondiente vector geométrico de posición será $\mathbf{O^0P} = \mathbf{O^0O} + \mathbf{OP} = R \cdot e_3 + \mathbf{OP}$, donde R es el radio de la Tierra.

[Notemos que \mathbf{OP} , como cualquier otro vector geométrico, puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores geométricos de base de la referencia S, de la referencia S^0 , o de cualquier otra referencia].

Sea $\mathbf{r} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$ [10]
 donde x_k son las coordenadas de P en la referencia S, es decir, $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$.
 Consecuentemente $\mathbf{O}^0\mathbf{P} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{r}$.

Para el observador propio de S los vectores geométricos \mathbf{e}_k están fijos, de manera que la velocidad, \mathbf{v} , y la aceleración, \mathbf{a} , del punto material P, serán:

$$\mathbf{v} = \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{x}_3 \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{a} = \ddot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3 \mathbf{e}_3 \quad [11]$$

En cambio, para el observador propio de S^0 los vectores geométricos \mathbf{e}_k varían temporalmente de manera que, para él, la velocidad, \mathbf{v}^0 , y la aceleración, \mathbf{a}^0 , del punto material P quedarán expresados por:

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v} + \dot{x}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{x}_3 \dot{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a} + 2(\dot{x}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{x}_3 \dot{\mathbf{e}}_3) + \ddot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2 \mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3 \mathbf{e}_3$$

Por otra parte tenemos,

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{e}_1''$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \sin\psi \mathbf{e}_2'' + \cos\psi \mathbf{e}_3''$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \cos\psi \mathbf{e}_2'' + \sin\psi \mathbf{e}_3''$$

$$\mathbf{e}_1'' = -\mathbf{e}_1''', \quad \mathbf{e}_2'' = -\sin\psi \mathbf{e}_2''' + \cos\psi \mathbf{e}_3'''$$

$$\mathbf{e}_3'' = \cos\psi \mathbf{e}_2''' + \sin\psi \mathbf{e}_3'''$$

donde, teniendo presente que los vectores geométricos \mathbf{e}_k^0 son fijos para un observador propio de S^0 ,

$$\mathbf{e}_1'' = w (-\mathbf{e}_1^0 \sin wt + \mathbf{e}_2^0 \cos wt),$$

$$\mathbf{e}_2'' = -(\mathbf{e}_1^0 \cos wt + \mathbf{e}_2^0 \sin wt),$$

$$\mathbf{e}_3'' = \mathbf{0}.$$

Ahora, teniendo presente que

$$\mathbf{e}_1^0 = -\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_2^0,$$

$$\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0, \text{ obtenemos}$$

$$\mathbf{e}_1'' = w \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0$$

$$\mathbf{e}_2'' = w \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_2^0$$

$$\mathbf{e}_3'' = \mathbf{0} \text{ y también:}$$

$$\mathbf{e}_1''' = w^2 \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0)$$

$$\mathbf{e}_2''' = w^2 \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_2^0)$$

$$\mathbf{e}_3''' = \mathbf{0}$$

Reemplazando esto en las expresiones para \mathbf{e}_k^{\cdot} y $\mathbf{e}_k^{\cdot\cdot}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^{\cdot} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_2^{\cdot} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3^{\cdot} &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1^{\cdot\cdot} &= \mathbf{w}^2 \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}_2^{\cdot\cdot} &= \mathbf{w}^2 \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_3^{\cdot\cdot} &= \mathbf{w}^2 \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_3)\end{aligned}$$

con lo cual los vectores \mathbf{v}^0 y \mathbf{a}^0 toman las formas:

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{r} \quad [12]$$

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a} + 2 \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{v} + \mathbf{w}^2 \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{r}) \quad [13]$$

donde $\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_3^0$ es el vector de la velocidad angular de la Tierra (y por lo tanto, velocidad angular de S) con respecto a S^0 (es decir, con respecto a las Estrellas Lejanas. Esta es la aproximación que estamos considerando).

Por otra parte, de [8] y [9] obtenemos que;

$$\cos\psi \mathbf{e}_2 + \sin\psi \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^0 \quad [14]$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{v} &= (x_3^{\cdot} \cos\psi - x_2^{\cdot} \sin\psi) \mathbf{e}_1 + x_1^{\cdot} \sin\psi \mathbf{e}_2 - x_1^{\cdot} \cos\psi \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{r}) &= -x_1^{\cdot} \mathbf{e}_1 + (x_3^{\cdot} \cos\psi - x_2^{\cdot} \sin\psi) \sin\psi \mathbf{e}_2 - (x_3^{\cdot} \cos\psi - x_2^{\cdot} \sin\psi) \cos\psi \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

lo cual, reemplazado en [13], nos permite escribir la aceleración, \mathbf{a}^0 , de la partícula puntual con respecto a la referencia inercial S^0 , en función de los vectores geométricos unitarios de la referencia local S (es decir, como combinación lineal de los vectores unitarios de S):

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^0 &= \mathbf{a} + \\ &2\mathbf{w} [(x_3^{\cdot} \cos\psi - x_2^{\cdot} \sin\psi) \mathbf{e}_1 + x_1^{\cdot} \sin\psi \mathbf{e}_2 - x_1^{\cdot} \cos\psi \mathbf{e}_3] + \\ &\mathbf{w}^2 [-x_1^{\cdot} \mathbf{e}_1 + (x_3^{\cdot} \cos\psi - x_2^{\cdot} \sin\psi) \sin\psi \mathbf{e}_2 - (x_3^{\cdot} \cos\psi - x_2^{\cdot} \sin\psi) \cos\psi \mathbf{e}_3] \quad [15]\end{aligned}$$

Por su parte, el vector geométrico \mathbf{F} que representa a la resultante de las fuerzas que están actuando sobre el punto material (y que puede depender tanto de la posición como del tiempo), puede ser expresado como combinación lineal de los vectores de la base S, o de los vectores de la base de S^0 , como mejor convenga. Siendo S^0 una referencia inercial, podemos aplicar la Segunda Ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}^0 \quad [16]$$

que se constituye en la ecuación diferencial del movimiento.

A continuación trataré de lograr que esta ecuación vectorial, [16], genere ecuaciones escalares fácilmente integrables.

Primeramente, multiplicando [16] escalarmente por \mathbf{e}_3^0 , obtenemos una ecuación diferencial ordinaria, para la variable $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3^0$:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3^0 = m (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3^0)'' \quad [17]$$

Con el fin de obtener otras ecuaciones diferenciales escalares multipliquemos [16] escalarmente por un vector constante \mathbf{q} , que caracterizaremos más adelante.

Teniendo en cuenta [13], obtenemos

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{F} = m[\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} + 2w \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{v} + w^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{r})] \quad [18]$$

Ahora trataremos de elegir \mathbf{q} de manera que [18] se convierta en una ecuación diferencial ordinaria para la variable $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$. Notemos que:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})'', \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{v} = [(\mathbf{q} \times \mathbf{e}_3^0) \cdot \mathbf{r}]', \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{r}) = (\mathbf{q} \times \mathbf{e}_3^0) \times \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{r}$$

y que si existiese un número σ tal que $\mathbf{q} \times \mathbf{e}_3^0 = \sigma \mathbf{q}$, entonces $(\mathbf{q} \times \mathbf{e}_3^0) \times \mathbf{e}_3^0 = \sigma^2 \mathbf{q}$, con lo cual:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})'', \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{v} = \sigma (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})', \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_3^0 \times (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{r}) = \sigma^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$$

y la expresión [17] tomaría la forma:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{F} = m[(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})'' + 2w \cdot \sigma (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})' + w^2 \sigma^2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] \quad [19]$$

que es una ecuación diferencial ordinaria, para la variable $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$.

Si σ fuese un número real la ecuación $\mathbf{q} \times \mathbf{e}_3^0 = \sigma \cdot \mathbf{q}$ no poseería solución, pues el primer miembro sería perpendicular al vector \mathbf{q} , mientras que el segundo miembro resultaría paralelo al mismo vector \mathbf{q} . Tratándose de una ecuación con vectores geométricos, conviene expresar $\mathbf{q} = q_1^0 \mathbf{e}_1^0 + q_2^0 \mathbf{e}_2^0 + q_3^0 \mathbf{e}_3^0$, entonces la condición $\mathbf{q} \times \mathbf{e}_3^0 = \sigma \mathbf{q}$ toma la forma:

$$q_2^0 \mathbf{e}_1^0 - q_1^0 \mathbf{e}_2^0 = \sigma \mathbf{q} \text{ es decir, } q_2^0 = \sigma q_1^0, \quad -q_1^0 = \sigma q_2^0, \quad q_3^0 = 0$$

de donde obtenemos $\sigma^2 = -1$, $\sigma = \pm i$, $\mathbf{q} = c (\mathbf{e}_1^0 + \sigma \mathbf{e}_2^0)$, donde c es una constante arbitraria que, por afectar a ambos miembros [18], puede ser considerada igual a la unidad.

Por otra parte, con el objeto de expresar \mathbf{q} en la base de la referencia S, de [7], [8] y [9] despejaremos:

$$\mathbf{e}_1^0 = -\cos\omega t \mathbf{e}_1 + \sin\psi \sin\omega t \mathbf{e}_2 - \cos\psi \sin\omega t \mathbf{e}_3 \quad [14.1]$$

$$\mathbf{e}_2^0 = -\sin\omega t \mathbf{e}_1 - \sin\psi \cos\omega t \mathbf{e}_2 + \cos\psi \cos\omega t \mathbf{e}_3 \quad [14.2]$$

lo que permite escribir

$$\mathbf{q} = -(\cos\omega t + \sigma \sin\omega t)\mathbf{e}_1 - \sigma \sin\psi (\cos\omega t + \sigma \sin\omega t)\mathbf{e}_2 + \sigma \cos\psi (\cos\omega t + \sigma \sin\omega t)\mathbf{e}_3$$

es decir,

$$\mathbf{q} = -e^{\sigma\omega t}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{e}_1 + \sigma \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \equiv \sin\psi \mathbf{e}_2 - \cos\psi \mathbf{e}_3 \quad [20]$$

Ahora teniendo presente que:

$$(f e^{\sigma\omega t})'' = (f'' + \sigma \omega f' + \sigma^2 \omega^2 f) e^{\sigma\omega t}$$

la ecuación [19] puede escribirse como:

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{F}) e^{\sigma\omega t} = m[(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) e^{\sigma\omega t}]''$$

o, también:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}) e^{2\sigma\omega t} = m[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) e^{2\sigma\omega t}]'', \quad \sigma^2 = -1 \quad [21]$$

que es la ecuación diferencial buscada, para la variable $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$.

Nótese que ya contamos con tres ecuaciones diferenciales escalares reales; una primera está dada por [17], las otras dos están implícitas en la parte real y la parte imaginaria de [21]. Además, los segundos miembros de dichas ecuaciones son directamente integrables. Las dificultades podrían presentarse en las integraciones de los primeros miembros de las mencionadas ecuaciones, que dependen de la forma de la fuerza actuante.

