

Revista de la Facultad de
CIENCIAS de la UNI
REVCIUNI

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

LIMA - PERÚ

Editor: *Heriberto Sánchez Córdova*

Asesoría: *Félix Escalante Del Águila*
Manfred Horn
Luis Quispe Paredes
Holger Valqui Casas

Oficina de publicación:

Facultad de Ciencias - UNI
Av. Túpaz Amaru 210 - Rímac
Teléfono: (0051) (1) 481-0824
E-mail: hsanchez@fc.uni.pe

Revista de la Facultad de
CIENCIAS de la UNI
REVCIUNI

ÍNDICE

Presentación

Investigación

- Prototipo de dispositivo electrocrómico: “Smart window”
Arturo Talledo, Oscar Varas, Mónica Gómez 3

Tesis

- Los puntos de *de Boor* de una curva seccionalmente polinómica.
Juan Dueñas Béjar 15
- Elaboración de películas delgadas de silicio amorfo hidrogenado por glow discharge DC y su caracterización eléctrica y óptica.
Jorge A. León E., Aníbal Valera P. 28

Divulgación especializada

- Modelo post-newtoniano de la radiación cuadrupolar de un sistema binario.
Jorge Aleántara Gavidia y Armando Bernui 41
- Reducción química del níquel a partir de complejos de citrato por la técnica “electroless”.
Adolfo La Rosa Toro G.; Aída Torres R., Angela Medina B. 55
- El éter y las unidades de Planck.
Aníbal Valera 64
- Construcción de las funciones de Green.
Caso unidimensional.
H. G. Valqui 77
- Errores en las rotaciones usando los ángulos de Euler.
H. G. Valqui 86

Presentación

*En la publicación de este tercer número del segundo volumen de la **Revista de la Facultad de Ciencias**, queremos expresar nuestro sincero agradecimiento a los autores por sus valiosos aportes, y reiterar nuestra invitación a los docentes de la facultad, para que desde estas páginas difundan su trabajo.*

Asimismo, les manifestamos que el Comité Editorial no se responsabiliza por los artículos; éstos son exclusiva responsabilidad de los autores.

Por otro lado, ponemos en su conocimiento que con el objeto de enriquecer los temas presentados, la Redacción estima conveniente abrir unas páginas de Cartas a la Redacción, en que los lectores puedan criticar profesional y específicamente algunos puntos expuestos en los artículos publicados.

El editor.

Investigación

Prototipo de dispositivo electrocrómico: “Smart window”

Arturo Talledo, Oscar Varas, Mónica Gómez (*)

RESUMEN

Usando la técnica de pulverización catódica, hemos producido películas delgadas de materiales electrocrómicos tales como V_2O_5 y WO_3 . Las películas fueron caracterizadas óptica y electroquímicamente y utilizadas para la construcción de un prototipo de dispositivo electrocrómico conocido como “smart window”. Se muestran las propiedades ópticas del dispositivo.

Introducción

Materiales electrocrómicos, temocrómicos y fotocrómicos forman parte de una familia muy amplia de materiales llamados cromogénicos. Los materiales electrocrómicos cambian sus propiedades ópticas cuando se les inserta electrolíticamente iones ligeros tales como H^+ , Li^+ o Na^+ . Los materiales termocrómicos cambian sus propiedades ópticas y eléctricas debido a una transición metal-semiconductor que ocurre a una temperatura bien definida. Los materiales fotocrómicos cambian de color cuando la radiación ultravioleta incide sobre ellos.

(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima - Perú.

Las películas electrocrómicas vienen siendo ampliamente estudiadas^(1,2) por sus posibilidades de aplicación en dispositivos arquitectónicos y automotrices tales como "smart windows" y espejos retrovisores, respectivamente. Una ventana electrocrómica o "smart window" modula la transmisión de radiación visible a un ambiente cuando una pequeña diferencia de potencial es aplicada entre las dos películas electrocrómicas que forman parte del dispositivo. Un espejo retrovisor electrocrómico modula la reflectancia de la radiación visible.

Este artículo reporta la construcción de un prototipo de "smart window": En la sección II describimos el equipo experimental de producción de películas delgadas por la técnica de pulverización catódica (dc sputtering) y las condiciones a las que fue operado el equipo para la obtención de películas de óxido de vanadio y óxido de tungsteno. En la sección III mostramos las propiedades electroquímicas de estas películas cuando son sometidas a un proceso cíclico de inserción y extracción de iones de litio. En la sección IV nos referimos a las propiedades ópticas de las películas, i.e., mostramos y discutimos los espectros de transmitancia óptica de las películas de V_2O_5 y WO_3 con diferentes grados de inserción de litio. En la sección V describimos el dispositivo construido con las películas producidas y mostramos sus propiedades ópticas más importantes, i.e., la modulación de la radiación visible entre el 65 y 30% en función de la carga insertada a la película de WO_3 .

Sobre la técnica y condiciones de deposición de las películas

La figura 1 muestra un esquema del sistema de pulverización catódica para producción de películas delgadas. Una presión de fondo de 10^{-5} mbar es obtenida en la cámara de vacío, usando una bomba mecánica y una bomba turbomolecular. Una mezcla de gases argón y oxígeno es introducida hasta alcanzar una presión de 10^{-2} mbar. La presión parcial de oxígeno en la mezcla de gases fue del 8%. Una diferencia de potencial de 1500 V produce la ionización de los gases y la aceleración de los iones de Argón hacia el cátodo que está constituido por un disco de 35 mm de diámetro de tungsteno o vanadio. El material pulverizado extraído del cátodo reacciona químicamente con el oxígeno y el óxido respectivo se deposita en las superficies internas de la cámara y de los objetos dentro de ella, pero fundamentalmente en un sustrato colocado 4 cm debajo del cátodo. El sustrato fue puesto sobre una resistencia de grafito y calentado a 180°C durante la deposición. El tiempo de deposición fue de 90 minutos.

La deposición de las películas delgadas electrocrómicas de V_2O_5 y WO_3 fue hecha sobre sustratos de vidrio Corning previamente recubiertos con una película transparente y conductora eléctrica de $In_2O_3: Sn$ (ITO), la cual facilitará las conexiones eléctricas del dispositivo a construir.

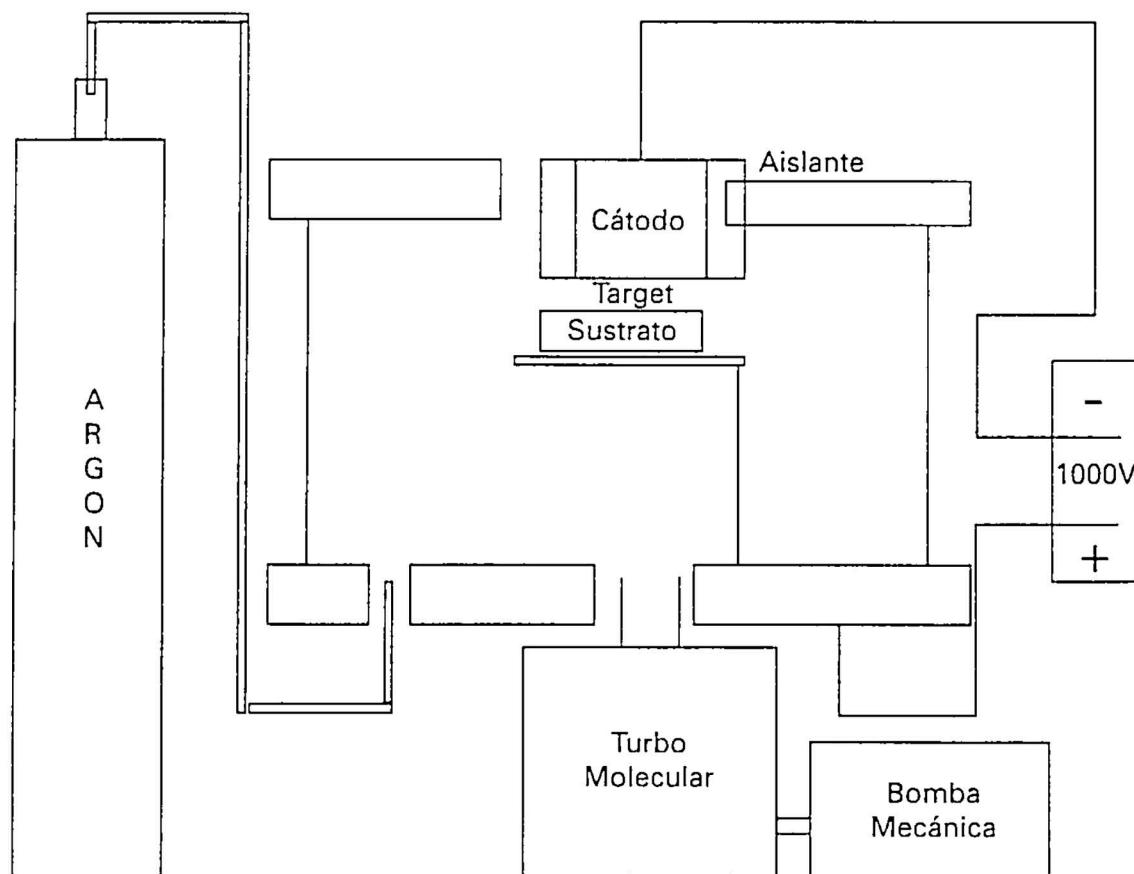


Figura 1. Sistema de deposición de películas delgadas por la técnica de pulverización catódica (dc sputtering).

Caracterización electroquímica

Las propiedades electroquímicas de ambos tipos de películas, pentóxido de vanadio^(3,4,5) y trióxido de tungsteno^(6,7), han sido previamente estudiadas por varios autores usando voltametría cíclica. Esta técnica consiste en permitir el paso de una corriente iónica de la película (electrodo de trabajo) a un contraelectrodo de manera que la diferencia de potencial entre el electrodo de trabajo y un electrodo de referencia tenga un valor deseado ΔV . El valor deseado es en realidad una función periódica del tiempo. Las curvas ΔV vs I obtenidas constituyen un voltamograma. Un voltamograma puede ser usado cualitativamente como una "huella digital" de los procesos electroquímicos en un material.

La figura 2 muestra un voltamograma para una típica película delgada de pentóxido de vanadio y la figura 3 para una de trióxido de tungsteno. En ambos casos los voltajes mínimo y máximo fueron -1,5 y 1,5 V, respectivamente, respecto a un electrodo de referencia de calumel saturado. Un contraelectrodo de platino fue usado. La rapidez con que el potencial barría este rango era de 5 mV/s.

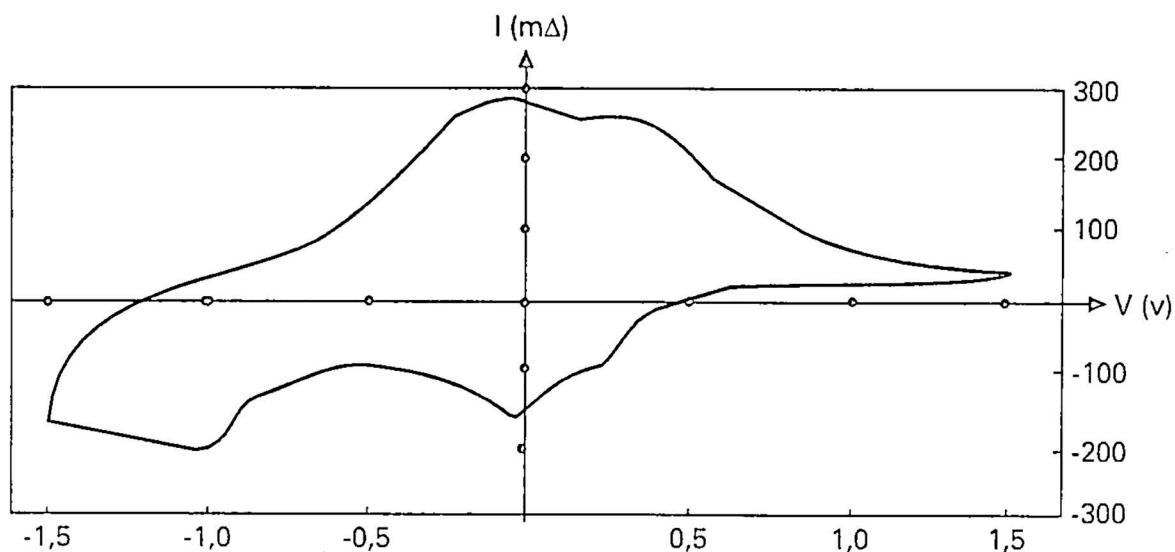


Figura 2. Voltamograma de una película delgada de pentóxido de vanadio.

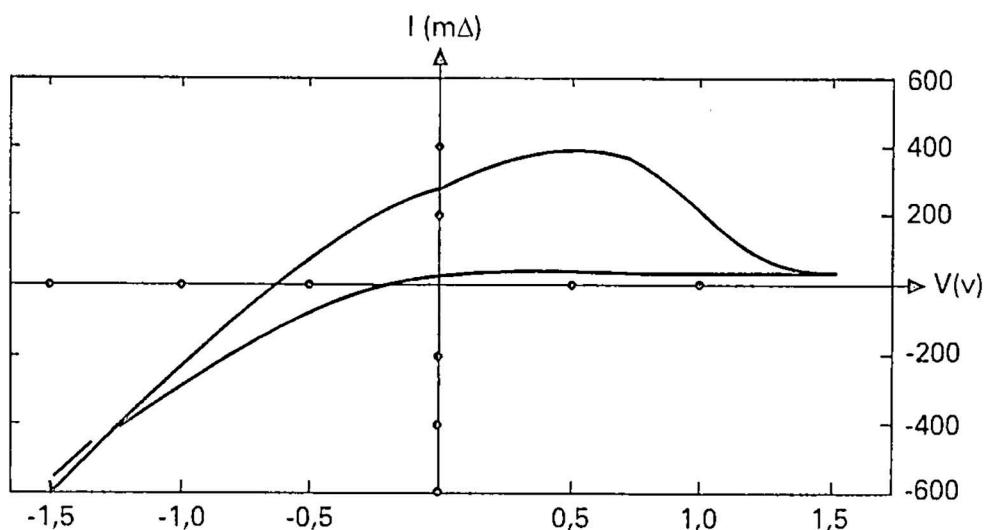


Figura 3. Voltamograma de una película delgada de trióxido de tungsteno.

Caracterización óptica

La figura 4 muestra esquemáticamente una celda electrolítica donde uno de los electrodos es un metal (aluminio) y el otro una película delgada de WO_3 /ITO/vidrio. La solución electrolítica es 1M $LiClO_4$ en carbonato de propileno.

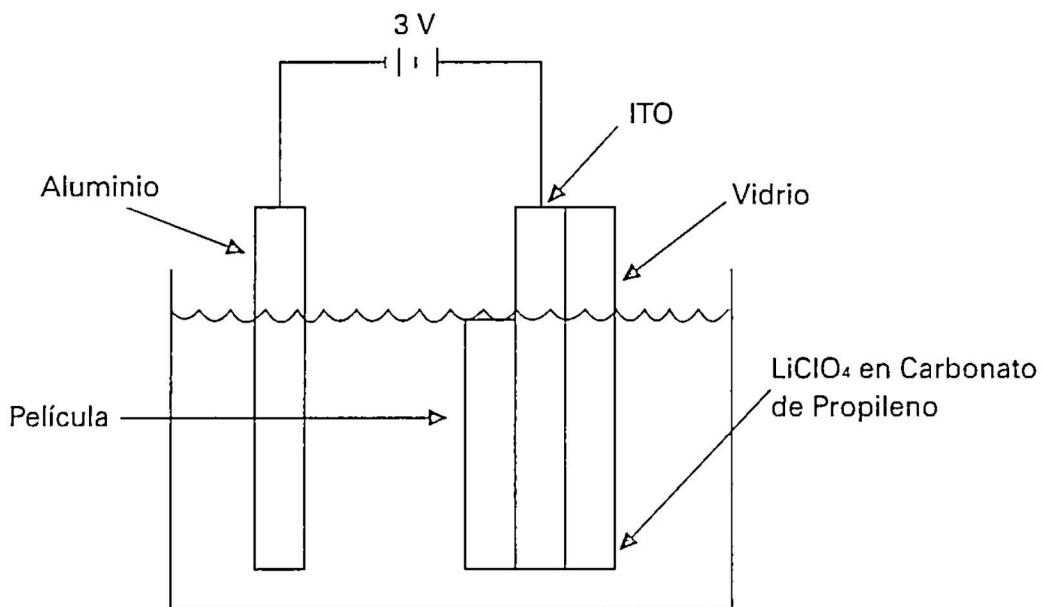


Figura 4. Esquema de una celda electrolítica para insertar iones litio en una película delgada de WO_3 o V_2O_5 .

Una diferencia de potencial de 3 voltios fue aplicada y una corriente iónica de iones de litio penetra en la estructura del WO_3 que se constituye entonces en Li_xWO_3 . La película Li_xWO_3 /ITO/vidrio fue extraída de la celda y la transmitancia óptica fue medida en el rango de 350 a 1100 nm. La película puede ser colocada nuevamente en la solución electrolítica y cambiando la polarización del voltaje casi la totalidad del litio puede ser extraído.

La figura 5 muestra los espectros de transmitancia de tres muestras, (a) WO_3 sin tratamiento electrolítico, (b) Li_xWO_3 con máxima cantidad de litio insertada ($x \approx 1$), (c) Li_xWO_3 con casi la totalidad del litio extraída ($x \approx 1$). Un espectrofotómetro Perkin Elmer Lambda 2 fue usado para determinar la transmitancia óptica. Las características básicas de estos espectros están de acuerdo con trabajos publicados por otros autores^(8, 9).

En la misma celda electrolítica de la figura 2 hicimos el tratamiento electrolítico de las películas delgadas de V_2O_5 . La figura 6 muestra los

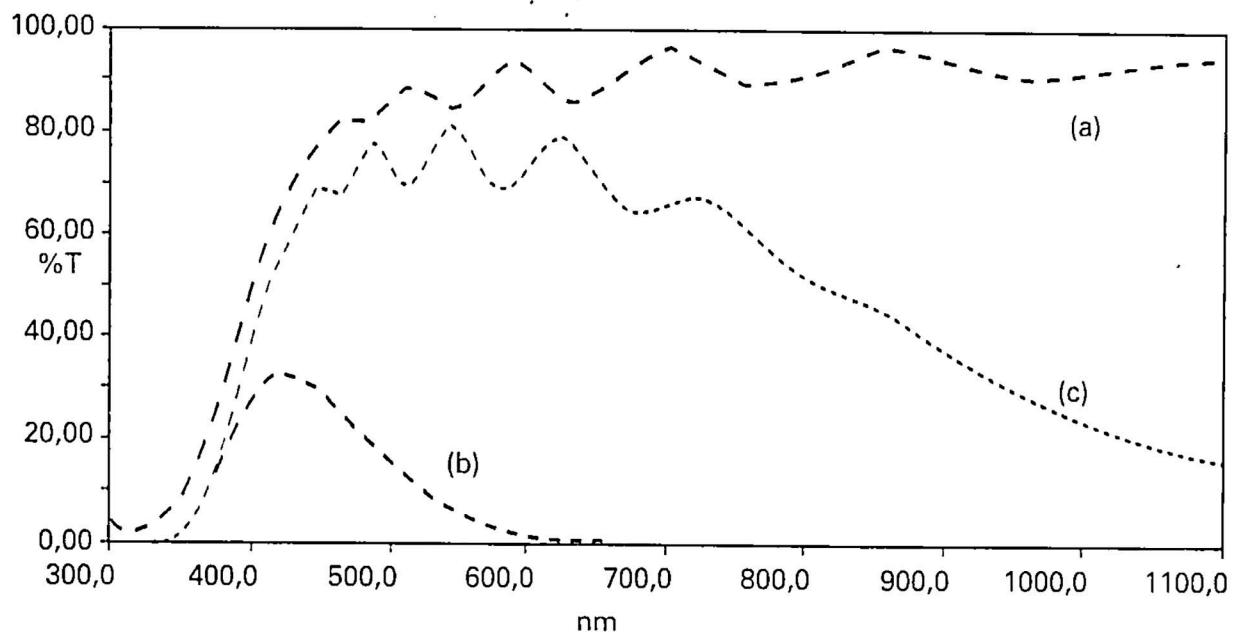


Figura 5. Transmitancia espectral de películas delgadas de: (a) WO₃ sin tratamiento electrolítico. (b) Li_xWO₃, con máximo contenido de litio. (c) Li_xWO₃ con mínimo contenido de litio.

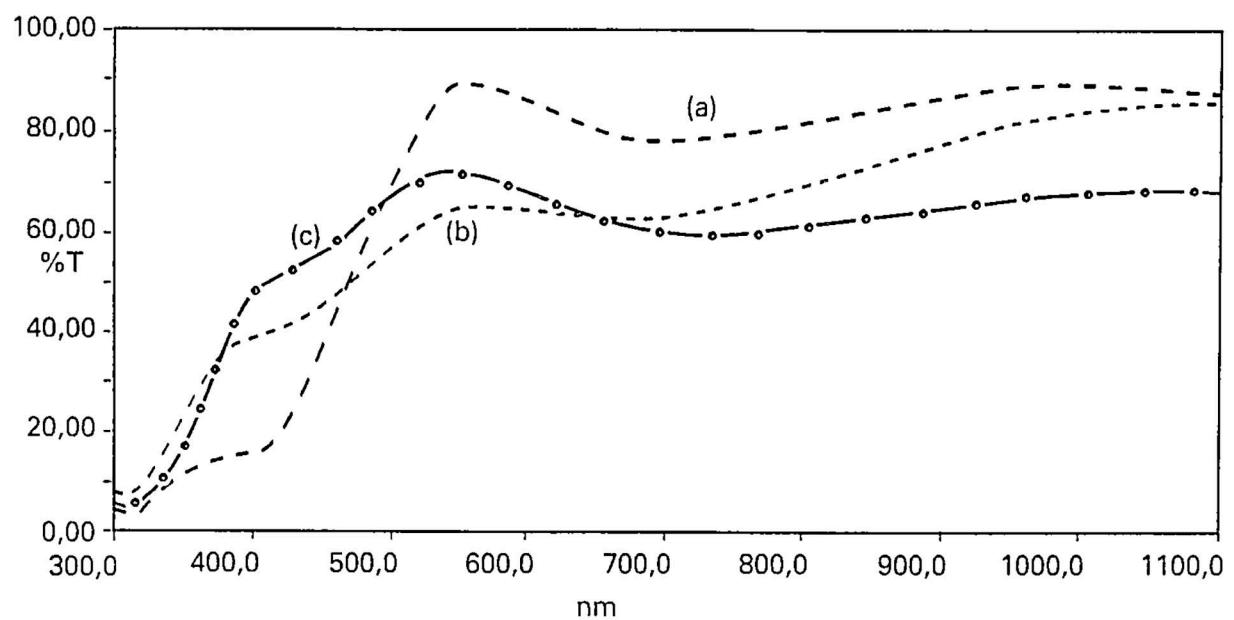


Fig. 6 Transmitancia espectral de películas delgadas de: (a) V₂O₅ sin tratamiento electrolítico, (b) Li_xV₂O₅, con máximo contenido de litio, (c) Li_xV₂O₅ con mínimo contenido de litio.

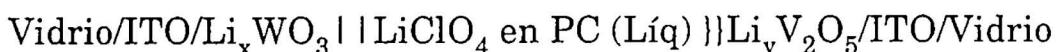
espectros de transmitancia óptica de tres muestras, (a) V_2O_5 sin tratamiento electrolítico, (b) $Li_yV_2O_5$ con máxima cantidad de litio insertada ($y \approx 5$), (c) $Li_yV_2O_5$ con la máxima cantidad de litio extraída ($y \approx 0,5$). Estos resultados están de acuerdo con otros trabajos publicados^(3, 4, 10, 11). Todos los espectros de transmitancia en este trabajo fueron hechos a incidencia normal y con referencia a un vidrio Corning sin ningún recubrimiento.

La explicación física para este comportamiento de las propiedades ópticas de las películas $Li_yV_2O_5$ ha sido discutida en trabajos anteriores^(3,4) en términos de la teoría de bandas. Las propiedades ópticas del sistema Li_xWO_3 han sido discutidas ampliamente por otros autores^(12,13).

Un prototipo de dispositivo electrocrómico: "smart window"

La figura 7 muestra el esquema de un dispositivo electrocrómico llamado "smart window". El dispositivo está constituido por una película de aproximadamente 160 nm de WO_3 depositada sobre un sustrato de vidrio Corning de dimensiones 2,5 cm x 2,5 cm x .1 cm, previamente recubierto con ITO y una película de aproximadamente 160 nm de V_2O_5 depositada sobre un sustrato igual al anteriormente descrito. Sobre los bordes de uno de los vidrios recubiertos se colocan espaciadores de vidrio de 2 cm x 0,2 cm x 0,001 cm formando así una pequeña cavidad donde se puede almacenar 4 mm³ de solución 1M de perclorato de litio en carbonato de propileno, el sistema es sellado por el otro vidrio recubierto.

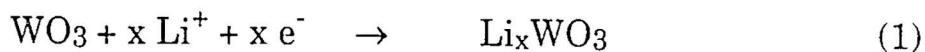
Usando la nomenclatura de celdas electrolíticas, este dispositivo podría ser representado así:



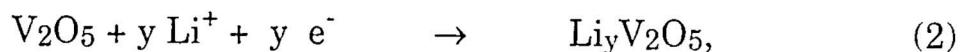
donde PC significa carbonato de propileno.

Durante la deposición de las películas tanto de WO_3 como de V_2O_5 , en uno de los bordes del sustrato se deja una pequeña superficie (5mm x 5mm) sin recubrir para posteriormente pegar un contacto eléctrico de cobre usando un epoxy de plata.

Este dispositivo fue conectado a una batería de 3V por 2 minutos. Colocando el terminal negativo de la pila a la película de WO_3 tenemos un obscurecimiento del dispositivo debido a que el WO_3 transparente se transforma en Li_xWO_3 de color azul de acuerdo a la reacción:



Cuando conectamos la batería en polarización inversa el dispositivo retorna a su estado transparente en aproximadamente 2 minutos. Se producen la reacción (1) en sentido inverso y la reacción:



El dispositivo fue introducido en la cavidad portamuestras del espectrofotómetro Lambda 2 y el espectro de transmitancia fue obtenido para dos estados diferentes del dispositivo, que hemos llamado transparente y obscuro. La figura 8 muestra los respectivos espectros de transmitancia en el rango de 350 a 1100 nm con referencia a una muestra en vidrio Corning sin recubrimiento.

