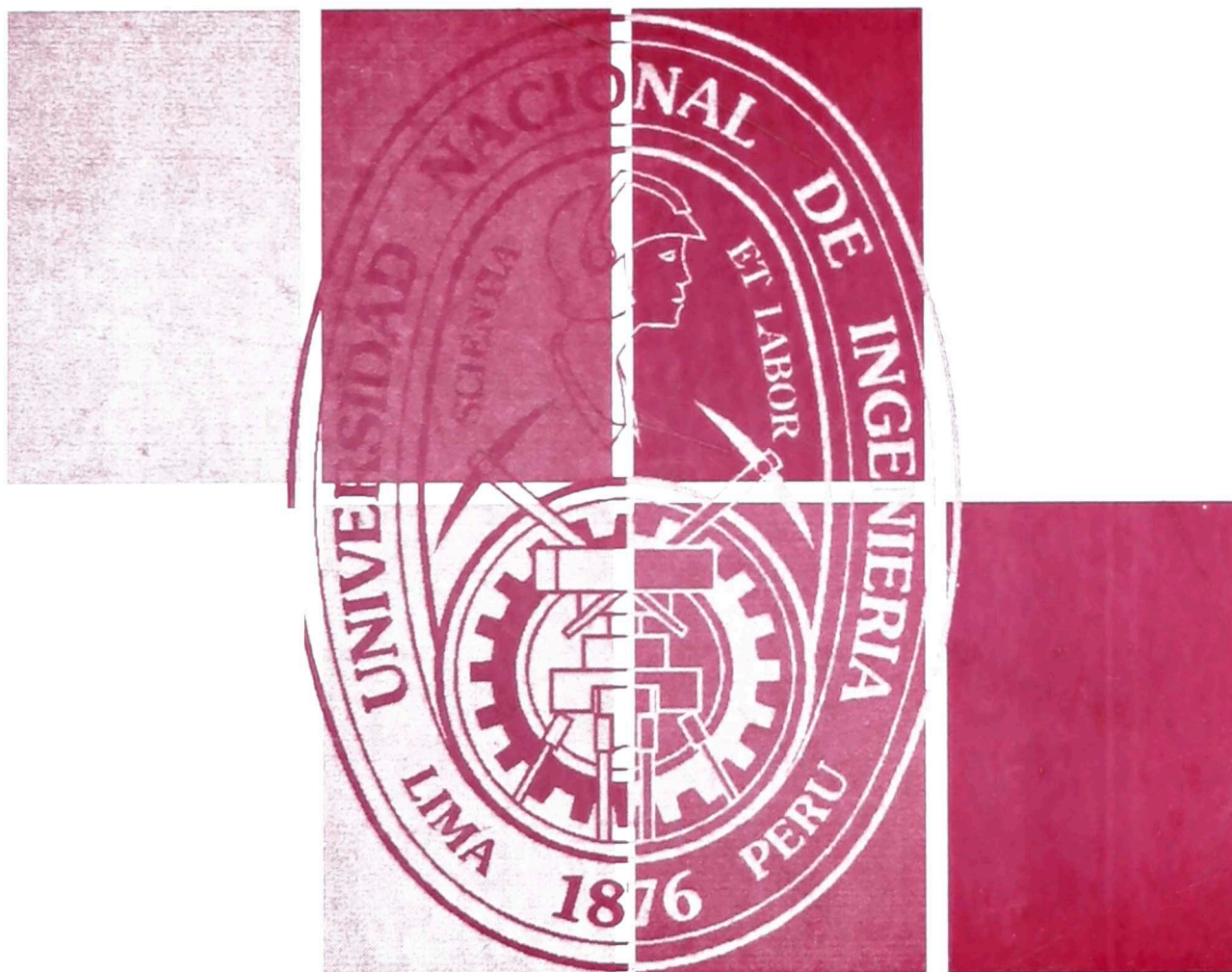




Revista de la Facultad de
CIENCIAS de la UNI
REVCUNI

ÍNDICE

Presentación

- An optimality Karush - Kuhn Tucker condition
for the bilevel programming problem.
José Arica - Susana Sheimberg 1
- Una introducción al cálculo de variaciones: el método
directo y uno indirecto.
Fabián Flores Bazán 12
- Principio de maximización de la información de Akaike.
Rosa María Inga Santivañez 31
- Proximal interior point methods.
Alfredo Noel Iusem 41
- Integer nonlinear programming: A trust region method.
David Mauricio - Nelson Maculan 53
- Ondículas: Algoritmos de descomposición y síntesis.
Alejandro Ortiz Fernández 58
- Programación lineal entera pura algoritmo fraccional
y totalmente entero de Gomory.
Rolando Raúl Palomino Vildoso..... 67
- Control óptimo Fuzzy
Marko A. Rojas-Medar 74
- Algoritmos para la inserción de nodos de B-splines por
el concepto de formas polares.
Rolf Schröder 93
- Conversión entre triángulos y rectángulos de Bézier.
Johnny Moisés Valverde Montero..... 105

Comisión Científica Editorial

Julio Alcántara

Rolf Schröder

Fabián Flores

Félix Escalante

Presentación

Por segunda vez estamos realizando el *Seminario Internacional de Matemática Aplicada y Optimización*, en homenaje a *Eugen Blum*.

Nuestro objetivo es perennizar este homenaje académico; así como aprovechar de este evento internacional para desarrollar estas áreas de la matemática, que desarrollan modelos de la ingeniería, la economía y de otras ciencias.

Cada vez estamos recibiendo mayor número de participantes; tanto conferencistas, como asistentes interesados en estos temas.

Hemos tenido en ambos eventos, conferencistas destacados de varios países; entre ellos podemos resaltar a: *W. Oetli, A. Joffre, A. Iusem, R. Cominetti, F. Flores*, etc.

Creemos que si continuamos de este modo, este evento será a no dudarlo importante en la región.

Los organizadores.

FÉLIX ESCALANTE
ROLF SCHRÖDER
PEDRO CANALES

Seminario Internacional de
Matemática Aplicada y Optimización,
en homenaje a Eugen Blum

An optimality Karush-Kuhn Tucker condition for the bilevel programming problem

José Arica ⁽¹⁾ and Susana Sheimberg ⁽²⁾

ABSTRACT

The bilevel programming problem (BLPP) is a model of a leader follower game in which play is sequential. It can be formulated as a sequence of two optimization problems where the constraint region of the first is determined implicitly by the solution to the second. Several algorithms have been formulated for particular cases and, only lately, optimality conditions for the general BLPP have begun to be studied. Here, it is proposed a necessary optimality condition of Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T) type under a local version calmness for the BLPP.

Introduction

The Bilevel Programming Problem can be formulated as

$$\begin{aligned} (\text{BLPP}) : \min_{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^{n_2}} & \quad F(x, y) \\ \text{s.t.} & \quad G(x, y) \leq 0, \\ & \quad y \in \arg \min_{y \in \mathbb{R}^{n_2}} \{ f(x, y) / g(x, y) \leq 0 \} \end{aligned} \tag{1.1}$$

-
- (1) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias. Apartado 31-139, Lima 31, Perú; and Universidade Estadual do Norte Fluminense / CCT. Av. Alberto Lamejo, 2000, Campos, RJ. 28015-620, Brazil. e-mail: arica@uenf.br.
(2) Universidade Federal do Rio de Janeiro / COPPE-Sistemas Cx. P. 68511, Rio de Janeiro, JR. 21945-970. Brazil. e-mail: susana@cos.ufrj.br.
-

where $X \subset D \subset \mathbb{R}^{n_1}$, D is open and X is closed; $F, f: D \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$; $G: D \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$; $g: D \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$; $F, G \in C^{(1)}(D \times \mathbb{R}^{n_2})$; and, $f, g \in C^{(2)}(D \times \mathbb{R}^{n_2})$.

Function F is called objective function of the first level problem (or **leader problem**); f and g are the objective and the constraint functions of the second level problem (or **follower problem**), respectively.

It will be used, for $x \in D$, the following notation

$$Y(x) := \{y \in \mathbb{R}^{n_2} / g(x, y) \leq 0\} \quad , \quad O(x) := \arg \min_{y \in Y(x)} f(x, y)$$

The follower problem, for fixed $x \in D$, can be written as the parametric one

$$(P_x): \quad \min \{ f(x, y) / y \in Y(x) \}$$

The **marginal function of the follower problem**, (P_x) , is defined by

$$v(x) := \inf_{y \in Y(x)} f(x, y), \text{ where } v(x) := +\infty, \text{ if } Y(x) = \emptyset$$

The marginal function is, in general, neither differentiable nor convex and, in fact, it could not take finite values. To guarantee an adequate behavior of v , it is imposed the following simple inf-boundedness condition on (P_x) :

ASSUMPTION 1.1

For each $\bar{x} \in D$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ there exists an $\epsilon > 0$ such that

$$\{ (x, y) \in D \times \mathbb{R}^{n_2} / \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon, f(x, y) \leq \alpha, g_i(x, y) \leq \epsilon, \forall i \}$$

is bounded (where $\| \cdot \|$ denotes the Euclidian norm).

This assumption ensures (Rockafellar [7]) that v is lower semicontinuous (l.s.c.) on D (but can take the value $+\infty$), that v is lower bounded on D and that $O(x)$ is not empty and compact, for $x \in D$ such that $v(x) < +\infty$.

In the following it will be assumed that (BLPP) has a solution. Thus, (BLPP) is equivalent to the problem

$$(P1): \quad \min_{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^{n_2}} \{ F(x, y) / G(x, y) \leq 0, f(x, y) - v(x) = 0, g(x, y) \leq 0 \}$$

Hence, in general, (BLPP) is a nonconvex and nondifferentiable program.

It will be useful to recall some concepts of nonsmooth analysis. It is said that the function $h: Z \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is Lipschitz near $x_0 \in Z$, of module k , if there exists $\epsilon > 0$ such that h is Lipschitz, of module k , on $x_0 + \epsilon B$, where B denotes the open unit ball in $\mathbb{R}^n$. When h is Lipschitz near each point $x \in Z$, it is said that it is locally Lipschitz on Z .

Let h be Lipschitz near x_0 (of module k) and $p \in \mathbb{R}^n$. The Clarke (generalized) directional derivative of h at x_0 in the direction p is defined by

$$h^0(x_0; p) := \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{h(x + tp) - h(x)}{t}$$

It is easy to see that $|h^0(x_0; p)| \leq k \|p\|$, for all $p \in \mathbb{R}^n$.

REMARK 1.2

Assumptions made for (BLPP), in (1.1), include continuous differentiability of F , G , f and g , so these functions are locally Lipschitz on $D \times \mathbb{R}^{n_2}$ (Corollary of Proposition 2.2.1, Clarke [4]).

The generalized gradient of h at x_0 is defined by

$$\partial h(x_0) := \{ \xi \in \mathbb{R}^n / h^0(x_0; p) \geq \langle \xi, p \rangle, \forall p \in \mathbb{R}^n \},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$, denotes the usual inner product in $\mathbb{R}^n$. It is proved that $\partial h(x_0)$ can be expressed as

$$\text{Conv} \{ \xi \in \mathbb{R}^n / x_i \rightarrow x_0, x_i \notin \Omega, \xi = \lim_{x_i \rightarrow x_0} \nabla h(x_i) \},$$

where Ω is the set where h is not differentiable (which has Lebesgue measure 0) and Conv denotes convex hull.

It is known that being h Lipschitz near x_0 of module k , then $\partial h(x_0)$ is a nonempty, convex and compact set, with $\|\xi\| \leq k$ for all $\xi \in \partial h(x_0)$. It also holds that $h^0(x_0; p)$ is the support function of $\partial h(x_0)$, i.e.,

$$h^0(x_0; p) = \max_{\xi \in \partial h(x_0)} \langle \xi, p \rangle$$

If h is a convex function, $h^0(x_0; p)$ coincides with the classic directional derivative

$$h'(x_0; p) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{h(x_0 + tp) - h(x_0)}{t}$$

The following two examples show some differences between $h^0(x_0; p)$ and $h'(x_0; p)$.

Example 1.3 (Existence of h^0 and not existence of h') Let

$$h(x) = \begin{cases} |x| \sin(\ln |x|), & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

The function h is Lipschitz near $x = 0$, with $k = \sqrt{2}$, $\partial h(0) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ and $h^0(0; -1) = \sqrt{2}$. But it does not exist the limit

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(0-t) - f(0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \sin(\ln t),$$

i.e., there does not exist $h'(0; -1)$.

Example 1.4 (Existence of both $h^0(x_0; p)$ and $h'(x_0; p)$, but $h'(x_0; p) < h^0(x_0; p)$). Let $h(x) = 1 - |x|$, for $x \in \mathbb{R}$. Then $h'(0; 1) = -1$ and $h^0(0; 1) = 1$.

The function h is said to be **Clarke regular** at x_0 if $h'(x_0; p)$ exists and equals $h^0(x_0; p)$ for all $p \in \mathbb{R}^n$.

Given a set $C \subset \mathbb{R}^n$, the distance function from x to C is defined by

$$d_C(x) := \inf_{c \in C} \{ \|x - c\|, x \in \mathbb{R}^n \}.$$

The function $d_C(x)$ is Lipschitz of module 1 on $\mathbb{R}^n$ and it holds that $\partial d_C(x) = \{\nabla d_C(x)\} = \{0\}$ for $x \in \text{int}(C)$ (where $\text{int}(C)$ denotes the interior of C). When C is a convex set, $d_C(x)$ is a convex function.

Let x be a point in C , the **Clarke tangent cone** to C at x , denoted $T_C(x)$, is defined by

$$T_C(x) := \{p \in \mathbb{R}^n / d_C^0(x; p) = 0\}.$$

It is clear that zero belongs to $T_C(x)$. It is proved that $T_C(x)$ is a closed convex cone. When $x \in \text{int}(C)$, it holds $T_C(x) = \mathbb{R}^n$.

Since

$$\partial d_C(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n / d_C^0(x; p) \geq \langle \xi, p \rangle \forall p \in \mathbb{R}^n\}$$

it is obtained that

$$p \in T_C(x) \Leftrightarrow \langle \xi, p \rangle \leq 0, \forall \xi \in \partial d_C(x). \quad (1.2)$$

Other characterizations of the tangent cone can be found in Clarke [4] and Aubin-Ekeland [1].

The normal cone to C at x , denoted $N_C(x)$, is defined as the polar cone of $T_C(x)$, i.e.,

$$N_C(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n / \langle \xi, p \rangle \leq 0, \forall p \in T_C(x)\}. \quad (1.3)$$

It is proved that $N_C(x)$ is the closure of the cone generated by $\partial d_C(x)$, i.e.,

$$N_C(x) = \overline{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_C(x)},$$

where the overbar means closure..

A nonzero vector n is said to be perpendicular to C at $x \in \overline{C}$, denoted by $n \perp C$ at x , if $d_C(x+n) = \|n\|$. It is satisfied that

$$N_C(x) = \overline{\text{Conv}} \left\{ \lambda \lim_{\|n_i\|} \frac{n_i}{\|n_i\|} / \lambda \geq 0, n_i \perp C \text{ at } x_i, x_i \rightarrow x, n_i \rightarrow 0 \right\}$$

(The proofs of propositions presented in this work and not explicitly referenced can be found in Arica [2]).

Karush-Kuhn-Tucker necessary optimality conditions for BLPP

Optimality conditions for program (BLPP) has begun to be studied recently. Some works in this line are Chen-Florian [3], Dempe [5], Outrata [6], Yezza [8], Zhang [9] and Ye-Zhu [10] (this last work presents very similar results to those gotten here). To begin the discussion on optimality conditions, some previous concepts about set of multipliers will be needed.