Caso de una fuerza constante

Consideramos un cuerpo en la vecindad de la superficie de la Tierra, y en la vecindad del origen de S. Entonces podemos suponer que la fuerza que la Tierra ejerce sobre dicho cuerpo puntual no cambia de dirección, es decir, \mathbf{F} es constante. Entonces tanto $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3^0$ como $\mathbf{q} \cdot \mathbf{F}$ son también constantes y las ecuaciones [17] y [19*] se pueden integrar fácilmente:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_3^0 = A + B t + (1/2m)t^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3^0 \quad [17*]$$

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) e^{2\sigma\omega t} = -(1/4m\omega^2) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}) e^{2\sigma\omega t} + (C t + D) \quad \text{ó}$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = -(1/4m\omega^2) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}) + (C t + D) e^{-2\sigma\omega t} \quad [21*]$$

donde A,B,C,D son constantes de integración, a ser determinadas por las condiciones iniciales.

Nótese que [17*] y [21*] están expresadas en la referencia S, y que \mathbf{e}_3^0 juega el papel de un vector de significado netamente matemático, dado por [14].

Derivando [17*] y [21*] con respecto al tiempo (\mathbf{F} y \mathbf{e}_k son constantes), obtenemos:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3^0 = B + (1/m)t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3^0 \quad [17^{**}]$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = (C - 2\sigma w D - 2\sigma w C t) e^{-2\sigma w t} \quad [21^{**}]$$

Si ahora designamos con \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 la posición y la velocidad iniciales de la partícula puntual, de [17*], [21*], [17**] y [21**] obtenemos:

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{e}_3^0 = A, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0 = -(1/4mw^2) \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}) + D, \quad \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_3^0 = B, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_0 = C - 2\sigma w D \quad [22]$$

de donde:

$$A = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{e}_3^0, \quad B = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e}_3^0, \quad C = \mathbf{p} \cdot [\mathbf{v}_0 + 2\sigma w (\mathbf{r}_0 + \mathbf{F}/4mw^2)], \quad D = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{F}/4mw^2) \quad [22^*]$$

o también,

$$C = C_1 + \sigma C_2, \quad D = D_1 + \sigma D_2, \quad \text{con}$$

$$C_1 = \mathbf{v}_{10} - 2wD_2, \quad C_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0 + 2wD_1, \quad D_1 = (\mathbf{x}_{10} + \mathbf{F}_1/4mw^2), \quad D_2 = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{F}/4mw^2)$$

Reemplazando esto en [21*], obtenemos:

$$x_1 = F_1/(4mw^2) + (C_1 t + D_1)\cos 2wt + (C_2 t + D_2)\sin 2wt \quad [23]$$

$$x_2 \sin \psi - x_3 \cos \psi =$$

$$-1(4mw^2)(F_2 \sin \psi - F_3 \cos \psi) + (C_2 t + D_2)\cos 2wt - (C_1 t + D_1)\sin 2wt \quad [24]$$

y, de [17*]

$$x_2 \cos \psi + x_3 \sin \psi =$$

$$x_{20} \cos \psi + x_{30} \sin \psi + (v_{20} \cos \psi + v_{30} \sin \psi) t + (1/2m)(F_2 \cos \psi + F_3 \sin \psi) t^2 \quad [25]$$

que es la forma general de las ecuaciones de las coordenadas locales de un punto material, sometido a una fuerza constante. Nótese que w se encuentra en el denominador, por lo cual no es posible tomar simplemente $w=0$, para comparar este resultado con el que se obtiene para el caso de la Tierra no rotante.

Para mejor apreciar las características de la solución anterior, consideraremos el caso de una 'piedra' que cae desde una altura H , con velocidad inicial nula; es decir, $\mathbf{F} = -mg \mathbf{e}_3^0$, $\mathbf{r}_0 = H \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_0 = 0$. En tal caso tendremos:

$$x_1 = (C_1 t + D_1) \cos 2\omega t + (C_2 t + D_2) \sin 2\omega t$$

$$x_2 \sin \psi - x_3 \cos \psi = -(g/4\omega^2) \cos \psi + (C_2 t + D_2) \cos 2\omega t - (C_1 t + D_1) \sin 2\omega t$$

$$x_2 \cos \psi + x_3 \sin \psi = (H - g t^2/2) \sin \psi$$

con

$$C_1 = -2\omega D_2, \quad C_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = -(H - g/4\omega^2) \cos \psi.$$

Es decir,

$$x_1 = (H - g/4\omega^2) (2\omega t \cos 2\omega t - \sin 2\omega t) \cos \psi \quad [\text{P1}]$$

$$x_2 = [-g t^2/2 + (H - g/4\omega^2)(1 - \cos 2\omega t - 2\omega t \sin 2\omega t)] \sin \psi \cos \psi \quad [\text{P2}]$$

$$x_3 = H - (g t^2/2) \sin^2 \psi - (H - g/4\omega^2) (1 - \cos 2\omega t - 2\omega t \sin 2\omega t) \cos^2 \psi \quad [\text{P3}]$$

Las soluciones [P1, P2, P3] (comparadas con lo que se conoce para el caso $\omega=0$) aparentan sufrir dos inconvenientes significativos:

- i) A pesar de referirse a una 'piedra' que cae, ellas son periódicas,
- ii) En el desplazamiento vertical, x_3 , el sumando debido a la aceleración gravitacional depende fuertemente de la posición geográfica, ψ .
- Con respecto a la forma periódica de las soluciones, debemos tener presente que *no todas* las características del modelo matemático representan necesariamente características físicas. En el presente caso, las soluciones son válidas solamente en las vecindades del origen de S , donde se puede suponer que la fuerza de atracción de la Tierra es constante. Esto significa un recorrido del proyectil que (en su movimiento Este- Oeste) no sobrepase, digamos, 10° ó $10 \times \pi / 180 \approx 0,17$ radianes; es decir, $\omega t < 0,17$. Así se ve que el (matemático) efecto periódico no tiene tiempo para manifestarse.
- La fuerte dependencia de las soluciones con respecto a la posición geográfica es, efectivamente, sólo aparente. Para ver esto desarrollemos las funciones senoidales en series, hasta el 4º orden (ωt es pequeño):
 $\sin 2\omega t \approx 2\omega t - 4\omega^3 t^3/3, \quad \cos 2\omega t \approx 1 - 2\omega^2 t^2 + 2\omega^4 t^4/3$

Entonces,

$$x_1 \approx -2\omega t^3 (4H\omega^2 - g) \cos \psi = 2\omega g t^3 \cos \psi - 8\omega^3 t^3 \cos \psi$$

$$x_2 \approx -\omega^2 t^2 [2H (1 - \omega^2 t^2 + g t^2/2)] \sin \psi \cos \psi$$

$$x_3 \approx H - g t^2/2 + \omega^2 t^2 [2H - \frac{2}{3} H\omega^2 t^2 + \frac{1}{6} g t^2] \cos^2 \psi$$

donde podemos apreciar que, para x_2 y x_3 , las desviaciones con respecto al caso límite $w = 0$ son muy pequeñas (proporcionales a $w^2 t^2$). En cambio, la desviación para el caso de la coordenada Este-Oeste es más apreciable, proporcional a wt^3 , y se lo conoce como efecto de la (inexistente) fuerza de Coriolis.

Conclusión

Partiendo de una referencia inercial se han obtenido, en [17] y [21] tres ecuaciones diferenciales exactas que describen la dinámica de una partícula material con respecto a una referencia local terrestre, y cuyos segundos miembros son directamente integrables. Por otra parte se han obtenido las ecuaciones generales para el movimiento de un proyectil, [23-25], verificando en un ejemplo que, a pesar del carácter matemáticamente periódico de aquellas, dichas soluciones son consistentes con el caso límite de la Tierra inercial y, también con los resultados experimentales que suelen ser justificados recurriendo a la fuerza ficticia de Coriolis.

Además debo mencionar que las fórmulas obtenidas para el caso del proyectil coinciden sólo parcialmente con las aproximaciones presentadas en los textos de la referencia bibliográfica.

REFERENCIAS

- [1] *A. Sommerfeld, Mechanik, Geest & Portig, 1964.*
- [2] *H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley, segunda edición.*
- [3] *S. Targ, Theoretical Mechanics, Mir, 1968.*
- [4] *H. G. Valqui; Apuntes de Mecánica, 1999.*

Los estados cuánticos y los ejes principales de inercia

Holger G. Valqui

RESUMEN

Entre los estados cuánticos, con los operadores que representan a los observables físicos, y la matriz de inercia de una distribución de masa con sus ejes principales, existe una similitud matemática que permite visualizar el significado de conceptos tales como: estados propios de un Sistema Físico, SF, simetría de un SF y degeneración de los valores propios, modo de acción de las perturbaciones, estabilidad de los valores propios y de los correspondientes estados cuánticos del SF. Tal hecho puede ser aprovechado ventajosamente para enriquecer la intuición de los estudiantes de los cursos de Mecánica Cuántica.

ABSTRACT

There exists a mathematical similarity between quantum states, with its operators representing the observables of a physical system, and the Matrix of Inertia corresponding to a mass distribution. This fact provides an advantageous way to grasp the meaning of quantum concepts like proper states, symmetry and degeneration, perturbations, stability of the proper values and the corresponding states. This fact could be profitably used to enhance the students' intuition for lectures on Quantum Mechanics.

* Facultad de Ciencias / Universidad Nacional de Ingeniería.

En el modelo cuántico, el comportamiento de un Sistema Físico, SF, constituido por un conjunto de partículas sometidas a un cierto potencial V (y ciertas condiciones de contorno), está determinado por la ecuación estacionaria de Schroedinger:

$$H \varphi = E \varphi$$

donde el operador $H = (1/2m)P^2 + V$ permite extraer toda la información sobre la energía, del SF, contenida en la función de estado estacionario φ .

En el modelo cuántico, los operadores que representan a los observables físicos son autoadjuntos, $H^+ = H$. Esto tiene como consecuencia que: i) Los valores propios de tales operadores son reales, ii) A dos valores propios diferentes corresponden vectores propios ortogonales uno al otro, iii) Las funciones propias de un operador, que representa a un observable, constituyen una base del espacio (de Hilbert) que sirve para describir al SF.

En el caso de que φ sea un estado propio del operador H , entonces E es precisamente la energía que posee el SF en dicho estado. Pero si φ no es un estado propio de H , entonces φ será la combinación lineal de los estados propios ϕ_k de H , $H\phi_k = E_k \phi_k$

$$\varphi = \sum_k a_k \phi_k \quad (\varphi, \phi_k \text{ unitarios})$$

y $E_{(\varphi)}$ será el valor promedio de la

En el modelo clásico de la Mecánica, dado un SF constituido por N partículas de masa m_k localizadas en los puntos P_k , y dado un punto Q arbitrario se define la matriz de inercia del SF,

$$\mathbf{M}_Q = \sum_k m_k (\mathbf{Q}P_k^+ \mathbf{Q}P_k - \mathbf{Q}P_k \mathbf{Q}P_k^+)$$

(Por supuesto que en el caso continuo se trata de una integral)

donde \mathbf{x} , $\mathbf{Q}P_k$ son vectores columna, mientras que los vectores transpuestos son filas, de manera que $\mathbf{p}^+ \mathbf{q}$ representa a un producto escalar, $\mathbf{p} \mathbf{q}^+$ representa a una matriz de 3×3 .

Puede verificarse que la matriz de inercia (cuyos elementos son números reales) es simétrica, $\mathbf{M}_Q^+ = \mathbf{M}_Q$ lo que tiene como consecuencia que: i) Sus valores propios sean reales, ii) Dos ejes principales con momentos de inercia diferentes son perpendiculares entre sí, iii) Posee por lo menos tres vectores propios linealmente independientes; con ellos se puede construir una base del espacio R^3 , donde se describe el SF.