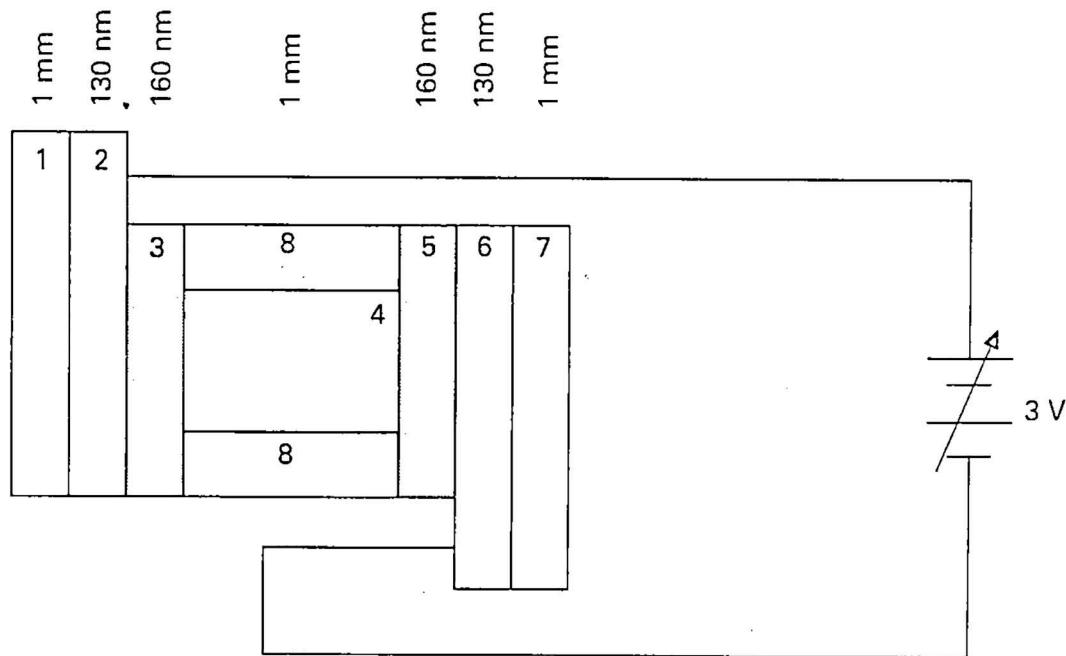


Figura 7. Esquema de un dispositivo electrocrómico: "smart window". 1. vidrio, 2. ITO, 3. pentóxido de vanadio, 4. perclorato de litio en carbonato de propileno, 5. óxido de tungsteno, 6. ITO, 7. vidrio, 8. espaciadores.

Puede observarse, de la figura 8, que el dispositivo construido modula la transmitancia luminosa a un ambiente a voluntad del usuario entre 65% en el estado transparente del dispositivo al 30% en el estado obscuro. Las características de este dispositivo son similares a los obtenidos por otros autores⁽¹⁴⁾ que han usado soluciones electrolíticas líquidas. La tendencia actual^(15,16) es, sin embargo, usar electrolitos sólidos.

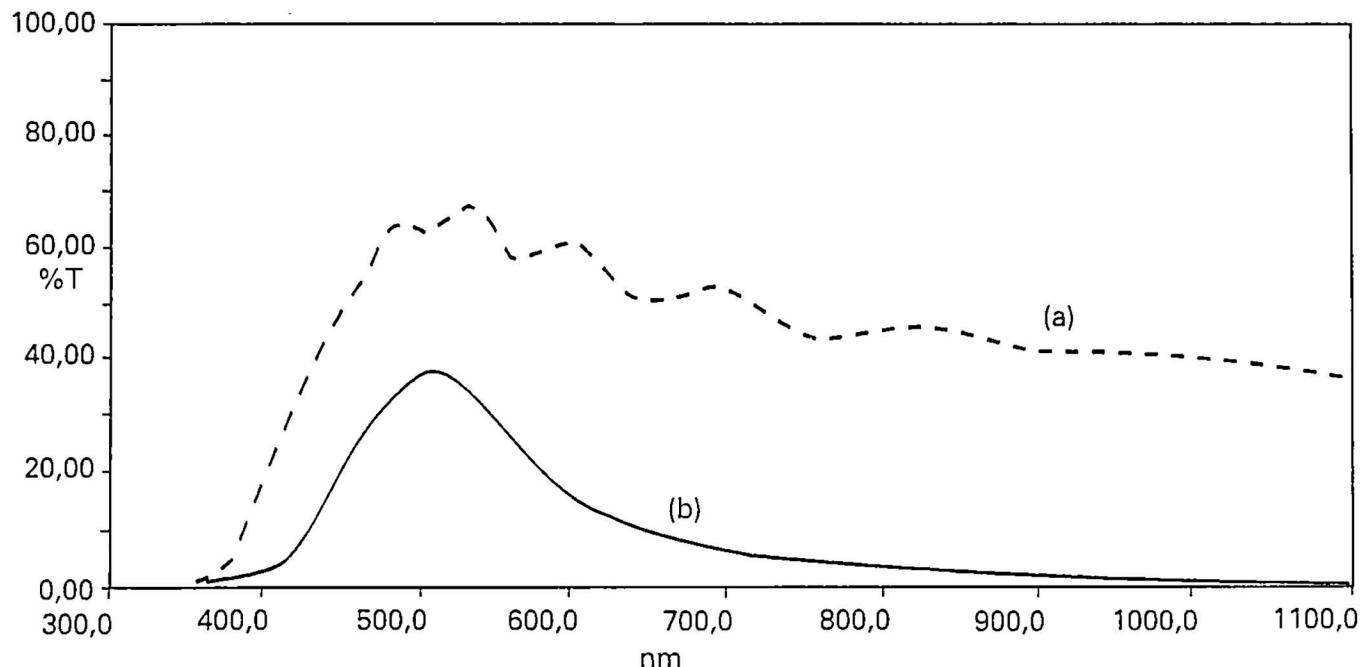


Figura 8. Espectros de transmisiencia de un dispositivo electrocrómico: "smart window" en dos estados: (a) transparente, película de V_2O_5 fuertemente litiada, (b) obscura, película de WO_3 fuertemente litiada.

Conclusiones

Se ha demostrado en este trabajo la posibilidad de producir películas delgadas electrocrómicas usando el equipo de pulverización catódica construido en la UNI. Se han utilizado las películas para construir un prototipo de dispositivo electrocrómico. Las características de las películas aquí producidas así como las del dispositivo construido son comparables a las reportadas a nivel internacional en los últimos diez años.

Agradecimientos

Este trabajo pudo realizarse gracias a la cooperación de International Science Programs (ISP) de la Universidad de Uppsala, Suecia. El apoyo parcial de CONCYTEC y Organización de Estados Americanos (OEA) es también reconocido.

REFERENCIAS

1. **C.G. Granqvist.** *Handbook of inorganic electrochromic materials*, editorial Elsevier 1995.
2. **C.M. Lampert.** In *Large area Chromogenics: Materials and devices for transmittance control*, edited by C.M. Lampert and C.G. Granqvist (SPIE Opt. Engr. Press, Bellingham, 1990), Vol. IS4, 414-446.
3. **A. Talledo.** *Vanadium Pentoxide-based Thin Films: Optical, Structural and Electrophysical characterization*, Ph. D. Thesis (UNI, Lima, Perú, 1992) *unpublished*.
4. **A. Talledo and C.G. Granqvist.** *Electrochromic vanadium-pentoxide-based films: Structural, electrochemical, and optical properties*, *J. Appl. Phys.* 77 (9) 1 May 1995, 4655-4666.
5. **S. Kobayashi et al.** *Trans. Inst. Electronic Commun. Engr. Japan* 67-C, 397-404 (1984).
6. **K. Yamanaka.** *Japan J. Appl. Phys.* 26, 1884-1890 (1987).
7. **P. Judeinstein and J. Livage.** *Mater. Sci. Engr. B* 3, 129-132 (1989).
8. **H. Kaneko et al.,** *J. Appl. Phys.* 59, 2526-534 (1986).
9. **K. Miyake et al.,** *J. Appl. Phys.* 55, 2747-2753 (1984).
10. **A. Talledo et al.,** *J. Appl. Phys.* 69, 3261-3265 (1991).
11. **S.F. Cogan,** *J. Appl. Phys.* 66, p. 1333-1337 (1989).
12. **C.G. Granqvist,** *Appl. Phys. A57*, 3-12, (1993).
13. **J. M. Honig:** in *Electrodes of Conductive Metallic Oxides, Part A*, ed. by S. Trassati (Elsevier, Amsterdam 1980) p.1.
14. **T. Kamimori.** *Solar Energy Mater.* 16, 27-38 (1987).
15. **S.F. Cogan and R.D. Rauh,** in *Large area Chromogenics: Materials and devices for transmittance control*, edited by C.M. Lampert and C.G. Granqvist (SPIE Opt. Engr. Press, Bellingham, 1990), Vol. IS4, 482-493.
16. **H. Tada et al.** *Solar Energy Mater.* 16 509-516, (1987).

Tesis

Los puntos de de Boor de una curva seccionalmente polinómica

Juan Dueñas Béjar^()*

RESUMEN

*Un resultado clásico en matemática es que los polinomios de una sola variable de grado p son equivalentes a aplicaciones p -afines simétricas [Ramshaw '87]. Ramshaw aplicó este principio a la teoría de las curvas y superficies de Bézier y B-splines y a la aplicación p -afín simétrica de un polinomio de grado p lo llamó **blossom**.*

En este trabajo se representará una curva seccionalmente polinómica mediante los B-splines determinando los puntos de de Boor en función de los blossoms.

Introducción

El Diseño geométrico asistido por computadora (CAGD) está relacionado con la representación, manipulación y el diseño de objetos por computador tales como: curvas, superficies y sólidos.

Las herramientas matemáticas del CAGD son principalmente el análisis matemático, el análisis numérico, cálculo variacional, geometría

^(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática.

diferencial, etc. Las principales aplicaciones se encuentran donde se necesitan métodos para describir matemáticamente los objetos que van a ser manufacturados por máquinas controladas por computador, como por ejemplo: en la industria aérea (diseño de alas, fuselajes de un avión, etc.), automotriz (diseño de las partes de un auto), etc. Otras aplicaciones se encuentran en los gráficos por computador, visualización científica (para describir los fenómenos físicos, geológicos, médicos, etc.).

En las aplicaciones del diseño de una curva o superficie a menudo se define especificando interactivamente un conjunto de puntos, denominados puntos de control o manejadores, los cuales nos determinan la forma de dicha curva o superficie de tal manera que dichas curvas o superficies se ajustan y se editan mediante los puntos de control. Estos elementos se tratan matemáticamente como entidades del tipo Bézier, B-splines, etc.

El objetivo de este trabajo es encontrar los puntos de control de una curva seccionalmente polinómica.

1. Curvas B-splines

Definición 1.1

La curva B-spline de grado p con respecto a un vector nodo $T = (t_1, \dots, t_{m+p+1})$, tal que $t_i < t_{i+p+1}$ es una curva polinomial por tramos y está definido:

$$F(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(u), \quad u \in [t_{p+1}, t_{m+1}], \quad d_i \in \mathbb{R}^d$$

$d = 1, 2, 3.$

Los puntos d_i se llaman *puntos de de Boor* o puntos de control. [Hoscket '93]

El polígono de *de Boor* es aquel polígono que se obtiene al unir los puntos de control consecutivos mediante segmentos.

Las funciones $N_i^p(u)$ son polinomios y se llaman *B-splines normalizados de grado¹ p sobre el vector nodo T* y se definen recursivamente:

¹ orden = $p + 1$.

$$N_i^0(u) := \begin{cases} 1 & ; \quad t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$N_i^r(u) := \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u), \quad 1 \leq r \leq p$$

Convención: $0/0 \equiv 0$

Ejemplo 1: Una curva B-spline cúbica sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$ cuyos puntos de control son: $d_1 = (6, 3)$, $d_2 = (7, 8)$, $d_3 = (12, 5)$, $d_4 = (9, 0)$, $d_5 = (1, 0)$, $d_6 = (0, 6)$, $d_7 = (3, 8)$, $d_8 = (4, 4)$ (ver figura 1).

Ejemplo 2: Una curva B-spline cúbica sobre el vector nodo $T = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ cuyos puntos de control son: $d_1 = (0, 0)$, $d_2 = (3, 9)$, $d_3 = (6, 3)$, $d_4 = (9, 6)$ (ver figura 2).

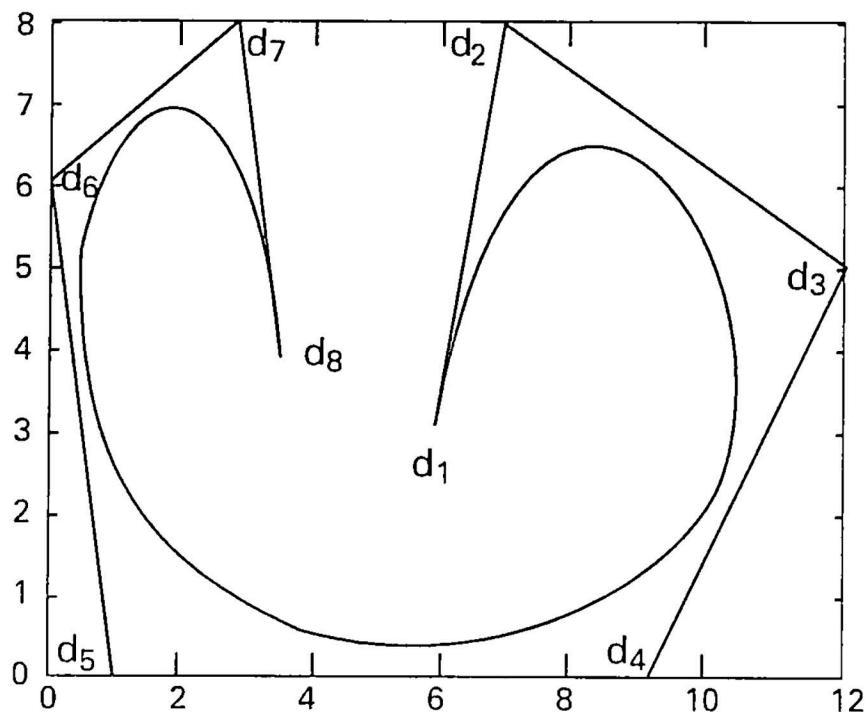


Figura 1.

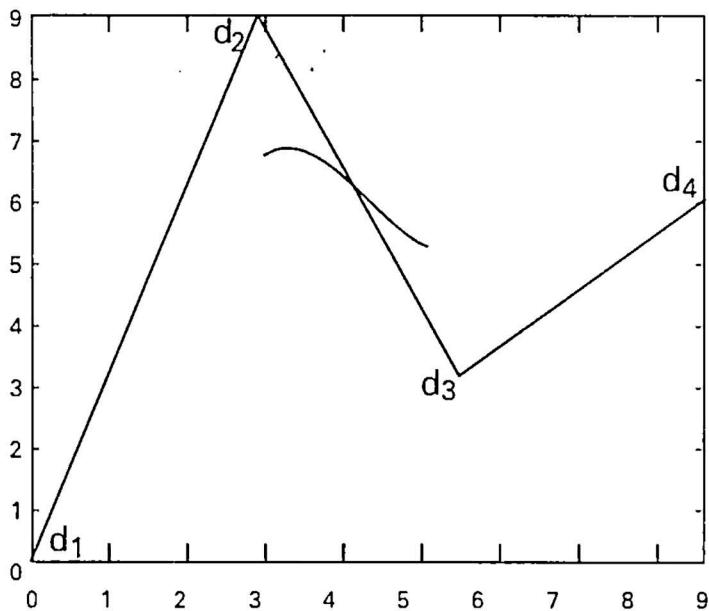


Figura 2.

Observación:

- 1) Si $t_1 = \dots = t_{p+1}$ entonces el primer lado del polígono es tangente a la curva en $t = t_1$. Además el punto d_1 está en la curva.
- 2) Si $t_{m+1} = \dots = t_{m+p+1}$ entonces el último lado polígono es tangente a la curva en $t = t_{m+1}$. Además, el punto d_m está en la curva.

2. Los blossoms

Teorema 2.1 (*Principio de los blossoms*)

Si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un polinomio de grado n definido por $F(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$ entonces existe una única función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que:

- i) f es multiafín, es decir:

Sean $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_m \in \mathbb{R}$:

$$f(u_1, \dots, u_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_i t_i, u_{j+1}, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^n a_i f(u_1, \dots, u_{j-1}, t_i, u_{j+1}, \dots, u_m)$$

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}: \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

ii) f es simétrica, es decir:

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \quad \forall i, j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq m.$$

iii) $F(t) = \underbrace{f(t, \dots, t)}_{n \text{ veces}}.$

A la función f se dice forma polar o **blossom** de F .

La función F es la **forma diagonal** de f .

Al proceso de encontrar la forma polar se conoce como **blossoming** [Ramshaw '87].

Nota: Un teorema conocido en álgebra lineal es: Para cada forma cuadrática $F: V \rightarrow \mathbf{R}$ sobre un espacio vectorial V existe una única forma bilineal simétrica $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $F(v) = f(v, v)$. Este teorema es análogo al teorema 2.1 para polinomios de la forma:

$$F(v) = \sum_{i=1}^n c_{ii}^2 x_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_{ij} x_i x_j$$

donde $v = (x_1, \dots, x_n) \in V \subset \mathbf{R}^n$, $c_{ij} \in \mathbf{R}$, es decir polinomios multivariantes homogéneos de grado 2.

Teorema 2.2 (*Determinación de los puntos de de Boor*)

Sea $\mathbf{F}(u) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(u)$ una curva B-spline de grado p sobre el vector nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i = 1, \dots, m$. Sea \mathbf{F}_j la restricción \mathbf{F} en el intervalo no vacío $I_j := [t_j, t_{j+1}]$ y \mathbf{f}_j el blossom de \mathbf{F}_j . Entonces los puntos de *de Boor* \mathbf{d}_k están dados por:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{f}_j(t_{k+1}, \dots, t_{k+p}), \quad k = j - p, \dots, j.$$

Prueba: Ver [Dueñas '96]

Ejemplo de aplicación:

Sea la curva B-spline de grado 3, $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^8 \mathbf{d}_i N_i^p(t)$ sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6)$. Determinaremos los puntos de de Boor en términos de los blossoms.

Para $t_4 = 0 < t_5 = 1$ tenemos

$$d_k = f_4(t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}); \quad k = 4 - 3, \dots, 4$$

$$d_1 = f_4(t_2, t_3, t_4) = f_4(0, 0, 0),$$

$$d_2 = f_4(t_3, t_4, t_5) = f_4(0, 0, 1),$$

$$d_3 = f_4(t_4, t_5, t_6) = f_4(0, 1, 2),$$

$$d_4 = f_4(t_5, t_6, t_7) = f_4(1, 2, 4),$$

Para $t_8 = 5 < t_9 = 6$ tenemos

$$d_k = f_8(t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}); \quad k = 8 - 3, \dots, 8$$

$$d_5 = f_8(t_6, t_7, t_8) = f_8(2, 4, 5),$$

$$d_6 = f_8(t_7, t_8, t_9) = f_8(4, 5, 6),$$

$$d_7 = f_8(t_8, t_9, t_{10}) = f_8(5, 6, 6),$$

$$d_8 = f_8(t_9, t_{10}, t_{11}) = f_8(6, 6, 6).$$

Para determinar los puntos sobre la curva B-spline tenemos que usar la relación de recurrencia de los B-splines básicos. El algoritmo de *de Boor* es otra alternativa que nos permite determinar las coordenadas de un punto sobre la curva B-spline sin usar los B-splines básicos.

Teorema 2.3 (Algoritmo de *de Boor*)

Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(t)$ una curva B-spline de grado p sobre el vector

nodo

$T = (t_1, \dots, t_{k-p} \leq \dots \leq t_k < t_{k+1} \leq \dots \leq t_{k+p+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que:

- i) $t_i < t_{i+p+1}$, $i = 1, \dots, m$,
- ii) $p + 1 \leq m$.

Para $t \in [t_k, t_{k+1})$ consideramos la siguiente recurrencia:

$$d_i^0(t) = d_i, \quad i = k - p, \dots, k,$$

$$(*) \quad d_i^r(t) = w_i^r d_i^{r-1} + (1 - w_i^r) d_{i-1}^{r-1}, \quad r = 1, \dots, p, \quad i = k - p + r, \dots, k,$$

$$\text{donde } w_i^r(t) := \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i} & \text{si } t_i \neq t_{i+p-r+1} \\ 0 & \text{si } t_i = t_{i+p-r+1} \end{cases}$$

Entonces el valor de la función $F(t)$ se determina como:

$$F(t) = d_k^p(t).$$

Prueba:

Afirmamos que:

$$d_k^r = f_k(t_{i+1}, \dots, \underbrace{t_k, t, \dots, t}_{r}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}), \quad r = 1, \dots, p, \quad (1)$$

donde f_k es el blossom de F_k (F_k es la restricción de F en el intervalo $I_k = [t_k, t_{k+1})$), satisface (*).

En efecto:

a) Como $t_k < t_{k+1}$ tenemos por el teorema 2.2 que:

$$d_i = f_k(t_{i+1}, \dots, t_{i+p}), \quad i = k - p, \dots, k,$$

$$d_i = \underbrace{f_k(t_{i+1}, \dots, t_{i+p})}_{d_i^0}, \quad i = k - p, \dots, k,$$

$$d_i = d_i^0, \quad i = k - p + 0, \dots, k.$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) = \\
 & \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} t_i + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} t_{i+p-r+1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \\
 & \downarrow \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_i, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \\
 & + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{i+p-r+1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r})
 \end{aligned}$$

(pues \mathbf{f}_k es afín)

$$\begin{aligned}
 & \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_i, t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \\
 & + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{k+1}, \dots, t_{k+p-r}, t_{i+p-r+1}) \\
 & = \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1} \\
 & = (1 - \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i}) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1} = \mathbf{d}_i^r.
 \end{aligned}$$

Luego obtenemos de (a) y (b):

$$\mathbf{d}_i^r = \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, t, \dots, t, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \text{ lo que verifica (*).}$$

$$\text{Por lo tanto: } \mathbf{d}_i^p = \mathbf{f}_k(t, \dots, t) = \mathbf{F}_k(t) = \mathbf{F}(t).$$

Ejemplo de aplicación:

Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{d}_i N_i^2(t)$ sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 2)$

donde: $\mathbf{d}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{d}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{d}_3 = (4, 3)$, $\mathbf{d}_4 = (3, 1)$.

Calculamos $\mathbf{F}(0,8)$.

Tenemos: $t_3 = 0 < 0,8 < 1 = t_4$. En este caso es $k = 3$ y $p = 2$.

$$\mathbf{d}_i^0 = \mathbf{d}_i, \quad i = k - p, \dots, k.$$

$$\mathbf{d}_i^0 = \mathbf{d}_i, \quad i = 1, \dots, 3.$$

$$\mathbf{d}_i^r := \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+2+r} - t_i} \right) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+2+r} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1}, \quad k - p + r \leq i \leq k$$

$$\mathbf{d}_i^r := \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+3-r} - t_i} \right) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+3-r} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1}, \quad 1 + r \leq i \leq 3$$

$r = 1$:

$2 \leq i \leq 3$:

$$\mathbf{d}_2^1 = 0,2 \mathbf{d}_1^0 + 0,8 \mathbf{d}_2^0 = 0,2(2, 3) + 0,8(2, 3) = (1,8, 2,6)$$

$$\mathbf{d}_3^1 = 0,6 \mathbf{d}_2^0 + 0,4 \mathbf{d}_3^0 = 0,6(2, 3) + 0,4(4, 3) = (2,8, 3,0)$$

$r = 2$:

$$\mathbf{d}_3^2 = 0,2 \mathbf{d}_2^1 + 0,8 \mathbf{d}_3^1 = (2,6, 2,92).$$

Definición 2.1 Sea $\{e_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \mathbf{R}$ una sucesión estrictamente creciente tal que: $a = e_1 < \dots < e_{k+1} = b$. Una función $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ se dice función **seccionalmente polinómica de grado p** sobre $[a, b]$ respecto a $\{e_i\}_{i=1}^{k+1}$ si $F(t)$ es de la forma:

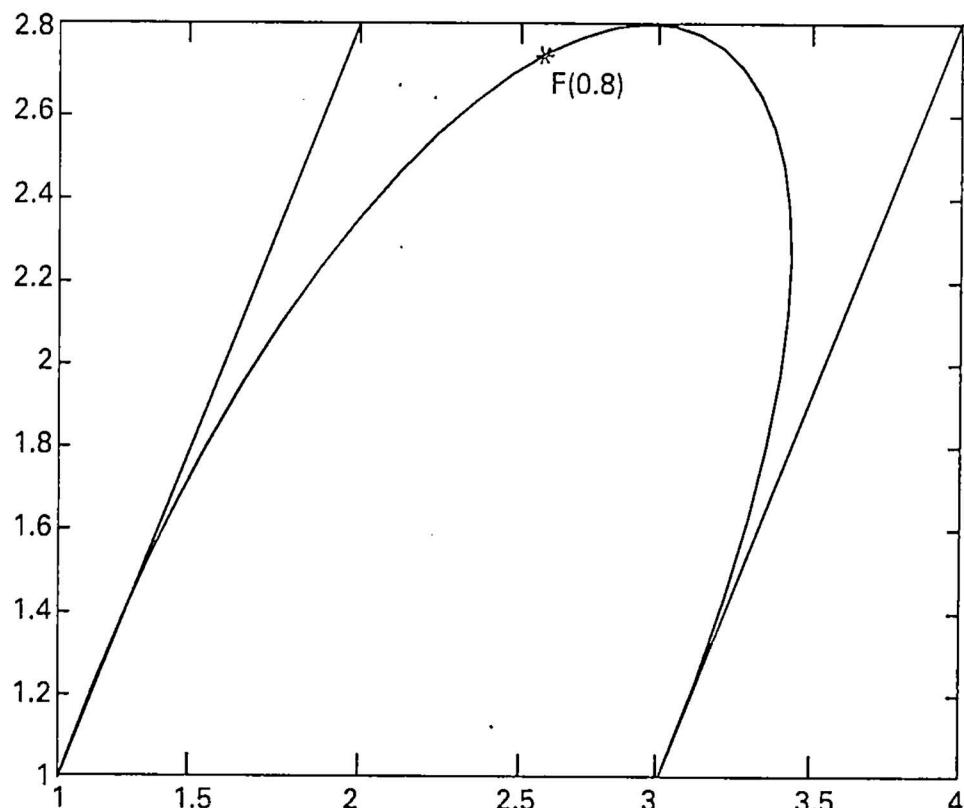


Figura 3.