Considering the associated ordinary Lagrange function for (P_x) :

$$l(x, y, \pi) := f(x, y) + \langle \pi, g(x, y) \rangle \text{ for } (y, \pi) \in \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}_+^{m_2},$$

it is defined the **first-order multiplier set** of (P_x) associated with $y \in Y(x)$, as the set of K-K-T multipliers of $(P(x))$. It is denoted by $\Pi^1(x, y)$

To define the second-order multiplier set, consider $y \in Y$ and $M(x, y)$, as the collection of subspaces $M \subset \mathbb{R}^{n_2}$ that can be expressed as limits of subspaces M^j (in the sense that $d_{M^j}(z) \rightarrow d_M(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}^{n_2}$), where $M^j = \{w \in \mathbb{R}^{n_2} / \langle w, \nabla_y g_i(x^j, y^j) \rangle = 0, \forall i \in I(x, y)\}$, with $(x^j, y^j) \rightarrow (x, y)$ and $I(x, y) := \{i / g_i(x, y) = 0\}$.

The **second-order multiplier set** of (P_x) associated with $y \in Y(x)$ is defined as

$$\Pi^2(x, y) := \left\{ \pi \in \Pi^1(x, y) / \exists M \in M(x, y) \text{ with } \langle w, \nabla_{yy}^2 l(x, y, \pi) w \rangle \geq 0, \forall w \in M \right\}$$

The **singular multiplier sets**, $\Pi_0^1(x, y)$ and Π_0^2 , are defined in analogous way, but the singular Lagrangean $l_0(x, y, \pi) := \langle \pi, g(x, y) \rangle$: for $(y, \pi) \in \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}_+^{m_2}$, is used instead of the ordinary Lagrangean.

Another multiplier set that will be needed is the augmentable multiplier set. It is related to the augmented Lagrangean function:

$$L_a(x, y, \pi, r) := f(x, y) + \langle \pi, g(x, y) \rangle + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{m_2} [g_i(x, y)]^2 + \frac{1}{2r} \sum_{i=1}^{m_2} ([\pi_i + r g_i(x, y)]_+^2 - [\pi_i + r g_i(x, y)]^2)$$

$$\text{for } (y, \pi, r) \in \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_2} \times (0, +\infty),$$

where $[\alpha]_+ := \max\{a, 0\}$, for $a \in \mathbb{R}$. The **augmentable multiplier set** associated with $y \in Y(x)$, denoted by $\Pi^a(x, y)$, is defined as

$$\Pi^a(x, y) := \left\{ \pi \in \mathbb{R}^{m_2} / (y, \pi) \text{ is a local saddle point of } L_a(x, \dots, r), \text{ with } r \text{ sufficiently large.} \right\}$$

The next theorem establishes conditions that turn possible to characterize $\partial v(x)$.

THEOREM 2.1

Let $x_0 \in X$ and $Y(x_0) \neq \emptyset$. If $O(\cdot)$ is l.s.c. at x_0 and for all $y \in O(x_0)$ it is satisfied that $\Pi^2_0(x_0, y) = \{0\}$ and $\Pi^2(x_0, y) \subseteq \overline{\Pi^1(x_0, y)}$, then

$$\partial v(x_0) + \text{Conv} \{ \nabla_x l(x_0, y, \pi) / y \in O(x_0), \pi \in \Pi^2(x_0, y) \}$$

Now, consider the problem

$$(P): \min_{x \in C} \{ J(x) / H_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, i_1, L_j(x) = 0, j = 1, \dots, j_1 \},$$

where $C \subset D \subset \mathbb{R}^n$, C is closed, D is open, and all the involved functions are locally Lipschitz on D .

Following Clarke [4], Chapter VI, it can be obtained the next proposition.

PROPOSITION 2.2

Let x be a local optimal solution of (P). Then, there exist $\lambda \geq 0$, $r \geq 0$ and s , with $(\lambda, r, s) \neq 0$, such that $\langle r, H(x) \rangle = 0$ and

$$0 \in \lambda \partial J(x) + \sum_{i=1}^{i_1} r_i \partial H_i(x) + \sum_{j=1}^{j_1} s_j \partial L_j(x) + N_C(x). \quad (2.2)$$

REMARK 2.3

Note that the above proposition establishes the Fritz John necessary optimality condition. The aim of this section is to formulate regularity conditions, on (BLPP), to assure that the multiplier λ is nonzero. i.e., to establish the Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T) necessary optimality condition.

It is defined the **Multiplier set of index λ** at a point x , by

$$M^\lambda(x) := \left\{ (r, s) \in \mathbb{R}^{i_1+j_1} / 0 \in \lambda \partial J(x) + \sum_{i=1}^{i_1} r_i \partial H_i(x) + \sum_{j=1}^{j_1} s_j \partial L_j(x) + N_C(x), \right. \\ \left. \langle r, H(x) \rangle = 0, r \geq 0 \right\}. \quad (2.3)$$

Note that in (2.3) we have, essentially, only two different cases: $\lambda = 0$ and $\lambda = 1$. Because, if (λ, r, s) is a multiplier, for $\lambda \neq 0$, $(1, r/\lambda, s/\lambda)$ is also a multiplier. Observe that $0 \in M^0(x)$.

The interest, in relation to $M^0(x)$, as mentioned in Remark 2.3, is to formulate conditions to get $M^0(x) = \{0\}$. On the other hand, when all the involved functions are smooth (continuously differentiable), the condition $M^0(x) = \{0\}$ is equivalent to the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification (MFCQ), Rockafellar [7]. Thus it appears natural to consider some extension of MFCQ, to the nondifferentiable case, to assure the K-K-T optimality condition. Unfortunately, MFCQ is not satisfied by problem (BLPP). Therefore, it is necessary to establish a weaker condition on (BLPP), such that $M^0(x)$ could be reduced to the set $\{0\}$ or, as will be done here, to get $M^1(x) \neq \emptyset$. The next local concept of calmness will be suitable for this objective (the global concept of calmness was first given by Clarke [4]).

Let x feasible for (P), $\epsilon \geq 0$ and consider the following parametrized mathematical programs family

$$(P_\epsilon(p, q; x)) : \min \{J(y) / y \in S_\epsilon(p, q; x)\},$$

where, $(p, q) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $S_\epsilon(p, q; x) := \{y \in C \cap (x + \epsilon \bar{B}) / H(y) + p \leq 0, L(y) + q = 0\}$ and all the assumptions for problem (P) are satisfied. It is clear that x is a local solution of (P) if, and only if, there exists $\epsilon > 0$, sufficiently small, such that x is a global solution of $(P_\epsilon(p, q; x))$.

DEFINITION 2.4

Let x be a local solution of (P). The problem (P) is said to be **calm near x** , if there exist positive reals ϵ and M , such that, for all $(p, q) \in \epsilon B$ and for all $x' \in S_\epsilon(p, q; x)$, it holds that

$$J(x') - J(x) + M \|(p, q)\| \geq 0$$

The marginal function of problem $(P_\epsilon(p, q; x))$ is defined by $V_\epsilon(p, q; x) := \inf \{J(y) / y \in S_\epsilon(p, q; x)\}$, where $V_\epsilon(p, q; x) := +\infty$, if $S_\epsilon(p, q; x)$ is the empty set.

Note that function $V_\epsilon(\cdot, \cdot; x)$ does not need to be Lipschitz near $(0, 0)$. Thus, $\partial V_\epsilon(0, 0; x)$ could be the empty set. To overcome this difficult, denoting the epigraph of $V_\epsilon(\cdot, \cdot; x)$ by $\text{Epi } V_\epsilon(\cdot, \cdot; x)$ and following Rockafellar [7] and Clarke [4], it is defined the next extension of the generalized gradient of $V_\epsilon(\cdot, \cdot; x)$ at (p, q) , which also will be denoted by $\partial V_\epsilon(0, 0; x)$,

$$\partial V_\epsilon(p, q; x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^{1+n} / (\xi, -1) \in N_{\text{Epi}(V_\epsilon(\cdot, \cdot; x))}(p, q, V_\epsilon(p, q; x)) \}$$

Let x be a local solution of (P) and $\epsilon > 0$. Consider

$$(\tilde{P}_\epsilon(p, q; x)) : \min_{y \in S_\epsilon(p, q; x)} J(y) + \theta(\|y - x\|) \quad (2.4)$$

where $\theta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is an increasing convex function, such that $\theta(0) = 0$ and $\theta'(0) = 0$.

Observe that being x a local solution of (P) and $\epsilon > 0$, sufficiently small, it holds that x is a global solution of $(P_\epsilon(0, 0; x))$ and the unique global solution of $(\tilde{P}_\epsilon(0, 0; x))$; on the other hand, for $\tilde{V}_\epsilon(p, q; x)$, marginal function of $(\tilde{P}_\epsilon(p, q; x))$, it is satisfied that

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\epsilon(0, 0; x) &= J(x) = V_\epsilon(0, 0; x) \\ \tilde{V}_\epsilon(p, q; x) &\geq V_\epsilon(p, q; x), \forall (p, q) \neq (0, 0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

REMARK 2.5

The multiplier sets associated to the program $(\tilde{P}_\epsilon(0, 0; x))$ at point x , denoted by $\tilde{M}^\lambda(x)$, for $\lambda = 0, 1$, satisfy

$$\tilde{M}^\lambda(x) = M^\lambda(x) \quad (2.6)$$

where $M^\lambda(x)$ for $\lambda = 0, 1$, are the multiplier sets at x associated to $(P_\epsilon(0, 0; x))$.

As a consequence of Definition 2.4, Corollary 1 and Corollary 3 of Theorem 6.5.2, Clarke [4], Remark 2.5 and since x is the unique global solution of $(\tilde{P}_\epsilon(0, 0; x))$, the following result is obtained.

PROPOSITION 2.6

Let x be a local solution of (P), where (P) is calm near x , then $M^1(x) \neq \emptyset$.

Note that $M^1(x) \neq \emptyset$ establishes the K-K-T condition for problem (P). Thus, Proposition 2.6 says that under the assumption of calmness near x , K-K-T is a necessary condition for local optimality of x . The application of this proposition to problem (BLPP), yields the K-K-T condition for this.

THEOREM 2.7

Let (BLPP) be calm near the local solution (x^*, y^*) . Assume that $\Pi_0^2(x^*, y) = \{0\}$, for all $y \in 0(x^*)$. Then, there exist a scalar $s \in \mathbb{R}$ and a vector $r \in \mathbb{R}^{m_1 + m_2}$ such that

$$0 \in \nabla_x F(x^*, y^*) + \sum_{i=1}^{m_1} r_i \nabla_x G_i(x^*, y^*) + \sum_{i=1}^{m_2} r_{m_1+i} \nabla_x g_i(x^*, y^*) + s [\nabla_x f(x^*, y^*) - \partial v(x^*)] + N_X(x^*), \quad (2.7)$$

$$0 = \nabla_y F(x^*, y^*) + \sum_{i=1}^{m_1} r_i \nabla_y G_i(x^*, y^*) + \sum_{i=1}^{m_2} r_{m_1+i} \nabla_y g_i(x^*, y^*) + s \nabla_y f(x^*, y^*), \quad (2.8)$$

$$0 = f(x^*, y^*) - v(x^*), \quad (2.9)$$

$$0 \leq -(G(x^*, y^*), g(x^*, y^*)), \quad (2.10)$$

$$0 = \langle r, G(x^*, y^*), g(x^*, y^*) \rangle, \quad (2.11)$$

$$0 \leq r, \quad (2.12)$$

where

$$\partial v(x^*) \subseteq \text{Conv} \{ \nabla_x l(x^*, y, \pi) / y \in O(x^*), \pi \in \Pi^2(x^*, y) \} \quad (2.13)$$

In addition, if $0(\cdot)$ is lower semicontinuous at x^* and $\Pi^2(x^*, y) \subseteq \overline{\Pi^a(x^*, y)}$, for all $y \in O(x^*)$, then equality holds in relation (2.13).

REFERENCES:

1. Aubin, J.P.; Ekeland, I. *Applied nonlinear analysis*. Wiley Interscience, New York, 1984.
2. Arica, J.; Scheimberg, S. *The bilevel programming problem: Optimality conditions*. Publicação Técnica Interna N. 03/95, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Brazil, 1995.
3. Chen, Y.; Florian, M. *The nonlinear bilevel programming problem: Formulations, regularity and optimality conditions*. CRT-794. Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, C.P. 6128, Succursale A, Montréal, Canada, H3C3J7, July, 1991 - Revised July, 1993.
4. Clarke, F.H. *Nonsmooth analysis and optimization*. Wiley - Interscience, New York, 1983.

5. Dempe, S. *A necessary and a sufficient optimality condition for bilevel programming problems.* Optimization, 25, pp. 341-354, 1992.
6. Outrata, J. V. *On optimization problems with variational inequalities constraints.* SLAM J. Optimization, 4, N. 2, 1994.
7. Rockafellar, R.T. *Marginal values and second order necessary conditions for optimality.* Mathematical programming 26, pp. 245-286, 1983.
8. Yezza, A. *A first order necessary optimality condition for general bilevel programming problem. To appear in jornal of optimization theory and applications.*
9. Zhang, R. *Problems of Hierarquical optimization in finite dimensions.* SLAM Journal on Optimization 4, N. 3, pp. 521-536, 1994.
10. Ye, J. J.; Zhu D. L. *Optimality conditions for bilevel programming problems.* Optimization, 33, pp. 9-27, 1995.

Una introducción al cálculo de variaciones: el método directo y uno indirecto¹

Fabián Flores Bazán^(*)

RESUMEN

Este manuscrito contiene las notas de tres lecciones de un mini-curso concebido como una introducción al Cálculo de Variaciones. En primer lugar, se presenta (sólo para conveniencia del lector) el Método Directo Clásico del Cálculo de Variaciones debido a Tonelli, de una manera elemental, entendido para aquellos que pretenden iniciarse en la materia. Además se estudia una clase de funcionales integrales no-convexos mediante un método indirecto estableciendo resultados de existencia de mínimo. Lo último corresponde a una versión unidimensional de lo que se expone en [F2].

KEYWORDS

Método directo, semicontinuidad inferior, función no-convexa, función bipolar.

¹ Parte del tema expuesto en estas notas está basado en el material de investigación financiado parcialmente por CONICYT a través de FONDECYT 195-1148.

^(*) Universidad de Concepción, Departamento de Ingeniería Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Casilla 4009, Concepción - Chile.

Introducción al cálculo de variaciones

En los últimos 15 años el estudio de problemas variacionales: problemas de minimización dentro del ámbito del Cálculo de Variaciones, se ha incrementado notablemente. Esto porque muchas situaciones concretas que surgen de la aplicación en diversas ramas de la ciencia y de la ingeniería, se dejan modelar como un problema de minimización que en algunos casos particulares - especialmente en la física - tal problema de minimización recibe el nombre de principio variacional, y requieren nuevas técnicas. El Cálculo de Variaciones, se puede decir que nace (y tal vez antes) con la formulación del problema de la *Braquistócrona* que uno de los hermanos Bernoulli hace a la comunidad matemática de ese tiempo.