Sea \mathbf{u} un vector unitario, (Q, \mathbf{u}) la recta orientada, determinada por el punto Q y el vector \mathbf{u} ; entonces se define el **momento de inercia**, $I(\mathbf{u})$, del SF con respecto al eje (Q, \mathbf{u}) , como el valor medio $I(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}^+ \mathbf{M}_Q \mathbf{u} \equiv \langle \mathbf{u}, \mathbf{M}_Q \mathbf{u} \rangle$. Por otra parte, diremos que (Q, \mathbf{u}) es un **eje principal de inercia** del SF si

$$\mathbf{M}_Q \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad \text{de donde} \quad \lambda = I(\mathbf{u})$$

energía correspondientes a los mencionados estados propios:

$$E_{(\varphi)} = \langle \varphi, H\varphi \rangle = \sum_{jk} a_j^* a_k \langle \phi_j, H\phi_k \rangle = \sum_k |a_k|^2 E_k$$

donde $|a_j|^2$ es la probabilidad de que (por efecto de una medición) el estado φ se transforme (bruscamente) en el estado propio ϕ_j .

En el caso de un valor propio degenerado, digamos, r -degenerado, los correspondientes estados propios constituyen un subespacio vectorial de dimensión r . En dicho subespacio todos los estados son equivalentes, lo cual refleja cierta simetría del campo potencial que actúa en el sistema. Esta simetría no es necesariamente 'visible'.

Con el objeto de analizar las características de la simetría se puede perturbar el SF, adicionando al observable en cuestión, digamos al operador H , un 'pequeño' sumando, εW , donde W es un operador de la misma naturaleza que H , y ε es un parámetro adecuadamente pequeño. La perturbación del operador

$$H \longrightarrow H + \varepsilon W$$

producirá que tanto la función de estado como el valor propio sean modificados

$$\begin{aligned} \varphi &\longrightarrow [\varphi + \varepsilon \phi(\varepsilon)] / \|\varphi + \varepsilon \phi(\varepsilon)\| \\ E &\longrightarrow E + \varepsilon F(\varepsilon) \end{aligned}$$

Si u no es vector propio de la matriz, entonces lo podemos expresar como una combinación lineal de los vectores propios, $u = \sum_k \alpha_k n_k$ con $M_Q n_k = I_k n_k$ de donde obtenemos:

$$I(u) = \sum_k \alpha_k^2 I_k$$

donde α_k^2 sería la probabilidad de que al hacer rotar el SF alrededor del eje (Q, u) , aquél pase a rotar alrededor del eje (Q, n_k) .

En el caso de que un valor propio sea 2-degenerado, entonces todas las rectas de cierto plano que pasan por Q serán ejes principales de inercia. Por ejemplo, cuando Q se encuentra sobre el eje de un cilindro homogéneo, el plano que pasa por Q y es perpendicular a dicho eje resulta ser un plano propio (en el sentido de que cualquier recta contenida en él y que pasa por Q es un eje principal). Si el valor propio es 3-degenerado, como es el caso de una esfera homogénea con centro en Q , entonces toda recta del espacio, que pase por Q , será eje principal. Si se perturba el SF, añadiendo una pequeña masa μ (que podría ser puntual) en alguna posición, la matriz de inercia se modificará:

$$M_Q \longrightarrow M_Q + \mu W$$

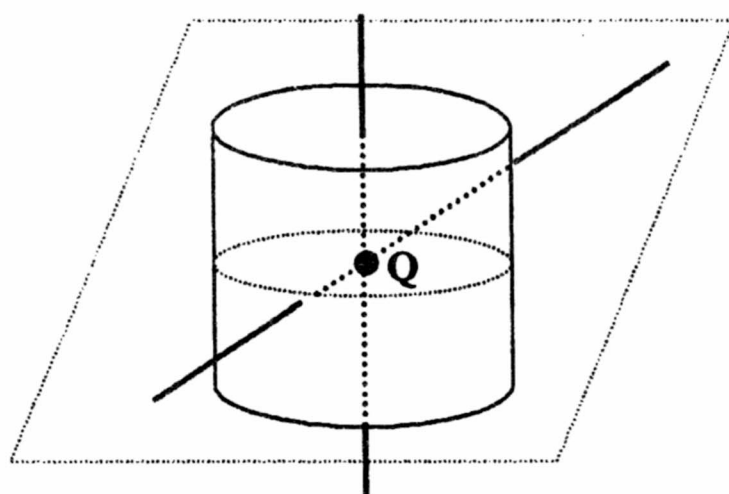
Produciendo la modificación de la dirección del eje principal y el correspondiente valor propio:

$$u \longrightarrow [u + \varepsilon v(\varepsilon)] / \|u + \varepsilon v(\varepsilon)\|$$

Por otra parte, si el valor propio E es degenerado (lo que es fruto de determinada simetría del operador H), dicha degeneración podrá ser levantada — quizás parcialmente — sólo en el caso de que el operador W no posea la misma simetría que H .

$I(u) \longrightarrow I(u) + \varepsilon \cdot G(\varepsilon)$
donde debe tenerse presente que los vectores de dirección de los ejes deben ser unitarios.

Por otra parte, si el momento de inercia es degenerado, dicha degeneración podrá ser levantada sólo si la matriz W no tiene la misma simetría mecánica que la matriz de inercia.



Cuando existe cierta simetría, por ejemplo cilíndrica, entonces existe un subespacio (en el caso de la matriz de inercia se trata de un plano), tal que todos sus estados o vectores del mismo son vectores propios del operador, correspondientes al valor propio degenerado.

Sean f y g funciones normalizadas de un espacio de Hilbert; sea Q un operador que actúa en dicho espacio; $Z(f) = \langle f, Qf \rangle$ el valor medio del operador con respecto a la función f ; f_g la función normalizada que se obtiene cuando f es incrementada h (≈ 0) unidades en la dirección g , es decir, $f_g = (f + hg)/\|f + hg\|$. Sean por otra parte

$$\Delta f = f_g - f, \quad \Delta Z = Z(f_g) - Z(f)$$

Sean f y g vectores unitarios de R^3 ; sea Q una matriz que actúa en dicho espacio; $Z(f) = \langle f, Qf \rangle$ el valor medio de la matriz con respecto al vector f ; f_g un vector unitario que se obtiene cuando f es incrementada h (≈ 0) unidades en la dirección del vector g , es decir,

$$f_g = (f + hg)/\|f + hg\|$$

Sean, por otra parte,

$$\Delta f = f_g - f, \quad \Delta Z = Z(f_g) - Z(f)$$

Teorema 1. $\Delta f = h[g - (\langle g, f \rangle + \langle f, g \rangle) f] + O(h^2)$
 $\Delta Z(f) = h[\langle Qf - Z \cdot f, g \rangle + \langle g, Qf - Z \cdot f \rangle] + O(h^2)$

Teorema 2. Si f es una función propia de Q , es decir, $Qf = \lambda f$, lo cual implica que $\lambda = Z(f)$, entonces $\Delta Z(f) = O(h^2)$. En palabras: entonces al modificar f , en cualquier *dirección* g , el valor medio $Z(f)$ (o el momento de inercia) sólo es modificado en segundo orden. Recíprocamente: Si al modificar la función f en cualquier *dirección* g , el valor medio $Z(f)$ sólo resulta modificado en segundo orden, entonces f es una función propia del operador Q . Es decir, las funciones propias de un operador (o los ejes principales de inercia) poseen valores propios estacionarios.

Teorema 3. Solamente el estado (o los estados, en el caso de degeneración) propio correspondiente al valor propio mínimo es estable.

Por ello el sistema no puede mantenerse mucho tiempo en un estado excitado, y tiende a volver rápidamente a su estado de mínimo valor propio. En el caso de la energía, el valor propio corresponde al estado fundamental.

Teorema 3. Solamente los ejes principales de inercia correspondientes a los momentos de inercia mínimo y máximo son estables. Esto se evidencia en el movimiento de rotación en ausencia de un torque externo:

Si la rotación se realiza alrededor de un eje vecino a uno de los estables, dicho eje permanece vecino al eje principal (estable) correspondiente. Si la rotación se realiza alrededor de un eje alejado de los ejes principales estables, entonces tal eje de rotación cambiará su orientación, acercándose y alejándose, repetidas veces, con respecto a los ejes estables

BIBLIOGRAFÍA:

Saletan-Cromer, *Theoretical Mechanics*, Wiley, 1971
HGValqui, *Apuntes de Mecánica*, 1999
HGValqui, *Apuntes de Mecánica Cuántica*, 2000

Análisis de lo que le ocurriría a la Tierra si estuviese en la órbita de Venus

María Isela Zevallos Herencia*

RESUMEN

Durante mucho tiempo se pensó que Venus y la Tierra eran planetas mellizos. La similitud en tamaño, gravedad y densidad hacían suponer la existencia de características comunes que superaba la simple semejanza.

	Tierra	Venus
Masa	$5,974 \cdot 10^{24}$ kg	$4,869 \cdot 10^{24}$ kg
Diámetro	12756 km	12104 km
Periodo orbital	365,256 días	224,70 días
Periodo de rotación	23,9345 horas	243,01 días (retrógrado)

Sin embargo, como vamos a apreciar seguidamente, dicha situación no es tal. Este análisis ayuda a entender lo delicado que pueden ser los complejos (por depender de varias variables) equilibrios climáticos.

*Grupo Astronomía, Facultad de Ciencias, UNI.

Introducción

CARACTERÍSTICAS DEL PLANETA VENUS

Venus, conocido como la estrella de la mañana o como estrella del atardecer, es 16 veces más brillante que la estrella más brillante que vemos (Sirio), pero menos brillante que el Sol y la Luna.

Esto debido a que su distancia media al Sol es de $1,082 \cdot 10^8$ km., siendo su periodo de rotación alrededor de su eje de 224,70 días. Su órbita es casi circular ya que tiene una excentricidad de 0,0068 (la excentricidad cero corresponde a una órbita circular). Su masa, es de $4,869 \cdot 10^{24}$ kg ; que equivale a 0,815 la masa de la Tierra; siendo su diámetro de 12104 km.

Presenta un periodo de rotación retrógrado y muy lento (243,01 días). Sin embargo, sus periodos de rotación y traslación están sincronizados de tal manera que, como la Luna, presenta la misma cara hacia la Tierra cuando ambos están en su máxima aproximación. Tiene una presión atmosférica de 90 atmósferas terrestres. Su atmósfera está compuesta por dióxido de carbono (96%) y nitrógeno (4%). Presenta muchas capas de nubes de kilómetros de espesor que están formadas por ácido sulfúrico, las cuales oscurecen completamente la superficie; esta atmósfera tan densa produce un efecto invernadero que eleva la temperatura de la superficie hasta 740 °K. Tanto es así que, a pesar de estar Mercurio dos veces más cerca al Sol que

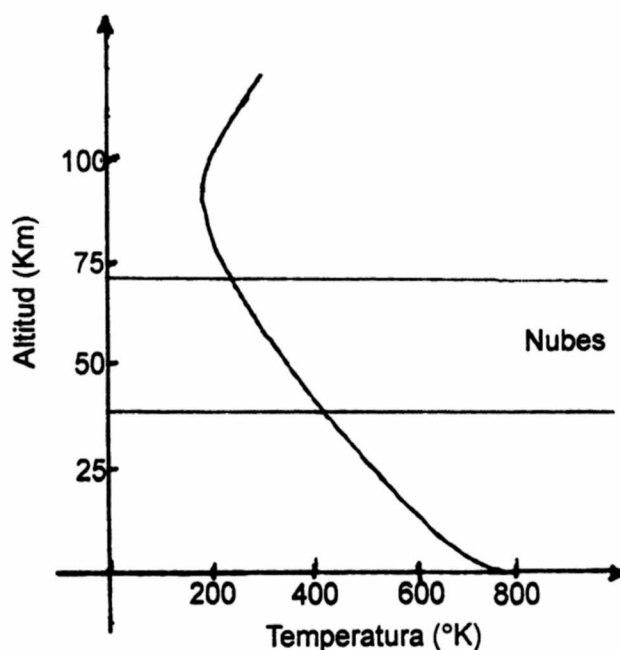


Fig. 1. En Venus la temperatura varía con respecto a la altitud, en la superficie alcanza hasta 750 °K, mientras que a mayores alturas ésta decrece hasta temperaturas de 170 °K.