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t); e_1 \leq t < e_2 \\ F_2(t); e_2 \leq t < e_3 \\ \vdots \\ F_k(t); e_k \leq t \leq e_{k+1} \end{cases} \quad \text{donde } F_i \text{ son funciones polinómicas de grado no mayor que } p$$

Cada e_i , $i = 1, \dots, k + 1$, se conoce como punto de quiebre de $F(t)$.

Nota: A las funciones seccionalmente polinómicas también se conocen como *spline*.

Definición 2.2 Sea $T = (e_1 < e_2 < \dots < e_k < e_{k+1})$. Definiremos $S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$ como el espacio vectorial de todas las funciones seccionalmente polinómicas de grado p tal que:

$F : [e_1, e_{k+1}] \rightarrow \mathbf{R}$ sea $(p - u_i)$ - veces continuamente diferenciable en los puntos de quiebre e_i , donde $i = 2, \dots, k$.

Teorema 2.4 (Curry-Schoenberg)

Sea el vector nodo $T = (e_1, \underbrace{\dots, e_1}_{p+1}, \dots, e_i, \underbrace{\dots, e_i}_{u_i}, \dots, e_{k+1}, \underbrace{\dots, e_{k+1}}_{p+1})$

donde:

i) u_i es la multiplicidad del nodo e_i tal que $u_i \leq p + 1$ donde $i = 1, \dots, k + 1$.

$$\text{ii) } m = p + 1 + \sum_{j=2}^k u_j.$$

Entonces el espacio vectorial $S_T^p = \{ \sum_{i=1}^m d_i N_i^p / d_i \in \mathbf{R} \}$ de los B-spline

de grado p sobre el vector nodo T coincide con $S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$.

Prueba: Ver [Dueñas '96]

Observación: Este teorema nos indica que cualquier spline de grado p , es decir cualquier función seccionalmente polinómica de grado p sobre $e_1 < e_2 < \dots < e_{k+1}$ tal que es v_i veces continuamente en e_i , $i = 2, \dots, k$, puede representarse como un B-spline único de grado p sobre el vector nodo: $T = (e_1, \underbrace{\dots, e_1}_{p+1}, \dots, e_i, \underbrace{\dots, e_i}_{p-v_i}, \dots, e_{k+1}, \underbrace{\dots, e_{k+1}}_{p+1})$ donde cada nodo

interior e_i aparece con multiplicidad $u_i = p - v_i$.

Ejemplo:

$$\text{Sea } F(t) = \begin{cases} (t, t^2) & , t \in [0, 1] \\ (t, t^3) & , t \in [1, 2] \text{ un spline de grado 3.} \\ (t, 12t - 16) & , t \in [2, 3] \end{cases}$$

Expresaremos F como un B-spline.

Vemos: F es una función de grado 3 que está definida sobre $e_1 = 0 < e_2 = 1 < e_3 = 2 < e_4 = 3$ y es continua en $t = 1$ y es continuamente diferenciable en $t = 2$.

Luego por el teorema 2.4 el vector nodo será:

$$T = (0, 0, 0, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{3-0}, \underbrace{2, \dots, 2}_{3-1}, 3, 3, 3, 3),$$

$$T = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3).$$

Los puntos de *de Boor* son:

$$0 = t_4 < t_5 = 1: d_i = f_4(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}), \text{ si } 4 - 3 \leq i \leq 4.$$

Pero $F_4(t) = F|_{[t_4, t_5]} = (t, t^2)$. Luego su blossom es:

$$f_4(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, \frac{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}{3} \right)$$

$$d_1 = f_4(t_2, t_3, t_4) = f_4(0, 0, 0) = (0, 0),$$

$$d_2 = f_4(t_3, t_4, t_5) = f_4(0, 0, 1) = (1/3, 0),$$

$$d_3 = f_4(t_4, t_5, t_6) = f_4(0, 1, 1) = (2/3, 1/3),$$

$$d_4 = f_4(t_5, t_6, t_7) = f_4(1, 1, 1) = (1, 1).$$

$$1 = t_7 < t_8 = 2: d_i = f_7(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}), \text{ si } 7 - 3 \leq i \leq 7,$$

Pero $F_7(t) = F|_{[t_7, t_8]} = (t, t^3)$. Luego su blossom es:

$$f_7(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, t_1 t_2 t_3 \right)$$

$$d_4 = f_7(t_5, t_6, t_7) = (1, 1)$$

$$d_5 = f_7(t_6, t_7, t_8) = f_7(1, 1, 2) = (4/3, 2)$$

$$d_6 = f_7(t_7, t_8, t_9) = f_7(1, 2, 2) = (5/3, 4)$$

$$d_7 = f_7(t_8, t_9, t_{10}) = f_7(2, 2, 3) = (7/3, 12).$$

$$2 = t_9 < t_{10} = 3: d_i = f_9(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}), \text{ si } 9-2 \leq i \leq 9$$

Pero $F_9(t) = F|_{[t_9, t_{10}]} = (t, 12t - 16)$. Luego su blossom es:

$$f_9(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, 4[t_1 + t_2 + t_3] - 16 \right)$$

$$d_8 = f_9(t_9, t_{10}, t_{11}) = f_9(2, 3, 3) = (8/3, 16)$$

$$d_9 = f_9(t_{10}, t_{11}, t_{12}) = f_9(3, 3, 3) = (3, 20)$$

$$\text{Entonces } F(t) = \sum_{i=1}^9 d_i N_i^3(t).$$

REFERENCIAS

- /1/ **Dueñas, J.** (1996). *Curvas de Bézier y B-spline mediante los blossoms. Tesis de Licenciatura en Ciencias con mención en Matemática. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú.*
- /2/ **Farin, G.** (1993). *Curves and surfaces for computer aided geometric design. Academic Press Inc., San Diego.*
- /3/ **Hoschek, J., Lasser D.** (1993). *Fundamentals of computer aided geometric design. A K Peters Ltd. Wellesley, Massachusetts.*
- /4/ **Ramshaw, L.** (1987). *Bézier and B-splines as multiaffine maps in: Theoretical Foundation of Computer Graphics and CAD. Springer, New York. 757-776.*

Elaboración de películas delgadas de silicio amorfo hidrogenado por glow discharge DC y su caracterización eléctrica y óptica

Jorge A. León E., Aníbal Valera P. ()*

RESUMEN

Uno de los problemas actuales más importantes en la conversión foto-voltaica consiste en la reducción de los costos de fabricación de las celdas solares, sin una disminución apreciable de la eficiencia de conversión obtenida con silicio monocristalino.

Este trabajo bosqueja un método no tradicional para el crecimiento de a-Si:H por el plasma DC, que considera una reacción de descarga gaseosa del hidrógeno con muestras de silicio policristalino de grado metalúrgico, produciéndose la mixtura Si-H. Este proceso puede ser considerado como una extensión del método PAT de "Vepreck" (Plasma Associated Transport) [1] el cual involucra grandes áreas de reacción.

(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima - Perú.

Se presentan exitosamente algunas modificaciones en el laboratorio de un equipo de deposición glow discharge DC.

Se ha determinado el comportamiento de la conductividad eléctrica como función de la temperatura en películas de a-Si:H, depositadas a diferentes temperaturas del substrato. Se presenta resultados sobre los efectos producidos en la conductividad eléctrica con el tratamiento térmico (oxidación) en aire después de la deposición. Para cada muestra elaborada se determinó el tipo de conductividad mediante la respuesta termoeléctrica usando la sonda Seebeck.

Con la espectroscopía optoacústica (PAS) se analizaron las muestras elaboradas mediante los espectros de absorción y transmitancia en donde se comprueba las características de un semiconductor amorfo de absorber predominantemente en la región UV y parte del visible. De estas mediciones se deduce el gap óptico y además las variaciones de este gap con el tratamiento térmico.

Las muestras elaboradas fueron amorfas, lo cual fue comprobado por un difractograma de rayos X. Los espesores de las películas fueron medidos por el método gravimétrico. Además se determinaron los componentes químicos de las películas mediante un análisis por la técnica de Espectroscopía Eléctrónica Auger.

Introducción

El silicio es el material fundamental en la tecnología de dispositivos electrónicos. Durante 40 años ha sido objeto de un gran número de estudios científicos y técnicos. En ese sentido, el silicio monocrystalino puede considerarse un cristal "bien conocido" y puede decirse que uno de los factores más importante que determinaron el desarrollo explosivo de la industria microelectrónica es justamente la buena compresión física del material.

Por el contrario, el silicio amorfo (Si-a) solo se ha comenzado a estudiar intensivamente durante los últimos años. El conocimiento de sus propiedades físicas se encuentra limitado por un lado por la relativa precariedad de los modelos que explican las propiedades de los sistemas amorfos en general, y por otro lado, por la relativamente pequeña cantidad de información experimental, que se obtiene en forma intensiva desde hace solo algunos años, en comparación con la gran variedad de configuraciones estructurales que se derivan de los distintos métodos de preparación.

La incorporación de hidrógeno en el Si-a permite modificar sus propiedades ópticas y electrónicas. Como ejemplo, la conductividad a temperatura ambiente del (Si-a: H) puede ser cambiado por ~5 órdenes de magnitud según la concentración de hidrógeno [2]. El ancho de la banda prohibida también puede cambiar entre ~ 1,2 eV y ~ 1,9 eV con la hidroge-

nación [3]. Esto significa que la incorporación de hidrógeno modifica el borde de absorción óptica, de modo que el material puede considerarse en condiciones tales que su transmitancia resulta alternativamente alta o baja en el rango del espectro visible e infrarrojo cercano.

Además el hidrógeno permite modificar la densidad de estados localizados en la banda prohibida, lo que varía fuertemente los tiempos de recombinación electrónica. Esto convierte al Si-a:H en un material extremadamente versátil en cuanto a sus aplicaciones electrónicas incluyendo las celdas fotovoltaicas, pero como contrapartida, incrementa las dificultades tanto experimentales como teóricas de su estudio.

Las celdas solares de capa fina a-Si-H representan un nuevo tipo de películas cuyas conversiones fotovoltaicas están entre ~6-8% que han sido obtenidos de este material sumamente desordenado por tener una gran resistividad y una movilidad por portadores relativamente baja, mientras que las celdas monocrystalinas han exhibido una alta eficiencia de conversión hasta obtener 19%.

En el presente trabajo se reportan medidas de la conductividad electrónica como función de la temperatura en películas de a-Si:H por glow discharge DC depositadas sobre substratos de vidrio y los efectos producidos con los distintos tratamientos térmicos en aire y en vacío. Usando la representación de Tauc, para determinar el gap óptico, se midieron los espectros de absorción en el rango de 400 - 2000 nm y la variación producida con el tratamiento térmico en aire.

Fundamentos generales sobre los semiconductores amorfos

Para comprender las técnicas, se hace necesario tener en cuenta que los semiconductores amorfos están tetraédricamente ordenados, básicamente en el Si y Ge.

En los semiconductores amorfos aunque no tienen orden en cuanto a largo alcance, por la quiebra en su estructura, sin embargo se observa un alto grado de orden de corto alcance debido a enlaces químicos (Si-H); (H-H); (Si-Si) [4].

En los semiconductores amorfos aparecen nuevas estructuras debido al desorden, enlaces débiles y pendientes. Los enlaces mencionados funcionan como centros de dispersión o captura de portadores (electrones).

Se introduce hidrógeno en los semiconductores amorfos para disminuir los enlaces débiles y pendientes y por lo tanto para conseguir una mejora en las propiedades de material a estudiar.

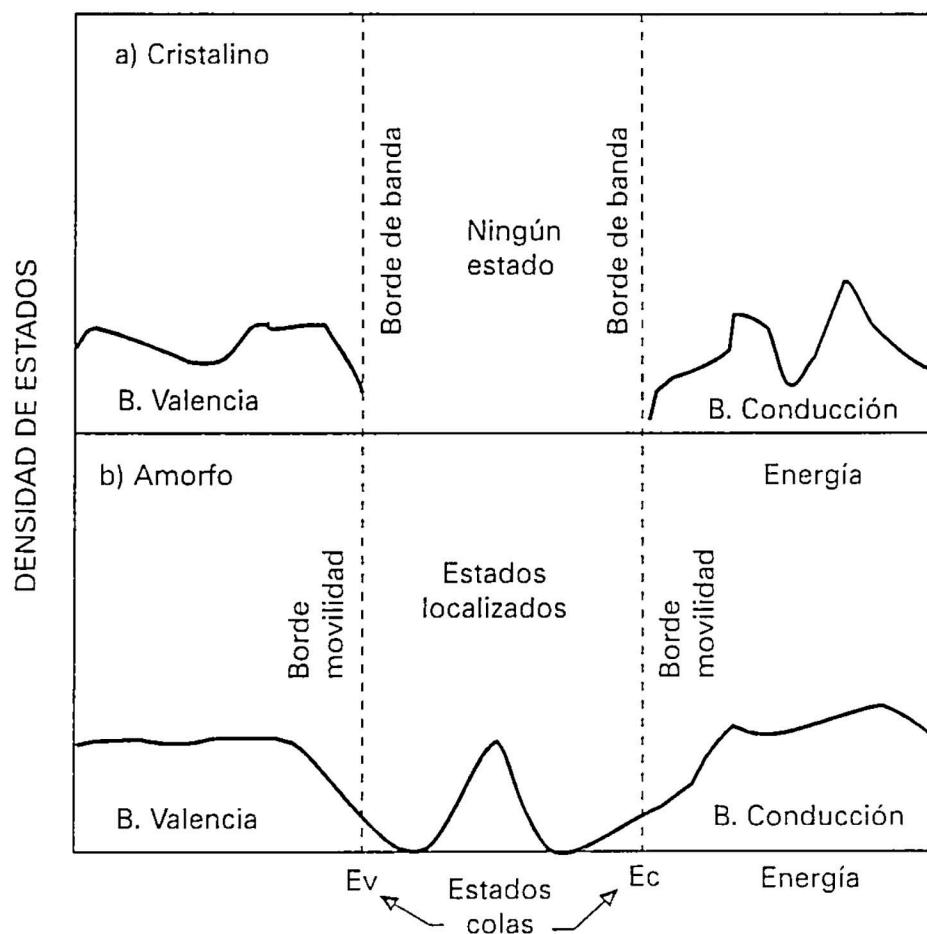


Figura 1. Densidad de estados de un semiconductor.
a) Cristalino y b) Amorfo

La densidad de estados en los semiconductores amorfos presenta diferencias considerables en relación a los semiconductores cristalinos. Continúan existiendo bandas de estados separados por una región de estados localizados, definiendo un gap de movilidad (ver Fig. 1).

Las medidas ópticas constituyen el medio más importante para determinar las estructuras de las bandas de los semiconductores. Un fotón induce transiciones electrónicas que pueden ocurrir entre diferentes bandas, el cual conduce a la determinación del gap de energía E_g .

En los semiconductores amorfos hay tres tipos posibles de mecanismos de conducción. Su contribución relativa a la conductividad total de-

pende de la temperatura. A temperaturas muy bajas, la conducción puede ocurrir por saltos entre los estados localizados cerca del nivel de Fermi, denominada conductividad por saltos en rango variable (Variable range hopping); a temperaturas más altas los portadores son excitados a través del borde de movilidad en estados extendidos. La contribución de los estados extendidos a la conductividad es siempre dominante, cuando hay un número suficiente de electrones en estos estados.

Preparación de las películas

La figura 2 esquematiza la etapa experimental del sistema de deposición glow discharge, DC reactivo. Entre los electrodos de alto voltaje en que está colocado el material silicio (cátodo), por la activación de la descarga gaseosa del hidrógeno, el plasma ataca las muestras del silicio y produce entre otros compuestos el silano (SiH_4) que se recombina en el substrato caliente situado en la placa superior (ánodo) formándose la capa delgada de a-Si:H. La calidad de las películas y el tiempo de formación depende fuertemente de la temperatura, presión y polaridad del alto voltaje DC. [5].

Las condiciones de trabajo típicas están resumidas en la tabla 1.

Tabla 1

Presión (torr)	Corriente de polarización (mA)	Alto voltaje (voltios)	Temperatura del substrato (°C)	Tiempo de deposición (horas)	Espesores de la muestra (μm)
1,0	31	~900	110	30	0,11 y 0,118
1,0	31	~900	200	50	0,202
1,0	50	~1068	200	55	0,38 y 0,42
1,0	55	~1080	220	80	0,79 y 0,86

Bajo estas condiciones se encontró el tipo de conductividad (efecto Seebeck) obteniéndose los siguientes resultados: 0,38 μm (tipo -n), 0,42 μm (tipo -p), 0,79 μm (tipo -p), y 0,86 μm (tipo -p). Con el objeto de analizar la amorficidad de las películas, se utilizó el análisis por difractometría de rayos X. Se realizaron los tratamientos térmicos en aire para las muestras de 0,42 μm y 0,38 μm, que se elaboraron bajo las mismas condiciones, una para mediciones de conductividad eléctrica y la otra para la determinación

del gap óptico, además un tratamiento térmico en vacío a 500°C para la muestra de $e = 0,86 \mu\text{m}$. Se averiguaron además el tipo de conductividad de estas muestras con tratamientos térmicos. El estudio de la composición de las muestras elaboradas se realizaron mediante un análisis químico de la película de $e = 0,86 \mu\text{m}$, por la Espectroscopía Electrónica Auger, resultando que contenía gran proporción de silicio y una pequeña proporción de hidrógeno, además de carbón y oxígeno.

Nota: Para las películas de $0,11$; $0,118$; $0,202 \mu\text{m}$, no se obtuvieron resultados satisfactorios.

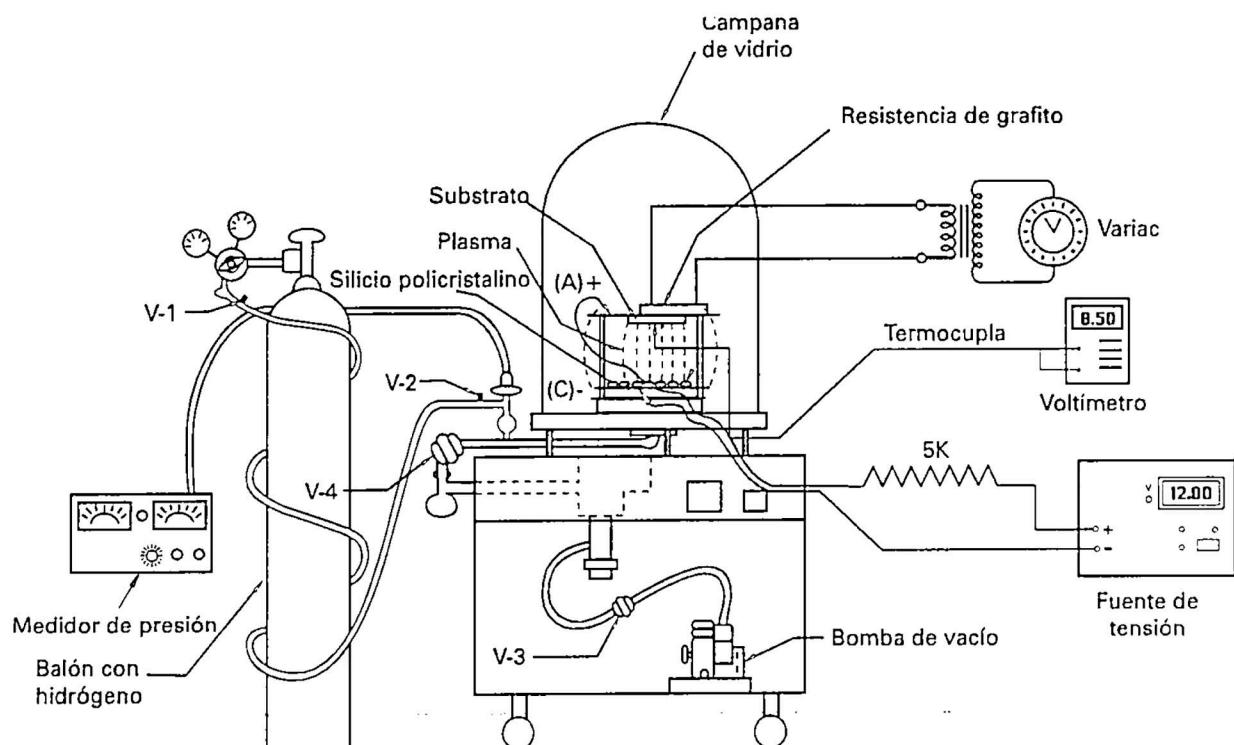


Figura 2. Sistema de glow discharge DC reactivo.

Caracterización eléctrica y óptica

Medidas de conductividad eléctrica

Básicamente con las muestras elaboradas se estudió el comportamiento de su conductividad en el oscuro en función de la temperatura en

el rango comprendido entre 300 - 443°K para la muestra de $e = 0,42 \mu\text{m}$ (tipo p). Se observa un comportamiento semiconductriz. El aumento de la conductividad eléctrica se afecta debido a los distintos tratamientos en contacto con la atmósfera, fig. 3. Se obtuvieron dos zonas de linealidad del gráfico $\ln \sigma$ vs $1/T$ en la cual la conductividad en cada zona se rige por la expresión:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-W/KT}$$

donde W es la energía de activación y σ_0 el factor pre-exponencial. La tabla 2 resume los resultados obtenidos de W y σ_0 a partir de una regresión lineal del gráfico $\ln \sigma$ vs $1/T$.

Tabla 2

	Película $e = 0,42 \mu\text{m}$	SIN T.T	T.T 250 - 300°C	T.T 350 - 400°C	T.T 450-500°
REGIÓN 1	W_1 (eV)	0,392	0,432	0,42	-----
	$\sigma_{01} (\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1})$	$2,12 \times 10^{-11}$	$2,87 \times 10^{-10}$	$4,08 \times 10^{-10}$	-----
REGIÓN 2	W_2 (eV)	0,714	0,682	0,71	0,742
	$\sigma_{02} (\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1})$	$2,86 \times 10^{-7}$	$6,87 \times 10^{-7}$	$2,92 \times 10^{-3}$	$1,16 \times 10^{-3}$

T.T.: Tratamiento térmico en aire.

Para la muestra de $e = 0,86 \mu\text{m}$, que después de un tratamiento térmico en vacío a 500°C, presenta conductividad tipo n, los valores de W y σ_0 fueron:

$$W_1 = 0,443 \text{ eV}$$

$$\sigma_{01} = 2,65 \times 10^{-10} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$W_2 = 0,708 \text{ eV}$$

$$\sigma_{02} = 7,87 \times 10^{-5} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

Medidas de absorción óptica

Mediante la espectroscopía optoacústica (OA) se obtuvieron los espectros de absorción y transmitancia en el rango de 400 - 2000 nm (fig. 4 y fig. 5). El espectro de absorción para la película de $e = 0,38 \mu\text{m}$, que fue preparada bajo las mismas condiciones que la película de $e = 0,42 \mu\text{m}$,

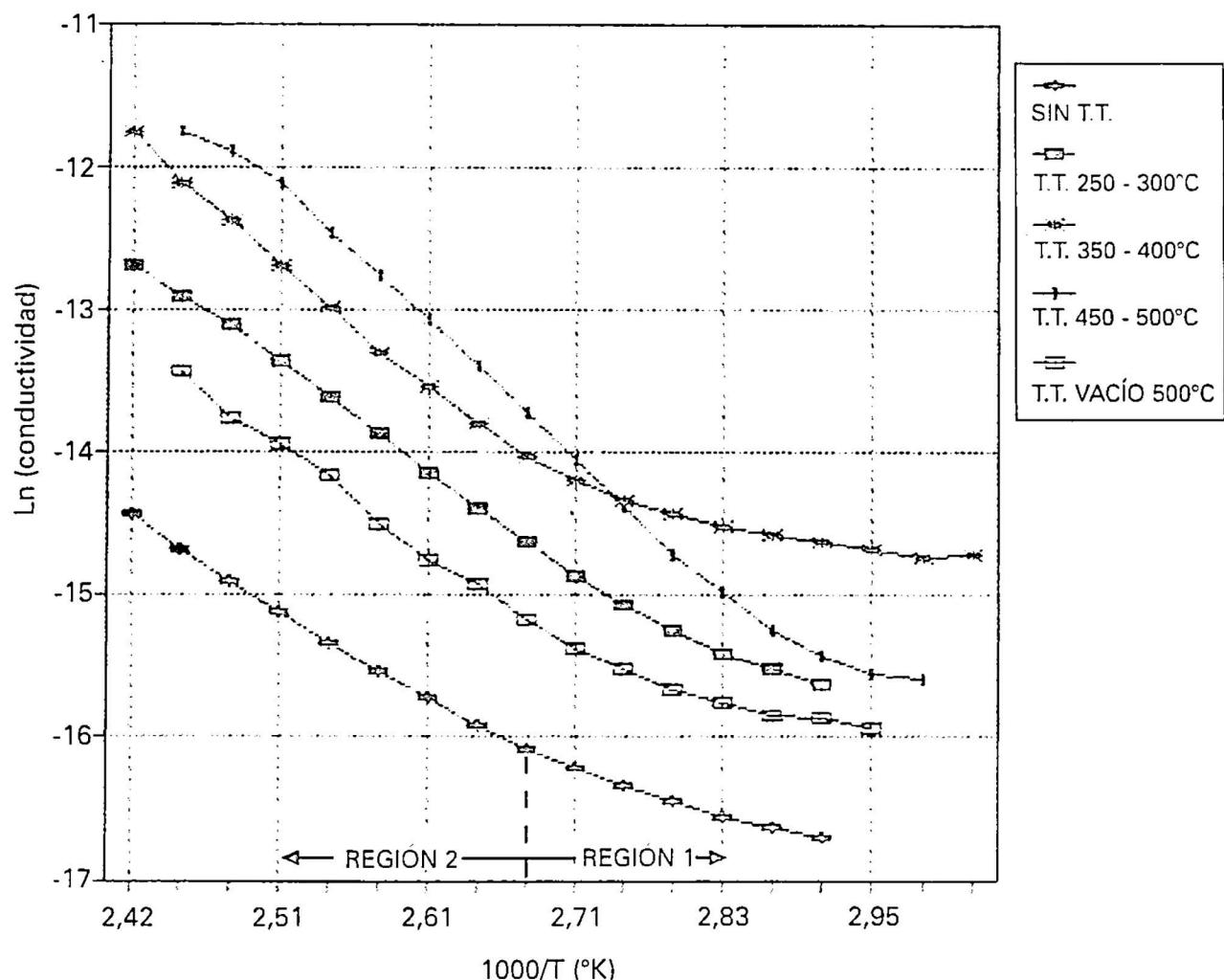


Figura 3. Conductividad vs el inverso de la temperatura para la muestra de $e = 0,42 \mu\text{m}$ ($T_s = 200^\circ\text{C}$) con distintos T.T. en aire, comparado con la muestra de $e = 0,86 \mu\text{m}$ que tiene T.T. en vacío a 500°C .

confirma la tendencia semiconductor de absorber más en la UV cercano y parte del visible. El borde de absorción óptica obedece la ley de Tauc.

$$\alpha = \frac{B}{h\nu} (h\nu - E_g)^2$$

con

$$E_g = 1,148 \text{ eV}$$

$$B = 395,962 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

El tratamiento térmico (oxidación) a 500°C en aire modifica ligeramente al gap óptico desplazándose hacia valores menores: $E_{g0} = 1,048 \text{ eV}$, y $B = 156,325 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1}$.