Un método clásico para tratar problemas de minimización es aquella que requiere de la bien conocida ecuación de Euler-Lagrange: el análogo a la ecuación (en dimensión finita) que la derivada de la función debe ser nula en un punto donde la función es un mínimo. Así, la ecuación de Euler-Lagrange viene a ser una condición necesaria para que un elemento sea un mínimo. De modo que bajo ciertas hipótesis adicionales sobre la funcional (integrando) el problema de encontrar un mínimo para la funcional es equivalente al de resolver una ecuación diferencial. Sin embargo, sólo en situaciones muy especiales, aunque por cierto no banales y de considerable significado, es posible dar solución a la ecuación diferencial. Conviene notar que no toda ecuación diferencial es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a algún problema de minimización. Este último, da origen a los llamados Problemas Inversos. Pero, para una gama muy amplia de ecuaciones diferenciales, es posible resolverlos mediante su problema de minimización asociado. En este caso el método directo juega un rol muy importante, aunque se requiere de un análisis adicional que se refiere a la regularidad del mínimo en consideración. En la siguiente sección se describe el método directo clásico en un contexto general. En la tercera sección se demuestra tal método debido a Tonelli, para el problema elemental del Cálculo de Variaciones usando técnicas nada sofisticadas siguiendo la línea del libro de Cesari [Ce]. Existe una vasta literatura al respecto. En la sección 4 presentamos un método indirecto que es una versión unidimensional de algunos resultados expuestos en [F2] donde el método anterior no puede ser aplicado.

La forma del presente manuscrito se debe a que su versión original fue escrita por el mismo autor para ser impartida en un mini-curso², realizado en ocasión de las *IX Jornadas de Matemática de la Zona Sur*, en la Universidad del Bío-Bío, Chillán-Chile, desde el 26 al 28 de abril de 1995, compuesto de tres lecciones, y dirigido a un público que pretende introducirse en la materia. Al final se da una lista de referencias complementarias.

² (1)

Descripción del método directo clásico

Estamos interesados en estudiar el problema

$$\min_{u \in M} J(u) \quad (P)$$

más concretamente, estableceremos condiciones sobre J para las cuales (P) tiene solución, i.e. si existe $\bar{u} \in M$ tal que $\min_u J(u) = J(\bar{u})$. Aquí, $J: M \rightarrow \mathbb{R}$, donde M es una clase de funciones. A fin que el problema tenga sentido asumiremos que

$$\lambda = \min_{u \in M} J(u) > -\infty$$

i.e. que J sea acotado por abajo. Por definición de ínfimo existe una sucesión (u_k) , $k \in \mathbb{N}$, de M tal que $J(u_k) \rightarrow \lambda$ cuando $k \rightarrow \infty$. A tal sucesión se le conoce como una *sucesión minimizante*.

La primera cuestión que surge tiene que ver con la existencia de una función límite $\bar{u}$ de la sucesión (u_k) . En el caso que las funciones sean curvas en $\mathbb{R}^m$ ($u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$), Hilbert fue el primero que estableció algunas condiciones bajo las cuales la existencia de una función límite es garantizada.

Supongamos que una función límite $\bar{u} \in M$ exista. Entonces, si $J(\bar{u}) = \lim_k J(u_k)$ tenemos

$$J(\bar{u}) = \lambda \quad (2.1)$$

Así $\bar{u}$ sería un mínimo (absoluto) para J en M . Aparte de precisar la topología en M para el cual se cumple $u_k \rightarrow \bar{u}$, observamos que (2.1) se satisface si J es continua. Sin embargo, en general, J no será continua. En efecto, Labesgue fue el primero en ver que la continuidad no es necesaria sino que basta la semicontinuidad inferior³. Previa introducción de una noción de convergencia en M , se dice que J es semicontinua inferiormente, en breve s.c.i., en $\bar{u}$ si para cada sucesión (u_k) , $u_k \rightarrow \bar{u}$ se tiene

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k)$$

como veremos a continuación. Claramente se tiene

$$\lambda \leq J(\bar{u}) \quad (2.2)$$

³ (2)

Por otro lado, asumiendo que J es s.c.i. en $\bar{u}$:

$$J(u_k) \geq J(\bar{u}) - \varepsilon$$

$\forall k$ suficientemente grande. Luego

$$\lambda \geq J(\bar{u}) - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

Así, (2.2) y (2.3) implican $\lambda = J(\bar{u})$.

De lo expuesto, se deduce que el método directo clásico consistiría en 3 pasos:

1. La construcción de una sucesión minimizante.
2. Demostración de la existencia de una función límite para la sucesión, en verdad basta que sea para alguna subsucesión.
3. Demostración de la semicontinuidad inferior de la funcional en la función límite.

El problema elemental del cálculo de variaciones

Sean $I = [0, T]$; $g: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $f: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas; $l, a, b \in \mathbb{R}^n$ fijos. Se supone además que existen $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y algún $p > 1$ tales que:

$$f(t, u, u') \geq \alpha |u'|^p + \beta \quad \forall t \in I, \forall (u, u') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Se define

$$J(u) = \int_0^T f(t, u(t), u'(t)) dt$$

El cual tiene sentido para funciones u absolutamente continua. El problema que estudiaremos será

$$\min_{u \in U} J(u) \quad (P)$$

donde

$$U = \left\{ u \in AC(I): u(0) = a, u(T) = b, \int_0^T g(t, u(t)) dt = l \right\}$$

Aquí $AC(I)$ denota el espacio vectorial lineal de las funciones absolutamente continuas definidas en I .

Por simplicidad nuestro análisis se limitará al caso $n = 1$.

Primer paso. En virtud de la condición de crecimiento sobre f (ver (3.1)), obtenemos, que $\forall u \in U$.

$$J(u) \geq \alpha \int_0^T |u'(t)|^p + \beta \geq \beta$$

Así,

$$\lambda = \inf_{u \in U} J(u) \geq \beta > -\infty$$

Segundo paso. Sea (u_k) una sucesión minimizante, es decir u_k verifica $\lim_k J(u_k) = \lambda$. Entonces $(J(u_k))$ es limitada. En consecuencia, existe $B > 0$ tal que

$$\int_0^T |u'_k(t)|^p dt < B^p \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, se tiene, usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |u_k(t'') - u_k(t')| &= \left| \int_{t'}^{t''} u'_k(s) ds \right| \leq \int_{t'}^{t''} |u'_k(s)| ds \leq \\ &\leq |t'' - t'|^{1/q} \left\{ \int_{t'}^{t''} |u'_k(s)|^p ds \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

donde $1/p + 1/q = 1$, $0 \leq t' < t'' \leq T$. En particular,

$$\begin{aligned} |u_k(t) - b| &\leq |t - T|^{1/q} B \leq T^{1/q} B \quad y \\ |u_k(t'') - u_k(t')| &\leq B |t'' - t'|^{1/q}. \end{aligned}$$

Las dos últimas desigualdades nos dicen que la sucesión (u_k) es equilimitada y equicontinua. El teorema de Arzelà-Ascoli implica que (u_k) admite una subsucesión (aún denotada por el mismo sub-índice) que converge uniformemente a alguna función continua $\bar{u}$.

Probaremos que $\bar{u} \in U$. Claramente $\bar{u}(0) = a$, $\bar{u}(T) = b$ y $\int_0^T g(t, \bar{u}(t)) dt = 1$.

Veamos ahora que $\bar{u} \in AC(I)$. Sea $[t'_i, t''_i] \subset I$, $i = 1, \dots, m$, disjuntos. Entonces

$$\sum_{i=1}^m |u_k(t''_i) - u_k(t'_i)| \leq \sum_{i=1}^m |t''_i - t'_i|^{1/q} \left\{ \int_{t'_i}^{t''_i} |u'_k(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^m |t''_i - t'_i| \right\}^{1/q} \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{t'_i}^{t''_i} |u'_k(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leq B \left\{ \sum_{i=1}^m |t''_i - t'_i| \right\}^{1/q}$$

Lo que prueba lo deseado haciendo $k \rightarrow \infty$. Similarmente se prueba que

$$\bar{u}' \in L^p(]0, T[).$$

Tercer paso. Ahora necesitamos una noción de convergencia para la sucesión (u_k) en AC (I). Probaremos que u'_k converge débilmente a $\bar{u}'$ en $L^p(]0, T[)$, lo que denotaremos por $u'_k \rightarrow \bar{u}'$ en $L^p(]0, T[)$, más precisamente probaremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T [u'_k(t) - \bar{u}'(t)] v(t) dt = 0 \quad (3.2)$$

para cada $v \in L^q(]0, T[)$. Visto que el conjunto de los polinomios es denso en L^q (en la norma de L^q), (3.2) será demostrada para v polinomial. Usando integración por partes, se obtiene

$$\int_0^T [u'_k(t) - \bar{u}'(t)] v(t) dt = - \int_0^T [u_k(t) - \bar{u}(t)] v'(t) dt$$

La integral del lado derecho converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$ debido a la convergencia uniforme de (u_k) . Así $u'_k \rightarrow \bar{u}'$ en L^p .

De la discusión hecha anteriormente parece razonable introducir la siguiente noción de convergencia en U , la que denotaremos por $u_k \rightarrow \bar{u}$ en $W^{1,p}(]0, T[)$ y se define como $u_k \rightarrow \bar{u}$ en $C^0([0, T])$ con la norma del supremo y $u'_k \rightarrow \bar{u}'$ en $L^p(]0, T[)$. Esta definición de convergencia toma en consideración la condición (3.1). Si en lugar de tal condición se tiene $f(t, u, u') \geq \psi(|u'|)$, donde la función ψ es una función s.c.i., convexa y verifica $\psi(|u'|)/|u'| \rightarrow +\infty$ cuando $|u'| \rightarrow +\infty$, se considera la misma noción de convergencia poniendo $p = 1$. A tal función ψ se le conoce con el nombre de función de Nagumo.

Ahora bien, una vez introducido una noción de convergencia en U , demostraremos que J es s.c.i. en $\bar{u}$. Para tal fin, necesitamos que la función $u' \rightarrow f(t, u, u')$ sea convexa y por cuestiones técnicas asumimos que también sea de clase C^1 . Probaremos que $J(\bar{u}) \leq \liminf_k J(u_k)$ para cada sucesión (u_k) en U con la propiedad que $u_k \rightarrow \bar{u}$ uniformemente y $u'_k \rightarrow \bar{u}'$ en $L^p(]0, T[)$.

Sea $E_N = \{t \in [0, T]: |\bar{u}'(t)| \leq N\}$ y consideramos la identidad

$$f(t, u_k, u'_k) - \beta = f(t, \bar{u}, \bar{u}') - \beta + [f(t, u_k, u'_k) - f(t, u_k, \bar{u}')] + [f(t, u_k, \bar{u}') - f(t, \bar{u}, \bar{u}')] \quad (3.3)$$

donde β es la constante que aparece en (3.1). Teniendo en cuenta que $u_k \rightarrow \bar{u}$ uniformemente; dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \int_{E_N} [f(t, u_k, u'_k) - \beta] dt &\geq \int_{E_N} [f(t, \bar{u}, \bar{u}') - \beta] dt + \\ &+ \int_{E_N} [f(t, u_k, u'_k) - f(t, u_k, \bar{u}')] dt - \varepsilon T \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pero como $f(t, u, \cdot)$ es convexa y de clase C^1 , se tiene

$$f(t, u, u') - f(t, u, \bar{u}'(t)) \geq f_{u'}(t, u, \bar{u}'(t)) (u' - \bar{u}'(t)) \quad \forall u' \in \mathbb{R}$$

Usando esta desigualdad en (3.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{E_N} [f(t, u_k, u'_k) - \beta] dt &\geq \int_{E_N} [f(t, \bar{u}, \bar{u}') - \beta] dt + \\ &+ \int_{E_N} (u'_k - \bar{u}') [f_{u'}(t, u_k, \bar{u}') - f_{u'}(t, \bar{u}, \bar{u}')] dt + \int_{E_N} (u'_k - \bar{u}') f_{u'}(t, \bar{u}, \bar{u}') dt - \varepsilon T \end{aligned} \quad (3.5)$$

Veamos que las dos últimas integrales del lado derecho de (3.5) tienden a cero cuando $k \rightarrow \infty$. En efecto, la tercera integral converge a cero porque $u'_k \rightarrow \bar{u}'$ en $L^p([0, T])$ y basta ver que la función v definida como $v(t) = f_{u'}(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t))$ si $t \in E_N$ y $v(t) = 0$ si $t \in [0, T] \setminus E_N$ pertenece a $L^q([0, T])$. Que la segunda integral converge a cero, resulta de usar la desigualdad de Hölder a tal integral y de tener en cuenta que $u'_k, \bar{u}$ están en L^p , además que $f_{u'}(t, u_k(t), \bar{u}'(t)) - f_{u'}(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t))$ converge a cero uniformemente en E_N . Teniendo en cuenta que $f(t, u, u') - \beta \geq 0$, se tiene

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T [f(t, u_k(t), u'_k(t)) - \beta] dt \geq \int_{E_N} [f(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t)) - \beta] dt - \varepsilon T, \quad \forall \varepsilon > 0$$

En consecuencia, si $N \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T f(t, u_k(t), u'_k(t)) dt \geq \int_0^T f(t, \bar{u}(t), \bar{u}'(t)) dt - \varepsilon T, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

lo que prueba que J es s.c.i. en $\bar{u}$. Esto nos permite concluir que $\bar{u}$ es un mínimo para J en U .

El resultado de existencia apenas demostrado fue establecido primero por Leonida Tonelli, y se le conoce como el método directo (clásico) del cálculo de variaciones. Esta técnica, hoy en día, es usada en diversas ramas de la matemática. Para una demostración del teorema de Tonelli sin hipótesis de regularidad sobre f referimos a cualquiera de los libros [Ce, Da, E-T].

Observación 3.0. Hacemos énfasis también que la hipótesis de convexidad de $f(t, u, \cdot)$ es una condición necesaria para que la funcional asociada sea s.c.i. relativo a la noción de convergencia que introducimos previamente. Para una demostración de tal resultado el lector puede consultar a [Ce, Da, E-T]. Sin embargo, a continuación presentamos una demostración en el caso más simple: $f(t, u, u') = h(u')$ y prescindiremos de las condiciones de frontera.

Sea ξ un punto donde h no es convexa, luego existen ξ_1, ξ_2 y $\lambda \in]0, 1[$ tales que $\xi = \lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2$ y $h(\xi) > \lambda h(\xi_1) + (1 - \lambda) h(\xi_2)$.

Consideremos la función $\bar{u}$ tal que $\bar{u}' \equiv \xi$ en $[0, T]$. Dividimos el intervalo $[0, T]$ en k subintervalos de igual longitud. Luego, cada subintervalo lo dividimos en dos, cada uno de ellos de longitud proporcional a λ y a $1 - \lambda$. Ahora, consideremos las funciones u_k definidas en $[0, T]$ tal que sus derivadas asumen los valores ξ_1 y ξ_2 alternadamente en cada subintervalo. Claramente $u_k \rightarrow \bar{u}$ uniformemente y $u'_k \rightarrow \bar{u}'$ en $L^p(]0, T[)$. También se tiene

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T h(u'_k(t)) dt = T(\lambda h(\xi_1) + (1 - \lambda) h(\xi_2)) < Th(\xi) = \int_0^T h(\bar{u}'(t)) dt.$$

Luego J no sería semicontinua inferiormente.

Ejemplo 3.1. Consideremos el problema

$$\min_{u \in U} \int_0^1 [u^2(t) + |u'(t)|] dt$$

donde $U = \{u \in AC([0, 1]): u(0) = 0, u(1) = 1\}$. Claramente

$$J(u) = \int_0^1 [u^2(t) + |u'(t)|] dt \geq \int_0^1 |u'(t)| dt \geq 1 \quad \forall u \in U$$

Consideramos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{k} \\ kt + 1 - k, & \text{si } 1 - \frac{1}{k} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Obviamente, $u_k \in U$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Además,

$$J(u_k) = \int_0^1 u_k^2(t) dt + 1 = \int_{1-\frac{1}{k}}^1 (kt + 1 - k)^2 dt + 1 = \frac{1}{3k} + 1$$

Por lo tanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = 1$. En consecuencia (u_k) es una sucesión minimizante para J . Supongamos que exista $\bar{u} \in U$ tal que $J(\bar{u}) = 1$. Entonces $\bar{u}'(t) \geq 0$ c.t.p. De lo contrario sería posible construir $\tilde{u} \in U$ tal que $J(\tilde{u}) < J(\bar{u})$ lo que contradice el hecho que $\bar{u}$ sea un mínimo para J . Luego $\int_0^1 \bar{u}^2(t) dt + 1 = 1$. El cual implica que $\bar{u} \equiv 0$. Pero esto no puede ser de acuerdo a las condiciones de frontera. Así la funcional J no tiene mínimo.