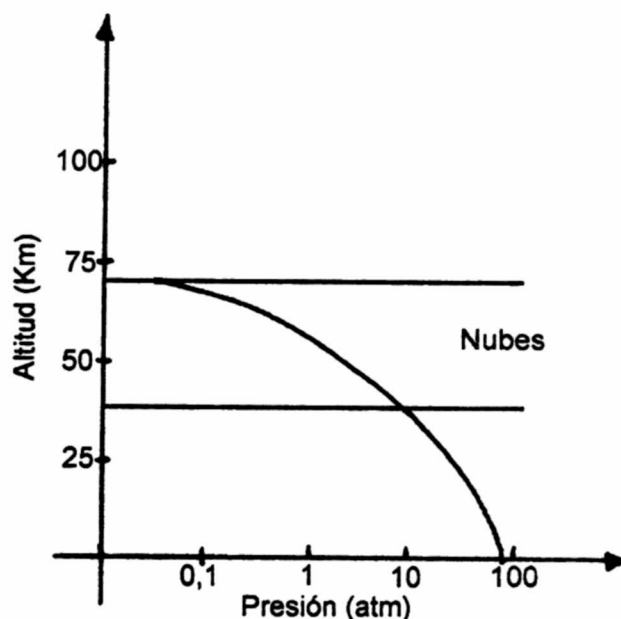


Fig. 2. La presión también varía respecto a la altura, cerca de la superficie la presión alcanza 90 atm.

Venus, la temperatura de éste es mucho mayor. En la superficie hay vientos que son muy lentos, del orden de unos pocos kilómetros por hora; pero los vientos en lo alto de las nubes son muy fuertes, de aproximadamente 350 kilómetros por hora. Venus aparece actualmente completamente seco, pero probablemente hace muchos años haya tenido agua la cual ya se ha evaporado. La superficie de Venus está compuesta en su mayor parte de superficies, con pequeños relieves. Hay algunas depresiones denominadas *Atalanta Planitia*, *Guinevere Planitia*, *Lavinia Planitia*; dos tierras altas que sobresalen, las cuales se denominan *Ishtar Terra* y *Aphrodite Terra*, así como cráteres. De la cantidad de cráteres que han impactado sobre un planeta desde los comienzos del sistema solar se puede calcular la edad de la superficie de un planeta, con este criterio la edad media de la superficie de Venus se estima en 400 millones de años, dos veces la edad de la Tierra.

LA TIERRA: CARACTERÍSTICAS

A diferencia de Venus, la Tierra, tiene una distancia promedio al sol de 1UA ($1,496 \cdot 10^8$ km), un periodo de rotación de 23,93 horas y un periodo de traslación de 365,256 días. Su masa es de $5,98 \cdot 10^{24}$ Kg; su diámetro de 12,756 km y su excentricidad es de 0,017. Su eje de rotación está inclinado $23,45^\circ$; lo que permite que se produzcan las estaciones. Su atmósfera está compuesta en su mayor parte por nitrógeno (aprox. 78,1%), oxígeno (20,9%), CO_2 (0,03%), H_2O y otros gases. La gran cantidad de oxígeno se debe al proceso de la fotosíntesis producido por las plantas, mediante el cual el CO_2 es convertido en oxígeno.

La Tierra está dividida en seis zonas

1. La magnetósfera, es la región donde se extiende el campo magnético desde los 100 000 km hasta 200 km.
2. La atmósfera que esta dividida en 4 zonas
 - La tropósfera, se extiende desde la superficie hasta los 12 k.s.n.m., su temperatura decrece con respecto a la altura, llegando hasta -60°C a 11 k.s.n.m. Las variaciones de temperaturas, debido al calentamiento solar, en esta zona causan corrientes de convección que se mueven de arriba hacia abajo. En esta zona se forman las nubes.
 - La estratósfera, se extiende desde los 12 hasta los 50 k.s.n.m. En esta zona está presente el ozono que absorbe la radiación ultravioleta del sol, provocando el calentamiento de la estratósfera. En esta zona no hay corrientes de convección.
 - La mesósfera, se extiende desde los 50 hasta los 80 k.s.n.m. en este último punto su temperatura desciende hasta -75°C . En esta zona se encuentran cantidades menores de ozono, de modo que no hay absorción de radiación UV en la mesósfera.
 - La termósfera, la temperatura aumenta con respecto a la altura, es muy caliente debido a que los átomos de oxígeno y nitrógeno absorben radiación UV.

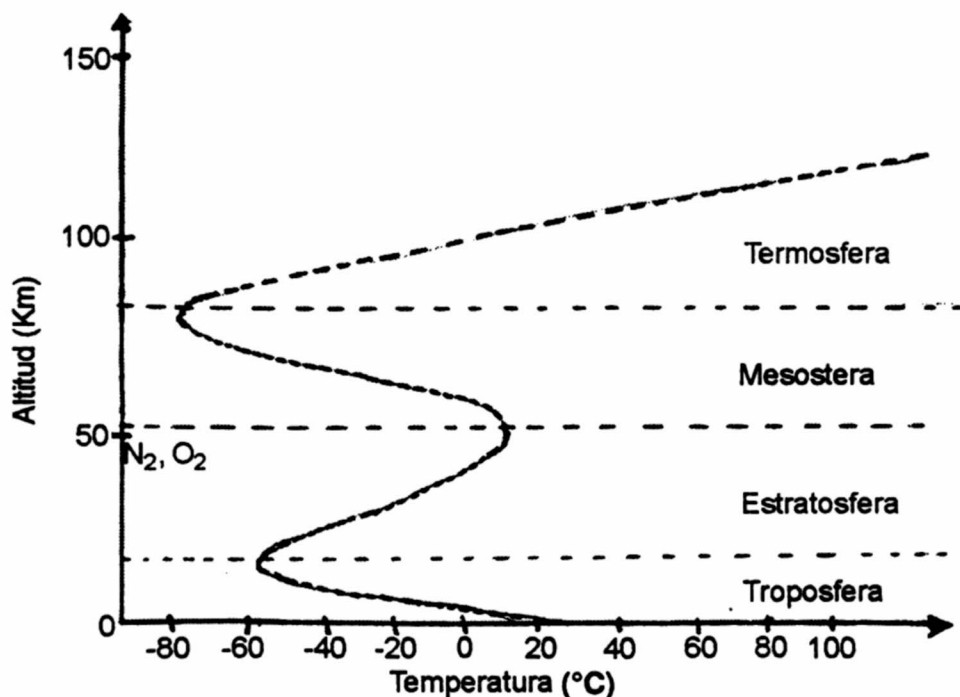


Fig. 3. En el gráfico vemos que en la tropósfera y en la mesósfera la temperatura disminuye respecto a la altitud, mientras que en la estratósfera y termosfera la temperatura aumenta respecto a la altitud. Estas variaciones son debido a las diferentes maneras en que la luz del Sol actúa con los átomos e iones de la atmósfera.

3. La hidrósfera, el 71% de la superficie de la Tierra está ocupada por agua líquida y agua congelada.
4. La corteza, es la superficie sólida, tiene un grosor aproximado de 30 km, está conformada por rocas.
5. El manto, se extiende hasta una profundidad de 2900 km ocupa aproximadamente los 2/3 de la masa total del planeta, consiste de roca sólida y magma, además contiene minerales ricos en hierro y magnesio.
6. El núcleo, compuesto principalmente de fierro, níquel, conformado por el núcleo superior hasta los 5200 km, su temperatura es de 4600 °K y tiene una presión de 1,3 millones de bar; es líquido; el núcleo inferior, que es sólido con una presión aprox de 3,2 millones de bar.

Cambios que experimentaría la Tierra en la órbita de Venus

Luego de repasar algunas características de Venus y la Tierra, veamos que sucedería si la Tierra estuviera en la órbita de Venus.

Si trasladáramos la Tierra a la órbita de Venus, el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol, como es de esperarse; ya no duraría 365,26 días.

Según la tercera ley de Kepler el cuadrado de los periodos orbital de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia promedio:

$$T^2 \propto d^3,$$

donde las unidades del T son años y las unidades de la distancia media son UA. Newton demostró que la tercera ley de Kepler se podía desarrollar de su ley de gravitación, resultando de la forma:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_T + M_S)} d^3 \quad (1)$$

Siendo

M_s (masa del Sol) = $1,99 \cdot 10^{30}$ kg

M_t (masa de la Tierra) = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg

G (constante universal) = $6,67 \cdot 10^{-11}$ N*m²/kg².

d = distancia media entre la Tierra y el Sol.

Reemplazando los valores en (1) tenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(5,98 \cdot 10^{24} + 1,99 \cdot 10^{30})} (1,5 \cdot 10^8)^3$$

$$T = 365,5 \text{ días.}$$

Si d es la distancia entre la Tierra y el Sol, en la órbita de Venus $d = 1,082 \cdot 10^8$ km, reemplazando en (1).

$$T^3 = \frac{4\pi^2}{G(5,98 \cdot 10^{24} + 1,99 \cdot 10^{30})} (1,082 \cdot 10^8)^3$$

$$T = 224,65 \text{ días.}$$

Por lo tanto el período orbital de la Tierra en la órbita de Venus sería aproximadamente igual al período orbital actual de Venus alrededor del Sol; el cual dura 224,7 días.

La fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el Sol también variará, sabemos que esta es:

$$F = \frac{GMM}{d^2} \quad (2)$$

Siendo

$$M_s \text{ (masa del Sol)} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$M_t \text{ (masa de la Tierra)} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G(\text{constante universal}) = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

$$d \text{ (dist. media entre la Tierra y el Sol, en la órbita de Venus)} = 1,082 \cdot 10^8 \text{ km.}$$

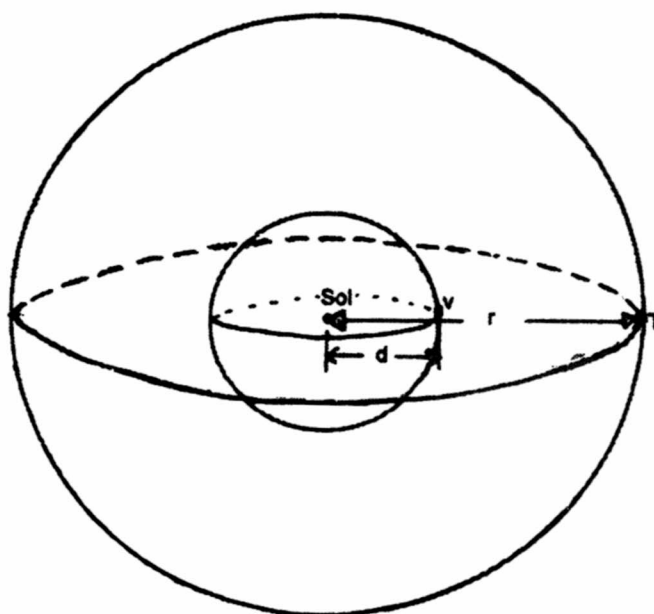
Reemplazando los valores en la ecuación (2), tenemos

$$F = \frac{G(1,99 \cdot 10^{30})(5,98 \cdot 10^{24})}{(1,082 \cdot 10^8)^2}$$

$$F = 6,78 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

que es mayor que el valor de la fuerza de atracción gravitacional de $3,54 \cdot 10^{22} \text{ N}$ a una distancia de $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ entre la Tierra y el Sol.

Otro cambio se daría en la temperatura de la Tierra. La cantidad existente de energía recibida queda determinada por la constante solar C_s , que está definida como la radiación total recibida en la Tierra, en la unidad de tiempo, por un área de 1 cm^2 ubicada perpendicularmente a los rayos solares.



Para la Tierra en su actual posición tenemos

$$C_s = 1,37 * 10^6 \text{ ergios/cm}^2 \text{ seg.}$$

Además la energía total está determinada por

$$E_1 = C_s * A$$

$$E_1 = C_s * 4\pi r^2$$

r = distancia de la Tierra al Sol

$$E_1 = (1,37 * 10^6 \text{ ergios/cm}^2 \text{ seg}) * 4\pi (1,5 * 10^{13} \text{ cm}).$$

$$E_1 = 3,88 * 10^{33} \text{ ergios/seg.}$$

y la energía que sale del Sol es

$$E_2 = \frac{E_1}{4\pi R_0^2} = 6,3 * 10^{10} \text{ ergios/cm}^2 \text{ seg}$$

$$E_1 = 6,3 * 10^{10} \text{ ergios/seg} * 4\pi R_0^2$$

Como $E_1 = C_s \cdot 4\pi d^2$, siendo d la distancia media entre la Tierra y el Sol $= 1,1 \cdot 10^{13}$ cm, entonces

$$C_s = \frac{E_1}{4\pi(1,1 \cdot 10^{13})^2} = \frac{3,88 \cdot 10^{13} \text{ ergios / seg}}{4\pi(1,1 \cdot 10^{13} \text{ cm})^2}$$

$$C_s = 2,55 \cdot 10^6 \text{ ergios/cm}^2 \text{ seg.}$$

Por lo tanto en la órbita de Venus la cantidad de energía en ergios que recibiría la Tierra por $\text{cm}^2 \cdot \text{seg}$ sería de 2,55; casi el doble de la que recibe la Tierra en su órbita. Como es de suponerse, al estar más cerca al Sol la temperatura en la superficie de la Tierra se vería incrementada.

Debido a este incremento el hielo de los polos se fundirá al mismo tiempo que los océanos. Al evaporarse, formarán una capa más gruesa de nubes de vapor de agua, provocando el aumento de la presión atmosférica.

Así, la temperatura de la superficie aumentará de tal manera que la cantidad de energía irradiada por la superficie del planeta esté de acuerdo a la ley de Wien, que establece que "la longitud de onda de máxima emisión, es inversamente proporcional a la temperatura en Kelvin". De esta manera,

$$\lambda_{\max} T = 0,0029$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0,0029}{T}$$

para una temperatura muy alta, como por ejemplo $T = 700 \text{ K}$

$$\lambda_{\max} = \frac{0,0029}{700}$$

$$\lambda_{\max} T = 4,14 \cdot 10^{-6} \text{ m ,}$$

que está dentro del rango de la radiación infrarroja. Por lo tanto la superficie del planeta (que está a una temperatura menor que 700 K) emitirá radiación infrarroja, la cual, debido a la capa de vapor de agua que se está formando, será parcialmente bloqueada, escapando una parte al espacio, mientras que la otra parte quedará atrapada incrementando a su vez la temperatura. Producido este efecto, llamado **efecto invernadero intenso**, los océanos continuarán evaporándose, esto incrementará el vapor de agua en la superficie y así el ciclo se repetirá hasta que la temperatura y la presión atmosférica sea tan alta que toda el agua se convierta en vapor. Para ese momento los seres humanos, los animales y las plantas habrán desaparecido,

aumentando sin límite el dióxido de carbono en la atmósfera ya que éstas últimas, mediante la fotosíntesis transformaban el CO_2 en oxígeno. Por otro lado, la gran cantidad de dióxido de carbono contenido en las rocas y disuelto en los océanos se habrá liberado, permaneciendo en la atmósfera y absorbiendo la radiación UV del Sol. Esto debido a que el incremento del CO_2 , provocará la desaparición del ozono de la atmósfera que es el que evita que la radiación UV del Sol llegue a la superficie terrestre.

El vapor de agua se elevará a una gran altitud, allí la radiación ultravioleta del Sol - que tiene una energía tan alta que es capaz de romper las moléculas en sus componentes -, romperá las moléculas de vapor de agua en hidrógeno y oxígeno. De acuerdo a la teoría cinética de los gases la energía cinética (E_k) promedio de un gas o molécula es:

$$E_k = \frac{3}{2} KT$$

siendo

K la constante de Boltzman ($1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K).

A altas temperaturas la energía cinética será mayor por lo tanto los átomos o moléculas se moverán más rápidamente, provocando el choque entre moléculas, separándose en sus átomos constituyentes.

La energía cinética está dado por

$$E_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

donde N es el número de partículas, m_i y v_i la masa y velocidad de la partícula i respectivamente. Si las partículas tienen la misma masa, entonces

$$E_k = \frac{1}{2} m V_{rms}^2$$

Donde V_{rms} es la velocidad media cuadrática.

Por lo tanto la energía cinética media de los átomos de un gas es

$$E_k = \frac{1}{2} m V_{rms}^2 = \frac{3}{2} KT$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{KT}{m}} \quad (3)$$

La velocidad de escape (velocidad mínima que se debe tener un cuerpo para escapar de la Tierra) está dada por

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (4)$$

G (constante universal) = $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

M es la masa de la Tierra = $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

R es el radio de la Tierra = 6378 km .

Reemplazando los valores en la ecuación (4) tenemos, que la velocidad de escape es de aproximadamente $11,2 \text{ km/seg}$.

Suponiendo que la temperatura en la Tierra ha llegado hasta 700 K , calculemos el valor de la velocidad media cuadrática, según (3), para el oxígeno e hidrógeno es:

Para el oxígeno

Masa de los átomos de oxígeno es $2,66 \cdot 10^{-26} \text{ Kg}$.

En (3)

$$V_{rms} = \frac{3}{2,66 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} (1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J / K})(700 \text{ K})$$

$$V_{rms} = 1,04 \text{ Km / seg.}$$

Para el hidrógeno

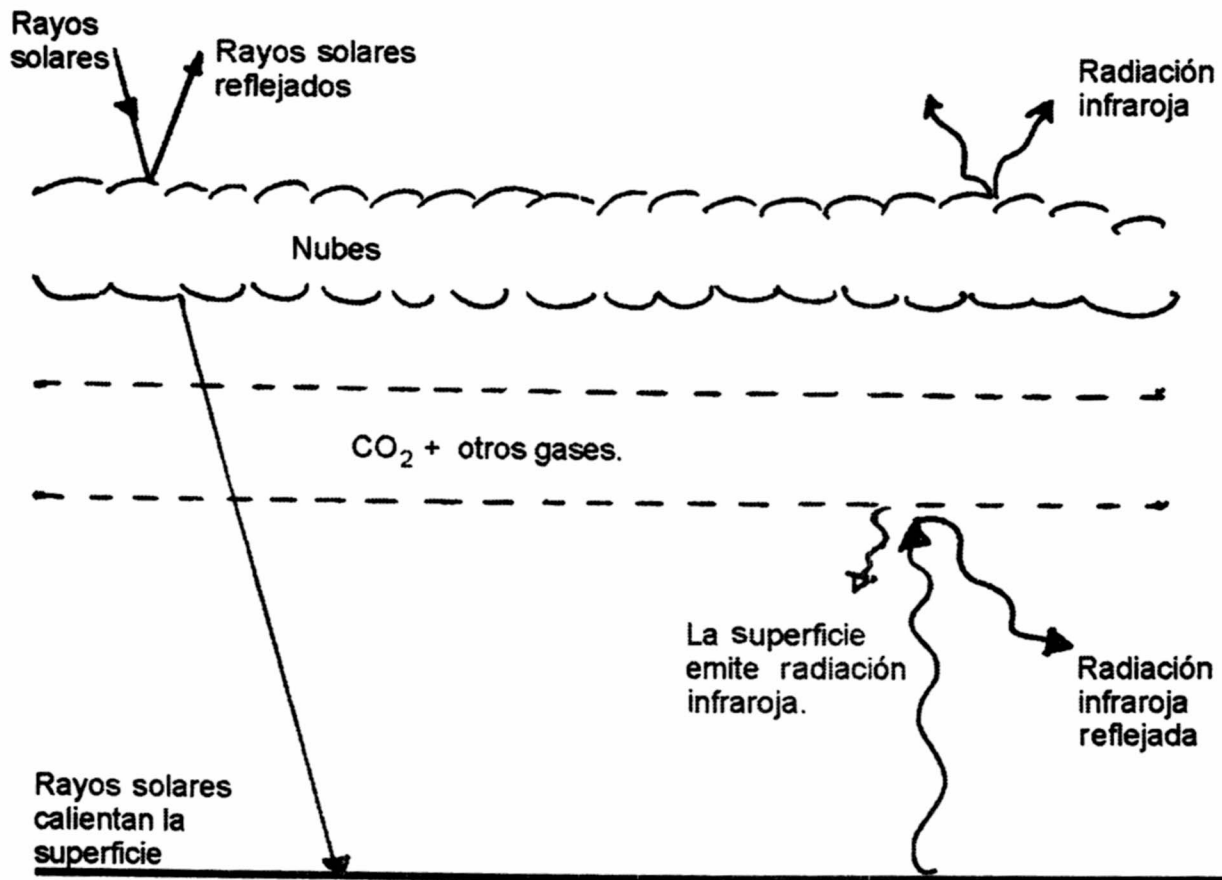
Masa de los átomos de hidrógeno es $1,69 \cdot 10^{-21} \text{ Kg}$.

En (3),

$$V_{rms} = 2,92 \text{ Km / seg.}$$

Un planeta puede retener un gas si la velocidad de escape es por lo menos 6 veces mayor que la velocidad media cuadrática de las moléculas del gas. Para el oxígeno $6 \cdot 1,04 \text{ Km/s} = 6,24 \text{ km}$ que es menor que $11,2 \text{ Km/s}$ por lo tanto el oxígeno se quedará en la atmósfera. En el caso del hidrógeno $6 \cdot 2,92 \text{ Km/s} = 17,52 \text{ Km/s}$ que es mayor que $11,2 \text{ km/s}$, por lo tanto el hidrógeno se escapará hacia el espacio.