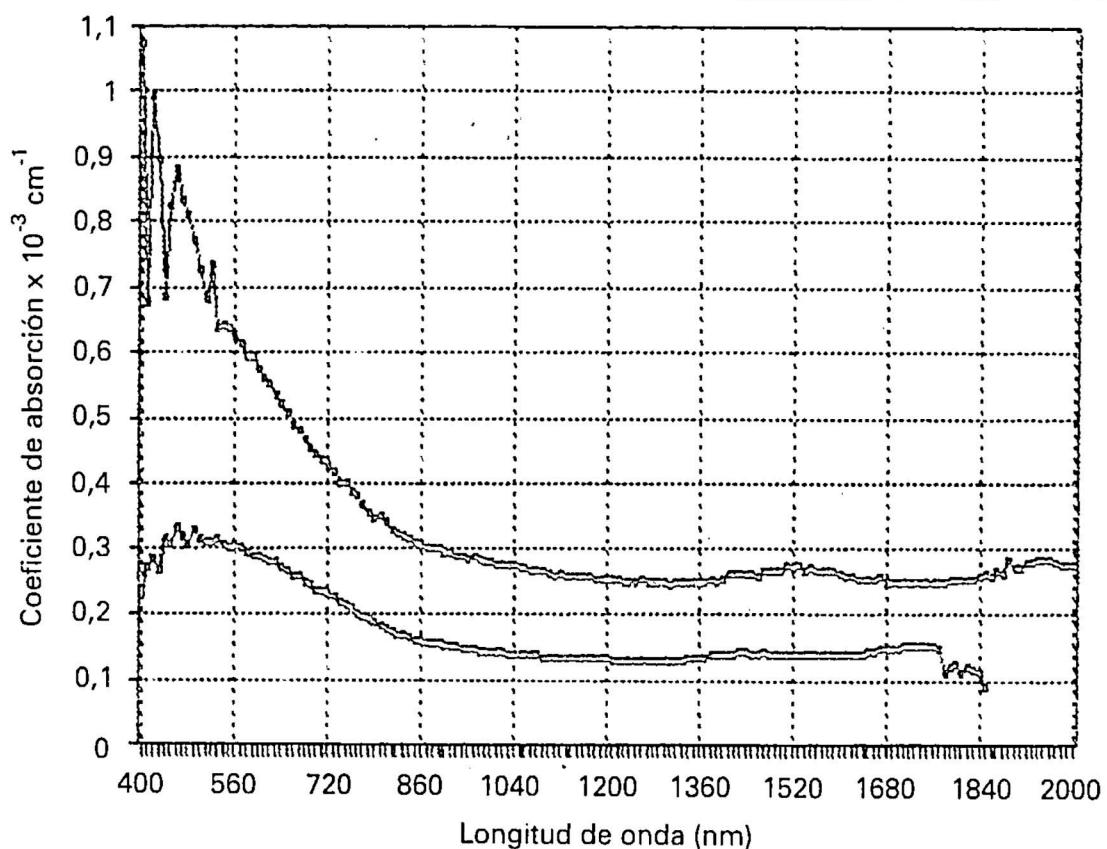


Figura 4. Comparación de los espectros de absorción OA de la película de $e=0,38 \mu\text{m}$, sin tratamiento térmico (gráfico superior) y con T.T. en aire a 500°C (gráfico inferior).

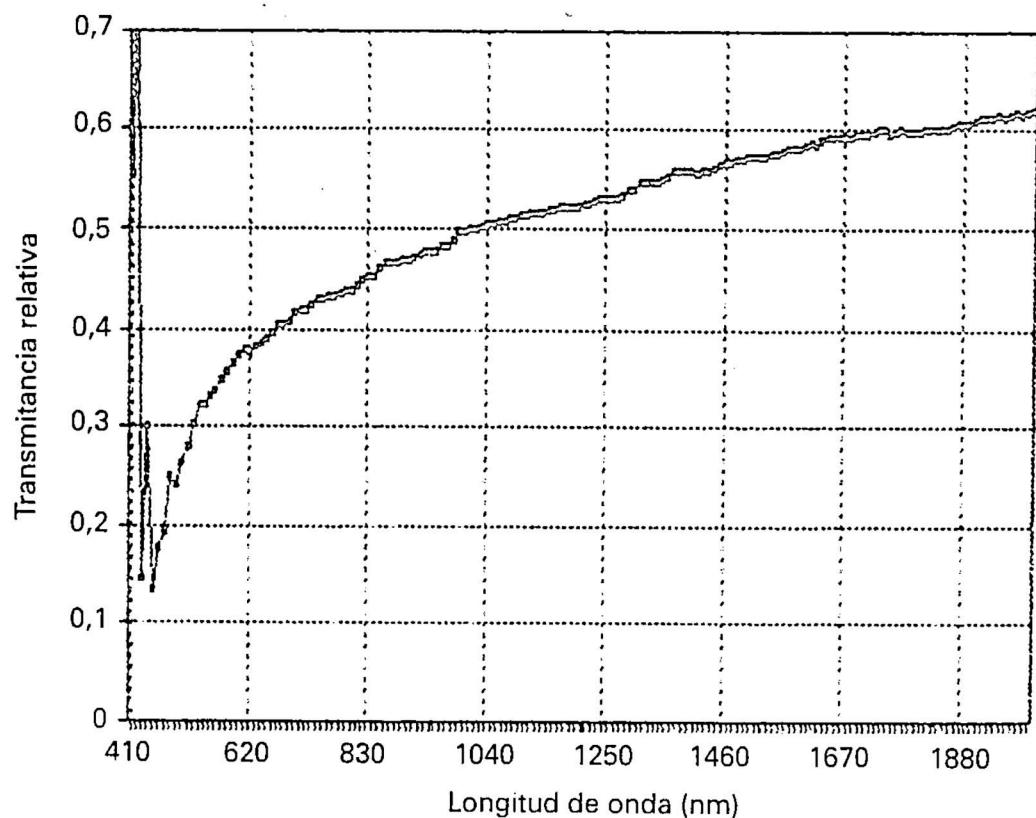


Figura 5. Espectro de transmitancia óptica de la película de $e = 0,38 \mu\text{m}$, sin T.T.

Conclusiones

Los resultados experimentales obtenidos en este trabajo indican una clara viabilidad del mecanismo del Plasma Associated Transport en la elaboración de semiconductores amorfos. Se ha pretendido arrojar luz sobre algunas propiedades del silicio amorfo hidrogenado preparado por glow discharge DC cuando los substratos son colocados en el ánodo. Fundamentalmente se estudió la conductividad eléctrica en oscuro, donde se observa un comportamiento lineal para $\ln \sigma$ vs $1/T$ que implica un comportamiento activado [6]. La conductividad crece cuando la muestra tiene tratamiento térmico (oxidación).

Mediante la caracterización optoacústica de absorción de la muestra se comprueba que fueron semiconductoras amorfas [7]. Esta característica fue ratificada mediante el espectro de transmitancia óptica. El valor del gap óptico extrapolado, usando la representación de Tauc, disminuye con el tratamiento térmico (oxidación). Las películas obtenidas en este trabajo, no son aún de la calidad deseada para poder dar una aplicación en la fabricación de celdas solares, pero podemos mejorar la calidad de las muestras modificando el procedimiento experimental, tratando de lograr condiciones óptimas de trabajo.

REFERENCIAS

- [1] **Talledo, Arturo.** "Obtención de películas delgadas de silicio, amorfo por el método de Vepreck y su caracterización óptica". Tesis de Maestría, UNI/Ciencias, 1987.
- [2] **P.R. Jeffrey, H.R. Shends, S.C. Danielson;** *J. Non crystalline solids* 35/36, 261 (1980).
- [3] **W. Paul and D.A. Anderson;** *Solar Energy Material*, 5, 229 (1981).
- [4] **J. D. Joannopoulos and G. Lucovsky.** "The physics of hydrogenated amorphous silicon II". *Topics on Applied Physics*. Vol. 56 (Springer - Verlag), 1984.
- [5] **Valera, Aníbal.** "Elaboración y caracterización física de películas delgadas de CdS y a-Si para aplicaciones fotovoltaicas". *TECNIA*, vol 3, N° 1 (25-31), 1986.
- [6] **A. Rosales, P. Prieto, L. F. Castro.** "Conductividad eléctrica de películas de a-Si". *Universidad del Valle, Colombia*.
- [7] **Castañeda, Saul.** "Elaboración de películas finas semiconductoras de silicio amorfo hidrogenado por descarga plasmática y la caracterización optoacústica". Tesis de Maestría UNMSM/Ciencias, 1994.

Divulgación especializada

Modelo post-newtoniano de la radiación cuadrupolar de un sistema binario

Jorge Alcántara Gavidia y Armando Bernui^()*

RESUMEN

Se desarrolla una aproximación post-newtoniana (APN) del tensor momento cuadrupolar de la distribución de masa de un sistema binario, usando la aproximación de campo débil de las ecuaciones de Einstein. Para aplicar la APN se asume que las órbitas elípticas cerradas se contraen “instantáneamente” al final de cada período. Las fórmulas obtenidas son válidas para un observador bastante alejado del sistema binario de cuerpos cuyos tamaños, además, deben ser pequeños comparados con su separación, ya que aquí se asumen masas puntuales.

ABSTRACT

A post-newtonian approach (APN) of the quadrupole moment tensor of the mass distribution for a binary system in terms of the weak-field approach of Einstein's equations, is developed. For applying the APN, bound elliptical orbits, which shrink “instantaneously” at the end of each period, are assumed. The obtained formulae are valid for observers that are quite distant from the binary system of bodies, whose sizes are small compared with their separation, since point masses are assumed here.

^(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima - Perú.

Introducción

Según la Teoría de la Relatividad de Einstein, una masa orbitando alrededor de otra (sistema binario) debe irradiar energía en forma de ondas gravitacionales [5]. Esta pérdida de energía se refleja en una reducción uniforme y lenta del período orbital de dicha masa. P. C. Peters y J. Mathews (1963) obtuvieron las primeras fórmulas que daban cuenta del fenómeno, de allí en adelante muchos otros han continuado la labor. Sin embargo, no es hasta 1974 que se pueden someter a prueba las conclusiones de dichos trabajos, cuando se descubre un sistema binario fácil de estudiar: el pulsar PSR 1913 + 16. La designación indica que se trata de un pulsar radioemisor situado en los mapas astronómicos a la ascención recta de 19 horas 13 minutos y a la declinación de + 16 grados. De esta manera el pulsar binario se encuentra en la constelación de El Aguila.

En este artículo utilizamos la APN de primer orden (o Newtoniana-Relativista) e inesperadamente obtenemos resultados casi iguales (0,46% de diferencia) a los de Peters [3]. Sin embargo, nuestro trabajo difiere sustancialmente del de Peters, ya que: (a) nuestros cálculos se basan en la APN, esto es, el tensor momento cuadrupolar (véase (35)) se define relativísticamente, mientras que Peters usa una relación pre-relativista, y (b) la definición de luminosidad es diferente (compárese (32) con (65)). En nuestros cálculos numéricos utilizamos el PSR 1913 + 16 porque conocemos sus parámetros medidos desde 1975 por Hulse y Taylor [6]. En ese año su período orbital era de 7 horas 45 minutos 7 segundos (27907 segundos ó $8,3721 \times 10^{12}$ metros), su semieje mayor era aproximadamente 2,81 radios solares, su excentricidad 0,617 y ambas estrellas tenían masas aproximadamente iguales a 1,43 masas solares (2,1 km). Además la variación de su período orbital por unidad de tiempo observado por Taylor y Weisberg en 1975 resultó $-2,422 \times 10^{-12}$. En este trabajo utilizamos las unidades en las cuales $c = G = 1$.

Fuerzas centrales

Según la mecánica clásica una masa m sometida a una fuerza central conserva su momentum angular

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r} \times \vec{e}_r) F(r) = \vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

$$\vec{L} = \vec{cte}, \quad m r^2 \dot{\theta} = L \quad (1)$$

Así, la ecuación diferencial de su movimiento es:

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F(r), \quad (2)$$

ó

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}. \quad (3)$$

Para una interacción del tipo gravitacional se tiene:

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0),$$

$$A = \sqrt{\frac{m^2 K^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}, \quad K = -Mm. \quad (4)$$

La ecuación orbital de la masa m (denominado movimiento kepliano) es¹:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (5)$$

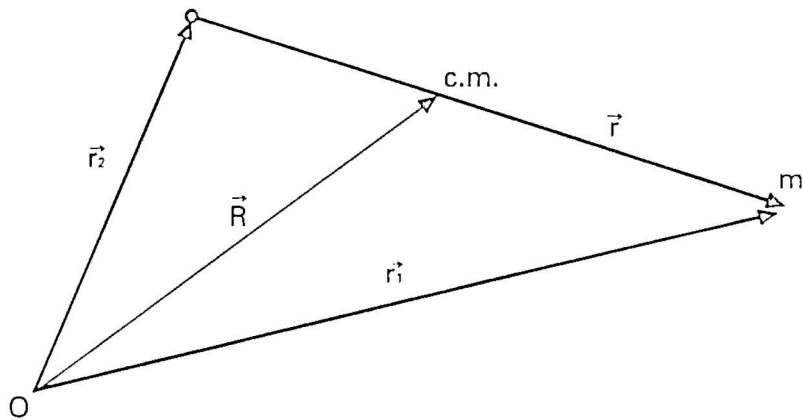


Figura 1. Problema de los dos cuerpos.

¹ a es el semieje mayor y ε , la excentricidad de la elipse.

Las relaciones de los parámetros obtenidos a partir de (4) y (5) son:

$$a = \frac{K}{2E}, \quad (6)$$

$$L^2 = -Kma(1 - \varepsilon^2). \quad (7)$$

El problema de los dos cuerpos en mecánica newtoniana

Si dos cuerpos M y m (ver fig. 1) están sometidos a las fuerzas de interacción gravitacional F_1 y F_2 tendremos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -\vec{F}_2, \quad m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 \\ M \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_2. \end{aligned} \quad (8)$$

De la figura 1, observamos que:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R} = \frac{m \vec{r}_1 + M \vec{r}_2}{m + M}. \quad (9)$$

Después de algunos cálculos algebraicos se obtiene

$$(M + m) \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{0}, \quad (10)$$

$$Mm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (M + m) \vec{F}_1. \quad (11)$$

Entonces

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_1. \quad (12)$$

donde

$$\mu \equiv \frac{Mm}{M+m}. \quad (13)$$

Así, el movimiento de la masa \mathbf{m} es visto por la masa \mathbf{M} como si la masa \mathbf{m} orbitase a su alrededor con masa μ (llamada masa reducida) y estuviera sometida sólo al potencial central debido a \mathbf{M} .

Radiación gravitacional

Las ecuaciones del campo gravitacional (conocidas como ecuaciones de Einstein), son:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}. \quad (14)$$

Estas satisfacen las identidades de Bianchi (que encierran las leyes de conservación local de energía y momentum):

$$G^{\alpha\beta} ;_{\beta} = 0, \quad (15)$$

donde ; representa la derivada covariante. El tensor energía-momentum para nuestro sistema binario viene dado por:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^{\mu} U^{\nu}, \quad (16)$$

donde

$$\vec{U} \rightarrow (1, 0, 0, 0) \quad (17)$$

En la aproximación de campo débil,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (18)$$

con

$$|h_{\alpha\beta}| < 1 \quad y \quad (\eta_{\alpha\beta}) = diag(-1, 1, 1, 1) \quad (19)$$

Conviene definir:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (20)$$

así, las ecuaciones de Einstein (14) en esta aproximación se convierten en [2]:

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \quad (21)$$

donde $t^{\mu\nu}$ son los componentes del *pseudotensor energía-momentum para el campo gravitacional* y resultan del cambio de derivada covariante en (14) a derivada parcial en (21). Las ecuaciones de Einstein (21) implican:

$$(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0, \quad (22)$$

donde $_{,\nu}$ representa la derivada parcial con respecto a x^ν . Es importante notar que estas ecuaciones incluyen derivadas parciales en vez de derivadas covariantes - hecho que permite la aplicación de la ley de Gauss - y que $t^{\mu\nu}$ dependen para su definición y existencia de la elección de las coordenadas; es decir, no son componentes de un tensor (y como tal independientes de un sistema de coordenadas).

Las ecuaciones de Einstein (21) son equivalentes a las ecuaciones integrales

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x^j) = \int_{\substack{\text{todo el} \\ \text{espacio}}} \frac{[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}]_{ret}}{|x - x'|} d^3 x', \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned} |x - x'| &\equiv [\sum_j (x^j - x'^j)^2]^{1/2}, \\ d^3 x' &\equiv dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} \end{aligned} \quad (24)$$

y el subíndice "ret" significa que la cantidad debe ser evaluada en un punto retardado del espaciotiempo

$$(t' = t - |x - x'|, x'^j).$$

Si el origen de coordenadas está dentro de la fuente, podemos definir (ver fig. 2): (a) La fuente material (región de tamaño R , donde $T^{\mu\nu} \neq 0$); (b) La fuente gravitacional (región de tamaño L , donde $t^{\mu\nu}$ contribuye significativamente en la integral (23)); (c) La zona cercana (región comprendida entre R y $\lambda/2\pi$ [longitud de onda reducida de la radiación gravitacional]); y (d) La zona de radiación (región lejana de $\lambda/2\pi$). Para sistemas de

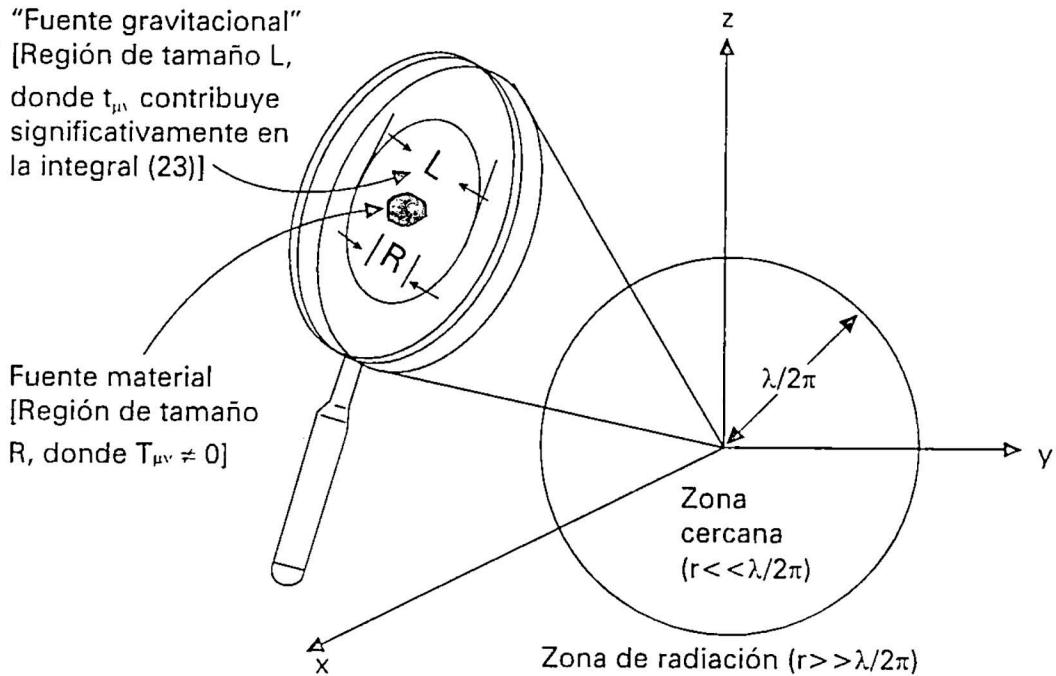


Figura 2. Fuente de movimiento lento irradiando ondas gravitacionales. El origen de coordenadas está localizado dentro de la fuente.

movimiento lento, las únicas contribuciones significativas en las integrales retardadas (23) vienen del interior de la zona cercana (región de tamaño $L \sim R \ll \lambda/2\pi$). Podemos entonces prestar atención a los puntos de observación x^j ($j = 1, 2, 3$) alejados de la región fuente, es decir

$$|x| \equiv r \gg L \geq |x'|,$$

y luego expandir (23) en potencias de x'/r :

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu}(t, x) &= \frac{4}{r} \int [T^{\mu\nu}(t-r, x') + t^{\mu\nu}(t-r, x')] d^3 x' \\ &+ O \left\{ \frac{2\pi x^j}{r^2 \lambda} \int x'^j [T^{\mu\nu}(t-r, x') + t^{\mu\nu}(t-r, x')] d^3 x' \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

De los diez componentes de $\bar{h}^{\mu\nu}$, sólo los seis espaciales son de interés ya que únicamente ellos interesan en la calibración TT [5].

Utilizando (22) obtenemos:

$$\int (T^{jk} + t^{jk}) d^3 x = \frac{1}{2} \frac{d^2 I^{jk}}{dt^2}, \quad (26)$$

donde

$$I^{jk}(t) \equiv \int [T^{00}(t, x) + t^{00}(t, x)] x^j x^k d^3 x, \quad (27)$$

relaciones conocidas como el *teorema del virial tensorial* [1].

Luego, usando (25) (para los componentes espaciales):

$$\bar{h}^{jk}(t, x) = \frac{2}{r} \ddot{I}^{jk}(t). \quad (28)$$

Definiendo

$$\bar{\Xi}_{jk} \equiv I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I_1, \quad (29)$$

($\Xi_{ij} = \Xi_{ij}(t)$) denominado tensor momento cuadrupolar reducido o sin traza, podemos expresar los \bar{h}^{jk} de (28) como (en la calibración TT):

$$\begin{aligned} \bar{h}_{xx}^{TT} &= -\bar{h}_{yy}^{TT} = \frac{1}{r} [\ddot{\Xi}_{xx} - \ddot{\Xi}_{yy}] \\ \bar{h}_{xy}^{TT} &= \frac{2}{r} \ddot{\Xi}_{xy}. \end{aligned} \quad (30)$$

Luego, para órbitas cerradas la variación de la energía del sistema por unidad de tiempo (llamada luminosidad del sistema), promediada en un período, es [2]:

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle = -\frac{r^2}{32\pi} \int \langle \frac{\partial \bar{h}_{jk}^{TT}}{\partial t} \frac{\partial \bar{h}_{Tjk}^{TT}}{\partial t} \rangle d\Omega, \quad (31)$$

y luego de algunas simplificaciones:

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle = -\frac{1}{5} \langle \ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij} \rangle. \quad (32)$$

Similarmente, la variación del momentum angular en la dirección j , promediada en un período, resulta [2]:

$$\langle \frac{dL_j}{dt} \rangle = -\frac{2}{5} \epsilon^{jki} \langle \ddot{\Xi}_{ki} \ddot{\Xi}^i \rangle \quad (33)$$

Aproximación post-newtoniana

Ahora consideramos una fuente para la cual la gravedad contribuye sólo en una pequeña fracción de la energía total (denominada *nearly Newtonian source*) [2]:

$$t^{00} \sim M^2/R^2 \sim (M/R) T^{00} \ll T^{00} \quad (34)$$

luego,

$$I^{jk}(t) = \int T^{00}(t, x) x^j x^k d^3 x, \quad (35)$$

donde $T^{00} = \rho$ de acuerdo a (16) y (17); y ρ es la densidad de masa-energía del sistema. Así, la integral (35) es lo que se conoce como el *tensor momento cuadrupolar de la distribución de masa*. En nuestro caso, para describir el movimiento newtoniano (i.e. lento) de una partícula de masa en reposo μ , tendremos: $\rho(t, x) = \mu \delta(x - X(t))$, donde $X(t)$ es la trayectoria de la masa μ .