Observación 3.2. En el ejemplo previo se observa que la condición de crecimiento superlineal del integrando no se verifica.

Ejemplo 3.3. Sea la función integrando $f(t, u, u') = u^2 + |u'|^2$ y U como en el ejemplo anterior. En este caso la sucesión definida como antes no es más una sucesión minimizante:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \infty.$$

Sin embargo la funcional correspondiente admite un mínimo en U por el teorema de Tonelli.

Ejemplo 3.4. Consideremos el problema de minimizar

$$J(u) = \int_0^1 [|u'(t)|^2 - 1]^2 dt$$

en $U = \{u \in AC([0, 1]): u(0) = u(1) = 0\}$. Claramente, $J(u) \geq 0$ para todo $u \in U$. No es difícil ver que cada función u_k definida mediante,

$$i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}:$$

$$u_k(t) = \left\{ t - \frac{2i-2}{2^k}, \text{ si } \frac{2i-2}{2^k} \leq t \leq \frac{2i-1}{2^k} - \left(t - \frac{2i-1}{2^k} \right), \text{ si } \frac{2i-1}{2^k} \leq t \leq \frac{2i}{2^k} \right\}$$

$u_k(0) = u_k(1) = 0$, es un mínimo para la funcional J en U , i.e. $J(u_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. En particular, la sucesión (u_k) es una sucesión minimizante para J . Además, como

$$|u_k(t)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall t \in [0, 1]$$

se tiene que la convergencia $u_k \rightarrow 0$ es uniforme.

Veamos que $u'_k \rightarrow 0$ en $L^2([0, 1])$, o equivalentemente

$\lim_k \int_0^1 u'_k(t) p(t) dt = 0$ para todo $p \in L^2$. Para ello basta, como antes, considerar p un polinomio. Integrando por partes, se obtiene

$$\int_0^1 u'_k(t) p(t) dt = - \int_0^1 u_k(t) p'(t) dt$$

Así,

$$\left| \int_0^1 u'_k(t) p(t) dt \right| \leq M \int_0^1 |u_k(t)| dt \leq \frac{M}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

lo que demuestra lo deseado.

También se observa que

$$1 = J(0) > \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = 0$$

nos lo dice que J no es semicontinua inferiormente, con respecto a la convergencia débil, en cero. Evidentemente no es cierto que $u'_k \rightarrow 0$ en L^2 .

Observación 3.5. Notamos que el último ejemplo corrobora que la noción de convergencia débil introducida al inicio está ligada a la convexidad de la función integrando respecto al argumento de la derivada. Por otro lado, el mismo ejemplo nos muestra que aún cuando la función integrando no es convexa, la funcional $J(u)$

$$= \int_0^1 [|u'(t)|^2 - 1]^2 dt \text{ tiene mínimo en } U. \text{ Por lo tanto la convexidad del inte-}$$

grando con respecto al argumento de la derivada, no es una condición necesaria para la existencia de mínimos. El siguiente ejemplo muestra que no siempre se puede esperar

que exista un mínimo para una funcional cuya función integrando no sea convexa en el argumento de la derivada.

Ejemplo 3.6. Sea la función integrando:

$f(t, u, u') = u^2 + |(u' - 1)(u' + 1)|$, y consideramos el problema

$$\min_{u \in U} \int_0^1 f(t, u, u') dt \quad (P)$$

donde U es como en el ejemplo previo. En este caso la sucesión de funciones definidas en el ejemplo 3 forman una sucesión minimizante porque $u_k \rightarrow 0$ uniformemente en $[0, 1]$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \min_{u \in U} \int_0^1 f(t, u(t), u'(t)) dt = 0.$$

Si la funcional J tuviera un mínimo $\bar{u}$ en U , se tendría

$$\int_0^1 [\bar{u}^2(t) + |(\bar{u}'(t) - 1)(\bar{u}'(t) + 1)|] dt = 0$$

Lo cual implicaría $\bar{u} \equiv 0$ y $|\bar{u}'(t)| = 1$ el que es un absurdo.

Un método indirecto

En la sección previa concluimos que si estamos interesados en encontrar soluciones para problemas de minimización, el método directo clásico apenas descrito resuelve el problema para una clase de funcionales con función integrando convexa en el argumento de la derivada. En el caso que la función integrando no sea convexa, vimos que no siempre se puede esperar existencia de mínimos. Sin embargo, es posible encontrar una clase especial de funciones integrandos no necesariamente convexos para las cuales se obtiene existencia. La exhibición de una tal clase será el objetivo de la presente sección.

Antes daremos algunos resultados preliminares.

En lo que sigue $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ denotará cualquier función boreliana y h^{**} será la función bipolar de h y está definida como la función convexa y s.c.i. más grande pero no mayor que h (ver [E-T]). Los siguientes lemas fueron extraídos de [F2], compare con los de [A-C].

Lema 4.1. Sea $I =]0, T[$ y sea μ una medida positiva no-atómica de Radon sobre I . Sea z una función medible tal que $t \rightarrow h^{**}(z(t))$ está en $L^1(I)$. Además, sea $]a, b[$ un intervalo tal que $-\infty < a < b < +\infty$, $h^{**}(\xi) < h(\xi)$ para $\xi \in]a, b[$, $h^{**}(a) = h(a)$, $h^{**}(b) = h(b)$. Ponemos $E = \{t \in I: a < z(t) < b\}$, el cual suponemos diferente del vacío y de medida positiva. Entonces existe una función medible w que toma valores en $\{a, b\}$ para t en E , tal que

$$(a) \int_E w(t) d\mu = \int_E z(t) d\mu,$$

$$(b) \int_E h(w(t)) d\mu = \int_E h^{**}(z(t)) d\mu,$$

y para todo $t \in I$

$$(c) \int_0^t w(s) \chi_E(s) d\mu \leq \int_0^t z(s) \chi_E(s) d\mu.$$

Demostración. De la definición de E y h^{**} (ver por ejemplo [E-T]), existen funciones medibles $p_i: I \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, 2$ satisfaciendo: $p_1(t) + p_2(t) = 1$, y tal que

$$z(t) = p_1(t)a + p_2(t)b, h^{**}(z(t)) = p_1(t)h(a) + p_2(t)h(b), t \in E.$$

$$\text{Definimos } \psi(\tau) = \int_0^\tau a\chi_E(t) d\mu + \int_\tau^T b\chi_E(t) d\mu - \int_0^\tau z(t) \chi_E(t) d\mu.$$

Claramente ψ es función continua de $[0, T]$ en $\mathbb{R}$, y $\psi(0) > 0$, $\psi(T) < 0$. Por eso existe $\delta \in I$ tal que $\psi(\delta) = 0$. Ahora, nosotros consideramos la función $w(t) = a\chi_{E \cap [0, \delta[}(t) + b\chi_{E \cap [\delta, T]}(t)$. Esta es medible de la definición de δ , (a) sigue. Por otro lado, podemos escribir, para $t \in E$, $h^{**}(z(t)) = c(z(t) - a) + h(a)$ con $c = [h(b) - h(a)]/(b - a)$. Teniendo en cuenta (a) y $w(t) \in \{a, b\}$ en E , tenemos, por la definición de c

$$\int_I h^{**}(z(t)) \chi_E(t) d\mu = \int_E c(z(t) - a) d\mu + \int_E h(a) d\mu = \int_E c(w(t) - a) d\mu + \int_E h(a) d\mu = \int_E$$

y así (b) se cumple. Fijamos t en I ; si $t < \delta$.

$$\int_0^t (w(s) - z(s)) \chi_E(s) d\mu = \int_0^t (a - z(s)) \chi_E(s) d\mu \leq 0,$$

si $t \geq \delta$ entonces

$$\int_0^t (w(s) - z(s)) \chi_E(s) d\mu = \int_0^t w(s) \chi_E(s) d\mu - \int_0^T z(s) \chi_E(s) d\mu + \int_t^T z(s) \chi_E(s) d\mu$$

aquí hemos usado (a) y la demostración del lema queda completa.

Observación 4.2. Si cambiamos “a” por “b” en la definición de la función ψ y w , obtenemos la misma conclusión a menos de cambiar “ $\leq$ ” por “ $\geq$ ” en (c).

Lema 4.3. Si además de las hipótesis del Lema 4.1, asumimos $\{\xi \in \mathbb{R}: h^{**}(\xi) < h(\xi)\} = \cup_i]a_i, b_i[$, donde tales intervalos son supuestos disjuntos, $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, con i recorriendo un conjunto a lo más numerable. Adicionalmente asumiremos que la función h satisface la siguiente condición de crecimiento: $h(\xi) \geq \alpha |\xi|^p - \beta$, para algunas constantes α, β , $\alpha > 0$ y $1 < p < +\infty$. Entonces, si la función z está en $L^p(]0, T[)$, existe una función w en $L^p(]0, T[)$ que toma valores en $\cup_i \{a_i, b_i\}$ sobre $\{t \in I: z(t) \in \cup_i]a_i, b_i[\}$ tal que

$$(a) \int_I w(t) d\mu = \int_I z(t) d\mu,$$

$$(b) \int_I h(w(t)) d\mu = \int_I h^{**}(z(t)) d\mu,$$

t para todo $t \in I$

$$(c) \int_0^t w(s) d\mu \leq \int_0^t z(s) d\mu.$$

Demostración. Poniendo $E_i = \{t \in I: a_i < z(t) < b_i\}$, aplicamos el Lema 4.1 para obtener una función medible w_i que toma valores o bien a_i o b_i sobre E_i , tales que para cada i

$$(i) \int_{E_i} w_i d\mu = \int_I z \chi_{E_i}(t) d\mu,$$

$$(ii) \int_{E_i} h(w_i(t)) d\mu = \int_I h^{**}(z(t)) \chi_{E_i}(t) d\mu,$$

y para todo $t \in I$

$$(iii) \int_0^t w_i(s) \chi_{E_i}(s) d\mu \leq \int_0^t z(s) \chi_{E_i}(s) d\mu.$$

Ponemos $E_0 = I \setminus \cup_i E_i$ y definimos $w: I \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$w(t) = z(t)\chi_{E_0}(t) + \sum_i w_i(t)\chi_{E_i}(t).$$

Tal función satisfecerá los requerimientos del lema. El hecho que w está en L^p es una consecuencia directa de la condición de crecimiento sobre h .

Observación 4.4. Por la observación 4.2, concluimos también que existe una función, aún denotada por w , en $L^p([0, T])$ tal que (a), (b) y (c) se cumplen, a menos de cambiar el sentido de la desigualdad.

Hipótesis (H).- Se asume $+\infty > p > 1$.

La función $g: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

- (g₁) g es $L \otimes B(\mathbb{R})$ - medible;
- (g₂) $u \rightarrow g(t, u)$ es semicontinua inferiormente para casi todo t en $[0, T]$;
- (g₃) $u \rightarrow g(t, u)$ es monótona para casi todo t en $[0, T]$;

Además:

- (g₄) Existe una constante α_1 tal que
 $g(t, u) \geq -\alpha_1 |u|^p - \beta_1(t)$ donde β_1 está en $L^1([0, T])$.

La función $h: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es tal que

- (h₁) h es semicontinua inferiormente.
- (h₂) Existen dos constantes; α_2, β_2 con $\alpha_2 > 0$, tales que
 $h(\xi) \geq \alpha_2 |\xi|^p - \beta_2$.

Adicionalmente, se asume que $1 - 2^p T^p \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0$.

Consideremos el problema:

$$\min_{u \in U} \int_0^T g(t, u(t)) dt + \int_0^T h(u'(t)) dt \quad (P_0)$$

donde $U = \{u \in AC([0, T]); u(0) = a, u(T) = b\}$.

Notamos que se admite como función h la función indicatriz de cualquier conjunto cerrado.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.5. Sea g y h funciones que satisfacen la hipótesis (H) enunciada anteriormente. Asumimos que la funcional $\int_I g(t, u(t)) dt + \int_I h(u'(t)) dt$ tenga un valor finito para algún u en U . Entonces el problema (P_0) admite al menos una solución.

Observación 4.6. La hipótesis de monotonía sobre $g(t, \cdot)$ no puede ser quitada en general. Para ver esto, basta tener en cuenta el ejemplo 3.6 de la sección previa.

Demostración del teorema 4.5.

a) Nosotros primero consideramos el problema convexificado

$$\min_{u \in U} \int_0^T g(t, u(t)) dt + \int_0^T h^{**}(u'(t)) dt \quad (P_0^{**})$$

El razonamiento efectuado en la demostración del teorema de Tonelli permite concluir, en virtud de la hipótesis (H), que el problema (P_0^{**}) admite al menos una solución, la cual denotamos por $\tilde{u}$.

b) Aplicamos el lema 4.3 a la función $\tilde{u}'$ para obtener una función w en $L^p([0, T])$ que satisface

$$\int_0^T w(t) dt = \int_0^T \tilde{u}'(t) dt \quad (4.1)$$

$$\int_0^T h(w(t)) dt = \int_0^T h^{**}(\tilde{u}'(t)) dt; \quad (4.2)$$

y para todo t en $]0, T]$

$$\int_0^t w(s) ds \leq \int_0^t \tilde{u}'(s) ds. \quad (4.3)$$

c) Ahora, consideramos la función continua u , solución del problema

$$u'(t) = w(t) \text{ y } u(0) = a. \quad (4.4)$$

Claramente $u \in AC([0, T])$ porque $w \in L^p$. Pretendemos que la función u sea una solución del problema (P_0) . Para tal propósito, probaremos que

$$u(T) = b; \quad \int_0^T h^{**}(\tilde{u}'(t)) dt = \int_0^T h(u'(t)) dt \quad (4.5)$$

$$y \int_0^T g(t, \tilde{u}(t)) dt = \int_0^T g(t, u(t)) dt. \quad (4.6)$$

La primera igualdad de (4.5) es una consecuencia directa de (4.1) y la segunda resulta de (4.2).

Veamos la prueba de (4.6). Teniendo en cuenta (4.4), (4.3) se convierte en $u(t) \leq \tilde{u}(t)$ para t en $]0, T]$. De modo que si $g(t, \cdot)$ es una función no-decreciente para casi todo t en $[0, T]$, lo anterior implica

$$g(t, u(t)) \leq g(t, \tilde{u}(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.7)$$

Por lo tanto

$$\int_0^T g(t, u(t)) dt \leq \int_0^T g(t, \tilde{u}(t)) dt. \quad (4.8)$$

Por otro lado, como $\tilde{u}$ es una solución de (P_0^{**}) , por definición de h^{**} , se tiene

$$\int_0^T g(t, u(t)) dt + \int_0^T h(u'(t)) dt \geq \int_0^T g(t, \tilde{u}(t)) dt + \int_0^T h^{**}(\tilde{u}(t)) dt.$$

El cual, junto con la segunda igualdad de (4.5) y (4.8) permite concluir que (4.6) se cumple. Esto prueba que u es una solución del problema original (P_0) . Si $g(t, \cdot)$ es una función no creciente para casi todo t en $[0, T]$, aplicamos la observación 4.4 para obtener $u(t) \geq \tilde{u}(t)$, $t \in [0, T]$. Entonces (4.7) se cumple, luego se repite el argumento hecho anteriormente.