El oxígeno que permanece se combinará con el dióxido de carbono y el carbono que ha sido liberado de los distintos tipos de roca que formaban la superficie de la Tierra.



La Tierra por lo tanto se convertiría en un lugar, sin vida, seco, con una atmósfera llena de CO₂ y con una temperatura muy alta. Es decir la Tierra se parecerá a Venus.

Conclusiones

Al trasladar a la Tierra a la órbita de Venus, la temperatura de su superficie se incrementará; y debido que la Tierra está conformada en su mayor parte por agua en forma líquida y hielo, ésta se evaporará hasta producir una gran cantidad de vapor de agua que bloqueará la salida de gran parte de la radiación infrarroja irradiada por la superficie del planeta, produciéndose un aumento de temperatura y la materialización de un efecto invernadero intenso. Como consecuencia de éste, la capa de ozono que absorbía la radiación UV se destruirá, provocando un aumento desmesurado de la temperatura.

El ciclo se repite hasta que la atmósfera se vuelva muy caliente, llena de vapor de agua. A niveles altos la radiación ultravioleta proveniente del Sol rompe las moléculas de vapor de agua en sus componentes atómicos, por lo que el hidrógeno escapará hacia el espacio mientras que el oxígeno permanecerá en la atmósfera donde, al combinarse con la gran cantidad de CO₂ disuelto en las rocas y en los océanos, convertirá a la Tierra en un lugar seco con una atmósfera llena de CO₂. Es decir, en un planeta sin vida.

REFERENCIAS

- [1] **Abell, George**; *Exploration of the Universe* Halt, Rinehart y Winston Inc. California, 1981. pp.347.
- [2] **Alonso, M-Finn, E**, *Mecánica*. Fondo de Archivo Interamericano, pp.421 y 425.
- [3] **Gutierrez, Adelina**. *Astrofísica General*. Universidad Católica de Chile, pp. 440, 456.
- [4] **Jaschek, Carlos, y Corvalan de Jaschek, Mercedes**; *Astrofísica*. OEA, 1974, pp.11.
- [5] **Kaufmann, William, y Freedman, Roger**. *Universe*. Nueva York, 5ta. edición, cap. 8 y 11.
- [6] **Kepler, Erhard**. *Sol, Luna y planetas*. Biblioteca Científica Salvat, 1986. pp. 182-187.
- [7] **Beatty, J. Kelly y Chaikin, Andrew**. *The New Solar System*. Cambridge University Press. pp. 85-90.
- [8] **Kittel, Charles; Knight, Walter; Ruderman, Malvin**. *Mecánica*. Berkeley Physics Course-Volumen 1.
- [9] **Lazzaro, Daniela**; *Escuela de Verano 2000*. Observatorio Nacional. Rio de Janeiro - Brasil.

Adaptabilidad de mallados por similitud al comportamiento de un fluido compresible

Irla Mantilla Núñez*

RESUMEN

En este trabajo se presenta el planteamiento y desarrollo de un método de adaptabilidad de mallas, que consiste en la fijación y redistribución del número de nodos y elementos de una malla inicial. El principio se basa en asemejar los nodos del mallado inicial como las partículas de un fluido localmente compresible e irrotacional. Asumiendo que tal compresibilidad es proporcional a la distribución promedio del error en cada elemento, se consigue que el fluido sea tratado como globalmente incompresible; esto conduce a la resolución numérica de un problema de contorno elíptico lineal de tipo Neumann. Para la existencia y unicidad de la solución de este problema se aplica un método de penalización, y se resuelve mediante el Método de Elementos Finitos. A partir de esta solución, se localiza las coordenadas de los nodos de la malla generada y el desplazamiento de cada nodo. La optimización de la malla resultante se realiza mediante la definición de un indicador de distribución del error. Los resultados obtenidos demuestran que este método es eficaz tanto en el tiempo computacional como en la calidad de aproximación de soluciones de problemas de contorno.

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima-Perú.

ABSTRACT

In this work we present the proposal and development of a method of adaptability of in meshes, that it consists the fixation and redistribution of the number of nodes and elements of an initial mesh. The principle is based on liken the nodes of the initial mesh like the particles of a fluid locally compressible and irrotacional. Assuming that such compressibility is proportional to the average distribution of the error in each element, it is gotten that the fluid is studied like incompressible globally; this leads to the numeric resolution of a problem of elliptic lineal contour of Neumann type. For the existence and uniqueness of the solution of this problem is applied a method of Penalization, and it is solved by means of the Method of Finite Elements. Starting from this solution, one locates the coordinates of the nodes of the generated mesh and the displacement of each node. The optimization of the resulting mesh is carried out by means of the definition of an indicator of distribution of the error. The obtained results demonstrate that this method is effective not only in the computational time but also in the quality of approach of solutions of problems with boundary values.

Introducción

En la resolución de problemas de contorno mediante elementos finitos, diferencias finitas o volúmenes finitos, el tipo de malla que se elija para la discretización del problema, influye en el tiempo de cálculo y en la calidad de la solución a obtener, sobre todo cuando se requiere simular el comportamiento de variables que presentan grandes variaciones. Si se utilizan mallas con elementos de geometría simple, el mallado sufre deformaciones y partes de éste se degeneran, perdiéndose información cerca de las zonas más inestables. En este caso, existen dos alternativas: el refinamiento de la malla o la adaptabilidad de mallado.

El refinamiento de la malla consiste en incrementar el número de elementos de ésta; como consecuencia de ello se produce el aumento de grados de libertad, lo cual conduce a la resolución de grandes sistemas de ecuaciones algebraicas. Este proceso, si bien mejora la precisión de la solución al utilizar métodos iterativos especiales, no es óptimo en cuanto al tiempo de cálculo.

La adaptabilidad de malla, consiste en optimizar el número de elementos de la malla inicial con la finalidad de conservar la precisión de la solución aproximada, para ello se requiere buscar una buena técnica que minimice el tiempo de cálculo.

- Adaptabilidad con elementos finitos en movimiento (Moving mesh finite elements o multigrid) [7].

- Adaptabilidad consistente en la redistribución de los elementos de la malla inicial fijando el número de nodos [3,8].

Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

- Que el mallado adaptado conserve el número de nodos y elementos del mallado inicial, así como su admisibilidad en el dominio de cálculo.
- Mejorar la distribución del error en sus elementos en un menor tiempo computacional.

Planteamiento del problema

Sea $\Omega \subset R^n$ un conjunto acotado de frontera regular $\partial\Omega = \Gamma$ y de conjunto clausura $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ sobre el que se aproxima la solución de un problema de contorno mediante el método de elementos finitos. Supongamos Mx es el mallado inicial sobre Ω , el cual está construido por elementos finitos de la forma (K, P_l, N) donde K es el triángulo de lados $a_k \leq b_k \leq c_k$, P_l es el polinomio lineal de aproximación y N es la base nodal con nodos los vértices N_j de K .

El área A_k de cada triángulo pertenece al intervalo $I = \left[\frac{1}{4} \cdot h_k^2 \cdot \sin \theta_k, \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h_k^2 \right]$, [4] siendo h_K el lado de mayor longitud y θ_k el ángulo más pequeño del triángulo K , tal que $\min_{k \in Mx} \theta_k = \alpha$ donde $\alpha \in (0,1)$.

Dada la función $w: \bar{\Omega} \rightarrow R_+$ como un estimador de error definido sobre Mx , siendo $w \in L^2(\Omega)$.

La técnica planteada, consiste en asumir que los nodos del mallado inicial se comportan aproximadamente como las partículas de un fluido localmente compresible e irrotacional. Entonces, para la formulación, se considera que, dado un $\theta \in (0,1)$ (tabla 1), las coordenadas de los nodos del mallado adaptado estarán

Tabla 1
Resultados de calidad de malla.

Función de error	$\epsilon=10^{-3}$ (-2,2) x (-2,2)					
Malla	8 X 8			16 x 16		
Param. Adapt. θ	IE ∞	IE ₁	IE ₂	IE ∞	IE ₁	IE ₂
0,25	0,23	-0,09	-0,04	0,36	0,14	0,17
0,1	0,11	-0,1	-0,06	0,12	0,11	0,07
0,4	0,36	0,01	0,07	0,34	0,11	0,15
0,5	0,15	0,06	0,08	0,33	0,08	0,13
0,6	0,14	0,06	0,08	0,31	0,05	0,11
0,7	0,31	0,03	0,09	0,29	0,04	0,09
0,8	0,28	0,01	0,07	0,25	0,02	0,06
0,9	0,16	0,01	0,03	0,12	0,01	0,03

IMN

dados por $Y_j = X_j + \gamma(\theta).u_j$ siendo $\gamma(\theta) > 0$ un parámetro homogéneo semejante en dimensión a un incremento de tiempo, X_j nodo de la malla inicial (Fig. 1) y u_j la velocidad del fluido en cada nodo.

En un medio continuo, se asume que Y es una función biyectiva, continua y diferenciable, denotada por $Y(x) = x + \gamma.u(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$, [6] siendo $u(x)$ la velocidad media del fluido. En virtud de que $w \in L^2(\Omega)$ suponiendo que el fluido es localmente compresible y proporcional a la desviación sobre el error medio, se plantea el siguiente problema: hallar una función u en el espacio $H(\text{div}, \Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^2 / \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$, [5] tal que:

$$(P) \begin{cases} -\text{div } u(x) = f(x) & \text{en } \Omega \\ u.n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde:

$$f(x) = w(x) - \hat{w}, \quad \hat{w} = \frac{1}{\text{med}(\Omega)} \int_{\Omega} w(x) dx, \quad \forall x \in \Omega$$

n , es el vector normal unitario exterior a Ω en su frontera $\partial\Omega$.

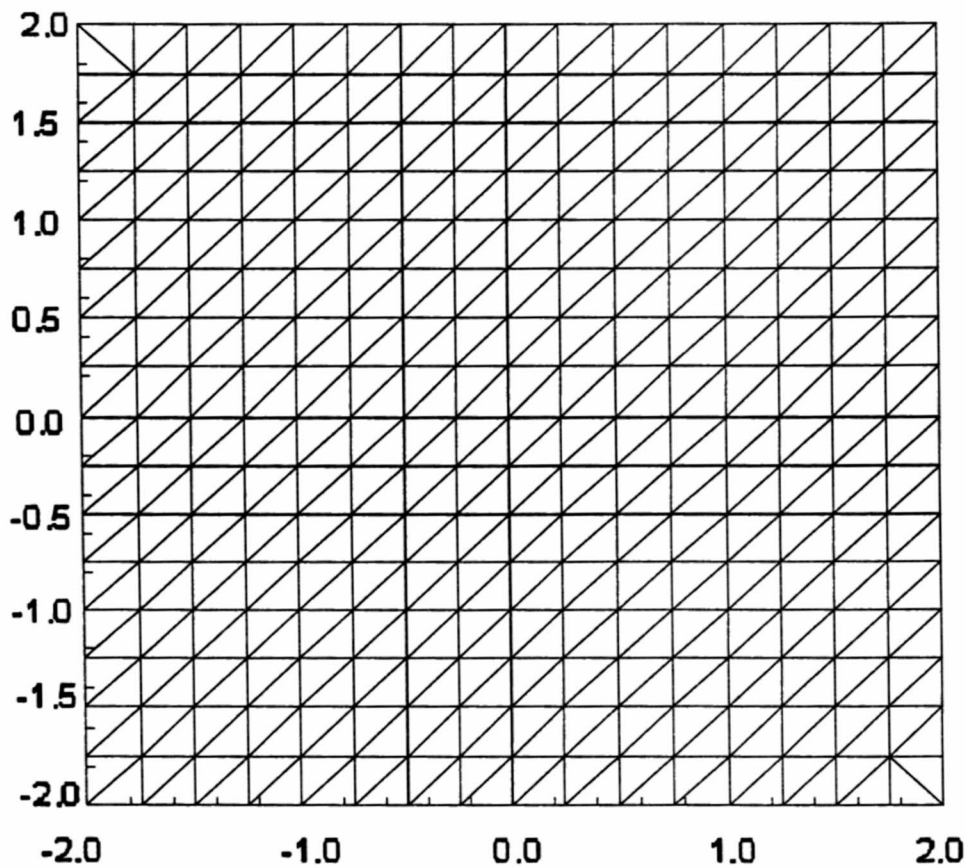


Fig.1 Malla inicial.