Vamos a considerar al sistema binario contenido en el plano xy (de ese modo, el momentum angular tiene la dirección del eje z) describiendo órbitas elípticas cerradas que van a reducirse inmediatamente después de completar un período orbital. Esto lo hacemos para manejar fácilmente el tensor momento cuadrupolar de la distribución de masa I^{jk} . Además, durante el proceso de cálculo tendremos en cuenta los resultados clásicos: es decir, el sistema binario puede ser descrito como si tuviéramos solamente una masa μ (i.e. la masa reducida) sometida a una fuerza central, cuyo momentum angular se conserva y es directamente proporcional a ella (ver (1)). En coordenadas polares (r, θ) las variables cartesianas son:

$$x = r(t) \cos \theta(t), \quad y = r(t) \sin \theta(t). \quad (36)$$

Además sabemos que la conservación del momentum angular aplicado a μ implica que:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}. \quad (37)$$

Utilizando las ecuaciones (37) y (5) tenemos para \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon L \sin \theta}{\mu a (1 - \varepsilon^2)}. \quad (38)$$

Usando $T^{00} = \rho = \mu \delta(x - r \cos\theta) \delta(y - r \sin\theta)$ en (35), obtenemos:

$$I_{xx} = \mu r^2 \cos^2 \theta, \quad (39)$$

$$I_{xy} = \mu r^2 \cos \theta \sin \theta, \quad (40)$$

$$I_{yy} = \mu r^2 \sin^2 \theta. \quad (41)$$

Luego, usando (29),

$$\Xi_{xx} = \frac{\mu r^2}{6} + \frac{\mu r^2}{2} \cos 2\theta, \quad (42)$$

$$\Xi_{xy} = \frac{\mu r^2}{2} \sin 2\theta, \quad (43)$$

$$\Xi_{yy} = \frac{\mu r^2}{6} - \frac{\mu r^2}{2} \cos 2\theta, \quad (44)$$

derivando (42), (43) y (44) con respecto al tiempo tendremos:

$$\dot{\Xi}_{xx} = \frac{\varepsilon L r \sin \theta}{3a(1-\varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon L r \cos 2\theta \sin \theta}{a(1-\varepsilon^2)} - L \sin 2\theta, \quad (45)$$

$$\dot{\Xi}_{xy} = \frac{\varepsilon L r \sin \theta}{a(1-\varepsilon^2)} \sin 2\theta + L \cos 2\theta, \quad (46)$$

$$\dot{\Xi}_{yy} = \frac{\varepsilon L r \sin \theta}{3a(1-\varepsilon^2)} - \frac{\varepsilon L r \cos 2\theta \sin \theta}{a(1-\varepsilon^2)} + L \sin 2\theta. \quad (47)$$

La segunda derivada de ellos nos da:

$$\begin{aligned} \ddot{\Xi}_{xx} &= \frac{\varepsilon L^2}{3 \mu a^2 (1-\varepsilon^2)^2} [\varepsilon + \cos \theta] + \frac{\varepsilon L^2}{\mu a^2 (1-\varepsilon^2)^2} \\ &[\varepsilon \cos 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta - 2 \sin \theta \sin 2\theta - \\ &\varepsilon \frac{1 - \cos 4\theta}{2} - \frac{2 L^2 \cos 2\theta}{\mu a^2 (1-\varepsilon^2)^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\ddot{\Xi}_{xy} = \frac{L^2}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} [\varepsilon^2 \sin 2\theta - 3 \varepsilon \cos \theta \sin 2\theta + 2 \varepsilon \sin \theta \cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 4\theta - 2 \sin 2\theta - 2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta \sin 2\theta], \quad (49)$$

$$\ddot{\Xi}_{yy} = \frac{\varepsilon L^2 (\varepsilon + \cos \theta)}{3 \mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon L^2}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} [\varepsilon \cos 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta \sin \theta - \frac{\varepsilon}{2} (1 - \cos 4\theta)] + \frac{2 L^2 \cos 2\theta}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2. \quad (50)$$

Finalmente, la tercera derivada será:

$$\dddot{\Xi}_{xx} = \frac{L^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)^4} [-\frac{\varepsilon}{3} \sin \theta - \varepsilon \sin \theta \cos 2\theta + 4 \varepsilon \sin 2\theta \cos \theta + 4 \sin 2\theta], \quad (51)$$

$$\ddot{\Xi}_{xy} = \frac{L^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)^4} [-4 \cos 2\theta - \varepsilon \sin \theta \sin 2\theta - 4 \varepsilon \cos \theta \cos 2\theta], \quad (52)$$

$$\ddot{\Xi}_{yy} = \frac{L^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)^4} [-\frac{\varepsilon}{3} \sin \theta + \varepsilon \sin \theta \cos 2\theta - 4 \varepsilon \sin 2\theta \cos \theta - 4 \sin 2\theta]. \quad (53)$$

No es difícil demostrar que:

$$\ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij} = (\ddot{\Xi}_{xx})^2 + 2 (\ddot{\Xi}_{xy})^2 + (\ddot{\Xi}_{zz})^2. \quad (54)$$

Así, reemplazando (51), (52) y (53) en (54) para obtener $\ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij}$ en función de ε, θ, μ y L :

$$\ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij} = \frac{L^6 (1 + \varepsilon \cos \theta)^4}{\mu^4 a^8 (1 - \varepsilon^2)^8} [\frac{154}{9} \varepsilon^2 + \frac{134}{9} \varepsilon^2 \cos 2\theta + 64 \varepsilon \cos \theta + 32]. \quad (55)$$

Calculemos ahora

$$\langle \overset{\dots}{\Xi}_{ij} \overset{\dots}{\Xi}^{ij} \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T (\overset{\dots}{\Xi}_{ij} \overset{\dots}{\Xi}^{ij}) dt, \quad (56)$$

donde el período T viene dado por:

$$T = \frac{2\mu}{L} \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2}. \quad (57)$$

Así, usando (55) en (56):

$$\langle \overset{\dots}{\Xi}_{ij} \overset{\dots}{\Xi}^{ij} \rangle = \frac{32 \mu^2 (m+M)^3}{a^5 (1 - \varepsilon^2)^{7/2}} (1 + \frac{437}{144} \varepsilon^2 + \frac{221}{576} \varepsilon^4). \quad (58)$$

Reemplazando (58) en (32) obtenemos:

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle = - \frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^3}{a^5 (1 - \varepsilon^2)^{7/2}} (1 + \frac{437}{144} \varepsilon^2 + \frac{221}{576} \varepsilon^4). \quad (59)$$

Por otro lado, después de algunos cálculos algebraicos, obtenemos ($x^3 = z$):

$$\varepsilon^{3ki} \langle \overset{\dots}{\Xi}_{ki} \overset{\dots}{\Xi}^i_l \rangle = 16 \frac{\mu^2 (m+M)^{5/2}}{a^{7/2} (1 - \varepsilon^2)^2} (1 + \frac{7}{8} \varepsilon^2). \quad (60)$$

Reemplazando (60) en (33) obtenemos:

$$\langle \frac{dL}{dt} \rangle = - \frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^{5/2}}{a^{7/2} (1 - \varepsilon^2)^2} (1 + \frac{7}{8} \varepsilon^2) \quad (61)$$

$\langle d\varepsilon/dt \rangle$ y $\langle da/dt \rangle$ los obtenemos a partir de (6), (7), (59) y (61):

$$\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \rangle = - \frac{182}{9} \frac{\mu (m+M)^2 \varepsilon}{a^4 (1 - \varepsilon^2)^{5/2}} (1 + \frac{145}{364} \varepsilon^2), \quad (62)$$

$$\langle \frac{da}{dt} \rangle = - \frac{64}{5} \frac{\mu (m+M)^2}{a^3 (1 - \varepsilon^2)^{7/2}} (1 + \frac{437}{144} \varepsilon^2 + \frac{221}{576} \varepsilon^4) \quad (63)$$



Figura 3. Variación del período orbital del sistema binario respecto al tiempo en la Tierra. Los números en el eje de las ordenadas indican aquellos que irían entre los parentesis.

Y finalmente, a partir de (57) obtenemos:

$$\langle \frac{dT}{dt} \rangle = - \frac{192 \pi \mu (m + M)^{3/2}}{5a^{5/2} (1 - \varepsilon^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{437}{144} \varepsilon^2 + \frac{221}{576} \varepsilon^4 \right). \quad (64)$$

Resultados

Utilizando el método de Euler se resuelven las ecuaciones diferenciales (59), (62), (63) y (64) (esto se hizo usando Turbo Pascal 7.0). Los parámetros empleados fueron los del pulsar PSR 1913 + 16 medidos en 1975. La figura 3 muestra el período orbital T en función de la variable tiempo t : es evidente la reducción del período orbital respecto al tiempo. El resultado es que este período decrece a razón de $7,6 \times 10^{-3}$ segundos por año aproximadamente.

Conclusiones

Los resultados (59), (62), (63) y (64) son similares a los obtenidos por P.C. Peters (1964), quien usó para la luminosidad del sistema, la relación siguiente:

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle = -\frac{1}{5} \langle \frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} - \frac{1}{3} \frac{d^3 I_{ii}}{dt^3} \frac{d^3 I_{jj}}{dt^3} \rangle. \quad (65)$$

En cambio nosotros usamos la relación (32), y se puede observar que no son equivalentes.

REFERENCIAS

- [1] Landau & Lifshitz. *Mechanics*. Pergamon Press. 1960.
- [2] Misner & Thorne & Wheeler. *Gravitation*. Freeman, San Francisco 1973.
- [3] Peters P.C. *Gravitational radiation and the motion of two point masses*. *Physical Review* 1964.
- [4] Peters P.C. & Mathews J. *Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit*. *Physical Review* 1963.
- [5] Schutz B. F. *General relativity*. Cambridge University Press. 1984.
- [6] Smarr & Blandford. *The binary pulsar: Physical processes, possible companions, and evolutionary histories*. *The Astrophysical Journal* 1976.
- [7] Taylor J. H. *Pulsar timing and relativistic gravity*. *Class Quantum Grav.* 1993.
- [8] Taylor & Weisberg & Fowler. *Ondas gravitatorias procedentes de un pulsar orbital*. *Investigación y Ciencia*. Diciembre 1981.

Reducción química del níquel a partir de complejos de citrato por la técnica “electroless”

Adolfo La Rosa Toro G.; Aída Torres R., Angela Medina B. ()*

RESUMEN

La obtención de películas metálicas de níquel sobre substratos conductores y no conductores a través de sistemas de reducción química, originalmente llamada “Electroless plating” ofrece enormes ventajas frente al sistema tradicional de electrodepositación. El sistema puede ser aplicado directamente sobre substratos plásticos, como la resina poliéster, así como sobre metales que no formen par galvánico con la solución.

El resultado es la formación de una película de aleación amorfa de níquel-fósforo lograda por reducción autocatalítica controlada de los cationes níquel (II) en la superficie del substrato previamente activado, para el cual se utiliza como reductor aniones de hipofosfito $[H_2PO_2]$ en medio acuoso.

El recubrimiento sin electricidad (Electroless) es de espesor uniforme sobre todas las áreas de la parte sólida, con independencia de su forma o geometría. Además, en el caso del níquel, el producto es una aleación

() Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima - Perú.*

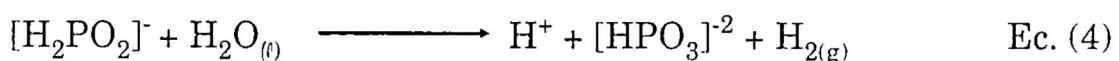
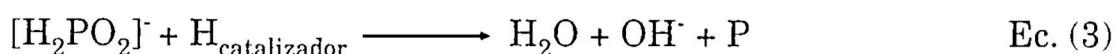
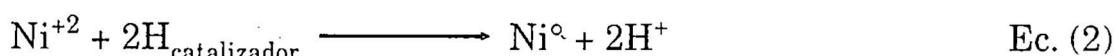
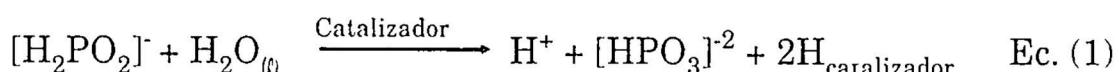
amorfa del metal con fósforo, exhibiendo usualmente una resistencia más alta a la corrosión y capaz de ser endurecida posteriormente por tratamiento térmico.

En la mayoría de los casos el níquel es depositado mediante reducción química con hipofosfito de sodio, pero la técnica no es limitante, otros sistemas pueden usar reductores como hidrazina, borohidruro de sodio, etc. Sin embargo, se ha obtenido mejores resultados comparativos con el hipofosfito debido a su mayor fuerza reductora.

Fundamentos del proceso de reducción química de níquel sin corriente “electroless plating nickel”

Mecanismo de la reacción e implicancias químicas

Muchos mecanismos han sido propuestos para explicar la reacción química que acontece en el proceso. El más aceptado, es el mecanismo que involucra las siguientes ecuaciones:



Las implicancias químicas de las reacciones se pueden resumir en lo siguiente (3):

- En presencia de una superficie catalítica y suficiente energía, los iones hipofosfito, son oxidados a ortofosfato. Una porción del hidrógeno liberado es absorbido en la superficie metálica.
- El catión Ni(II) en la interfase es reducido por el hidrógeno activado.
- Simultáneamente, el hidrógeno absorbido reduce una cantidad pequeña de hipofosfito en la superficie catalítica a las especies (OH)⁻, P y agua.
- Mucho del hipofosfito presente es catalíticamente oxidado a ortofosfato e hidrógeno gaseoso, independientemente de la deposición de níquel y fósforo causando una baja en la eficiencia de la reacción.

Composición de la solución y características:

Las soluciones de electroless níquel contienen:

- a) Una sal proveedora de iones níquel: por ejemplo cloruro de níquel y sulfato de níquel.
- b) Un agente reductor, que proveerá electrones para la reducción del níquel. Por ejemplo: Hipofosfito de sodio, hidrazina, borohidruro de sodio, etc.
- c) Agente acomplejante (quelatante), quien controlará el níquel libre disponible para la reacción. Por ejemplo: citrato de sodio.
- d) Aceleradores, para incrementar la velocidad de deposición metálica.
- e) Inhibidores o estabilizadores ayudan al control de la reducción.

Este recubrimiento se espera uniforme sobre todas las áreas de la parte sólida, con independencia de su forma o geometría; no se observa el efecto de curvas equipotenciales.

Las ventajas que presenta esta técnica son las siguientes (1):

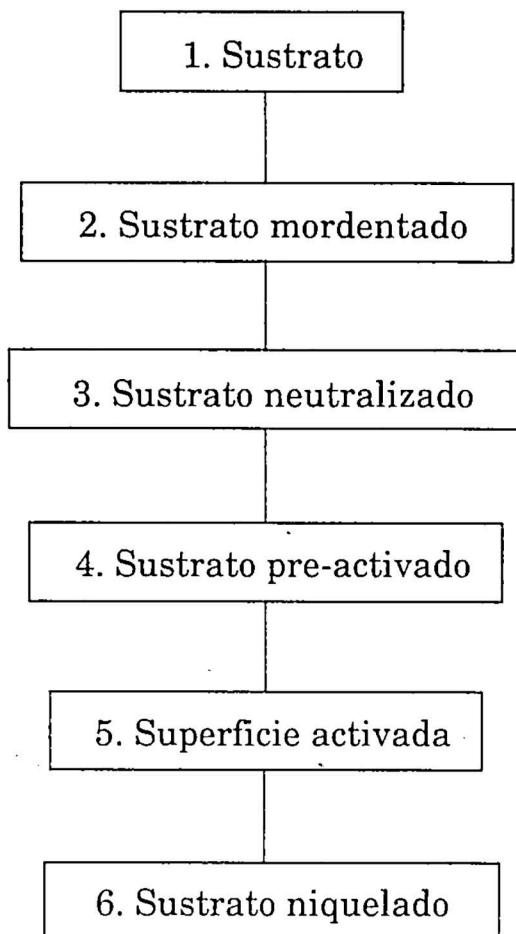
- Buena resistencia a la corrosión y al uso.
- Excelente uniformidad.
- Soldabilidad y brasalidad.
- Bajo costo en mano de obra y equipos.

Limitaciones:

- Costo químico alto.
- Quebradizo.
- Baja velocidad de deposición, comparado con el método electrolítico.

Parte experimental

Diagrama del procedimiento



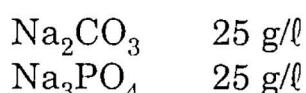
Descripción del procedimiento experimental

PREPARACIÓN Y ACTIVACIÓN DE LA SUPERFICIE DEL SUSTRATO

El procedimiento experimental seguido en el laboratorio, para la preparación de la superficie se resume en los siguientes pasos:

Desengrase:

Las impregnaciones de grasas se removerán por inmersión en una solución alcalina constituida de las siguientes sales:



Temperatura de inmersión: 50-70°C

Tiempo de inmersión: 2 minutos

Mordentado:

Se utiliza ácidos oxidantes los cuales producen microporosidades sobre la superficie, ese paso es esencial en el caso de los plásticos. Los poros aseguran el anclaje del metal depositado sobre el sustrato.

La solución utilizada consiste en:

Ácido sulfúrico 350 g/l

Ácido crómico 180 g/l

Temperatura: 50-70°C

Tiempo de tratamiento: 3-10 min.

Sin embargo en vista del bajo resultado en la adherencia del níquel se optó por efectuar el tratamiento a temperaturas más elevadas, aproximadamente a 95°C.

Las soluciones basadas en ácido crómico son particularmente importantes por ser efectivas en plásticos ABS, pero también polietileno, polipropileno, PVC, poliéster y otros polímeros comunes.

Neutralizado:

Después del mordentado y enjuagado con abundante agua destilada, se debe neutralizar y remover los iones Cr(VI) residuales de la superficie del sustrato por ser este interferente para el tratamiento catalítico siguiente, las soluciones utilizadas son típicamente ácidos o básicas diluidas muchas veces, contienen agentes acomplejantes y reductores. La solución empleada fue el bisulfito de sodio al 2%, una segunda prueba se realizó con solución reductora de hipofosfito de sodio, se operó a condiciones ambientales, la bibliografía sin embargo recomienda temperaturas de 40°C por uno o dos minutos.

Activación catalítica

La activación de la superficie se realiza por inmersión del sustrato en solución ácida de cloruro de estaño y paladio, mediante este método es posible "sembrar" partículas discretas de Pd; en este proceso los iones Sn^{2+} reducirán a los iones Pd^{2+} en forma homogénea en toda la superficie en contacto y en cantidades discretas, sin embargo, frecuentemente se usan complejos de Sn/Pd en soluciones y coloides estabilizados por el exceso de cloruro estannoso.

El proceso de activación se efectuó también con solución de plata amoniacial $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2]^+$. Proporcionando escasos resultados en la deposición de níquel.

La cantidad de iones cloruros en la solución es crítico y debe establecerse un mecanismo de control, durante la inmersión, los coloides Sn/Pd son adsorbidos por la superficie del sustrato, después de enjuagados los núcleos metálicos de Pd, están rodeados por moléculas de hidróxido de estaño hidrolizadas.

Se utilizó soluciones con las siguientes composiciones:

Solución 1: Solución de cloruro de estaño (II)

Cloruro de estaño	10	g/l
Ácido clorhídrico (12N).....	40	ml/l
Solución de cloruro de paladio....	0,2	g/l

Solución 2:

Cloruro de paladio	1	g/l
ácido clorhídrico (12N)	40	ml/l

Aceleración

Con la etapa de activación se requiere una rápida remoción de los hidróxidos de estaño de la superficie para dejar expuestos los núcleos de Pd. Esta etapa denominada aceleración consiste en la inmersión del sustrato previamente activado en HCl diluido al 1%, el ácido reacciona con el hidróxido de estaño insoluble formando estaños solubles y cloruro de estaño. Después de un exhaustivo enjuagado con agua destilada la superficie está libre de sales de estaño. Este tratamiento se efectúa a 50°C por 30-60 seg.

REDUCCIÓN QUÍMICA DE NÍQUEL (ELECTROLESS)

Soluciones "electroless" utilizados:

Solución 1:

NiCl_2	30,0	g/l
Citrato de sodio	22,5	g/l
Hidrazina.....	5,0	g/l

Trietanolamina.....	20 mL/ℓ
pH	10-11
Temperatura.....	90-95°C

Solución 2:

NiSO ₄ . 6H ₂ O.....	119 g/ℓ
Hipofosfito sodio	106 g/ℓ
Citrato de sodio.....	100 g/ℓ
NaOH	Solución saturada
pH	8-10
Temperatura	40-60°C

Solución 3:

NiCl ₂ . 6H ₂ O.....	119 g/ℓ
Hipofosfito sodio.....	106 g/ℓ
Citrato de sodio.....	100 g/ℓ
NaOH.....	Solución saturada
pH.....	8-10
Temperatura.....	40-60°C

Notas:

- En la literatura se recomienda, para este baño una temperatura de 25°C, no obstante experimentalmente se observó que el proceso de reducción del níquel es demasiado lento favoreciendo la velocidad a medida que aumentamos la temperatura, el límite es la resistencia a la deformación del sustrato utilizado.
- Además de las soluciones nombradas se utilizó otros más en el que se utilizó agentes reductores tales como clóruro de estaño y cobre amoniacal, pero en cantidades aproximadas y no se siguió una formulación como en el caso de las anteriores mezclas.

Resultados

Pretratamiento de la muestra

Para comprobar el buen tratamiento del sustrato en el proceso de activación, se efectuó electroless de cobre (técnica cuyo mecanismo se conoce mejor por trabajos efectuados con anterioridad) sobre algunas muestras resultando positivo.

Activación de la superficie

Las primeras pruebas fueron efectuadas activando con solución de plata amoniacal con resultados negativos. La activación con iones de paladio proporcionó depósitos de níquel muy irregulares sobre la superficie.

Las fallas se encuentran zonificadas y generalmente corresponden a lugares con mayor dificultad de activación. La proporción Pd^{2+} , Sn^{2+} es crítico el cual determina el mejoramiento de la deposición.

Electroless níquel

SOLUCIÓN DE NÍQUEL:

Se utilizó soluciones de $NiSO_4$ y $NiCl_2$, obteniéndose mejores resultados con $NiCl_2$. Los depósitos de níquel fueron logrados sobre la superficie metálica del alambre de sujeción del sustrato y la zona periférica, evidentemente corresponde a la zona mejor activada.

AGENTE REDUCTOR:

Se utilizaron los siguientes agentes reductores:

- a) Hidrazina.
- b) $SnCl_2$.
- c) Cobre amoniacal.
- d) Hipofosfito de sodio.

Los mejores resultados fueron obtenidos con hipofosfito de sodio atribuyéndose este hecho a su mayor fuerza reductora.

Conclusiones:

- El pH de la solución se controló añadiendo $NaOH$ en solución saturada. El pH adecuado se encuentra entre 8-10.
- Las elevadas temperaturas no son recomendables para substratos como el plástico, por causar deformaciones en la superficie plástica, la gran diferencia del coeficiente de expansión térmica entre el plástico y el baño electroless pueden causar malas adherencias durante el calentamiento, los baños electroless sobre plásticos son formulados a bajas temperaturas típicas de hasta 50°C.

- La velocidad de descomposición del baño es relativamente lenta comparado con otras soluciones de electroless de cobre, esta característica es de mucha importancia y merece un mayor estudio.
- Es conveniente el uso de hipofosfito de sodio como agente reductor.
- La acción catalítica es muy buena a temperaturas de 60°C. A dicha temperatura se consigue un mejor balance entre la velocidad del depósito homogéneo del metal.
- La activación de la superficie del plástico es crítico para el logro del depósito y corresponde a una proporción exacta entre Pd^{2+} y Sn^{2+}
- La solución de $NiCl_2$ proporcionó mejores resultados que la solución de $NiSO_4$.
- Sobre el metal, se obtienen buenos depósitos de Ni.
- El costo en reactivos químicos es elevado, pues inclusive para volúmenes pequeños se utilizan en grandes cantidades.
- El hipofosfito tiene propiedades reductoras muy fuertes, el exceso ocasionará la precipitación del níquel en forma dispersa, la acción autocatalítica ocasiona la descomposición violenta de la solución.
- Fue probado trietanolamina como acomplejante en forma conjunta con citrato de sodio, pirofosfato de sodio y gluconato de sodio (5). Mientras que en los dos últimos dan productos tensionados, el citrato muestra una mejor calidad de depósito. La habilidad del agente acomplejante de un ácido individual o variedad de grupos de ácidos, puede estar cuantificado por la cantidad de ortofosfato que pueda tener la solución sin precipitación.
- Los agentes acomplejantes pueden tener un efecto pronunciado sobre los depósitos cualitativos, especialmente en el contenido de fósforo, tensión interna y porosidad.

REFERENCIAS

- (1) **Metals Handbook.** 9 ed. Vol. 5. “Surface cleaning, finishing and coating”, 219-242.
- (2) **Gregoire Gutzeit.** “Métodos químicos catalíticos”, 520-533.
- (3) **Revista de plásticos modernos.** “Galvanizado electrolítico del nuevo plástico ABS”, 809.
- (4) **Diane M. Tramontana.** “Products Finishing directory”. New York. 1992, 106-115.
- (5) **Metal Finishing.** Rajagopal, Rajam y Rajagopam S.R. “Electroless nickel deposition from triethanolamina baths”. National aeronautical lab. India. Octubre 1990, 41-45.

El éter y las unidades de Planck

Aníbal Valera ()*

RESUMEN

En base a una teoría desarrollada por el autor y publicada en 1982 (Ref. /3/), referente a un modelo etéreo de la luz, se obtuvieron resultados que en si apuntan a una reinterpretación de la Física actual. En este trabajo presentamos de manera resumida¹ algunas consecuencias del Modelo etéreo de la luz y la fundamentación de las así denominadas Unidades de Planck, que son la base actual de la llamada Teoría de Unificación.

Introducción

Louis de Broglie: Para el ser común, ver un rayo de luz es un asunto del todo banal, pero para el físico ver un rayo de luz significa saber que es, y ese saber le permitiría ver mucho más allá, incluso dentro de la materia.

Alededor de 1630, un filósofo, René Descartes logró introducir el concepto de “Éter” en la Física, determinando el desarrollo de esta por cerca de 300 años. Las contribuciones de muchos físicos se centraron en

^(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Laboratorio de óptica, Lima - Perú.

¹ En el libro: ÓPTICA I / Introducción / A. Valera (Ref. /06/), a ser publicado próximamente se presentan las deducciones respectivas de manera más detallada.

este concepto, cautivando a casi todos los grandes físicos de la época: por ejemplo el mismo Maxwell.

Debido a que una onda requiere un **medio** que la sustente (aire, agua), no era evidente cual correspondía a las “**ondas de luz**”. Experimentos realizados en este tiempo con vacío (Torricelli), indicaban claramente que el aire era el portador de las ondas sonoras, más no así de la luz. Fue por este motivo que Descartes denominó **éter** al medio base de la propagación de las ondas de luz.