En la demostración del teorema previo, el lema 4.3 (resp. obs. 4.4) fue usado para construir una función $u \in U$ solución del problema (P_0) a partir de una función $\tilde{u} \in U$ solución del problema (P_0^{**}) , tal que $u \leq \tilde{u}$ (resp. $u \geq \tilde{u}$). Por eso, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.7. (Problema con obstáculo). Si, además de las hipótesis del teorema 4.5, asumimos que $g(t, \cdot)$ es no-decreciente (resp. no-creciente) para casi todo t . Entonces, dada cualquier función $\psi \in L^1$ la funcional en (P_0) alcanza su mínimo en el conjunto convexo

$$\{u \in U: u \leq \psi \text{ (resp. } u \geq \psi)\}.$$

Ejemplo 4.8. Consideremos la funcional

$$J(u) = \int_0^T g(u(t)) dt + \int_0^T (1 - |u'(t)|)^2 dt,$$

donde $g(u) = 0$ si $u \leq 0$ y $g(u) = u$ si $u \geq 0$, y nosotros buscamos el mínimo de J en U con datos homogéneos en 0 y T . Nuestro teorema afirma que J tiene al menos un punto de mínimo. En realidad, uno puede encontrar tal mínimo explícitamente.

Observaciones finales

El lector interesado en el estudio de problemas de minimización no-convexo y unidimensionales ($u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$) podrá consultar [Ce, A-T1, M1, M3, Ra1, Ra2, C-C, C-M, A-C]. En el caso que $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y las funcionales dependan del gradiente referimos a [A-T, C1, C2, C-P, M2, M3, Ra2, Ra4, T] y si dependen del laplaciano, algunas referencias son [A-T2, A-T3, C-F, F1, F2, F5, R, Ra2, Ra3]. Finalmente para el operador de la ecuación de la onda citamos [B-F].

Algunos resultados de no-existencia de mínimo pueden ser encontrados en [M1, M2, F3, F4, C1, Fr]. En realidad no podemos pretender en dar una lista completa de referencias, sin embargo el lector encontrará una extensa bibliografía en los trabajos citados.

Debemos decir que el presente manuscrito es una versión unidimensional de los resultados expuestos en [F2] y están ligados con los de [M1].

REFERENCIAS

- [A-C] M. Amar, A. Cellina, *On passing to the limit for non-convex variational problems, Asymptotic Analysis*, 9 (1994), 135-148.
- [A-T1] G. Aubert, R. Tahraoui, *Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations...*, *J. Diff. Eq.*, 33 (1979), 1-15.
- [A-T2] G. Aubert, R. Tahraoui, *Théorèmes d'existence en optimisation non convexe, Applicable Analysis*, 18 (1984), 75-100.
- [A-T3] G. Aubert, R. Tahraoui, *Sur une classe de problèmes différentiels non linéaires par une méthode variationnelle, Bollettino U.M.I.*, 7 3-B (1989), 739-757.
- [B-F] A. Bressan, F. Flores, *Multivariable Aumann integrals and controlled wave equations, J. Math. Anal. Appl.*, 189 (1995), 315-334.

- [C1] A. Cellina, *On minima of a functional of the gradient: necessary conditions*, *Nonlinear Analysis: T. M. A.*, **20** N° 4 (1993), 337-341.
- [C2] A. Cellina, *On minima of a functional of the gradient: sufficient conditions*, *Nonlinear Analysis T. M. A.*, **20** N° 4 (1993), 343-347.
- [C-C] A Cellina, G. Colombo, *On a classical problem of the Calculus of Variations without convexity assumptions*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, **7** N° 2 (1990), 97-106.
- [C-F] A Cellina, F. Flores, *Radially symmetric solutions of a class of problems of the Calculus of Variations without convexity assumptions*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, **9** N° 4 (1992), 465-478.
- [C-M] A Cellina, C. Mariconda, *The existence question in the Calculus of Variations: a density result*, *Proceedings of the Ame. Math. Soc.*, **120** N° 4 (1994), 1145-1150.
- [C-P] A Cellina, S. Perrota, *On minima of radially symmetric functionals of the gradient*, *Nonlinear Analysis: T. M. A.*, **23** N° 2 (1994), 239-249.
- [Ce] L. Cesari, *"Optimization-Theory and applications"*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Da] B. Dacorogna, *"Direct methods in the Calculus of Variations"*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [E-T] I. Ekeland, R. Temam, *"Convex analysis and variational problems"*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [F1] F. Flores, *Existence theorems for a class of non convex problems in the Calculus of Variations*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **78** N° 1 (1993), 31-48.
- [F2] F. Flores, *On radial solutions to non-convex variational problems*, *Houston Journal of Mathematics*, to appear.
- [F3] F. Flores, *The lack of lower semicontinuity and non-existence of minimizers*, *Nonlinear Analysis: T. M. A.*, **23** N° 1 (1994), 143-153.
- [F4] F. Flores, *Some remarks about relaxation problems in the Calculus of Variations*, *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, Section A*, **126** (1996), to appear.
- [F5] F. Flores, *On lower perturbations of a class of non-convex integrals*, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **16** (1&2) (1995), 11-125.
- [Fr] G. Friesecke, *A necessary and sufficient condition for nonattainment and formation of microstructure almost everywhere in scalar variational problems*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A*, **124-A** (1994), 437-471.

- [M1] P. Marcellini, *Alcune osservazioni sull'esistenza del minimo di integrali del calcolo delle variazioni senza ipotesi di convessità*, *Red. di Matem. (2)*, 13 (1980), 271-281.
- [M2] P. Marcellini, *A relation between existence of minima for non convex integrals and uniqueness for non strictly convex integrals of the Calculus of Variations*, in "Mathematical Theories of Optimization", *Springer Lectures Notes in Mathematics*, 979 (1983), 216-231.
- [M3] P. Marcellini, *Non-convex integrals of the Calculus of Variations*, in "Methods of Nonconvex Analysis", *Springer Lectures Notes in Mathematics*, 1446 (1989), 16-57.
- [R] P. J. Rabier, *New existence results for some nonconvex optimization problems*, *Commun. in Partial Diff. Equa.*, 14 N° 6 (1989), 699-740.
- [Ra1] J. P. Raymond, *Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions en Calcul des Variations*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 4 N° 2 (1987), 169-202.
- [Ra2] J. P. Raymond, "Problèmes de Calcul des Variations et de contrôle optimal: Existence et régularité des solutions", *Université Paul Sabatier, Toulouse, Thèse d'habilitation*, 1990.
- [Ra3] J. P. Raymond, *Existence theorems without convexity assumptions for optimal control problems governed by parabolic and elliptic systems*, *Applied Mathematics and Optimization*, 26 (1992), 39-62.
- [Ra4] J. P. Raymond, *Existence and uniqueness results for minimization problems with nonconvex functionals*, *Journal of Optim. Theory and Appl.*, 82 N° 3 (1994), 571-592.
- [T] R. Tahraoui, *Sur une classe de fonctionnelles non convexes et applications*, *SLAM J. Math. Anl.*, 21 N° 1 (1990), pp. 37-52.

Principio de maximización de la información de Akaike

Rosa María Inga Santivañez (*)

RESUMEN:

Se propone una justificación rigurosa del criterio que propuso Akaike para seleccionar el mejor modelo. Además presentamos el estudio del error del AIC en varios casos.

Palabras claves: Criterio de información de Akaike (AIC), Mínimo AIC (MAIC), Medida de Discriminación de Kullback-Leibler.

Introducción

Nosotros presentamos un desarrollo del estadístico asociado al Criterio de Información de Akaike (AIC) para el estudio de dos tipos de modelos: modelo no restringido (cuando no existen restricciones en los parámetros del modelo) y modelo restringido (cuando existen restricciones en los parámetros del modelo).

(*) Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas.
Av. Venezuela s/n. Lima 1, Perú.

Además se presenta el criterio de selección que propuso Akaike para determinar el mejor entre varios modelos propuestos. Dicho criterio está basado en el mínimo AIC (MAIC).

Si bien los resultados básicos que se presentan son una recopilación de los trabajos de Akaike (1973, 1977, 1991) y Sakamoto, Ishiguro y Kitagawa (1986) en este trabajo se proporciona una justificación rigurosa del criterio que propuso Akaike para seleccionar el mejor modelo, los resultados obtenidos son presentados en las secciones I y II.

Sakamoto, Ishiguro y Kitagawa (1986) estudiaron el error del AIC cuando θ_k^* es $(\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0, \dots, 0)$ y la matriz de información de Fisher, J_* , es la matriz unidad. Nosotros complementamos el estudio del error del AIC analizando los siguientes casos:

- 1) $\theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0, \dots, 0)$ es una matriz definida positiva;
- 2) $\theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0_{k+1}, \dots, 0_K)$ y J_* es la matriz unidad;
- 3) $\theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0_{k+1}, \dots, 0_K)$ y J_* es una matriz definida positiva.

Estos resultados se presentan en la sección III.

I. PRINCIPIO DE MAXIMIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN DE AKAIKE EN EL CASO DE MODELO NO RESTRINGIDO

Considérese el espacio estadístico $(\chi, \beta_\chi, P_\theta)_{\theta \in \Theta_K}$ y sea $f(x/\theta)$ con $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K) \in \Theta_K$ la densidad de P_θ con respecto a una medida σ -finita ν . Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple y sea $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_K^*) \in \Theta_K$ el valor del vector de parámetros que el estadístico propone como verdadero.

Sea $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ una variable aleatoria con la misma distribución de X , luego la función de densidad de Z dado θ^* es $f(z_1, \dots, z_n/\theta^*)$. La función de densidad de Z dado θ es $f(z_1, \dots, z_n/\theta)$. Si $\theta(z_1, \dots, z_n)$ es un estimador de θ , la función de densidad estimada de X será $f(x_1, \dots, x_n/\theta(z_1, \dots, z_n))$ con esta notación el logaritmo de la función de verosimilitud será

$$\ell(\theta) = \log f(x_1, \dots, x_n/\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i/\theta) \quad (1.1)$$

y el logaritmo de la función de verosimilitud estimada por

$$\ell(\theta(z_1, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i/\theta(z_1, \dots, z_n)) \quad (1.2)$$

El estimador de máximo verosimilitud se denotará por $\hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n)$ que bajo condiciones de regularidad

$$\sqrt{n} (\theta_K(z_1, \dots, z_n) - \theta^*) \xrightarrow{L} N(0, J_{\theta^*}^{-1}) \quad (1.3)$$

donde J_{θ^*} es la matriz de información de Fisher. Además,

$$\ell^*(\theta) = E_{X/\theta^*}(\ell(\theta)) \quad (1.4)$$

$$\ell^*(\theta(z_1, \dots, z_n)) = E_{X/\theta^*}[\ell(\theta(z_1, \dots, z_n))] \quad (1.5)$$

$$\ell_n^*(K) = E_{Z/\theta^*}[\ell^*(\hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n))] \quad (1.6)$$

$$\ell_n^{**}(K) = E_{X/\theta^*}[\ell(\hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n))] \quad (1.7)$$

Supongamos que se desea saber si un vector de parámetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)$, $\theta \in \Theta_K$ se aproxima a θ^* . Este problema se podrá resolver mediante el siguiente contraste de hipótesis.

$$H_0: f(x_1, \dots, x_n/\theta) = f(x_1, \dots, x_n/\theta^*)$$

frente a

$$H_1: f(x_1, \dots, x_n/\theta) \neq f(x_1, \dots, x_n/\theta^*) \quad (1.8)$$

equivale a analizar los modelos

$$\text{Modelo (0): } f(x_1, \dots, x_n/\theta^*), \quad \theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_K^*)$$

$$\text{Modelo (K): } f(x_1, \dots, x_n/\theta), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_K) \in \Theta_K \quad (1.9)$$

Y una medida natural de contrastar las hipótesis dadas en (1.8) es la medida de discriminación de Kullback-Leibler.

$$\begin{aligned} I(f(x_1, \dots, x_n/\theta^*); f(x_1, \dots, x_n/\theta(z_1, \dots, z_n))) &= \\ &= \int_{\chi^n} f(x_1, \dots, x_n/\theta^*) \log \left(\frac{f(x_1, \dots, x_n/\theta^*)}{f(x_1, \dots, x_n/\theta(z_1, \dots, z_n))} \right) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

$$= E_{X/\theta^*} \left(\log f(x_1, \dots, x_n/\theta^*) \right) - E_{X/\theta^*} \left(\log f(x_1, \dots, x_n/\theta(z_1, \dots, z_n)) \right)$$

$$I \left(f(x_1, \dots, x_n/\theta^*); f(x_1, \dots, x_n/\theta(z_1, \dots, z_n)) \right) = \ell^*(\theta^*) - \ell^*(\theta(z_1, \dots, z_n)) \quad (1.10)$$

$$\text{Min}_{\theta(z_1, \dots, z_n)} E_{Z/\theta^*} \left(I \left(f(x_1, \dots, x_n/\theta^*); f(x_1, \dots, x_n/\theta(z_1, \dots, z_n)) \right) \right) \quad (1.11)$$

equivale a

$$\text{Max}_{\theta(z_1, \dots, z_n)} E_{Z/\theta^*} \ell^*(\theta(z_1, \dots, z_n)) \quad (1.12)$$

Analicemos esta última expresión.

Si $\hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n)$ es un estimador máxima verosimilitud de θ y $\theta(z_1, \dots, z_n)$ un estimador de θ , entonces

$$\log f(x_1, \dots, x_n/\theta(z_1, \dots, z_n)) \leq \log f(x_1, \dots, x_n/\hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n)) \quad \forall z_1, \dots, z_n.$$

Tomando esperanza en X/θ^* , se tiene.

$$\ell^*(\theta(z_1, \dots, z_n)) \leq \ell^*(\hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n))$$

Volviendo a tomar esperanza en Z/θ^* , se llega a

$$E_{Z/\theta^*} \ell^*(\theta(z_1, \dots, z_n)) \leq \ell_n^*(K),$$

luego

$$\text{Max}_{\theta(z_1, \dots, z_n)} E_{Z/\theta^*} (\ell(\theta(z_1, \dots, z_n))) \leq \ell_n^*(K). \quad (1.13)$$

Efectuando el desarrollo de Taylor de $\ell^*(\theta) = n E_{X_i/\theta^*} (\log f(x_i/\theta))$ alrededor de θ^* , se tiene

$$\ell^*(\theta) = \ell^*(\theta^*) - \frac{1}{2} \sqrt{n} [\theta - \theta^*] J. \sqrt{n} [\theta - \theta^*]^t + R_n \quad (1.14)$$

donde $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0$.