Resolución numérica

Teniendo en cuenta que $w \in L^2(\Omega)$ y que el flujo es irrotacional, es decir $\text{rot } \psi = 0$ entonces el teorema de descomposición vectorial de $[L^2(\Omega)]^2$ [4] permite demostrar la existencia y unicidad de la función potencial de flujo $\varphi \in H^1(\Omega)$ (Fig. 2) tal que $u = \nabla \varphi$. Entonces el problema (P) se reduce a hallar φ , que satisfice:

$$(P_\varphi) \begin{cases} -\Delta \varphi = f & \text{en } \Omega \\ (\nabla \varphi) \cdot n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

La transformación $Y(x)$ se considera admisible en $\overline{\Omega}$ y de la positividad de la ecuación $D[\gamma(\theta), u_h(x)] = 1 + \gamma(\theta) \cdot \text{div } u_h(x) + \gamma(\theta)^2 \det(\tilde{\nabla} u_h(x))$; $\forall x \in \overline{\Omega}_h$, garantiza que las conectividades de Mx se conservan en My ; es decir, que no se

degeneren los elementos y no exista penetrabilidad entre ellos. La función aproximada u_h es la solución finita en cada subdominio de $\bar{\Omega}_h$. De la condición de contorno tipo Neumann homogénea, indica que los nodos de la frontera permanecen en la misma frontera.

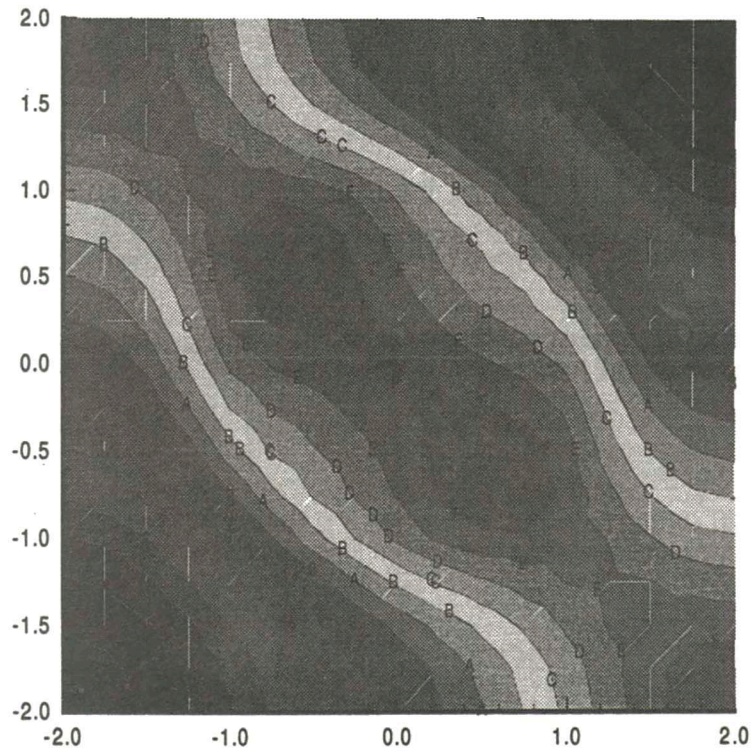


Fig. 2 Potencial de flujo con W .

Sea el espacio

$$V(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} \chi(x)\psi(x)dx = 0; \chi \in L^2(\Omega); \chi \neq 0 \text{ en } \Omega\},$$

el cual se puede ver que es un espacio de Hilbert [6]. En estas condiciones, es posible plantear el siguiente problema continuo en el espacio $V(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

Dado un $\theta \in (0,1)$ y $w \in L^2(\Omega)$ hallar un $Y_\theta \in H(\text{div}; \Omega)$ que satisfice
 $Y = x + \gamma(\theta).u, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ tal que:

- $u \in H(\text{div}; \Omega)$ y viene dado por donde $u = P_{H(\text{div}; \Omega)}$, donde $\varphi \in V(\Omega)$.
- $\gamma(\theta) \in R_+$ donde: $\gamma(\theta) = \inf_{\delta \in R_+} G(\theta)$ siendo $G(\theta)$ un conjunto no vacío,
donde $G(\theta) = \{\delta \in R_+ : D[\delta, u_h] = \theta, \forall x \in \Omega\}$

FORMULACIÓN VARIACIONAL

Como $w \in L^2(\Omega)$ entonces $f \in L^2(\Omega)$; por esta razón es posible formular una aproximación débil del problema continuo (P_φ) al multiplicar por una función $\psi \in H^1(\Omega)$ a toda la ecuación. Por la Identidad de Green para funciones escalares y teniendo en cuenta la condición de contorno de Neumann homogénea (P_φ), se reduce a la ecuación integral

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \psi dx = \int_{\Omega} f \psi dx \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$$

Suponiendo que ψ es solución de esta ecuación integral, entonces $\psi + c$ también es solución, siendo c una constante. En caso particular, tomando $\psi = 1$ resulta que $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$. Ello indica que el fluido es globalmente incompresible [5,6]. Este resultado viene a ser la condición de compatibilidad del problema débil; con lo que garantiza la existencia de solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} \text{Hallar } \varphi \in H^1(\Omega) \\ a(\varphi, \psi) = l(\psi) \end{cases}$$

Pero el primer miembro de la ecuación es una forma bilineal no coerciva en $V(\Omega)$ por lo que no garantiza la unicidad de solución.

Por la forma de la ecuación integral se puede observar que para cualquier valor de c , $\psi + c$ es solución, por tanto existen infinitas soluciones para este problema. Entonces, para lograr la unicidad de la solución se aplica la formulación

de penalización, que consiste en elegir un parámetro $\varepsilon \in (0,1]$ y hallar φ_ε que satisfice:

$$(P_{\varphi_\varepsilon}) \begin{cases} -\Delta \varphi + \varepsilon \varphi = f & \text{en } \Omega_s \\ (\nabla \varphi) \cdot n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_V = 0$$

En el espacio $V(\Omega)$, la forma bilineal, definida por el producto escalar:

$$a(\varphi_\varepsilon, \psi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \psi \, dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi \psi \, dx,$$

induce a la norma de $V(\Omega)$ y en el espacio dual $V'(\Omega)$ el producto escalar

$$l(\psi) = \int_{\Omega} f \psi \, dx, \quad \forall \psi \in V(\Omega),$$

es una forma lineal. Entonces para φ y $\psi \in V(\Omega)$, por el teorema de Representación de Riez se tiene el siguiente problema variacional penalizado:

$$(PV) \begin{cases} \varphi_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ a(\varphi_\varepsilon, \psi) = l(\psi), \quad \forall \psi \in V(\Omega) \end{cases}$$

Para $\psi = 1$ para $\varphi = \varphi_\varepsilon$, se deduce

$$\varepsilon \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} f \, dx, \quad \forall \varepsilon \in (0,1], \text{ entonces } \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon \, dx = 0.$$

Mediante la desigualdad de Poincaré, el problema penalizado, (PV) permite encontrar las constantes positivas de continuidad C y K, tales que:

- $|a(\varphi_\varepsilon, \psi)| \leq C \|\varphi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi_\varepsilon, \psi \in H^1(\Omega)$
- $|l(\psi)| \leq K \|f\|_{0,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega}$

Como Ω es acotado y suficientemente regular, la forma bilineal será acotada en $V(\Omega) \times V(\Omega)$. La forma lineal l es acotada y continua sobre el dual de $V(\Omega)$ por la continuidad se tiene que $l(c) = 0, \quad \forall c \in R$. Entonces, mediante el teorema de Poincaré generalizado, la norma $\|\varphi_\varepsilon\|_V = \left[|\varphi_\varepsilon|_{1,\Omega}^2 + (l(\varphi_\varepsilon))^2 \right]^{1/2}$, es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}; \quad \forall \varphi_\varepsilon \in V(\Omega)$.

Con esta norma se verifica entonces que, $\exists \beta > 0, \quad a(\psi, \psi) \geq \beta \|\psi\|_V^2, \quad \forall \psi \in V(\Omega)$ probando así que la forma bilineal es V-elíptica o que satisface la propiedad de coercividad, lo que permite aplicar el teorema de existencia y unicidad de Lax Milgram.

En adelante, se denotará por simplicidad $\varphi = \varphi_\varepsilon$. Luego, por el método de Galerkin es posible formular una aproximación del problema (PV) esto es:

$$(PV_h) \begin{cases} \varphi_h \in V_h(\Omega) \\ a(\varphi_h, \psi) = l(\psi) \quad \forall \psi \in V_h(\Omega) \end{cases}$$

siendo $V_h(\Omega) = \{ \varphi \in C^0(\Omega) : \varphi|_K \text{ es lineal continua a trozos} \}$ y h es la longitud del lado mayor del elemento K del mallado Mx .

Este problema satisface todas las condiciones del teorema de Lax Milgram, el cual garantiza la existencia y unicidad de la solución.

Luego la formulación integral de la ecuación $u = \nabla \varphi$ se obtiene también multiplicando por una función de prueba v a toda la ecuación, que integrando resulta:

$$\int_{\Omega} (u) v dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi v dx \quad \forall v \in [L^2(\Omega)]^2$$

Considerando un mallado Mx sobre Ω y el espacio aproximador $V_h(\Omega) \subset V(\Omega)$, suponiendo una aproximación de la función φ de la forma

$$\varphi_h^k(x, y) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i X_i^k(x, y),$$

siendo φ_i el valor de φ en cada nodo y que verifique:

$$a(\varphi_h, X_j) = (f, X_j)$$

donde $X_i^k(x, y)$ son las funciones de interpolación de Lagrange lineales que constituyen la base del espacio aproximador $V_h(\Omega)$, la cual determina la dimensión finita de éste.

El problema discreto conduce a la resolución del sistema de ecuaciones lineales $A\xi = B$ donde A es una matriz simétrica y definida positiva, ξ es el vector de las incógnitas, $\xi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$ las mismas que estarán representadas en términos de las funciones de base del espacio aproximador, n es el orden de la matriz del sistema.

El número de valores φ_i para cada nodo i , llamados grados de libertad, son los que definen el orden del sistema de ecuaciones que hay que resolver, para hallar la aproximación de φ .