Según Descartes, el espacio es un **pleno**, ocupado por un medio, cuyas ondas o alteraciones constituyen las ondas de luz. Más aún, el Éter era el responsable de transmitir directamente todas las fuerzas presentes en la naturaleza como son las fuerzas magnéticas y la interacción de la luna con las mareas. El medio que constituye el Éter consta de partículas diminutas, imperceptibles a los sentidos, en movimiento continuo. En su obra Meteores/1638 Descartes es el primero en relacionar los colores de la luz con una periodicidad temporal; para él los colores estaban ligados a las distintas velocidades de rotación de las partículas (glóbulos) en directa analogía con las ondas sonoras y sus distintos tonos excitables en un instrumento musical.

En relación al Éter y sus propiedades se tejieron innumerables teorías, sin mayor trascendencia casi todas, ya que se partía de premisas falsas y sin posibilidades de comprobación experimental. Una de estas teorías “Las ondas electromagnéticas del Éter” propuesta por el físico escocés James Clerck Maxwell (1831 - 1879) en su libro “A treatise on Electricity and Magnetism” (Oxford 1863).

*Maxwell: <<La teoría que yo propongo se puede denominar consecuentemente una teoría del **Campo electromagnético**, porque ella trata de la vecindad del cuerpo eléctrico o magnético, pero también puede ser llamada una teoría **Dinámica del éter**, porque ella supone que en el espacio existe “una materia” en movimiento, que produce los efectos electromagnéticos observados”.>>*

En esta publicación Maxwell describe el concepto de “tubos de fuerza” del éter formado según él por **tensiones (campo eléctrico)** y **presiones perpendiculares (campo magnético)** en el seno del mar etéreo que llena el cosmos. La gran contribución de Maxwell, uno de los más grandes científicos del ingenio humano, permaneció en el olvido hasta que en 1887 el físico alemán Heinrich Hertz descubrió experimentalmente las ondas electromagnéticas previstas por Maxwell, recién entonces los físicos

se interesan por la obra de Maxwell, la seccionan y seleccionan de ella solo “lo más resaltante” la **teoría electromagnética de la luz**, la misma que constituye hasta ahora la base de descripción de todo tipo de radiación EM.

Es sorprendente que a partir de la comprobación de las teorías de Maxwell, no se diera mayor interés por profundizar el estudio del éter, salvo algunas excepciones como por ejemplo el peruano Santiago Antunez de Mayolo, quien en diversas publicaciones de la época /2/ propuso ya modelos mecanicistas de la luz; la que el explicaba mediante la oscilación de dos cantidades eléctricas (signo contrario) acopladas según una fuerza coulombiana, electricidades que se hallan en movimiento de rotación y de traslación con la velocidad de la luz. Este movimiento helicoidal se traduce sin ningún artificio en los dos campos de Maxwell. Considerando solo lo que acontece en el plano de rotación, es decir en el plano de la masa que gira como una rueda con la velocidad de la luz, se deduce rigurosamente la teoría de los quantos o fotones, o sea de los corpúsculos de luz.

La búsqueda de la mecánica del éter motivó así a los físicos del siglo pasado al estudio de los cuerpos sólidos. Nuevamente los avances experimentales de principio de siglo permitieron (Bragg, Debye) “visualizar” la estructura interna de los cuerpos sólidos más relevantes: **Los cristales**, cuyo orden periódico se debía tener en cuenta en la formulación de una teoría de propagación. En 1912 Born y von Karman publican la teoría básica que describe las vibraciones de una red cristalina, esta teoría pasa desapercibida hasta 1935, en que Blackman la aplica al estudio de la capacidad calorífica de cuerpos sólidos. Poco después se originó la tercera guerra mundial, a cuyo término, acabó también la “escuela mecanicista de la física”, predominando hasta el momento las líneas individualistas, como son: Física de sólidos, partículas elementales, relativistas, espectroscopistas, etc.; con teorías también independientes una de otra.

Antunez de Mayolo: << ... No se comprende, el desconcierto que reina ahora en la física, más aún con las complicaciones introducidas por la “teoría de relatividad” promovida por el físico matemático Albert Einstein y que nos presenta la materia como la charnela (bisagra) de una concha bivalva, formada cada mitad por universos de cinco dimensiones. ¿Lo comprende usted? Nosotros tampoco, pero si quereis formaros una idea de la concepción en cuestión, os recomendamos que vayais a nuestro Campo de Marte y os pongais en frente de la Concha Acústica allí existente e imaginando otra Concha en frente unida a la primera por una charnela, suponiendo que cada una de dichas conchas es un universo de

cinco dimensiones, imaginad que la charnela es la materia y no tendreis más que preguntar.>>

Evidentemente, hoy en día aún no existe una teoría convincente que explique como un todo y de un modo coherente las distintas manifestaciones de la energía: Luz, materia y sus respectivas fuerzas.

Teoría unitaria

En la actualidad (1996), todos los procesos físicos conocidos se pueden agrupar convenientemente según la fuerza de su interacción:

Tipo de interacción	Fuerza relativa
Interacción fuerte (Núcleo)	1
Interacciones electromagnética (Órbitas electrónicas, radiación EM, luz)	10^{-2}
Interacciones débiles (Decaimiento β)	10^{-14}
Interacciones gravitacionales (Materia)	10^{-40}

La gran ambición de la física teórica actual es establecer una teoría que unifique estas cuatro fuerzas: “Teoría de las supercuerdas” o también “Geometrías no conmutativas”, por medio de las cuales los “físico matemáticos” actuales especulan en espacios topológicos multidimensionales y en la existencia de “un vacío cuántico” estructurado recién a la longitud de 10^{-35} m (Longitud de Planck).

La longitud, tiempo y masa de Planck

Fue, nada menos que Max Planck, quien en 1899 llamó por primera vez la atención en el sentido unificadorio. En ese tiempo introdujo Planck su famosa constante h para explicar el espectro de radiación de **cuerpo negro**; más aún en su cuaderno de protocolo, en un margen, Planck anotó un detalle curioso: que su constante h , la constante de la velocidad de la luz c y la constante de gravedad G de Newton, configuraban un sistema de unidades absoluto. Estas unidades fueron la base de la escala espacio-tiempo de la actual teoría cuántica de la gravedad.

Para encontrar estas unidades se trabaja (Ref/4) en base a las dimensiones:

$$\begin{aligned}[c] &= L/T \\ [h] &= ML^2/T \\ [G] &= L^3/(MT^2) \end{aligned}$$

Para obtener las unidades de Planck: l_P , t_P , m_P se encuentra los exponentes α , β , γ tal que su combinación cumpla con expresar la magnitud de la unidad correspondiente, por ejemplo: $L = [c^\alpha h^\beta G^\gamma]$, resultando así tres relaciones:

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 1 \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0\end{aligned}$$

Tal que: $\alpha = -3/2$ $\beta = \gamma = 1/2$

Así: $l_P = (hG/c^3)^{1/2} = 10^{-35} \text{ m}$
 $t_P = (hG/c^5)^{1/2} = 10^{-44} \text{ s}$
 $m_P = (hc/G)^{1/2} = 10^{-7} \text{ kg}$

Modelo del éter / Valera:

En base a la teoría elemental etérea (Ref/3/) a presentarse a continuación, encontramos las siguientes unidades:

$$\begin{aligned}l &= \pi a = 1,33 \times 10^{-15} \text{ m} \\ \tau_0 &= \pi a/c = 0,444 \times 10^{-23} \text{ s} \\ M_0 &= h/\pi ac = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}\end{aligned}$$

donde $a = 0,42367 \times 10^{-15} \text{ m}$ es la constante de la red etérea.

En el modelo del éter planteado por el autor se deduce también una relación simple para la constante G de Newton:

$$G = \frac{a^2 c^3}{h N} \left(\frac{\pi^2}{8} \right)$$

donde $N = A/a = 1,35 \times 10^{38}$, $A = 0,572 \times 10^{23} \text{ m}$
 A = Diámetro del universo
 a = espaciamiento de la red etérea.

h = constante de Planck
 c = velocidad de la luz

Introduciendo este valor en las relaciones correspondientes a las unidades de Planck resulta:

$$l_p = \pi a \sqrt{\frac{1}{8N}}$$

$$t_p = \pi a/c \sqrt{\frac{1}{8N}}$$

$$m_p = h/\pi a c \sqrt{8N}$$

Como se observa las unidades de Planck solo se diferencia de las nuestras por el factor adimensional $\sqrt{8N}$, con el agregado de que nuestras unidades son deducibles y tienen un sentido físico definido, como a continuación exponemos.

El éter: ¿un cristal de electrones?

Haciendo una analogía al tratamiento clásico de fonones (cuantos de vibración) de una red cristalina convencional /Ref. 3/, se concibe un modelo de éter, semejante en todo sentido a un sólido elemental, pero considerando una distancia periódica de la red teniendo un valor a , el que en primera aproximación consideramos del orden de magnitud del radio clásico del electrón ($a \approx 10^{-15}$ m = 1 Fermi), el trabajo se limitó entonces a interpretar físicamente las soluciones clásicas e identificar así los **“valores observables”** para luego finalmente **calibrar** el Modelo.

En nuestro modelo partimos de la ecuación clásica (Ref. /5/) de movimiento de una red unidimensional de partículas idénticas separados una de otra la distancia “ a ” a lo largo del eje x.

Comentario: *Como se observará, se está trabajando en una dimensión aún así los resultados serán más que sorprendentes. Con respecto a “las partículas idénticas”, no hacemos en este modelo ninguna conjectura, pero evidentemente en un refinamiento posterior de la teoría se describirá esta “celda unitaria” del cristal éter y*

se identificará a las subpartículas elementales como “resonancias” a la celda de Ewald.

Considerando solo una interacción significativa entre los vecinos más próximos, se obtiene la relación de dispersión clásica:

$$\omega^2 = \frac{4 U''}{m} \operatorname{sen}^2 \frac{ka}{2} \Rightarrow \omega = 2 \sqrt{\frac{U''}{m}} \left| \operatorname{sen} \frac{ka}{2} \right|$$

donde ω = frecuencia angular de la vibración de la red.

k = vector de onda de la vibración.

m = masa efectiva de la “partícula”

$$U'' = \frac{d^2 U}{dr^2} \Big|_{r=a}$$

Esta relación fundamental describe la propagación de ondas de frecuencia $\omega/2\pi$ y longitud de onda $2\pi/ka$ en una red unidimensional.

Limitándonos como de costumbre a la primera zona de Brillouin:

$$-\pi/a \geq k \geq \pi/a$$

Se observa que existe una frecuencia máxima de propagación ω_{\max}

$$\omega_{\max} = 2 \sqrt{U''/m}$$

A partir de la relación de dispersión $\omega(k)$ se obtiene la velocidad de fase v_f y la velocidad de grupo v_g de la onda

$$v_f = \omega/k = a \sqrt{\frac{U''}{m}} \frac{\operatorname{sen} \frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}}$$

$$v_g = d\omega/dk = a \sqrt{\frac{U''}{m}} \cos \frac{ka}{2}$$

Calibración 1

La velocidad de propagación máxima es igual a la velocidad de la luz:

$$v_{g \max} = a (U''/m)^{1/2} = c$$

Por tanto:

$$\omega = (2c/a) \operatorname{sen} ka/2$$

$$v_f = (2c/ka) \operatorname{sen} ka/2$$

$$v_g = c \operatorname{cos} ka/2$$

Lo que significa que para ondas cuya longitud de onda λ sea muy grande comparada con a (por ejemplo: luz) se va a cumplir: $k \ll 2/a$ así en ese rango.

$$v_g = v_f = c$$

$$\omega = (2c/a) (ka/2) = ck \Rightarrow \lambda v = c$$

como corresponde a un quanto de luz.

Evidentemente para que la onda se identifique plenamente con un rayo de luz, la onda debe ser transversal y además las partículas de la red deben tener carga eléctrica: e .

Suposición: La constante de la red etérea $a = 10^{-15} \text{ m}$

Comentario: *Haciendo una analogía con los sólidos convencionales en los cuales la separación de la red es del orden de magnitud de sus partículas (átomos). En nuestro caso sospechamos que las partículas de la red son alguna partícula elemental: ¿electrón?, ¿núcleón?*

Aplicando la terminología usual de ondas en sólidos, obtenemos de la relación de dispersión $\omega(k)$, la masa efectiva (m^*) asociada a la onda /Ref. 04/:

$$m^* = \frac{\hbar}{\frac{d^2 \omega}{dk^2}} = \frac{-2 \hbar}{ac \operatorname{sen} \frac{ka}{2}} = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

donde: $M_0 = \frac{2 \hbar}{ac}$

$$\beta = v_g/c$$

Comentario: Como es de observar de un modo natural se obtiene una masa en reposo ($m^* = M_0$ para $v_g = 0$) y su variación relativista.

Si evaluamos el orden de magnitud de M_0 en base a lo planteado ($a = 1 \text{ Fm}$), se obtiene:

$$M_0 \approx 10^{-27} \text{ kg} \text{ (la masa de un nucleón!)}$$

Calibración 2

Considerando que la masa M_0 encontrada es un nucleón

$$M_0 = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad a = 0,423 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Comentario: En el límite de la zona de Brillouin ($k = \pi/a$) la velocidad de grupo $v_g = 0$, la onda no se propaga, es estacionaria, con energía de reposo $\hbar \omega_0$.

Evaluando la energía de la onda luminica en ($k = \pi/a$) se obtiene:

$$\hbar \omega_0 = \hbar (2c/a) = (2\hbar ac)c^2 = M_0 c^2$$

Comentario: El nucleón constituye así una onda de luz estacionaria, estableciéndose la relación de Einstein para la energía en reposo $E = M_0 c^2$, de un modo natural.

En las ecuaciones utilizadas por Einstein (ecuaciones de Lorentz) para las deducciones relativistas se supone que la velocidad de la luz es una constante. Lo mismo se supuso de la velocidad del sonido. En nuestras deducciones la velocidad de la luz se puede considerar constante solo en un cierto rango, más no así a frecuencias altas en donde esta debe disminuir ($v_g = 0$ para $k = \pi/a$).

Fuerza gravitacional:

En las deducciones anteriores se obtuvo que en la frontera de la primera zona de Brillouin ($k = \pi/a$), las ondas se materializan (ondas estacionarias), dando origen a los nucleones (base de la materia). Este punto

del espacio ωk : $(2c/a, \pi/a)$ podemos considerarlo como nuestro nivel de referencia, desde donde nosotros como materia “observamos” el desplazamiento de los nucleones $(k^* \geq 0)$ y su energía asociada $(\hbar \omega^* \geq 0)$. En este nivel (*) podemos también considerar un éter* repleto de “nucleones” sin carga eléctrica en su estado fundamental (ω_0) y restringidos a una velocidad de grupo $v_g = 0$ para $k^* = k \cdot \pi/a = 0$, luego se debe cumplir:

$$v_g = c \operatorname{sen}(k^* a/2)$$

$$\text{Ya que: } d\omega^*/dk^* = v_g \Rightarrow \omega^* = \omega_0 [1 - \cos(k^* a/2)]$$

Debido a que en nuestro caso queremos una solución para valores $k^* \approx 0$, introducimos la aproximación $\cos x$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + \dots$$

$$\text{Obteniendo así: } \omega^* = \omega_0 k^{*2} a^2 (1/8)$$

La energía E^* asociada a este paquete será:

$$\begin{aligned} E^* &= \hbar \omega^* = \hbar \omega_0 k^{*2} a^2 (1/8) \\ &= h c a k^{*2} (1/8\pi) \end{aligned}$$

Los valores que asume k^* están relacionados con las longitudes de onda λ^* de los paquetes en el gran “Resonador” en el que nos encontramos: **Nuestro universo.**

Si el diámetro medio de nuestro universo se cuantifica por una longitud L , cuyo valor es del orden de 10^{24} m, las longitudes de onda λ^* posibles deberán cumplir la relación clásica:

$$\lambda^* = 2 L (1/n)$$

donde: n es el orden de la onda estacionaria. Así:

$$k^* = 2\pi/\lambda^* = \pi n / L = (\pi / N a) n$$

donde N es el múltiplo de unidades “a” de que consta L .

El valor mínimo de k^* es así: $(\pi/N a)$

La energía de cada uno de los niveles n está dada por:

$$E_n^* = \frac{h c a n^2 \pi}{8 a N^2} = M_0 c^2 \pi^2 n^2 (1/8 N^2)$$

Para una onda, se puede establecer sus características de partícula: su masa efectiva, velocidad de fase, aceleración y fuerza efectiva. La fuerza efectiva para una partícula en una onda estacionaria se entiende como la fuerza centrípeta que mantiene en oscilación a la onda/partícula y está dada por la relación:

$$F = dP/dt = d\hbar k/dt = \hbar k \omega = k E$$

Luego aplicando en nuestro caso a las ondas del “universo”.

$$F^* = k^* E^* = k^{*2} h c n (1/8 N)$$

Debido a que para una onda el vector de onda está relacionado con el radio de rotación de la partícula/onda según: $k = 1/r$.

En este caso: $k^* = 1 / r^*$, luego

$$F^* = (1/r^{*2}) h c n (1/8 N)$$

Suposición: Suponiendo que F_{11}^* es la fuerza que liga a un nucleón libre estacionario (en su nivel fundamental) con respecto a un nucleón ligado (red), entonces esta fuerza F_{11}^* debe ser igual a la fuerza de gravedad entre dos nucleones:

$$F_{11}^* = (1/r^{*2}) G M_0^2$$

Luego:

$$G = h c (1/8 N M_0^2)$$

Reemplazando el valor de $M_0 = h/\pi a c$, se obtiene:

$$G = \frac{\pi^2 a^2 c^3}{8 h N}$$

Calibración 3

Considerando la constante G de gravitación de Newton

$$G = 6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Obtenemos el valor de N:

$$N = 1,35 \times 10^{38}$$

Con lo cual se encuentra un valor para el diámetro L del “universo”:

$$L = 0,57 \times 10^{23} \text{ m}$$

Comentario: *La relación energética derivada para la interacción entre nucleones:*

$$\hbar\omega = (\hbar^2/2 M_0) k^2$$

se identifica como la ecuación de movimiento de una partícula libre de masa M_0 , obtenida según la ecuación de Schrödinger. Luego la onda de materia deducida de nuestro modelo del “éter” constituye la misma función de onda asignada por la mecánica cuántica a una partícula de masa M_0 .

Para el caso de las ondas del éter (fotones) se cumple

$$\omega \cong ck$$

y la correspondiente ecuación de onda es de tipo Maxwell.

Conclusión

La teoría del éter expuesta en esta sección de manera resumida es solo una primera aproximación (modelo unidimensional). Es de sorprender toda la riqueza contenida en él y más aún todas sus futuras implicancias.

Algunas respuestas inmediatas que esta teoría elemental permite deducir (Ref. /06/):

- * *¿Qué es una estrella?*
- * *¿Dónde se encuentran los monopolos magnéticos de Dirac?*
- * *¿Ondas electromagnéticas en el núcleo?*

REFERENCIAS

- /1/ **Sir Edmund Whittaker.** "A history of the theories of aether and electricity". *The history of modern physics /V7 1800 - 1950.* Tomash Publishers London 1951.
- /2/ **Santiago Antunez de Moyolo.** "La teoría electromecánica de la luz y sus relaciones con la teoría electromagnética de Maxwell y la teoría de los quantos".
- /3/ **Aníbal Valera.** "Consecuencias de la cuantización del vacío". *Revista Peruana de Física.* Vol. II, N° 1, 90 - 108 (1982).
- /4/ **Giles Cohen T.** "Les constantes universelles et la Physique de l'Horizon. *La Recherche N 278, Aout 1995, 756-759, France.*
- /5/ **Charles Kittel.** "Introduction to solid state physics". Wiley, New York 1971.
- /6/ **Aníbal Valera.** "Óptica I". A ser publicada próximamente.

Construcción de las funciones de Green

Caso unidimensional

H. G. Valqui *

RESUMEN

En los textos y artículos de Física Matemática se promueve la creencia de que, dada una ecuación diferencial lineal no homogénea, a ella le corresponde una única Función de Green, la misma que debe ser calculada con el recurso de la Delta de Dirac [ver referencias bibliográficas]. En el presente artículo: i) Construimos las funciones de Green sin recurrir a la Delta de Dirac. Esto pone en evidencia ciertas características de dicha "función" y, por otra parte, en los casos concretos, permite optar por cualquiera de los dos métodos, según convenga. (En el caso de tener que recurrir a soluciones numéricas debería prescindirse del uso de la Delta), ii) Se va imponiendo a la función de Green las condiciones que sean convenientes para construir la solución buscada, de acuerdo con las condiciones de contorno que se le exija satisfacer, iii) El procedimiento para "despejar" la función incógnita es, básicamente, independiente de la dimensión del espacio de las variables.

En un artículo posterior se tratará el caso de n dimensiones.

Introducción

II. Consideraremos las funciones definidas en el intervalo real $[a, b]$. Sean A, B, C, h funciones definidas en tal intervalo, de manera que A no se

(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima - Peru

anule en ningún punto del mismo; así la función $\tau = \exp \int B/A$ también resulta bien definida en dicho intervalo. Sea, por otra parte, la ecuación diferencial

$$A D^2 u + B Du + C u = h \quad (1)$$

donde D es el operador de derivación. Multiplicando ambos miembros por la función τ/A , y teniendo presente que $D\tau = \tau B/A$, tendremos $\tau D^2 u + D\tau Du + (C\tau/A) u = \tau h/A$, o también $D(\tau Du) + (C\tau/A) u = \tau h/A$. Es decir, toda ecuación (1), donde A no se anula en el intervalo de definición, puede ser llevada a la forma

$$D(pDu) + qu = F \quad (2)$$

Si definimos el operador $\mathcal{L} = D(pD) + q$, que actúa sobre las funciones diferenciables definidas en $[a, b]$, la ecuación anterior tomará la forma

$$\mathcal{L} u = F \quad (2a)$$

Entonces la ecuación (2), o la (2a), representa la forma general (cuando A no anula en ningún punto del intervalo) de las ecuaciones diferenciales (lineales) de segundo orden no homogéneas.

I2. Sea u_0 una solución particular de (2a), es decir, $\mathcal{L} u_0 = F$. Restando esta igualdad de la igualdad (2a) obtenemos $\mathcal{L}(u - u_0) = 0$. Es decir, si se conoce alguna solución particular, u_0 , de la ecuación (2a), el problema se reduce a construir la solución general de la ecuación homogénea $\mathcal{L} v = 0$. El llamado "método de la función de Green" ha sido desarrollado justamente para construir una solución particular adecuada.

I3. Sean u y G dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$; sea μ una tercera función definida como

$$\mu = p(G Du - u DG) \quad (3)$$

entonces $G \mathcal{L} u = G [D(pDu) + qu] = D [Gp Du] - (DG) pDu + Gqu = D [GpDu] - [D(DG) pu] - u D(pDG) + u qG = u [D(pDG) + qG] + D [pGDu - pu DG]$, es decir,

$$G \mathcal{L} u = u \mathcal{L} G + D\mu \quad (4)$$

I4. Sean ϕ y ψ dos soluciones de la ecuación homogénea $\mathcal{L}v = 0$. Entonces, si definimos $W = \phi' \psi - \phi \psi'$, y aplicamos (4), tendremos $0 = D(pW)$; es decir, $pW = C$, siendo C una constante numérica.

La función de Green

G1. Sea la ecuación diferencial $\frac{du}{dx} = F$, (2a), válida en el intervalo $[a, b]$, donde la solución u debe satisfacer uno de los tres tipos de condiciones:

- I. Iniciales: $u(a) = \alpha_0$, $u'(a) = \alpha_1$,
 - II. De contorno: $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$,
 - III. Mixtas $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0$, $\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0$, siendo $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ constantes numéricas dadas.

Sea z un cierto punto del intervalo (a, b) ,

[-----) (-----]
a z b

Consideremos una cierta función $G(x, z)$, donde z es un parámetro. Las propiedades de dicha función se irán construyendo, a fin de que ella nos permita obtener una solución de la ecuación (2a).

G2. Sea la función monoparamétrica $\mu(x, z) = p(x) [G(x, z) Du(x) - u(x) DG(x, z)]$. Teniendo presente la ecuación diferencial dada, (2a), y la igualdad (4), podemos escribir

$$D\mu = GF - u \not{G} \quad (4a)$$

Nuestro objetivo radica en obtener la función u . Para ello trataremos de “despejar” $u(x)$ de la función auxiliar μ . Entonces eliminaremos el último sumando de [4a] e integraremos la expresión restante.

Para eliminar el último sumando de (4a) exigiremos que G satisfaga la ecuación homogénea, tanto en el intervalo $[a, z]$ como en el $(z, b]$, es decir,

$$\mathfrak{f}G = 0 \quad \text{en } [a, z) \cup (z, b] \quad (5)$$

o si, por comodidad, definimos $G_1(x) = G(x; z)$ para $x \leq z$, $G_2(x) = G(x; z)$ para $x > z$, entonces podemos escribir,

$$\oint G_1 = 0 \text{ en } [a, z], \quad \oint G_2 = 0 \text{ en } (z, b] \quad (5a)$$

o también

$$D(pDG_1) + q G_1 = 0 \text{ en } [a, z], \quad D(pDG_2) + q G_2 = 0 \text{ en } (z, b] \quad (5b)$$

G3. Sean ϕ, ψ dos soluciones (linealmente independientes) de la ecuación homogénea $\mathcal{L} G = 0$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces ϕ, ψ también serán soluciones de tal ecuación diferencial en los intervalos parciales, $[a, z]$ y $(z, b]$. Como G_1 y G_2 también son soluciones de tal ecuación homogénea, ellas podrán ser escritas como combinaciones lineales de aquellas,

$$G_1(x) = A_1 \phi(x) + B_1 \psi(x) \quad G_2(x) = A_2 \phi(x) + B_2 \psi(x) \quad (6)$$

donde A_1, A_2, B_1, B_2 son ciertas constantes (con respecto a la variable x), funciones del parámetro z .

Notemos que si ϕ y ψ son linealmente independientes, entonces la función $W(x) = \phi'(x)\psi(x) - \phi(x)\psi'(x)$ no puede anularse en ningún punto del intervalo $[a, b]$.