Tomando $\theta = \hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n)$ en (1.14) y como

$$\sqrt{n} [\hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n) - \theta^*] J. \sqrt{n} [\hat{\theta}_K(z_1, \dots, z_n) - \theta^*]^t \xrightarrow{L} \chi_K^2,$$

y luego tomando esperanza en Z/θ^* se tiene para un n suficientemente grande que

$$\ell_n^*(K) = \ell^*(\theta^*) - \frac{K}{2}. \quad (1.15)$$

Como $K/2 > 0$, entonces

$$\ell_n(K) \leq \ell^*(\theta^*). \quad (1.16)$$

De otro lado, si se efectúa el desarrollo de Taylor del $\ell(\theta) = \log f(x_1, \dots, x_n/\theta)$ alrededor del estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)$ se obtiene para un n suficientemente grande que

$$\begin{aligned} \ell(\theta) = & \ell(\hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)) - \frac{1}{2} \sqrt{n} [\theta - \hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)] J. \sqrt{n} [\theta - \hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)]^t \\ & + R_n. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Tomando $\theta = \theta^*$ en (1.17) y tomando esperanza en X/θ^* se tiene para un n suficientemente grande que

$$\ell^*(\theta^*) = \ell_n^{**}(K) - \frac{K}{2} \Rightarrow \ell^*(\theta^*) \leq \ell_n^{**}(K) \quad (1.18)$$

Sustituyendo (1.18) en (1.15) se llega a

$$\ell_n^*(K) = \ell_n^{**}(K) - K. \quad (1.19)$$

Como $K > 0$ se tiene que

$$\ell_n^{**}(K) \geq \ell_n^*(K). \quad (1.20)$$

De (1.13), (1.16), (1.18) y (1.20), se obtiene

$$\max_{\theta(z_1, \dots, z_n)} E_{Z/\theta^*} \ell^*(\theta(z_1, \dots, z_n)) \leq \ell_n^*(K) \leq \ell^*(\theta^*) \leq \ell_n^{**}(K).$$

AIC (K)

De (1.19) se tiene

$$E_{x/\theta^*} (\ell(\hat{\theta}_K (x_1, \dots, x_n))) = \ell_n^* (K) + K$$

es decir, $\ell(\hat{\theta}_K (x_1, \dots, x_n))$ es un estimador sesgado de $\ell_n^* (K)$.

Así, el estadístico asociado al criterio de información de Akaike (1973) del modelo (K) es

$$AIC (K) = -2 \ell(\hat{\theta}_K (x_1, \dots, x_n)) + 2 K$$

AIC (K) es un estimador insesgado de $-2 \ell_n^* (K)$.

$$AIC = -2 \left(\begin{array}{l} \text{El máximo del logaritmo} \\ \text{de la verosimilitud del} \\ \text{modelo} \end{array} \right) + 2 \left(\begin{array}{l} \text{Número de parámetros} \\ \text{libres del modelo} \end{array} \right)$$

Si se tuvieran varios modelos MODELO (K), el criterio que propuso Akaike es el siguiente: primero calcular el AIC (K) y luego seleccionar aquel modelo que tenga el mínimo AIC (K) a este criterio se le conoce como el criterio MAIC. Observemos que al tomar el mínimo se está tomando el modelo que tenga mayor $\ell(\theta (x_1, \dots, x_n))$ lo cual; implicará que se seleccionará el modelo cuyo $\ell(\hat{\theta}_K (x_1, \dots, x_n))$ esté más próximo de $\ell^*(\theta^*)$ que es lo que se busca.

II. CRITERIO DE INFORMACIÓN DE AKAIKE EN EL CASO DE MODELO RESTRINGIDO

Espacio paramétrico restringido

$$\Theta_k = \{ \theta \in \Theta_K / \theta_{k+1} = O_{k+1}, \dots, \theta_K = O_K \}, \quad 1 \leq k \leq K$$

$$\text{y } \theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, O_{k+1}, \dots, O_K) \in \Theta_k, \quad 1 \leq k \leq K$$

donde O_j es un valor dado del parámetro θ_j para $j = k+1, \dots, K$.

Un caso particular de este espacio paramétrico restringido es el dado por

$$\Theta_k = \{ \theta \in \Theta_K / \theta_{k+1} = \theta_{k+2} = \dots = \theta_K = 0 \}, \quad 1 \leq k \leq K$$

luego $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, 0, \dots, 0) \in \Theta_k$ es el vector de parámetros.

Y $\theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0, \dots, 0) \in \Theta_k$ es el valor del vector de parámetros que el estadístico propone como verdadero.

El contraste que interesa efectuar es

$$H_0: f(x_1, \dots, x_n/\theta) = f(x_1, \dots, x_n/\theta_k^*) \quad , \quad \theta_k^* \in \Theta_k, \theta \in \Theta_k, \\ 1 \leq k \leq K$$

frente a

$$H_1: f(x_1, \dots, x_n/\theta) \neq f(x_1, \dots, x_n/\theta_k^*) \quad , \quad \theta_k^* \in \Theta_k, \theta \in \Theta_k, \\ 1 \leq k \leq K$$

(2.1)

Los modelos asociados a este contraste de hipótesis son

$$\text{MODELO (0): } f(x_1, \dots, x_n/\theta_k^*) \quad , \quad \theta_k^* \in \Theta_k$$

$$\text{MODELO (K): } f(x_1, \dots, x_n/\theta) \quad , \quad \theta \in \Theta_k \quad (2.2)$$

Se obtuvo que el AIC (k) del MODELO (k) es

$$\text{AIC (k)} = -2 \ell(\hat{\theta}_k(x_1, \dots, x_n)) + 2k \quad , \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.3)$$

El AIC (k) es un estimador insesgado de $-2 \ell_n^*(k)$.

III. ERROR DEL AIC (k)

Como AIC (k) es un estimador insesgado de $-2 \ell_n^*(k)$ por tanto $-\frac{1}{2} \text{AIC (k)}$ es un estimador insesgado de $\ell_n^*(k)$.

$-\frac{1}{2} \text{AIC (k)}$ puede ser descompuesto en

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \text{AIC}(k) &= \ell_n^*(k) + \left[\ell(\theta^*) - \ell^*(\theta^*) \right] \\
 &+ \left[-n [\theta_k^* - \theta^*] J_* [\theta^* - \hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)]^t \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \left(n \|\theta_k^* - \hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)\|^2 - k \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$-\frac{1}{2} \text{AIC}(k) = \left(\begin{array}{c} \text{Media del logaritmo} \\ \text{de verosimilitud} \\ \text{esperado} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Error} \\ \text{Común} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Error} \\ \text{Individual} \end{array} \right)$$

Los términos de error dados en (3.1) pueden ser estudiados en las siguientes situaciones:

i) $\theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0, \dots, 0)$ y J_* es la matriz identidad (I_K)

$$\text{Error Común} = \ell(\theta^*) - \ell^*(\theta^*)$$

$$E_{X/\theta^*}(\text{Error Común}) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Error Individual} &= -n [\theta_k^* - \theta^*] J_* [\theta^* - \hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)]^t \\
 &+ \frac{1}{2} \left(n \|\theta_k^* - \hat{\theta}_K(x_1, \dots, x_n)\|^2 - k \right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se tiene

$$E_{X/\theta^*}(\text{Error Individual}) = 0 \quad \text{y}$$

$$V_{X/\theta^*}(\text{Error Individual}) = n \sum_{j=k+1}^K (\theta_j^*)^2 + \frac{k}{2}$$

ii) $\theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0, \dots, 0)$ y J_* es una matriz definida positiva

$$\text{Error Común} = \ell(\theta^*) - \ell^*(\theta^*)$$

$$E_{X/\theta^*}(\text{Error Común}) = 0.$$

Error Individual =

$$= n \sum_{l=1}^K [\theta_l^* - \hat{\theta}_l(x_1, \dots, x_n)] C(l) + \frac{1}{2} \left(n \|\theta_k^* - \hat{\theta}_k(x_1, \dots, x_n)\|^2 - k \right)$$

$$\text{donde } C(l) = \sum_{j=k+1}^K \theta_j^* \left[-E_{X_l/\theta^*} \left(\frac{d^2 \log f(x_l/\theta)}{d\theta_l d\theta_l} \right) \right]_0.$$

Se tiene que

$$E_{X/\theta^*} (\text{Error Individual}) = 0 \quad y$$

$$V_{X/\theta^*} (\text{Error Individual}) =$$

$$= n \left(\sum_{l=1}^K [C(l)]^2 a_{l,l} + \sum_{l_1 \neq l_2} C(l_1) C(l_2) a_{l_1, l_2} \right) + \frac{k}{2}$$

donde $a_{l,l}$ es el (l, l) -ésimo elemento de $J_{\bullet}^{-1}$

a_{l_1, l_2} es el (l_1, l_2) -ésimo elemento de $J_{\bullet}^{-1}$.

$$\text{iii) } \theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0_{k+1}, \dots, 0_K) \quad y \quad J_{\bullet} = I_K$$

$$\text{Error Común} = \ell(\theta^*) - \ell^*(\theta^*)$$

$$E_{X/\theta^*} (\text{Error Común}) = 0.$$

Error Individual =

$$= -n \sum_{j=k+1}^K (O_j - \theta_j^*) [\theta_j^* - \hat{\theta}_j(x_1, \dots, x_n)] + \frac{1}{2} \left(n \|\theta_k^* - \hat{\theta}_k(x_1, \dots, x_n)\|^2 - k \right)$$

Se tiene

$$E_{X/\theta^*} (\text{Error Individual}) = 0 \quad y$$

$$V_{X/\theta^*} (\text{Error Individual}) = n \sum_{j=k+1}^K (O_j - \theta_j^*)^2 + \frac{k}{2}$$

iv) $\theta_k^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*, 0_{k+1}, \dots, 0_K)$ y $J.$ es una matriz definida positiva.

$$\text{Error Común} = \ell(\theta^*) - \ell^*(\theta^*)$$

$$E_{X/\theta^*}(\text{Error Común}) = 0.$$

Error individual =

$$= -n \sum_{l=1}^k [\theta_l^* - \hat{\theta}_l(x_1, \dots, x_n)] D(l) = \frac{1}{2} \left(n \|\theta_k^* - \hat{\theta}_k(x_1, \dots, x_n)\|^2 - k \right)$$

$$\text{donde } D(l) = \sum_{j=k+1}^K (0_j - \theta_j^*) \left[-E_{X_l/\theta^*} \left(\frac{d^2 \log f(x_l/\theta)}{d\theta_l d\theta_l} \right)_{\theta^*} \right]$$

Se tiene

$$E_{X/\theta^*}(\text{Error Individual}) = 0 \text{ y}$$

$$V_{X/\theta^*}(\text{Error Individual}) =$$

$$= n \left(\sum_{l=1}^K [D(l)]^2 a_{l_1 l_1} + \sum_{l_1 \neq l_2} D(l_1) D(l_2) a_{l_1 l_2} \right) + \frac{k}{2}.$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Akaike, H. (1973): "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle". *Second International Symposium on Information Theory*. B. N. Petrov and F. Csáki eds., Akademiai Kiado, Budapest. 267 - 281.
2. Akaike, H. (1977): "On entropy maximization principle". *North-Holland Publishing Company*, 27 - 41.
3. Akaike, H. (1991): "Statistical inference and measurement of entropy". *En edición*.
4. Sakamoto, Y.; Ishiguro, M; Kitagawa, G. (1986): "Akaike information criterion statistics". *KTK Scientific Publishers / Tokio*.

Proximal interior point methods

Alfredo Noel Iusem^(*)

ABSTRACT

Proximal interior point (PIP) methods are generalizations of the classical proximal point method. Instead of the Euclidean distance, then use a generalized distance which guarantees that the generated sequence lies in the interior of the feasible region. Because of the interior point nature of the PIP algorithms, their analysis has several features in common with the analysis of interior point methods. The latter methods became a subject of intense investigation after Karmarkar in 1984 introduced a projective scaling interior point algorithm for solving linear programming (LP) problems in polynomial time.

The classical proximal point method

The origins of the classical proximal point method can be traced back to the early fifties in connection with regularization of ill-posed problems. A survey on the subject can be found in [Lem]. For finite dimensional optimization, the basic idea is to replace the problem

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s. t. } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (0.1)$$

(*) Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Estrada Dona castorina 110, Jardim Botânico. Rio de Janeiro, RJ, CEP 22460-320, Brasil.

with $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, by a sequence of subproblems, whose solutions give rise to a sequence $\{x^k\}$ defined as $x^0 \in \mathbb{R}^n$, and

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin} \{ f(x) + \lambda_k \|x - x^k\|^2 : x \in \mathbb{R}^n \} \quad (0.2)$$

where λ_k is a bounded sequence of positive real numbers. The sequence $\{x^k\}$ is expected to converge to a solution of (0.1). The purpose of this approach is to obtain subproblems which are better behaved than the original problem, and this goal is achieved, for instance, when f is convex and bounded below, in which case (0.1) may have infinite solutions or no solutions at all, while (0.2) always has a unique solution. The method can be extended to the problem of finding zeroes of monotone operators $T: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ (i.e. such that $\langle u-v, x-y \rangle \geq 0$ for all $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in T(x)$, $v \in T(y)$), in which case (0.2) becomes the problem of finding x^{k+1} such that

$$x^{k+1} \in (\lambda_k^{-1} T + I)^{-1} (x^k) \quad (0.3)$$

When $T = \partial f$, i.e. T is the subdifferential of a convex function f , (0.3) reduces to (0.2).

The following results have been established in [Roc2].

- If there exists $z \in \mathbb{R}^n$ such that $0 \in T(z)$ then the sequence $\{x^k\}$ generated by (0.3) converges to a point $x^* \in \mathbb{R}^n$ such that $0 \in T(x^*)$.
- Under the hypothesis of (0.1), if T^{-1} is Lipschitz continuous at 0 then the sequence $\{x^k\}$ generated by (0.3) converges linearly, and superlinearly if $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$.
- If $T = \partial f$ for some convex polyhedral function f (i.e., the epigraph of f is a convex polyhedron) bounded below on $\mathbb{R}^n$, then convergence is finite.

These three results also hold, as proved in [Roc2], when each subproblem is solved only approximately, in the following sense. Let

$$P_k = (\lambda_k^{-1} T + I)^{-1} \quad (0.4)$$

and consider a sequence $\{x^k\}$ such that

$$\|x^{k+1} - P_k(x^k)\| \leq \epsilon_k \quad (0.5)$$

with

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty \quad (0.6)$$

Then 1.1 - 1.3 hold for any sequence $\{x^k\}$ satisfying (0.5) and (0.6).

Since no differentiability assumptions are made on f for problem (0.1), the method can in principle be also applied to constrained convex optimization problems. Assume that the problem at hand is

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s. t. } x \in C \end{cases} \quad (0.7)$$

with f convex and $C \subset \mathbb{R}^n$ closed and convex. First, (0.7) is reduced to

$$\begin{cases} \min \bar{f}(x) \\ \text{s. t. } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (0.8)$$

with

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in C \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0.9)$$

and the method is applied to (0.8). The final effect of this trick is to replace (0.2) by

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin} \{ f(x) + \lambda_k \|x - x^k\|^2 : x \in C \} \quad (0.10)$$

Using standard convex duality results (e.g. [Roc1]) it has been proved in [Roc3] that the dual sequence generated by the Augmented Lagrangian method for constrained convex programming (see e.g. [Avr]) coincides with the sequence generated by the proximal point method applied to the dual problem.

Generalized distances

In general, the proximal point method as presented in section 1 should be seen as a conceptual tool rather than a computational procedure, because the subproblems (e.g. (0.2), (0.10)), though better conditioned than the original problem (e.g. (0.1), (0.7)), are in principle as hard to solve as these. The method becomes an interesting numerical procedure only when the subproblems are structurally simpler than the original problem. The case of the Augmented Lagrangian method mentioned in section 1 is an example of this situation, because the subproblems have just positivity constraints, while the original problem has general convex constraints. The methods discussed in this section are devised to deal with problem (0.7) for the case in which C has a nonempty interior, so as to obtain unrestricted subproblems. This goal is achieved through substitution of a "generalized distance" between x and x^k for $\|x - x^k\|^2$ in (0.2). This "distance" (which in general is not symmetric and does not satisfy the

triangular inequality) is defined between points of C and guarantees that x^{k+1} belongs to the interior of C , so that the constraint $x \in C$ becomes redundant in the subproblems. Thus the interior point nature of the method.