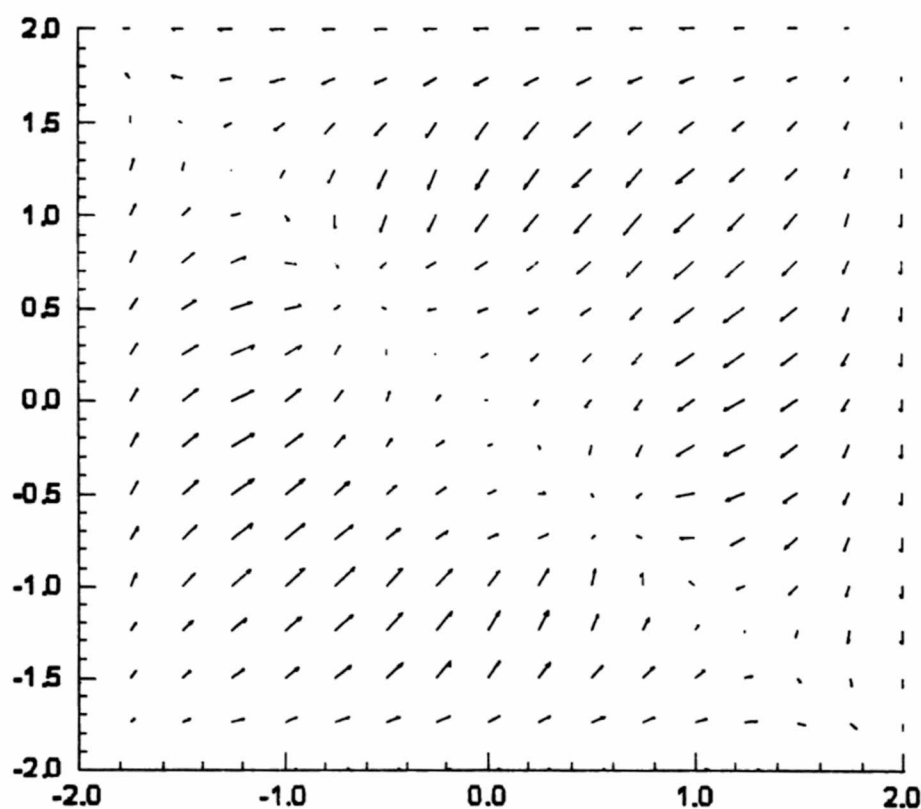


Fig. 3 Campo de velocidades con W .

Los coeficientes de la matriz $A = (a_{ij})$ y del vector $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ están representados por:

$$a_{ij} = \sum_{K \in M_x} a^K(\chi_i, \chi_j) \text{ tal que } a^K(\chi_i, \chi_j) = \int_K [\nabla \chi_i \nabla \chi_j + \varepsilon(\chi_i \chi_j)] dx$$

$$b_1 = \sum_{K \in M_x} (f_K, \chi_j) \text{ tal que } (f_K, \chi_j^K) = \int_K f_k \cdot \chi_i^K dx; \quad \forall x \in K$$

Las propiedades de simetría y positividad de la matriz global de coeficientes del sistema, la que a su vez es dispersa con muchos ceros, permiten su resolución mediante el método de Cholesky.

Una vez encontrada la función de aproximación φ_h , se procede a encontrar su gradiente. Para ésta operación se utiliza las mismas funciones de forma X_i usadas en el proceso de búsqueda para φ_h . Ahora; suponiendo que $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \chi_i(x)$ es aproximación de u (Fig. 3), donde:

$$u_i = \frac{\int_K \nabla \varphi_h \chi_i}{\int_K \chi_i dx} = \frac{\sum_{K \in K(i)} (\nabla \varphi_h)|_K A_K}{\sum_{K \in K(i)} A_K}$$

A_K representa el área del elemento cuyo nodo común es el nodo N_i respecto a los elementos de su entorno. La ventaja de trabajar con la versión penalizada radica en la utilización de las mismas funciones de forma lineal de la base de $V_h(\Omega)$ para el cálculo de u_i .

El parámetro $\gamma(\theta) > 0$ se obtiene de la resolución de la ecuación cuadrática discreta $p_i \delta^2 + q_i \delta + (1 - \theta) = 0$, $\theta \in (0, 1) \forall \delta \in G(\theta)$ para cada nodo N_i , donde $p_i(x) = \det(\tilde{\nabla} u_h(x))$, $q_i(x) = \text{div}(u_h(x))$, $x \in \bar{\Omega}_h$ los coeficientes. La solución de cada ecuación cuadrática genera un elemento para el conjunto, lo que garantiza que sea diferente del vacío, con lo que se procede de forma natural ubicar las coordenadas $Y_j = X_j + \delta u_j$, $\forall j = 1, \dots, n$ de los nodos de la malla adaptada M_y (Fig. 4).

Resultados numéricos

Para evaluar la calidad de la malla resultante mediante el método presentado, se asume que: sea M una malla con n elementos finitos y sea $d : M \rightarrow R$ una función de valor real que representa la desviación del error sobre M , entonces para cada $K \in M$ se tiene:

$$d(K) = \int_K w(x) dx - \hat{d}, \quad x \in \Omega, \quad \hat{d} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \int_{K_i} w(x) dx \right),$$

para la malla M , se define la función vectorial $d(M)$ como:

$$d(M) = [d(K_1), \dots, d(K_i), \dots, d(K_n)]^T \in R^n$$

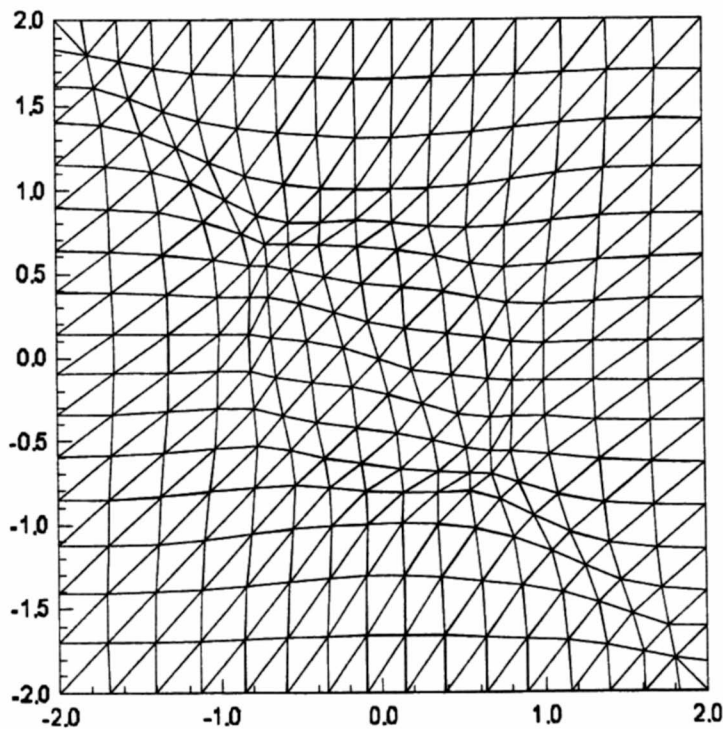


Figura. 4 Malla adaptada con W .

Referente al indicador de distribución de error; sea M_x , un mallado inicial, M_y la malla adaptada y $\|\cdot\|$ la norma de R^n , se define un indicador de la distribución

del error sobre la malla adaptada, denotado por $I_{||d||}$ llamado también índice de efectividad (tabla 1), y está representado por:

$$I_{||d||} = 1 - \frac{\|d(M_y)\|}{\|d(M_x)\|}$$

- Si $I_{||d||} < 0$, entonces la distribución del error, en M_y , no es mejor que en M_x .
- Si $I_{||d||} = 0$, entonces la distribución del error en M_y , es igual que en la malla M_x .
- Si $I_{||d||} \in (0,1)$, entonces la distribución del error en M_y , es mejor que en M_x .
- Si $I_{||d||} = 1$, entonces la distribución del error en M_y , es uniforme en todos los elementos.

La implementación de los algoritmos, se ha construido con los códigos del lenguaje Fortran. Para el proceso de prueba se han tomado los datos de entrada $\varepsilon = 10^{-6}$, $\theta \in (0,1)$ y $\Omega = (-2,2) \times (-2,2)$ con una malla inicial regular de 512 elementos y un estimador de error W

$$W = \|\nabla g\|, g(x, y) = \tanh[3(x^2 + y^2 - 1)] + \tanh[3(-x - y)]$$

Conclusiones

- i) El valor de $\theta \in (0,1)$, influye en la calidad de la malla, regulando el grado de adaptación bajo el control del área mínima de los elementos en la malla resultante.
- ii) El tiempo de cálculo computacional esta asociado a la resolución del problema variacional discreto sobre la malla M_x .

- iii) Esta técnica frente a otras alternativas de adaptabilidad de mallas en un problema de Mecánica de fluidos tiene mayor ventaja, puesto que se utilizaría una sola malla para la adaptabilidad y a su vez para la resolución del problema.
- iv) La interpolación de la función estimador de error dada a priori, proporciona una idea de la distribución del error en la malla resultante.
- v) El algoritmo de adaptabilidad presentado conduce a la resolución de un problema de contorno elíptico lineal, el cual origina un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva; por lo que, para la resolución del sistema se usa un método directo de un solo paso.

REFERENCIAS

- [1] **Babuska y Rheinboldt, w.** "Aposteriori error estimates for the finite element method". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 12, 1597-1615, (1978).
- [2] **Bank, R.** "Analysis of a local aposteriori error estimate for elliptic equations. Accuracy estimates and adaptative refinements in FE computations". Babuska, Zienkiewicz, Gago y Oliveira, 119-128. Ed. John Wiley, New York (1986).
- [3] **Carey, G. F. y Oden, J.T.** "Finite elements: Computational aspects". Prentice-Hall, (1984).
- [4] **Claes, Johnson.** "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method". *Student litteratur, Lund*, (1994).
- [5] **Girault, V. y Raviart, P.A.** "Finite element approximation of the Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [6] **Mantilla, Irla.** "Adaptabilidad de Mallados", Dpto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo (1997).
- [7] **Miller, K.** "Moving finite elements". *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.18 (1981).
- [8] **Pardanani, A. y Carey, G.F.** "Optimization of computational grids. Numerical methods for partial differential equations". Vol. 4, 95-117 (1988).

 edición, diagramación e impresión por
Editorial **HOZLO S.R.L.**

Psje. Santa Rosa 191-501, Lima - Perú
Telefax: 428-4071

Esta edición consta de 0500 ejemplares.

Lima, julio del 2001.

Í N D I C E

- Uso del software IRAF para el análisis de una imagen digital astronómica: Cúmulo estelar abierto M7.
Nobar Baella Pajuelo 1
 - La forma del universo.
Armando Bernui Leo15
 - Estudios de nanoindentación en recubrimientos de TiVN y TiN sobre acero AISI-316 y HSS.
Robinson Figueroa, Fernando Chirinos, Arturo Talledo 27
 - Cómo construir un telescopio reflector.
Orlando Martínez 37
 - Estudio de la estrella binaria V505 Sgr por el método de fotometría diferencial.
Julio César Tello Gálvez52
 - Solución local completa para un punto material sobre la tierra rotante.
H.G. Valqui 67
 - Los estados cuánticos y los ejes principales de inercia.
Holger G. Valqui 77
 - Análisis de lo que le ocurriría a la Tierra si estuviese en la órbita de Venus.
María Isela Zevallos Herencia 82
 - Adaptabilidad de mallados por similitud al comportamiento de un fluido compresible.
Irla Mantilla Núñez 94
-