G4. Denominando μ_1, μ_2 a la función μ reducida al correspondiente intervalo, entonces [4a] puede ser escrita como

$$D\mu_1 = FG_1 \quad \text{en } [a, z], \quad D\mu_2 = FG_2 \quad \text{en } (z, b] \quad (4b)$$

donde

$$\mu_1 = p(G_1 Du - u DG_1), \quad \mu_2 = p(G_2 Du - u DG_2)$$

G5. Designemos con $\mu_1(z^-, z)$ al límite por la derecha de $\mu_1(x, z)$, y con $\mu_2(z^+, z)$ al límite por la izquierda de $\mu_2(x, z)$. Entonces, integrando en los intervalos $[a, z]$ y $(z, b]$ respectivamente, las ecuaciones (4b), tendremos

$$\mu_1(z^-, z) - \mu_1(a, z) = \int_a^z FG_1 dx$$

$$\mu_2(b, z) - \mu_2(z^+, z) = \int_z^b FG_2 dx$$

o también, sumando las ecuaciones anteriores,

$$Q(z) = R(z) + \int_a^b F(x) G(x, z) dx \quad (7)$$

$$\text{con } Q(z) = \mu_1(z^-, z) - \mu_2(z^+, z), \quad R(z) = \mu_1(a, z) - \mu_2(b, z) \quad (7a)$$

G6. Asumiendo, como es usual, que tanto u , u' , como p son funciones continuas en todo $[a, b]$; es decir, por ejemplo $u'(z^+) - u'(z^-) = 0$, tendremos que

$$Q(z) = p(z) [G(z^-, z) - G(z^+, z)] u'(z) + p(z) [G'(z^+, z) - G'(z^-, z)] u(z)$$

En la expresión anterior aparecen $u(z)$ y $u'(z)$. Con el objeto de eliminar el sumando donde aparece $u'(z)$ y, por otra parte, despejar $u(z)$, impondremos a $G(x, z)$ las siguientes condiciones de empate en $x = z$,

$$G_1(z^-, z) = G_2(z^+, z), \quad G_2'(z^+, z) - G_1'(z^-, z) = 1/p(z) \quad (8)$$

es decir, en el punto $x = z$, la función $G(x, z)$ debe ser continua, y su derivada debe dar un salto igual a $1/p(z)$.

Como consecuencia de estas condiciones de empate obtenemos $Q(z) = u(z)$, con lo cual (7) toma la forma

$$u(z) = R(z) + \int_a^b F(x) G(x, z) dx \quad (7c)$$

G7. De otro lado, reemplazando (6) en (8), tendremos

$$\begin{aligned} A_2 \phi(z) + B_2 \psi(z) - A_1 \phi(z) - B_1 \psi(z) &= 0 \\ A_2 \phi'(z) + B_2 \psi'(z) - A_1 \phi'(z) - B_1 \psi'(z) &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta,

$$A_2 - A_1 = \psi(z)/C, \quad B_2 - B_1 = -\phi(z)/C \quad (9)$$

donde la constante C tiene el valor $C = p(\phi' \psi - \phi \psi')$, como se mostró en **I4**.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) G(x, z) dx &= \int_a^z F(x) G(x, z) dx + \int_z^b F(x) G(x, z) dx = \\ \int_a^z F(x) [A_1 \phi(x) + B_1 \psi(x)] dx + \int_z^b F(x) [A_2 \phi(x) + B_2 \psi(x)] dx &= \\ \int_a^b F(x) [A_1 \phi(x) + B_1 \psi(x)] dx + \int_z^b F(x) [\psi(z) \phi(x) - \phi(z) \psi(x)] dx/C & \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_a^b FG dx = A_1(z) \int_a^b F(x) \phi(x) dx + B_1(z) \int_a^b F(x) \psi(x) dx +$$

$$(\psi(z)/C) \int_z^b F(x) \phi(x) dx - (\phi(z)/C) \int_z^b F(x) \psi(x) dx \quad (10)$$

donde las integrales del segundo miembro ya pueden ser calculadas; faltando conocer $A_1(z)$ y $B_1(z)$ para obtener el valor de la integral principal.

G8. La función G debe satisfacer la ecuación diferencial (5), o más explícitamente, las dos ecuaciones (5a). Ellas producen cuatro constantes de integración, A_1 , A_2 , B_1 y B_2 . Para poder determinar dicha constantes debemos disponer de cuatro ecuaciones (linealmente independientes). Dos de dichas ecuaciones son las condiciones de empate (8). Las dos ecuaciones adicionales deben resultar de las condiciones iniciales o de las condiciones de contorno que le impongamos a la función G .

A continuación consideraremos los 3 casos de condiciones exigidas a las soluciones u .

G9. Consideremos el caso en el que u deba satisfacer las condiciones iniciales:

$$u(a) = \alpha_0, \quad u'(a) = \alpha_1, \quad (11)$$

entonces, de (7a),

$$R(z) = p(a) [\alpha_1 G_1(a) - \alpha_0 G_1'(a)] - p(b) [u'(b) G_2(b) u(b) G_2'(b)]$$

Aquí vemos que, no disponiendo de información sobre los valores $u(b)$, $u'(b)$ - los mismos que recién podrán ser conocidos cuando se resuelva la ecuación -, conviene exigir que dichos términos sean eliminados. Ello se logra imponiendo a G las condiciones iniciales

$$G_2(b, z) = 0, \quad G_2'(b, z) = 0 \quad (11a)$$

lo cual implica que $G_2(x, z) = 0$ para todo $x \in [z, b]$, es decir, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$. Entonces, por las condiciones de empate (8), tendremos $G_1(z, z) = 0$, $G_1'(z, z) = -1/p(z)$, que serán las condiciones iniciales que debe satisfacer la función G_1 . Es decir,

$$A_1 \phi(z) + A_2 \psi(z) = 0, \quad A_1 \phi'(z) + A_2 \psi'(z) = -1/p(z) \quad (11b)$$

de donde obtenemos

$$A_1(z) = \psi(z) / C, \quad A_2(z) = -\phi(z) / C \quad (11c)$$

donde la constante se obtiene de $C = pW$. Ahora podemos escribir

$$G_1(x) = (1/C) [\psi(z) \phi(x) - \phi(z) \psi(x)]$$

$$R(z) = p(a) \{ \alpha_1 [\psi(z) \phi(a) - \phi(z) \psi(a)] - \alpha_0 [\psi(z) \phi'(a) - \phi(z) \psi'(a)] \}$$

Finalmente, teniendo presente que G_2 es la función nula, la solución tendrá la forma

$$u(z) = R(z) + (1/C) \int_a^z F(x) [\psi(z) \phi(x) - \phi(z) \psi(x)] dx \quad (11d)$$

G10. Consideremos el caso de las condiciones de contorno:

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \quad (12)$$

Ahora,

$$R(z) = p(a) [u'(a) G_1(a) - \alpha G_1'(a)] - p(b) [u'(b) G_2(b) - \beta G_2'(b)],$$

donde por no disponer de información sobre $u'(a)$ ni $u'(b)$, conviene exigir para G las condiciones de contorno

$$G(a, z) = 0, \quad G(b, z) = 0 \quad (12a)$$

con lo cual

$$R(z) = \beta p(b) G'(b, z) - \alpha p(a) G'(a, z) \quad (12b)$$

Reemplazando (6) en (12a) tendremos

$$A_1 \phi(a) + B_1 \psi(a) = 0, \quad A_2 \phi(b) + B_2 \psi(b) = 0 \quad (12c)$$

Designando $j = \phi(a) / \psi(a)$, $k = \phi(b) / \psi(b)$, podemos escribir,

$$B_1 = -j A_1, \quad B_2 = -k A_2$$

Entonces, reemplazando en (6) obtenemos

$$G_1(x) = A_1 [\phi(x) - j \psi(x)], \quad G_2(x) = A_2 [\phi(x) - k \psi(x)]$$

Aplicando ahora, las condiciones de empate (8), obtenemos

$$A_2 - A_1 = \psi(z)/C, \quad kA_2 - jA_1 = \phi(z)/C$$

de donde

$$(j - k) A_1 = [k \psi(z) - \phi(z)]/C, \quad (j - k) A_2 = [j\psi(z) - \phi(z)]/C$$

$$\text{además, como hemos visto, } B_1 = -j A_1, \quad B_2 = -k A_2 \quad (12d)$$

Entonces, conocemos los cuatro constantes A_1, A_2, B_1, B_2 y, consecuentemente, la función $G(x, z)$. Ahora podemos calcular la integral de (10) y la función $R(z)$, (12b). Es decir, ya podemos calcular la función u dada en (7c).

G11. Consideremos el caso de las condiciones mixtas:

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \quad \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0 \quad (13)$$

La función $R(z)$ tiene la forma

$$R(z) = p(a) [u'(a) G_1(a) - u(a) G_1'(a)] - p(b) [u'(b) G_2(b, z) u(b) G_2'(b)]$$

y, teniendo presente que α_1 y β_1 son no nulos, definimos $q_1 = p(a)/\alpha_1$, $q_2 = p(b)/\beta_1$, y podemos escribir

$$R(z) = q_1 [\alpha_1 u'(a) G_1(a) - \alpha_1 u(a) G_1'(a)] - q_2 [\beta_1 u'(b) G_2(b) - \beta_1 u(b) G_2'(b)],$$

con lo cual, teniendo presente (13),

$$R(z) = -q_1 u(a) [\alpha G_1(a) + \alpha_1 G_1'(a)] + q_2 u(b) [\beta G_2(b) + \beta_1 G_2'(b)]$$

Como no conocemos los valores $u(a)$, $u(b)$, entonces conviene anular los correspondientes sumandos; es decir, conviene imponer a G las mismas condiciones mixtas que cumple u ,

$$\alpha G_1(a) + \alpha_1 G_1'(a) = 0, \quad \beta G_2(b) + \beta_1 G_2'(b) = 0 \quad (13a)$$

con lo cual $R(z) = 0$, y (7c) se reduce a

$$u(z) = \int_a^b F(x) G(x, z) dx \quad (13b)$$

Reemplazando (6) en (13) tendremos

$$A_1 [\alpha \phi(a) + \alpha_1 \phi'(a)] + B_1 [\alpha \psi(a) + \alpha_1 \psi'(a)] = 0$$

$$A_2 [\beta \phi(a) + \beta_1 \phi'(a)] + B_2 [\beta \psi(a) + \beta_1 \psi'(a)] = 0$$

que son ecuaciones totalmente análogas a las del caso anterior, (12c). Entonces, redefiniendo las constantes j , k , el resultado se obtendrá de la misma manera que en el caso 11.

Conclusiones

1. La función de Green depende tanto de las funciones ϕ , ψ , como de las “constantes” A_1 , A_2 , B_1 , B_2 . Pero las primeras funciones son soluciones del caso homogéneo, $\mathfrak{L}v = 0$. Es decir, son las funciones A_1 , A_2 , B_1 , B_2 las que moldean a la correspondiente función de Green.
2. Las condiciones iniciales o de contorno que se imponen a la función de Green resultan bien determinadas por el objetivo de construir la solución principal. Esto no es mencionado en ninguna de las referencias bibliográficas consultadas.
3. El uso de la “función” delta de Dirac resulta innecesario, sobre todo porque se la trata como si fuese una función; es decir, no es usada dentro del contexto de las distribuciones, como correspondería.
4. El método de construcción de la correspondiente función de Green podría también ser aplicado al caso de ecuaciones de primer orden, o de cualquier orden. También al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales.

REFERENCIAS

1. **G. Arfken**, *Mathematical Methods for Physicists*, Ac. Press. 1970.
2. **E. Butkov**, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley.
3. **Tijonov-Samarsky**, *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR, 1972.
4. **Courant-Hilbert**, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer 1968.

Errores en las rotaciones usando los ángulos de Euler

*Holger G. Valqui **

RESUMEN

En el presente artículo se aclara la confusión tradicional que aparece en los libros de Física [1], [2], [3], acerca de las rotaciones representadas por los ángulos de Euler. Con tal objetivo se establecen las diferencias entre las operaciones geométricas (que son las que corresponden directamente a los objetos físicos) y las operaciones algebraicas, que corresponden a la representación algebraica producida por el uso de las referencias (o sistemas de referencia). Se describe el proceso de rotación (como se hace en la mayoría de los libros de texto) y se procede consecuentemente: se considera la rotación total como una aplicación sucesiva (producto) de tres rotaciones alrededor de los ejes de rotación (dos de los cuales no son los ejes de la referencia principal), y se demuestra que tal rotación total se puede escribir como el producto de tres rotaciones alrededor de los ejes de la referencia principal. Estos resultados evidencian que la mayoría de los textos de física obtienen resultados parcialmente equivocados.

En una secuela del presente artículo se analizarán algunas de las consecuencias de tal equívoco.

(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima - Perú.

Introducción

Las operaciones algebraicas con ternas ordenadas (o, en general, n -uplas ordenadas) pueden realizarse sin el auxilio de alguna representación geométrica. Las combinaciones lineales, la dependencia lineal, la ortogonalidad, la norma de una terna, el producto escalar, el producto vectorial, transformaciones lineales, matrices, etc, son conceptos propios de dichas ternas (vectores algebraicos).

Por otra parte tenemos las figuras geométricas, entre ellas los **segmentos orientados** y, ligados a ellos, los conceptos de composición poligonal, paralelismo, perpendicularidad, longitud, proyección y producto interno, rotaciones, rotadores (mecanismos geométricos para producir las rotaciones), etc. Estos vectores geométricos y sus operaciones pueden manejarse sin el auxilio de alguna representación algebraica.

Pero, como sabemos, existe una equivalencia entre los **segmentos orientados** (en realidad entre las clases de segdos equiparalelos y de igual longitud) y las ternas ordenadas, es decir, entre los vectores geométricos y los vectores algebraicos. Dicha equivalencia es establecida por una referencia (o sistema de referencia, o de coordenadas). Por ello en los textos de Física, tanto a nivel introductorio como a nivel avanzado, se usan indistintamente ambos conceptos, el algebraico y el geométrico. Esto ha resultado ser muy ventajoso cuando (como es el caso en los textos de Física General) la descripción de los fenómenos físicos se realiza en una única referencia, o en referencias paralelas.

La dificultad surge cuando aparece la necesidad de recurrir simultáneamente a dos o tres referencias no paralelas, como es el caso en la descripción del movimiento de un cuerpo rígido, o en la descripción del operador de momento angular.

El rotador

Sea (Q, u) un eje de rotación, constituido por una recta orientada que pasa por el punto Q , paralela al segdo unitario u , y en el sentido de dicho segdo [Por comodidad hablamos del segdo u , en vez de decir, por ejemplo, el segdo MN ; es decir, $u = MN$]. Sean QA y QB segdos de igual longitud $|QA| = |QB|$, que forman ángulos iguales con el eje (Q, u) , es decir, $\langle u, QA \rangle = \langle u, QB \rangle$, entonces existirá una máquina de rotación, que llamaremos, rotador, y designaremos con $R [u, \phi]$, tal que $QB = R [u, \phi] QA$.

(Notemos que esta operación es independiente de cualquier referencia). Es decir, se cumple que,

$$|R[u, \phi] QA| = |QA|, \quad \langle u, R[u, \phi] QA \rangle = \langle u, QA \rangle \quad (01)$$

Vectores geométricos y vectores algebraicos

Por otra parte, un segdo puede ser expresado como “suma” geométrica de otros segdos (suma poligonal, indicada con el símbolo #); y si dos segdos son paralelos se puede escribir uno de ellos como un múltiplo del otro. Así se construye el espacio vectorial de los segdos (en realidad, espacio vectorial de las clases de segdos equivalentes o paralelo-congruentes).

Un objeto geométrico, fundamental en la descripción matemática de los fenómenos físicos, está constituido por las referencias (cartesianas): Tres segmentos unitarios, concurrentes en un punto y perpendiculares entre sí, por ejemplo OE_1 , OE_2 y OE_3 que designaremos abreviadamente con la letra S.

Teniendo presente que cualquier segdo puede ser considerado como una de las diagonales mayores de un paralelepípedo, cuyos lados son paralelos a los segdos OE_k , podemos expresar cualquier segdo OP como la suma geométrica (poligonal) de tres de los lados del paralelepípedo $OP = OA \# AD \# DP$, como se muestra,

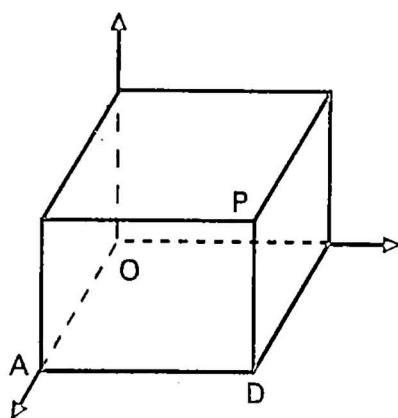


Fig. 1. Segdo OP como suma geométrica de los segdos OA , AD y DP

Pero los segdos-aristas del paralelepípedo pueden ser expresados como múltiplos de los correspondientes segdos OE_k . Entonces podemos escribir,

$$OP = x_1 OE_1 \# x_2 OE_2 \# x_3 OE_3 \quad (02)$$

Si ahora consideramos el espacio vectorial construido por las ternas ordenadas de números reales, designado como R^3 , entonces, dada una cierta referencia S , es conocido que todo segdo puede ser bien representado por una terna numérica, formada por las proyecciones algebraicas de dicho segdo sobre los ejes de la referencia. Por ejemplo, designemos con AB/k la proyección algebraica del segdo AB sobre el k -ésimo eje de la referencia S ; entonces escribiremos,

$$AB/S = (AB/1, AB/2, AB/3) \quad (03)$$

donde $AB/k = \langle AB, OE_k \rangle$. Aplicando ésto a la relación (01) resulta

$$OP/S = (x_1, x_2, x_3) \quad (04)$$

Notemos que los segdos OE_k , en la referencia que ellos definen, son representados por las ternas canónicas, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, es decir, $e_k = OE_k/S$.

Cuando no surja confusión acerca de la referencia considerada escribiremos AB como la terna que (en la referencia que hallamos elegido) representa al segdo AB . Entonces, por ejemplo, $OE_k = e_k$.

Así como los segdos son representados por ternas ordenadas, también los rotadores son representados, en cada referencia que se considere, por la correspondiente matriz. El elemento r_{jk} , de esta matriz $R(u, \phi)$ es, por construcción,

$$r_{jk} = \langle OE_j, R(u, \phi) OE_k \rangle \quad (05)$$

y, teniendo presente los productos matriciales, puede verificarse que también se cumple

$$r_{jk} = e_j^T R(u, \phi) e_k \quad (05a)$$

donde la cruz como superíndice expresa a la matriz transpuesta (o al vector transpuesto). En general para dos ternas $p \cdot q \equiv p^T q$.

Representaciones algebraicas en dos referencias

Sea una referencia S , con ejes OE_k , y sea P un cierto punto del espacio (físicamente P es la posición de un cuerpo puntual), donde OP está expresado como se muestra en (02). Sea u un segdo unitario para un eje que pasa por O , de manera que podemos referirnos al rotador $R(u, \phi)$. Apliquemos este rotador a los 4 segdos OP , OE_k , obteniendo $OP' = R(u, \phi) OP$, $OE_k' = R(u, \phi) OE_k$. Estos tres últimos nuevos segdos

definirán la nueva referencia S' . Ahora tenemos los dos segdos OP y OP' y las cuatro ternas OP/S , OP/S' , OP'/S , OP'/S' .

Sean $x_k = \langle OP, OE_k \rangle = \langle OP', OE_k' \rangle$ (esta igualdad se debe a que los 4 segdos OP' , OE_k' son resultado de una misma rotación; han rotado como un cuerpo rígido), $x_k' = \langle OP, OE_k' \rangle$, $x_k^* = \langle OP', OE_k \rangle$, es decir,

$$OP/S = (x_1, x_2, x_3) = OP'/S', \quad (06)$$

$$OP/S' = (x_1', x_2', x_3'), \quad OP'/S = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \quad (07)$$

lo que geométricamente se interpreta como:

$$OP = x_1 OE_1 \# x_2 OE_2 \# x_3 OE_3 = x_1' OE_1' \# x_2' OE_2' \# x_3' OE_3' \quad (08)$$

$$OP' = x_1 OE_1' \# x_2 OE_2' \# x_3 OE_3' = x_1^* OE_1 \# x_2^* OE_2 \# x_3^* OE_3 \quad (09)$$

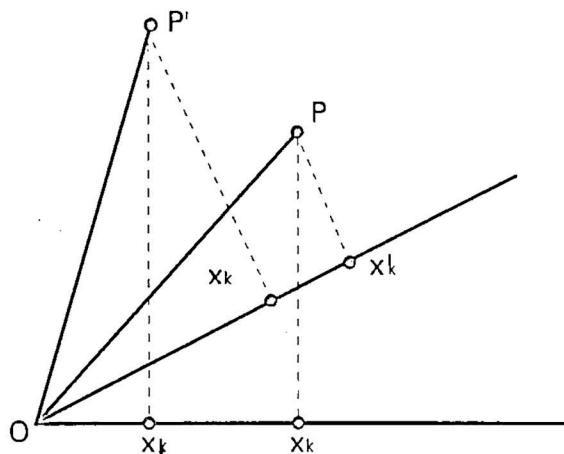


Fig. 2. Proyecciones de los segdos OP , OP' sobre los ejes OE_k , OE_k' .

donde, como vemos, dos segdos diferentes, OP y OP' , pueden ser representados por una misma terna (x_1, x_2, x_3) y, también, dos ternas diferentes, (x_1, x_2, x_3) y (x_1', x_2', x_3') , pueden representar a un mismo segdo. Esta es una de las fuentes de confusión de quienes no distinguen entre vectores geométricos (segdos) y vectores algebraicos (ternas), descuido que es usual en los libros de física.

Por otra parte, con $e_k \equiv OE_k$, $e_k' \equiv OE_k'$, tendremos

$$e_k/S = (\langle OE_k, OE_1 \rangle, \langle OE_k, OE_2 \rangle, \langle OE_k, OE_3 \rangle) \quad (10)$$

que son las ternas canónicas,

$$e_k'/S = (\langle OE_k', OE_1 \rangle, \langle OE_k', OE_2 \rangle, \langle OE_k', OE_3 \rangle) \quad (11)$$

que son los cosenos directores de OE_k' en la referencia S,

$$e_k/S' = (\langle OE_k, OE_1' \rangle, \langle OE_k, OE_2' \rangle, \langle OE_k, OE_3' \rangle) \quad (11a)$$

que son los cosenos directores de OE_k en la referencia S',

$$\langle OE_j, OE_k' \rangle = \langle OE_j, R[u, \phi] OE_k \rangle = r_{jk} = [R(u^\sim, \phi)]_{jk} \quad (12)$$

El uso de ternas, como en (06) y (07), tiene la desventaja que dichas ternas no indican la referencia usada. Por ello se prefiere la escritura (deducida de la expresión (02))

$$OP = \sum x_k e_k = \sum x_k' e_k', \quad (13a)$$

$$OP' = \sum x_k^* e_k = \sum x_k e_k' \quad (13b)$$

Construcción de un rotador

En (12) tenemos los elementos de la matriz correspondiente a la rotación que lleva una referencia S en una referencia S'. A continuación vamos a desarrollar una forma de construir un rotador.

Sea u un vector unitario, $\{u\} = 1$, que caracteriza a un eje de rotación que pasa por el punto O, origen de un sistema de coordenadas cartesianas. Sea una partícula que se encuentra inicialmente en un cierto punto P_0 del espacio; P es la nueva posición de la partícula cuando ella ha realizado un movimiento de rotación, de ϕ grados, alrededor del mencionado eje. Es decir, P_0 y P se encuentran sobre una circunferencia, cuyo centro es un punto C del eje de rotación.

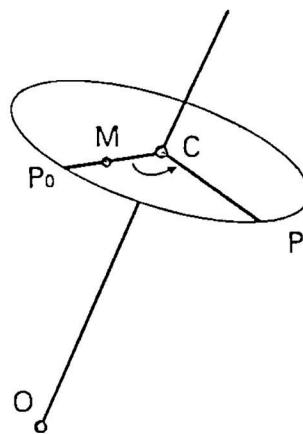


Fig. 3. Por rotación, alrededor de un eje que pasa por el origen, una partícula se mueve del punto P_0 al punto P.

Aquí trabajaremos en la única referencia S, por lo cual, por comodidad, no distinguiremos entre segdos y ternas. En general, haremos la distinción entre esos dos tipos de vectores, sólo cuando se presente el peligro de confusión.

Sea M un punto sobre la recta que pasa por los puntos P_0 y C, de manera que CM sea perpendicular a MP. Entonces se cumplirá que $|P_0M| = r(1 - \cos \phi)$, $|MP| = r \sin \phi$, donde $r = |CP_0| = |CP|$.

Teniendo presente que MP es perpendicular al plano determinado por los tres puntos O, P_0 , C, es decir, perpendicular a los segdos u , OP_0 , puede demostrarse que, $MP = u \times OP_0 \sin \phi$. Por otra parte, considerando que P_0M es perpendicular al plano determinado por O, M, P, es decir, perpendicular a los dos segdos u , MP , puede demostrarse que $P_0M = u \times (u \times OP_0)(1 - \cos \phi)$. Entonces, podemos escribir

$$OP = OP_0 + P_0M + MP = OP_0 + uxOP_0 \sin \phi + u \times (u \times OP_0)(1 - \cos \phi) \quad (14)$$

Sean el vector $\tilde{u} = (u_1, u_2, u_3)$, donde $\tilde{u} = u/S$, y la matriz antisimétrica

$$U = \begin{vmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Entonces puede demostrarse que: i) $Uv\tilde{u} = \tilde{u} \times v\tilde{u}$ para un vector $v\tilde{u}$ arbitrario, ii) $U^2 v\tilde{u} = \tilde{u} \times (v\tilde{u} \times \tilde{u})$, iii) $U^3 = -U$, iv) $U^{2k} = -(-1)^k U^2$ donde k es un entero positivo, iv) $U^{2k+1} = (-1)^k U$, para $k \geq 0$.

Definamos el operador de rotación (que en S está representado por una matriz)

$$R(u, \phi) = I + U \sin \phi + U^2 (1 - \cos \phi) \quad (15)$$

entonces la expresión (14) toma la forma:

$$OP = R(u, \phi) OP_0 \quad (14a)$$

Propiedades de la matriz de rotación

Para verificar que $R(u, \phi)$ es efectivamente una matriz de rotación, deberá demostrarse que los puntos P_0 y P se encuentran sobre un plano

perpendicular al eje de rotación, $OP \cdot u = OP_0 \cdot u$, y sobre una misma superficie esférica, $|OP|^2 = |OP_0|^2$.