Let C° be the interior of C . If $d(\cdot, \cdot)$ is such a "distance", (0.2) (becomes)

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin} \{f(x) + \lambda_k d(x, x^k) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (0.11)$$

with $x^0 \in C^\circ$. The term $d(x, x^k)$ in (0.11) has therefore a double purpose: it regularizes the subproblems (which have unique solutions if f is convex and bounded below on C), but also has a penalization effect, forcing the sequence $\{x^k\}$ to remain in the interior of C .

Two families of "distances" of this type have been considered. First we have Bregman distances, which originate in [Bre]. Starting with a strictly convex and continuous function $g: C \rightarrow \mathbb{R}$, $D_g: C \times C^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, is defined as

$$D_g(x, y) = g(x) - g(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle. \quad (0.12)$$

It follows from strict convexity of g that $D_g(x, y) \geq 0$ for all x, y , and that $D_g(x, y) = 0$ if and only if $x = y$. Some additional technical assumptions on g are required for (0.11) to work with $d = D_g$. The function g is assumed to be twice continuously differentiable in C° (though not necessarily in C) and to have nonsingular Hessian matrix at all $x \in C^\circ$, $D_g(x, \cdot)$ and $D_g(\cdot, y)$ are required to have bounded level sets, and some regularity conditions are imposed regarding the behavior of D_g near the boundary ∂C of C . One of them, called boundary coerciveness (see [Ius4], demands that $\lim_{k \rightarrow \infty} D_g(y, y^k) = \infty$ if $y \in C^\circ$ and $\{y^k\}$, contained in C° , converges to a point in ∂C . This condition ensures that the sequence $\{x^k\}$ generated by (0.11) with $d = D_g$ stays in C° , so achieving the penalization effect. As examples of boundary coercive Bregman distances we have:

Example 2.1

$C = \mathbb{R}^n$, $g(x) = x^t Mx$ with M symmetric positive definite. Then $D_g(x, y) = \|x - y\|_M^2$. (0.11) with $d = D_g$ and $M = I$ is just (0.2).

Example 2

$C = \mathbb{R}_+^n$ (the nonnegative orthant of $\mathbb{R}^n$), $g(x) = \sum_{j=1}^n x_j \log x_j$ (with the convention that $0 \log 0 = 0$). Then $D_g(x, y) = \sum_{j=1}^n [x_j \log(x_j/y_j) + y_j - x_j]$ which is the Kullback-Leibler information divergence, widely used in Statistics (see [Lie]).

Example 2.3

$$C = \mathbb{R}_+^n, g(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^\alpha - x_i^\beta) \text{ with } \alpha \geq 1, \beta \in (0,1).$$

Example 2.4

$$C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \ (a, b \in \mathbb{R}^n, a < b), \ g(x) = \sum_{i=1}^n [(x_i - a_i) \log (x_i - a_i) - (b_i - x_i) \log (b_i - x_i)]$$

The PIP method with Bregman distances ((0.11) with $d = D_g$) was first suggested in [Eri] and fully analyzed in [Egg] for g as in example 2.2, the method with general C and g was first presented in [Cen2], where convergence is established for the case in which (0.7) has all its solutions in C° . The case of solutions in the boundary was studied in [Che] under a hypothesis on g slightly stronger than boundary coerciveness, namely zone coerciveness (meaning that for all $y \in \mathbb{R}^n$ there exist $x \in C^\circ$ such that $(\nabla g(x) = y)$ and in [Ius4] under boundary coerciveness.

It has been shown in [Ius2] that the PIP method with Bregman functions, with g as in Example 2.2 is dually equivalent to the exponential method of multipliers (see [Ber]), in the same way as the standard proximal point method is equivalent to the Augmented Lagrangian method, as mentioned in section 1.

The second family of "distances" consists of the so called φ -divergences, which originate in the results of [Csi] and were formally introduced in [Teb]. It works only for $C = \mathbb{R}_+^n$ (an extension to the case of $C = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax \leq b\}$ with nonsingular $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ was recently presented in [Aus]). Starting with a strictly convex $\varphi; (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfying $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0, \varphi''(1) > 0$, we define $d_\varphi: \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$d_\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi(x_i/y_i) \quad (0.13)$$

In this case the penalization effect is achieved by the additional condition that $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = -\infty$. This condition, equivalent to boundary coerciveness, ensures that the sequence $\{x^k\}$ generated by the PIP method with φ -divergences for the problem $\min f(x)$ s.t. $x \geq 0$ (i.e. (0.11) with $d = d_\varphi$) remains in $\mathbb{R}_+^n$ (the strictly positive orthant of $\mathbb{R}^n$). The PIP method with φ -divergences was introduced in [Ius2].

We present next some examples of φ -divergences.

Example 2.5

$$\varphi_1(t) = t \log t - t + 1. \quad d_{\varphi_1}(x, y) = D_g(x, y) \text{ with } D_g \text{ as in Example 2.2.}$$

Example 2.6

$$\varphi_2(t) = t - \log t - 1. \quad d_{\varphi_2}(x, y) = d_{\varphi_1}(y, x) \text{ with } \varphi_1 \text{ as in Example 2.5.}$$

Example 2.7

$$\varphi_3(t) = (\sqrt{t} - 1)^2. \quad d_{\varphi_3}(x, y) = \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2$$

The PIP method with φ -divergences with φ as in example 2.6 is dually equivalent to the modified barrier method of Polyak (see [Pol1]).

Convergence rate results for PIP methods

Since these methods generalize to constrained optimization the standard proximal point method (0.2), the goal is to achieve results as close as possible to 1.1 - 1.3. The following results have been established this far for the PIP method with Bregman distances, under convexity of f .

- a) If problem (0.7) has solutions and g is boundary coercive then the sequence $\{x^k\}$ generated by (0.11) with $d = D_g$ converges to a solution of (0.7) [Ius4].
- b) Under the hypotheses a if the limit point x^* of $\{x^k\}$ belongs to C° , f is twice continuously differentiable and the Hessian matrix of f at x^* is nonsingular, then convergence is linear, and superlinear if $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ [Ius1].
- c) In the case of LP problems (i.e. $C = \mathbb{R}_+^n$ and $f(x) = c^T x$ if $Ax = b$, $f(x) = \infty$ otherwise) if $g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tg}_i''(t) < \infty$ for all j (e.g. g as in example 2.2) then convergence is linear, and superlinear if $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ [Bur].

The following results are available for the PIP method with φ -divergences for the problem $\min f(x)$ s.t. $x \geq 0$ with convex f .

- d) If the problem has solutions and additionally either.
 - (a) $\varphi'(t) \leq \varphi''(1) \log t$ and $\{\lambda_k\}$ is bounded away from zero, or
 - (b) $\varphi''(1)(1 - 1/t) \leq \varphi'(t) \leq \varphi''(1) \log t$,

- then the sequence $\{x^k\}$ generated by (0.11) with $d = d_\phi$ converges to a solution of the problem ([Ius2]) for hypothesis (a) and [Ius3] for hypothesis (b)).
- e) Under the hypotheses d, if the limit point x^* of $\{x^k\}$ belongs to R_{++}^n , f is twice continuously differentiable in R_{++}^n and the Hessian matrix of f is nonsingular at x^* , then convergence is linear, and superlinear if $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ [Ius1].
- f) Under the hypotheses d, for the case of linear programming convergence is linear, and superlinear if $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$. Furthermore, if the problem has a unique dual optimal solution $\bar{y}$, and there exists a primal optimal solution $\bar{x}$, such that the pair $(\bar{x}, \bar{y})$ is nondegenerate, then the sequence of Lagrange multipliers for the constraints $Ax = b$ of the subproblems converges to $\bar{y}$ [Ius3].

The case of linear programming deserves further comments. Using g as in Example 2.2 the subproblems become

$$\begin{cases} \min [(c^k)^t x + \sum_{i=1}^n x_i \log x_i] \\ \text{s. t. } Ax = b \end{cases} \quad (0.14)$$

where $c_i^k = \lambda_k^{-1} c_i - 1 - \log x_i^k$ (see [Ius5]). An implementation of the method for multicommodity transportation problems, where the subproblems are solved with the row-action method called MART (see [Cen1]) has achieved excellent computational performance (see [Nie], [Zen]).

For the cases of linear and quadratic programming, some results have been obtained in [Ius4] on the characterization of the limit of the sequence generated by the PIP method with Bregman distances, namely

- g) Consider problem (P):

$$\min \frac{1}{2} x^t Q x + c^t x + \gamma \quad (0.15)$$

with $Q \in R^{n \times n}$ symmetric positive semidefinite, $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $\gamma \in R$ and assume that the set V of solutions of (P) is nonempty. Let x^* be the limit of the sequence $\{x^k\}$ generated by the PIP method with Bregman distances, where $C = R_+^n$ and g is boundary coercive. Then x^* belongs to the relative interior of V and is a solution of the problem

$$\begin{cases} \min D_g(x, x^0) \\ \text{s. t. } x \in V \end{cases}$$

(i.e. x^* is the closest solution to the initial iterate in the sense of D_g).

The PIP method can be applied to optimization problems subject to convex constraints. Formally, the objective function is modified so that it takes the value $+\infty$ outside the feasible set (all the results discussed in B3 hold in this case). In practical terms, this means that the convex constraints are passed over to the subproblems. When the k -th subproblem is solved, we obtain not only its solution x^{k+1} but also a vector (say y^k) of KKT multipliers for the constraints. The problem of interest here is the behavior of this sequence $\{y^k\}$, expected to converge to an optimal solution of the dual of the original optimization problem. We review first existing results on this subject. First, we consider ergodic results, (i.e. convergence of a subsequence of the sequence $\{v^k\}$ defined as $v^k = \sum_{i=1}^k \eta_i^k y^i$ for some η_i^k such that $\sum_{i=1}^k \eta_i^k = 1$). The PIP method with the Bregman function g of example 2.2, is dually equivalent to Betsekas' exponential multipliers method, and convergence of any subsequence of v^k with $\eta_i^k = 1/k$ to an optimal dual solution (assuming that the dual optimal set is bounded) has been established in [Tse]. Similarly, the PIP method with the ϕ -divergence of example 2.6 is dually equivalent to Polyak's modified barrier method. Convergence of the sequence of dual functional values to the optimal dual value has been proved in [Jen] (this result follows also easily using 3.4 and standard duality arguments). An ergodic convergence result for the dual sequence generated by this method, under some nondegeneracy assumptions, can be found in [Pol1] (in this case v^k is the average with certain weights η_i^k of an appropriately chosen subsequence of $\{y^k\}$). Recently, this result has been extended in [Pol2] to the PIP method with a rather general class of ϕ -divergences (it is required that $-\psi'$ be log-convex, where ψ is the convex conjugate of ϕ).

Regarding convergence of the whole dual sequence $\{y^k\}$, the only existing results deal with the case of linear programming. For the case of PIP with the ϕ -divergence of example 2.6, it has been proved in [Pow], without any nondegeneracy assumption, that $\{y^k\}$ converges to the Chebyshev center of the set of optimal dual solutions under the condition that such set is bounded. In the case of PIP with a general ϕ -divergence, convergence of $\{y^k\}$ to an optimal dual solution has been proved in [Ius3], as discussed in 3.6, assuming both uniqueness of the dual solution and existence of a nondegenerate primal-dual optimal pair. No results are available for the PIP method with Bregman functions.

PIP methods for the variational inequality problem

The natural extension of the constrained convex optimization problem (0.7) to monotone operators is the variational inequality problem (VIP from now on) which,

given $T: \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ monotone and $C \subset \mathbb{R}^n$ closed and convex, consists of finding $z \in C$ such that

$$\langle u, x - z \rangle \geq 0$$

for some $u \in T(z)$ and all $x \in C$. When $T = \partial f$ with f convex, VIP reduces to (0.7). When $C = \mathbb{R}^n$ VIP reduces to the problem of finding a zero of T . When $C = \mathbb{R}_+^n$ VIP reduces to the nonlinear complementarity problem, i.e. finding z such that

$$z^t u \geq 0 \quad (0.17)$$

$$z \geq 0 \quad (0.18)$$

$$u \geq 0 \quad (0.18)$$

for some $u \in T(z)$.

Since the standard proximal point method can be used to find zeroes of monotone operators, it is to be expected that in the constrained case proximal point methods with generalized distances will find solutions of VIP. The iterative step of these methods is of the following form: find $x^{k+1} \in C^\circ$ such that

$$0 \in [T + \lambda_k \nabla_x d(x, x^k)](x^{k+1}) \quad (0.20)$$

with $x^0 \in C^\circ$. To guarantee that the sequence $\{x^k\}$ generated by (0.20) is well defined, it is assumed that the domain of T (i.e. the set of x 's such that $T(x)$ is nonempty) is closed and intersects C° .

This method, with d being a Bregman distance, was first considered in [Eck], where convergence of $\{x^k\}$ to a solution of VIP is proved in the case in which all solutions of VIP are in C° , i.e. are zeroes of T . For the case of d being a ϕ -divergence, (0.20) was introduced in [Aus], where only the case of ϕ as in example 2.5 is considered. The general case is treated in [Bur]. For the case of solutions in the boundary of C , two conditions on T are required. The first one, which is stronger than monotonicity (but weaker than either strict or strong monotonicity) is paramonotonicity, introduced in [Cen3], meaning monotonicity plus

$$\langle x - y, u - v \rangle = 0, u \in T(x), v \in T(y) \text{ implies } u \in T(y), v \in T(x) \quad (0.21)$$

It has been proved in [Cen3] that if $T = \partial f$ with f convex then T is paramonotone. This result implies that VIP with a paramonotone operator T can have more than one solution, which is not the case for either strictly or strongly monotone operators.

The second one is pseudomonotonicity, introduced in [Bro], meaning that for any sequence $\{x^k\}$ converging to a point $\bar{x}$, any $u^k \in T$ such that $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle u^k, x^k - \bar{x} \rangle \geq 0$ and any y there exists $\bar{u} \in T(\bar{x})$ such that $\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle u^k, x^k - y \rangle \geq \langle \bar{u}, \bar{x} - y \rangle$. If $T = \partial f$ with f convex, or if T is point-to-point and continuous, then T is guaranteed to be pseudomonotone.

In addition, for a general ϕ -divergence or boundary coercive Bregman distance D_g , another assumption must be made on T (see 4.1 (ii) below). This assumption can be removed if g is zone coercive or if $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t) = \infty$. The following results have been proved in [Bur].

- a) Assume that T is both paramonotone and pseudomonotone, that VIP has solutions and that $\{x^k\}$ is the sequence generated by (0.20), where d is either a boundary coercive Bregman distance D_g or a ϕ -divergence. Assume also that ϕ satisfies hypothesis (b) of 3.4. If
 - (i) D_g is zone coercive or $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t) = \infty$, or
 - (ii) $\sup \{ \langle u, y - x \rangle : x \in C, u \in t(x) \} < \infty$ for all $y \in C$ and $\{y^k\}$ is bounded away from zero, then $\{x^k\}$ converges to a solution of VIP.
- b) Under the hypotheses of a, if T^{-1} is Lipschitz continuous at 0 and the limit x^* of $\{x^k\}$ belongs to C° then convergence is linear, and superlinear if $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$.

BIBLIOGRAPHY

- [Aus] Auslender, A., Haddou, M. *An interior-proximal method for convex linearly constrained problems and its extension to variational inequalities (to be published)*.
- [Avr] Avriel, M. *Nonlinear Programming, Analysis and Methods*. Prentice Hall, New Jersey (1976).
- [Ber] Bertsekas, D. *Constrained Optimization and Lagrange Multipliers*. Academic Press, New York (1982).
- [Bre] Bregman, L. *The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming*. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 7 (1967) 200-217.