Teorema 1

Para dos vectores cualesquiera, a, c , se cumple que

$$\langle R(u, \phi) a, R(u, \phi) c \rangle = \langle a, c \rangle$$

En efecto, tener presente que:

- i) $\langle u \times a, c \rangle + \langle a, u \times c \rangle = 0$,
- ii) $\langle a, u \times (u \times c) \rangle + \langle u \times (u \times a), c \rangle = -2 \langle u \times a, u \times c \rangle$,
- iii) $\langle u \times a, u \times (u \times c) \rangle + \langle u \times (u \times a), u \times c \rangle = 0$,
- iv) $\sin^2 \phi + (1 - \cos \phi)^2 = 2(1 - \cos \phi)$

Teorema 2

También se cumple: $[R(u, \phi) a] \times [R(u, \phi) c] = R(u, \phi) [a \times c]$

Tener presente que:

- i) $a \times (u \times c) + (u \times a) \times c = u \times (a \times c)$
- ii) $a \times [u \times (u \times c)] + [u \times (u \times a)] \times c = u \times [u(a \times c)] - 2 \langle u, a \times c \rangle u$
- iii) $(u \times a) \times (u \times c) = \langle u, a \times c \rangle u$,
- iv) $[u \times (u \times a)] \times [u \times (u \times c)] = \langle u, a \times c \rangle u$
- v) $(u \times a) \times [u \times (u \times c)] + [u \times (u \times a)] \times (u \times c) = 0$

Teorema 3

$R(u, \phi) R(u, \psi) = R(u, \phi + \psi)$. Nótese que se trata de un único eje.

Efectivamente $[I + U \sin \phi + U^2 (1 - \cos \phi)] [I + U \sin \psi + U^2 (1 - \cos \psi)] = I + U (\sin \phi + \sin \psi) + U^2 [2 - \cos \phi - \cos \psi + \sin \phi \sin \psi] + U^3 [(1 - \cos \phi) \sin \psi + \sin \phi (1 - \cos \psi)] + U^4 (1 - \cos \phi) (1 - \cos \psi) = I + U [\sin \phi + \sin \psi - (1 - \cos \phi) \sin \psi - \sin \phi (1 - \cos \psi)] + U^2 [2 - \cos \phi - \cos \psi + \sin \phi \sin \psi] - (1 - \cos \phi) (1 - \cos \psi) = I + U \sin(\phi + \psi) + U^2 [1 - \cos(\phi + \psi)]$.

Corolario 1. $R(u, \phi)^{-1} = R(u, -\phi)$, $R(u, 0) = I$.

Corolario 2. $\langle a, R(u, \phi) c \rangle = \langle R(u, -\phi) a, c \rangle$

Corolario 3. $a \times [R(u, \phi) c] = R(u, \phi) \{ [R(u, -\phi) a] \times c \}$

Corolario 4. $R(u, \phi)u = u$

Corolario 5. $|OP|^2 = \langle R(u, \phi)OP_0, R(u, \phi)OP_0 \rangle = \langle OP_0, OP_0 \rangle = |OP_0|^2$

Corolario 6. $OP \cdot u = \langle R(u, \phi)OP_0, u \rangle = \langle R(u, \phi)OP_0, R(u, \phi)u \rangle = \langle OP_0, u \rangle = OP_0 \cdot u.$

Teorema 4

Sea $w = R(v, \theta)u$, entonces $R(w, \phi) = R(v, \theta)R(u, \phi)R(v, -\theta)$. En efecto, teniendo presente que, para un vector arbitrario c , se cumple:

- i) $c = R(v, \theta)\{R(v, -\theta)c\}$,
- ii) $w \times c = [R(v, \theta)u] \times c = R(v, \theta)\{u \times R(v, -\theta)c\}$,
- iii) $w \times (w \times c) = [R(v, \theta)u] \times \{R(v, \theta)[u \times R(v, -\theta)c]\} = R(v, \theta)\{u \times [u \times R(v, -\theta)c]\}$.

Es decir,

$R(w, \phi)c = c + w \times c \sin\phi + w \times (w \times u)(1 - \cos\phi) = R(v, \theta)\{u \times R(v, \theta)c \sin\phi + u \times [u \times R(v, \theta)c(1 - \cos\phi)]\} = R(v, \theta)\{R(u, \phi)[R(v, -\theta)c]\} = [R(v, \theta)R(u, \phi)R(v, -\theta)]c$, donde c es un vector arbitrario.

La matriz de Euler

Por otra parte, consideremos un cubo (de plástico transparente) en el que las tres aristas unitarias QA , QB y QC conforman una referencia dextrógira (regla del tirabuzón), que constituyen vectores unitarios de base, de manera que, para un punto P° , fijo al cubo, podemos escribir

$$QP^\circ = x_1QA + x_2QB + x_3QC, \quad (16)$$

lo cual, por supuesto, es independiente de la posición que tenga el cubo en el espacio.

Inicialmente consideremos el cubo colocado coincidentemente con una referencia cartesiana S_0 , con origen O y vectores de base e_1, e_2, e_3 . Sea P_0 el punto de S_0 coincidente con P° . Ahora rotamos el cubo (y con ello, rotarán sus aristas y el punto P° , fijo al cubo) alrededor del eje de rotación (O, u) en un ángulo ϕ . Entonces podemos escribir (nótese que Q coincide con el origen O)

$$QA = R(u, \phi)e_1, \quad QB = R(u, \phi)e_2, \quad QC = R(u, \phi)e_3, \quad QP^\circ = R(u, \phi)OP_0$$

A continuación aplicaremos al cubo tres rotaciones, de manera que QP^o , inicialmente en la posición OP_0 pasará sucesivamente a las posiciones OP_1, OP_2, OP_3 :

- i) Posición inicial: OP_0, e_k ,
- ii) Luego de la primera rotación: $OP_1 = R(e_3, \phi) OP_0, e_k^1 = R(e_3, \phi) e_k$.
- iii) Luego de la segunda rotación:
 $OP_2 = R(e_1^1, \theta) OP_1, e_k^2 = R(e_1^1, \theta) e_k^1$,
- iv) Posición final, luego de tres rotaciones:
 $OP_3 = R(e_3^2, \psi) OP_2, e_k^3 = R(e_3^2, \psi) e_k^2$. Entonces,

$$OP_3 = R(e_3^2, \psi) R(e_1^1, \theta) R(e_3, \phi) OP_0 \quad (17)$$

$$e_k^3 = R(e_3^2, \psi) R(e_1^1, \theta) R(e_3, \phi) e_k \quad (17a)$$

Desarrollemos la matriz $\mathbb{E} = E(\psi, \theta, \phi) = R(e_3^2, \psi) R(e_1^1, \theta) R(e_3, \phi)$. Por el Teorema 4, teniendo presente que $e_3^2 = R(e_1^1, \theta) e_3^1$, podemos escribir, $E(\psi, \theta, \phi) = R(e_1^1, \theta) R(e_3^1, \psi) R(e_1^1, -\theta) R(e_1^1, \theta) R(e_3, \phi) = R(e_1^1, \theta) R(e_3^1, \psi) R(e_3, \phi)$. Pero $e_3^1 = R(e_3, \phi) e_3 = e_3$; $e_1^1 = R(e_3, \phi) e_1$ implica que $R(e_1^1, \theta) = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, -\phi)$, de donde $R(e_1^1, \theta) R(e_3^1, \psi) R(e_3, \phi) = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, -\phi) R(e_3, \psi) R(e_3, \phi)$.

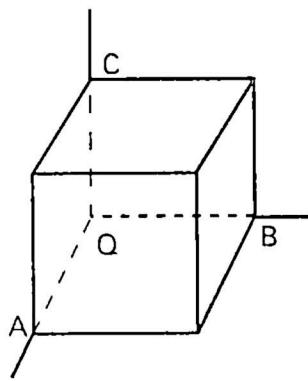
Por el Teorema 3, los dos últimos factores conmutan. Es decir,

$$E(\psi, \theta, \phi) = R(e_3^2, \psi) R(e_1^1, \theta) R(e_3, \phi) = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, \psi) \quad (18)$$

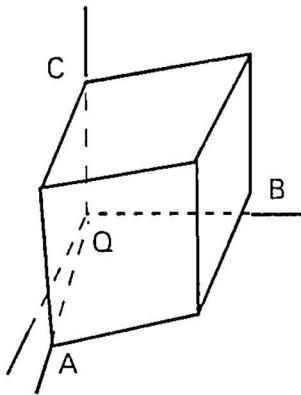
que llamaremos matriz de Euler, la misma que permite reescribir las igualdades (4),

$$OP_3 = E(\psi, \theta, \phi) OP_0, \quad e_k^3 = e(\psi, \theta, \phi) e_k \quad (19)$$

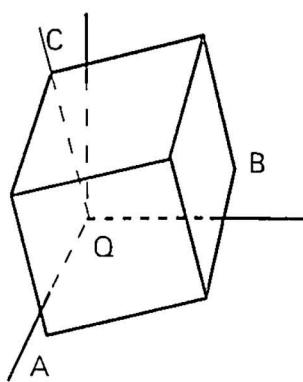
A continuación se muestran las posiciones del cubo QABC, producidas por las rotaciones mencionadas. En todo instante el vértice Q permanece fijo en el origen de coordenadas O.



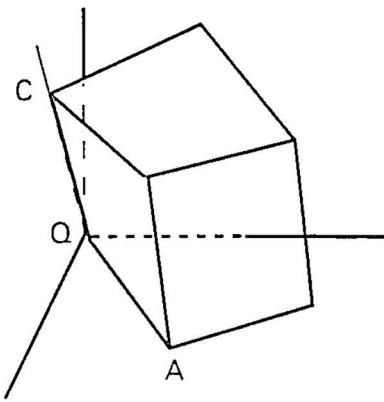
Posición inicial, coincidente con sistema de coordenadas S_0 , $QA = e_1$, $QB = e_2$, $QC = e_3$



Posición luego de la rotación producida por $R(e_3, \phi)$, $QA = e_{11}$, $QB = e_{21}$, $QC = e_3$
El cubo coincide con S_1 .



Posición luego de dos rotaciones producidas por $R(e_1, \theta)$ $R(e_3, \phi)$, $QA = e_{11}$, $QB = e_{22}$, $QC = e_{32}$. El cubo coincide con S_2 .



Posición final, luego de la rotación generada por $E(\psi, \sigma, \phi)$, $QA = e_{13}$, $QB = e_{23}$, $QC = e_{33}$. El cubo coincide con S_3 .

Fig. 4. Posiciones: inicial, intermedias y final del cubo QABC

Ahora, la posición final del punto P° , fijo al cubo, puede ser escrita como

$$OP^\circ = x_1 e_1^3 + x_2 e_2^3 + x_3 e_3^3 \quad (20)$$

Fórmulas para los nuevos vectores de base

Calculemos la forma que tienen los vectores e_k^3 en S_0 . Para ello calculemos previamente $R(e_3, \phi) e_k$ y $R(e_1, \theta) e_k$.

$$R(e_3, \phi) e_1 = e_1 \cos \phi + e_2 \sin \phi, \quad R(e_3, \phi) e_2 = -e_1 \sin \phi + e_2 \cos \phi,$$

$$R(e_1, \theta) e_2 = e_2 \cos \theta + e_3 \sin \theta, \quad R(e_1, \theta) e_3 = -e_2 \sin \theta + e_3 \cos \theta,$$

además, $R(e_3, \phi) e_3 = e_3$, $R(e_1, \theta) e_1 = e_1$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 e_1^3 &= E[\psi, \theta, \phi] e_1 = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) [e_1 \cos\psi + e_2 \sin\psi] \\
 &= R(e_3, \phi) \{e_1 \cos\psi + [R(e_1, \theta) e_2] \sin\psi\} = \\
 &= (e_1 \cos\phi + e_2 \sin\phi) \cos\psi + R(e_3, \phi) [e_2 \cos\theta + e_3 \sin\theta] \sin\psi \\
 &= (\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi \cos\theta) e_1 + (\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\psi \cos\theta) e_2 + \\
 &\quad (\sin\psi \sin\theta) e_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_2^3 &= E[\psi, \theta, \phi] e_2 = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) [-e_1 \sin\psi + e_2 \cos\psi] \\
 &= R(e_3, \phi) \{-e_1 \sin\psi + [R(e_1, \theta) e_2] \cos\psi\} \\
 &= -(e_1 \cos\phi + e_2 \sin\phi) \sin\psi + R(e_3, \phi) [e_2 \cos\theta + e_3 \sin\theta] \cos\psi \\
 &= -(\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \cos\psi \cos\theta) e_1 + (-\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi \cos\theta) e_2 \\
 &\quad + (\cos\psi \sin\theta) e_3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_3^3 &= E[\psi, \theta, \phi] e_3 = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) e_3 = R(e_3, \phi) [-e_2 \sin\theta + e_3 \cos\theta] \\
 &= -(-e_1 \sin\phi + e_2 \cos\phi) \sin\theta + e_3 \cos\theta.
 \end{aligned}$$

Tabla de las componentes de los segdos e_k^3 en la base de S_0

	e_1	e_2	e_3
e_1^3	$\cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi \cos\theta$	$\sin\phi \cos\psi + \cos\phi \sin\psi \cos\theta$	$\sin\psi \sin\theta$
e_2^3	$-\cos\phi \sin\psi - \sin\phi \cos\psi \cos\theta$	$-\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi \cos\theta$	$\cos\psi \sin\theta$
e_3^3	$\sin\phi \sin\theta$	$-\cos\phi \sin\theta$	$\cos\theta$

Recordemos que:

$$QP^{\circ}_{\text{pos inic}} = OP_0 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$QP^{\circ}_{\text{pos final}} = x_1 e_1^3 + x_2 e_2^3 + x_3 e_3^3 = x_1 \mathbb{E} e_1 + x_2 \mathbb{E} e_2 + x_3 \mathbb{E} e_3,$$

es decir,

$$QP^{\circ}_{\text{pos final}} = E(\psi, \theta, \phi) QP^{\circ}_{\text{pos inic}} \quad (21)$$

o también,

$$OP_3 = E(\psi, \theta, \phi) OP_0 \quad (21a)$$

Las matrices de velocidad angular y el vector de velocidad angular

Ahora, suponiendo que los ángulos de Euler son funciones del tiempo, determinaremos la velocidad de rotación del cubo. Previamente demostraremos algunos teoremas.

Teorema 5

$$R(u, \phi) \dot{\ } \equiv d/dt R(u, \phi) = \phi^* U R(u, \phi) = \phi^* R(u, \phi) U$$

En efecto $R(u, \phi) \dot{\ } = \phi^* U \cos\phi + \phi^* U^2 \sin\phi = \phi^* [-U^3 \cos\phi + U^2 \sin\phi + U + U^3] = \phi^* U [-U^2 \cos\phi + U \sin\phi + I + U^2] = \phi^* U R(u, \phi)$. Además hemos tenido presente que U commuta con sus potencias.

Teorema 6

Sean E_k, E_1', E_3'' matrices definidas de manera que

$$E_k v \sim = e_k \times v \sim, \quad E_1' = R(e_3, \phi) E_1 R(e_3, -\phi),$$

$E_3'' = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) E_3 R(e_1, -\theta) R(e_3, -\phi)$, entonces

$E_1' v \sim = e_1' \times v \sim, \quad E_3'' v \sim = e_3'' \times v \sim$, donde para estos vectores se cumple:

$$e_1' = R(e_3, \phi) e_1, \quad e_3'' = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) e_3$$

En efecto, $E_1' v \sim = R(e_3, \phi) E_1 [R(e_3, -\phi) v \sim] = R(e_3, \phi) [e_1 \times R(e_3, -\phi) v \sim] = [R(e_3, \phi) e_1] \times v \sim = e_1' \times v \sim$.

Por otra parte tenemos que

$$E_3'' v \sim = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) E_3 [R(e_1, -\theta) R(e_3, -\phi) v \sim] = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) \{e_3 \times [R(e_1, -\theta) R(e_3, -\phi) v \sim]\} = R(e_3, \phi) \{[R(e_1, \theta) e_3] \times [R(e_3, -\phi) v \sim]\} = [R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) e_3] \times v \sim = e_3'' \times v \sim.$$

Nótese que,

$$e_1' = \cos\phi e_1 + \sin\phi e_2, \quad e_3'' = (\sin\phi e_1 - \cos\phi e_2) \sin\theta + \cos\theta e_3$$

o, si se prefiere,

$$E_1' = E_1 \cos\phi + E_2 \sin\phi, \quad E_3'' = E_1 \sin\phi \sin\theta - E_2 \cos\phi \sin\theta + E_3 \cos\theta$$

Teorema 7

$$E(\psi, \theta, \phi)^* = \Omega(\psi, \theta, \phi) E(\psi, \theta, \phi), \text{ donde}$$

$$\Omega(\psi, \theta, \phi) = \phi^* E_3 + \theta^* E_1' + \psi^* E_3''$$

Efectivamente, aplicando el Teorema 5 obtenemos $\Psi^* = E(\psi, \theta, \phi)^* = \phi^* E_3 \Psi + \theta^* R(e_3, \phi) E_1 R(e_1, \theta) R(e_3, \psi) + \psi^* R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) E_3 R(e_3, \psi) = \phi^* E_3 \Psi + \theta^* R(e_3, \phi) E_1 R(e_3, -\phi) R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, \psi) + \psi^* R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) E_3 R(e_1, -\theta) R(e_3, -\phi) R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, \psi) = \phi^* E_3 \Psi + \theta^* E_1' R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, \psi) + \psi^* E_3'' R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, \psi) = \phi^* E_3 \Psi + \theta^* E_1' \Psi + \psi^* E_3'' \Psi = \Omega(\psi, \theta, \phi) \Psi$.

Nótese que podemos escribir,

$$\Omega(\psi, \theta, \phi) = (\theta^* \cos\phi + \psi^* \sin\phi \sin\theta) E_1 + (\theta^* \sin\phi - \psi^* \cos\phi \sin\theta) E_2 + (\phi^* + \psi^* \cos\theta) E_3. \quad (22)$$

Teorema 8

$$E(\psi, \theta, \phi)^* = E(\psi, \theta, \phi) \Gamma(\psi, \theta, \phi), \text{ donde}$$

$$\Gamma(\psi, \theta, \phi) = \phi^* E_3^{***} + \theta^* E_1^* + \psi^* E_3$$

$$E_1^* = R(e_3, -\psi) E_1 R(e_3, \psi), \quad E_3^{***} = R(e_3, -\psi) R(e_1, -\theta) E_3 R(e_1, \theta) R(e_3, \psi)$$

o también,

$$E_1^* = E_1 \cos\psi - E_2 \sin\psi, \quad E_3^{***} = E_1 \sin\psi \sin\theta + E_2 \cos\psi \sin\theta + E_3 \cos\theta$$

$$\Gamma(\psi, \theta, \phi) = (\phi^* \sin\psi \sin\theta + \theta^* \cos\psi) E_1 + (\phi^* \cos\psi \sin\theta - \theta^* \sin\psi) E_2 + (\phi^* \cos\theta + \psi^*) E_3.$$

Además $\Gamma(\psi, \theta, \phi) = E(\psi, \theta, \phi)^{-1} \Omega(\psi, \theta, \phi) E(\psi, \theta, \phi)$
[Queda como ejercicio]

Consideremos un punto fijo del cubo $QP^o = x_1 QA + x_2 QB + x_3 QC$ o, en su posición final, como se muestra en (20) y (21a)

$$OP_3 = x_1 e_1^3 + x_2 e_2^3 + x_3 e_3^3$$

donde, por tratarse de un punto fijo del cubo, las coordenadas x_k no se alterarán cuando el cubo cambie de posición con el tiempo.

$$\text{Es decir, } (OP_3)^* = x_1 (e_1^3)^* + x_2 (e_2^3)^* + x_3 (e_3^3)^*.$$

Ahora, teniendo presente que los e_k son vectores fijos, tendremos $(e_k^3)^* = (E(\psi, \theta, \phi)^* e_k = E(\psi, \theta, \phi)^* e_k = \Omega(\psi, \theta, \phi) E(\psi, \theta, \phi) e_k$, de donde $(e_k^3)^* = \Omega(\psi, \theta, \phi) e_k^3$, con lo cual, reemplazando,

$$(OP^*)^* = \Omega(\psi, \theta, \phi) (x_1 e_1^3 + x_2 e_2^3 + x_3 e_3^3) = \Omega(\psi, \theta, \phi) OP^* \quad (23)$$

Por otra parte, teniendo presente que las matrices E_k satisfacen $E_k v = e_k \times v$ para cualquier vector v , podremos escribir

$$(QP_3)^* = w(\psi, \theta, \phi) \times QP_3 \quad (24)$$

donde, según (22) tenemos

$$w(\psi, \theta, \phi) = (\theta^* \cos\phi + \psi^* \sin\phi \sin\theta) e_1 + (\theta^* \sin\phi - \psi^* \cos\phi \sin\theta) e_2 + (\phi^* + \psi^* \cos\theta) e_3 \quad (22a)$$

que es la velocidad angular de rotación de los segdos fijos al cubo (por ejemplo, sus aristas) con respecto a la referencia S_0 (además, expresada en dicha referencia, ya que es combinación lineal de sus vectores de base).

Conclusiones

1. Las rotaciones no se realizan alrededor de los ejes (O, e_k) , sino, sucesivamente, alrededor de los ejes e_3, e_1', e_3'' , obteniéndose la matriz de rotación $R(e_3^2, \psi) R(e_1^1, \theta) R(e_3, \phi)$, como se muestra en (17).
2. Por aplicación del Teorema 4 (y del Teorema 3) tal producto de matrices es igual al producto de las matrices de rotación alrededor de los ejes (O, e_k) , produciéndose un intercambio de los ángulos correspondientes al tercer eje, como se muestra en (18)

$$E(\psi, \theta, \phi) = R(e_3^2, \psi) R(e_1^1, \theta) R(e_3, \phi) = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, \psi) \quad (18)$$

3. Como se muestra en los teoremas 7 y 8, existen dos matrices de rotación de velocidad angular Ω y Γ que cumplen

$$E(\psi, \theta, \phi)^* = \Omega(\psi, \theta, \phi) E(\psi, \theta, \phi) = E(\psi, \theta, \phi) \Gamma(\psi, \theta, \phi)$$

donde, si w y w' son los correspondientes vectores de velocidad angular, $\Omega a = w \times a$, $\Gamma a = w' \times a$, entonces se cumple que $w = E w'$, es decir se trata de la velocidad angular expresada en las referencias inicial y final, respectivamente.

Comentarios

En los textos mencionados como referencias bibliográficas se procede en forma extraña, como se detalla a continuación.

1. En [1] se describe correctamente el proceso de construcción de las rotaciones alrededor de los ejes (O, e_3) en un ángulo ϕ , luego alrededor del eje (O, e_1') en un ángulo θ , luego alrededor del eje (O, e_3'') en un ángulo ψ . Pero, sin mayor justificación (el autor dice simplemente que así debe ser), en las dos últimas rotaciones no se usan las matrices $R(e_1', \theta)$, $R(e_3'', \psi)$ sino las matrices $R(e_1, \theta)$, $R(e_3, \psi)$, respectivamente. Además se invierte, siempre sin justificación, el orden de las matrices, y con estos dos "trucos" se obtiene la matriz de rotación correcta $E(\psi, \theta, \phi) = R(e_3, \phi) R(e_1, \theta) R(e_3, \psi)$, como se muestra en (18). Ver en [1] la fórmula (37) de la página 158.

2. En [2] se describe correctamente el proceso de construcción de las tres matrices de rotación, págs. 107-109, alrededor de los ejes (O, e_3) , (O, e_1') , (O, e_3'') y se construye el producto de las matrices en el orden correcto, pero suponiendo que ellas se realizan alrededor de los ejes (O, e_3) , (O, e_1) , (O, e_3) , respectivamente. La fórmula (4-46) así obtenida es incorrecta; la matriz transpuesta, fórmula (4-47) si coincide con nuestra $E(\psi, \theta, \phi)$.

3. En [3], páginas 178-181, se procede como en [2], pero considerando la segunda rotación alrededor del eje (O, e_2) en vez del eje (O, e_1) .

4. En [2] se presentan ciertos comentarios en una nota, en la página 108 (página 145 en la segunda edición). Ello sugiere que el autor se percató que la fórmula obtenida no era satisfactoria; pero no pudo encontrar el origen de, entre otras cosas, el intercambio de los ángulos ϕ y ψ , como se puede apreciar aquí al deducir la fórmula (18).

5. En [4], en forma muy escueta se presentan correctamente las transformaciones con operadores, y se obtiene el orden correcto de los operadores referidos a los ejes de la referencia principal.

6. Consideremos los dos problemas diferentes (pero muy ligados entre sí): i) Dado un segdo OP_0 se quiere hallar un nuevo segdo OP , obtenido por rotación del primero, $OP = E(\phi, \theta, \psi) OP_0$, donde $OP = \sum x_k e_k$, $OP_0 = \sum x_{0k} e_k$, obteniéndose $\tilde{x} = E(\phi, \theta, \psi) \tilde{x}_{0k}$, ii) Dadas las referencias S y S' , donde S' se ha obtenido por rotación de S , $e_k' = E(\phi, \theta, \psi) e_k$, se desea

hallar las nuevas ternas coordenadas del segdo, $OP = \sum x_k e_k = \sum x'_k e'_k$. Aquí también se obtiene $x' = E(\phi, \theta, \psi) x$, pero las nuevas coordenadas son $x' = E(-\psi, -\theta, -\phi) x$.

En ninguno de los textos aquí referidos queda claro de cuál de los casos, mencionados en el comentario anterior, está siendo considerado. Ello parece ser la razón de un párrafo adicional incluido en la nota señalada en el comentario 4: "many authors of quantum-mechanical discussions appear to use clockwise rotations, rather than the counterclockwise convention observed here".

REFERENCIAS

- [1] Saletan-Cromer, *Theoretical Mechanics*, J. Wiley, 1971.
- [2] Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison W., 1950. Segunda edición, Addison W., 1980.
- [3] G. Arfken, *Mathematical methods for Physicists*, A. Press, 1970.
- [4] A. Sokolov y otros, *Electrodinámica cuántica*, Mir, 1989.

dición, diagramación e impresión realizados por
Editorial **HOZLO S.R.L.**

*Psje. Santa Rosa 191 - 501, Lima - Perú.
Telefax: 428-4071*

Marzo de 1997