- [Bro] Browder, F.E. *Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces*. American Mathematical Society (1976).
- [Bur] Burachik, R. *Generalized proximal point methods for the variational inequality problem*. PhD Thesis. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro (1994).
- [Cen1] Censor, Y., De Pierro, A., Elfving, T., Herman, G., Iusem, A. *On iterative methods for linearly constrained entropy maximization*. In *Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. Banach Center Publication Series 24 (1990) 145-163.
- [Cen2] Censor, Y., Zenios, S. *The proximal minimization algorithm with D-functions*. *Journal of Optimization Theory and Applications* 73 (1992) 451-464.
- [Cen3] Censor, Y., Iusem, A., Zenios, S. *An interior point method with Bregman functions for the variational inequality problem with paramonotone operators (to be published)*.
- [Che] Chen, G., Teboulle, M. *Convergence analysis of a proximal-like optimization algorithm using Bregman functions*. *SIAM Journal on Optimization* 3 (1993) 538-543.
- [Csi] Csiszár, I. *Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations*. *Studia Scientiae Mathematicae Hungaricae* 2 (1967) 299-318.
- [Eck] Eckstein, J. *Nonlinear proximal point algorithms using Bregman functions, with applications to convex programming*. *Mathematics of Operations Research* 18 (1993) 202-226.
- [Egg] Eggermont, P.P.B. *Multiplicative iterative algorithms for convex programming*. *Linear Algebra and its Applications*, 130 (1990) 25-42.
- [Eri] Eriksson, J., *An Iterative Primal-Dual Algorithm for Linear Programming*, Technical Report 85-10, Department of Mathematics, Linköping University (1985).
- [Ius1] Iusem, A., Teboulle, M. *On the convergence rate of entropic proximal optimization algorithms*. *Computational and Applied Mathematics* 12 (1993) 153-168.
- [Ius2] Iusem, A., Svaiter, B., Teboulle, M. *Entropy-like proximal methods in convex programming (to be published in Mathematics of Operations Research)*.
- [Ius3] Iusem, A., Teboulle, M. *Convergence rate analysis of nonquadratic proximal and augmented Lagrangian methods for convex and linear programming (to be published in Mathematics of Operations Research)*.

- [Ius4] Iusem, A. *On some properties of generalized proximal point methods for quadratic and linear programming (to be published in Journal of Optimization Theory and Applications).*
- [Ius5] Iusem, A., Zenios, S. A. *Interval underrelaxed Bregman method with an application (to be published).*
- [Jen] Jensen, D.L., Polyak, R.A. *The convergence of a modified barrier method for convex programming. IBM Journal of Research and Development 38 (1994) 307-321.*
- [Lem] Lemaire, B. *The proximal algorithm. In International Series of Numerical Mathematics (J. P. Penot, ed.). Birkhauser, Basel, 87 (1989) 73-87.*
- [Lie] Liese, F., Vajda, I. *Convex Statistical Distances. Teubner, Leipzig (1987).*
- [Nie] Nielsen, A., Zenios, S.A. *Proximal minimizations with D-functions and the massively parallel solution of linear network programs. Computational Optimization and Applications 1 (1993) 375-398.*
- [Pol1] Polyak, R. *Modified barrier functions, theory and applications. Mathematical Programming 54 (1992) 177-222.*
- [Pol2] Polyak, R.A., Teboulle, M. *Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization (to be published).*
- [Pow] Powell, M. J. D. *Some convergence properties of the shifted log barrier method for linear programming. Numerical Analysis Report DAMTP 1992-NA7. Cambridge University (1992).*
- [Roc1] Rockafellar, R.T. *Convex Analysis. Princeton University Press, New Jersey (1970).*
- [Roc2] Rockafellar, R. *Monotone operators and the proximal point algorithm. SIAM Journal on Control and Optimization 14 (1976) 877-898.*
- [Roc3] Rockafellar, R. *Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. Mathematics of Operations Research 1 (1976) 97-116.*
- [Teb] Teboulle, M. *Entropic proximal mappings with applications to nonlinear programming. Mathematics of Operations Research 17 (1992) 97-116.*
- [Tse] Tseng, P., Bertsekas, D. *On the convergence of the exponential multipliers method for convex programming. Mathematical Programming 60 (1993) 1-19.*
- [Zen] Zenios, S. *On the fine grain decomposition of multicommodity transportation problems. SIAM Journal on Optimization 1 (1991) 401-423.*

Integer nonlinear programming: A trust region method^(*)

David Mauricio⁽¹⁾, Nelson Maculan⁽²⁾

ABSTRACT

An $O(n \log(n))$ trust region method to solve 0-1 nonlinear programming is presented. Optimality conditions and numerical result are reported.

KEYWORD

0-1 nonlinear programming, trust region method, combinatorial optimization.

RESUMO:

Um método de region de confiança de complexidade $O(n \log(n))$ para resolver problemas da programação não linear inteira 0-1 é apresentado. Condições de otimalidade e resultados numéricos são relatados.

PALAVRAS CHAVES

Programação não linear inteira, método de região de confiança, otimização combinatória.

(*) This work was partially supported by CNPq and FAPERJ.

(1) Laboratory of Science and Engineering CCT - State University of North Fluminense.
Av. Alberto Lamego, 2000 - Horto, Campos, RJ 28015-620, Brazil e-mail: mauricio@uenf.br.

(2) Systems Engineering and Computer Science COPPE - Federal University of Rio de Janeiro
P.O. Box 68511, Rio de Janeiro, RJ 21945-970, Brasil. e-mail: maculan@cos.ufrj.br.

Introduction

We present an approximation method to solve the following class of 0-1 nonlinear programming problems as follows:

$$\begin{aligned} \text{(PNL-01):} \quad & f^* = \text{Min } f(x) \\ & \text{s.t.: } x \in B^n = \{0,1\}^n \end{aligned}$$

where $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a convex function. Many algorithm have been developed to solve (PNL 0-1). A Review can be found in [3, 5, 6]. However, the great majority of method are consider approximated and work well on special structure of f and a few variables.

It is proved that many exact algorithm to solve (PNL 0-1) are highly expensive and sensible in processing time to initial chosen point ([3, 4, 8, 10]). Considering these difficulties, in this work we have developed an approximated method, fast and efficient, which uses the inexact linearization and trust region concept.

This work is organized as follows. In the next section, practical conditions of optimality are described. In section 3 the method is showed. The conclusion follows in section 4.

We denote by $\|\cdot\|$ the Euclidean norm and call the set $\partial_r f(\bar{x}) = \{s \in \mathbb{R}^n: f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle s, x - \bar{x} \rangle, x \in B^n\}$, $\bar{x} \in B^n$ by discrete subdifferential of the function f at the point $\bar{x}$. An element $s \in \partial_r f(\bar{x})$ is called discrete subgradient of the function f at the point $\bar{x}$. We also denote the set of feasible solutions of a given problem P by $D(P)$.

Optimality conditions

In order to verify necessary and sufficient optimality conditions to the class of nonlinear integer programming problems, we consider in our method the following practical conditions:

Theorem 1: Let $\delta = \min \{f(x) - f^*: f(x) > f^*, x \in B^n\}$ and $s \in \partial_r f(\bar{x})$, $\bar{x} \in B^n$. If $\min \{s^t(x - \bar{x}): x \in B^n\} > -\delta$, then $\bar{x}$ is a optimal solution for (PNL-01).

The theorem 1 above present an optimality sufficient condition and was established at [7]. In some case, δ can easily be determined; for example, if f is a polynomial function with integer coefficient, δ can be fixed as the unit. When the δ computing is as hard as solving the studied problem, we can use the following weaker optimality condition established at [10]:

Theorem 2 Let $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^t \in B^n$ and $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^t \in \partial_r f(\bar{x})$. If $\bar{x}_i = 1$ for a such that $s_i \leq 0$, or $\bar{x}_i = 1$, for i such that $s_i \leq 0$, then $\bar{x}$ is an optimal solution of (PNL-01).

The method

THE MODEL

A local approach of f at point $x^k \in B^n$ is given by the following linear function:

$$f(x^k) + s^t (x - x^k), \text{ for } s \in \partial_r f(x^k)$$

Thus, a linear integer local model for (PNL-01) at $x^k \in B^n$ is given for some $\gamma \geq 0$:

ML (x^k, γ): Minimize $s^t x$

$$\begin{aligned} \text{s.t.: } & \|x - x^k\| \leq \gamma \\ & x \in B^n \end{aligned}$$

By the philosophy of trust region method, the parameter γ (trust region radius) must be update, the model ML (x^k, γ) tries the produce a better solution than x^k .

We can observe that $\|x - x^k\| \in \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}\}$ for x and $x^k \in B^n$. We just pointed out that $\|x - x^k\| = 0 \Leftrightarrow x = x^k$, and $\|x - x^k\| = \sqrt{n} \Leftrightarrow x = e - x^k$ where $e = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$. All other different values of $x \in B^n$ give $\|x - x^k\| \in \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n-1}\}$. Then the local model ML(x^k, γ) can be solved by sequence of problems:

ML ($x^k, \sqrt{l}$): Minimize $s^t x$

$$\begin{aligned} \text{s.t.: } & \|x - x^k\| = \sqrt{l} \\ & x \in B^n, \end{aligned}$$

for $l = 0, 1, 2, \dots, n$.

The following result established at [9] shows that local model ML ($x^k, \sqrt{l}$) for $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ can be solved by a sequence of simple problems.

Theorem 3: Suppose $s_i(1 - 2x_i^k) \leq s_{i+1}(1 - 2x_{i+1}^k)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ and $L^* = \{1, 2, \dots, l\}$, $x_i^* = 1 - x_i^k$, $i \in L^*$ and $x_i^* = x_i^k$, $i \in \{1, 2, \dots, n\} - L^*$ then x^* is an optimal solution for $ML(x^k, \sqrt{l})$.

Using the theorem 3 we can find an algorithm of $O(n \log(n))$ ([1,11]) complexity to solve the sequence of problems $ML(x^k, \sqrt{l})$, $l = 1, 2, \dots, n$.

THE ALGORITHM

Now we present a trust region algorithm to solve 0-1 nonlinear programming problems. This model is based on the fact that the cost to solve the local model for fixed radius is the same for its many values. That is, given an initial point, next point is determined at the best descent solution given by local model for all trust region ($\gamma = \sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}$). Proceeding continues until some stop rule is verified, we consider optimality test shown in section 2, and heuristic stop test that is satisfied when a descent solution cannot be found.

- (0) Start: given $x^0 \in B^n$, $\delta \geq 0$, $s^0 \in \partial_r f(x^0)$, set $k := 0$.
- (2) Optimality test:
 - if x^k verifies theorem 1 or 2 then x^k is an optimal solution, STOP.
- (3) Search a better descent solution
 - take $s^k \in \partial_r f(x^k)$
 - set $y := x^k$
 - for $l := 1$ to n
 - compute $z \in \arg \min ML(x^k, \sqrt{l})$ (theorem 3).
 - if $f(z) < f(y)$ then $y := z$;
 - end-for
- (3) Heuristic test
 - if $f(y) = f(x^k)$ then x^k is a best heuristic solution, STOP
- (4) Next point
 - $x^{k+1} := y$, $k := k + 1$, goto (1).

Conclusion

We presented a heuristic algorithm based on inexact linearization concept and trust region to solve nonlinear 0-1 programming problems. Numerical experiment reported at [9] over 10 problems over 1024 variables shows that our algorithm converge

to an optimal solution in few seconds, that is our method is efficient and efficacious. But for some problems in our sample the optimality conduction not verified. In the last case optimality has to be tested using enumerative method which can be found [7, 10, 2]. When f is not convex, it is always possible convert it to (PNL-01) form, adding a penalty term, see, for example, [10].

REFERENCES

1. A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman. *The design and analysis of computer algorithms*. Addison Wesley Publication Company, 1974.
2. J. Cha. *Mixed discrete constrained nonlinear programming via recursive quadratic programming*. Ph. D. thesis, University of New York at Buffalo, 1987.
3. R. S. Garfinkel and G. L. Nemhauser. *Integer programming*, John Willey & Sons, Inc., New York, NY, 1972.
4. O. K. Gupta and A. Ravindran. *Nonlinear integer programming and discrete optimization*. ASME Journal of mechanism, transmission and automation in design, 105: 160-164, June 1981.
5. P. Hansen. *Method of nonlinear programming and discrete mathematical*. Mathematical programming 5: 53-70, 1979.
6. H. Loh and N. Papalambros. *A sequential linearization approach for solving mixed-discrete nonlinear design optimization problems*. Technical Report UM-MEAM-89-08, Design Laboratory, University of Michigan, 1989.
7. D. Mauricio. *Métodos de Resolução de Problemas de Programação Não Linear Inteira*. Ph. D. thesis, COPPE, Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.
8. D. Mauricio, N. Maculan and S. Scheimberg. *An efficient cutting plane method for zero-one nonlinear programming*. Technical report LCENG/ State University of North Fluminense. Rio de Janeiro, 1995.
9. D. Mauricio and N. Maculan. *A trust region method for zero-one nonlinear programming*. Technical Report COPPE/Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.
10. Z. Wu. *A subgradient algorithm for nonlinear integer programming and its implementation*. Ph. D. Thesis, Rice University, Texas, 1991.
11. N. Ziviani. *Projeto de algoritmos - Com Implementação em Pascal e C*. Pioneira, São Paulo, SP, 1993.

ONDÍCULAS

Algoritmos de descomposición y síntesis

Alejandro Ortiz Fernández ()*

Introducción

El objetivo de estas notas es continuar introduciendo la teoría de ondículas ("wavelets") y sus relaciones con ciertos sectores de la matemática aplicada y con otras áreas. Actualmente se está produciendo un crecimiento acelerado de la teoría así como de sus aplicaciones al interno y externo de ella. Dado que las ondículas es una alternativa, con suceso, al clásico análisis de Fourier localizado ("Short-Time Fourier Transform", STFT), ella está contribuyendo al desarrollo tecnológico en el campo de las comunicaciones, en el procesamiento de señales e imágenes, en la medicina, entre otros dominios. En países como el nuestro, el inicio y estímulo al estudio de las ondículas y de sus aplicaciones puede ser de significativa importancia al desarrollo de nuestros propios recursos.

Motivaciones generales

Existe una intrínseca relación entre ideas de la teoría de ondículas y las existentes en algoritmos para procesar señales, imágenes; de un modo general, las aplicaciones de

(*) Pontificia Universidad Católica del Perú, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

las ondículas a los sistemas de comunicación son cada vez más relevantes, ello debido a que es un instrumento matemático que se adapta muy bien a los métodos clásicos del análisis para procesar señales. El estudio de la señal es muy vasto; nuestra vivencia está vinculada a las señales. Existen señales: sonoras, eléctricas, sísmicas (vibraciones del suelo), económicas (cambios del índice de la bolsa), médicas (electrocardiogramas, evolución del pelo); en fin, el estudio de las lejanas galaxias es hecho a través de señales llegando a través de la luz. En estos ejemplos las señales dependen del tiempo. Una fotografía en blanco y negro es una señal que depende de dos variables.

El objetivo del análisis de la señal es extraer la información deseada y que está dentro del objeto de estudio. Así, por ejemplo, el análisis de Fourier utiliza una cantidad infinita de ondas sinusoidales y cosinusoidales para interpretar sonidos, imágenes, entre otras aplicaciones. Sin embargo, el análisis según las ondículas utiliza un solo elemento fundamental, que es precisamente la ondícula elegida según la conveniencia al problema que se estudia.

La expectativa de la teoría de ondículas es su optimización en la compresión de datos, lo que es debido a su capacidad para condensar en buena forma la información proveniente de las señales. Por ejemplo, las imágenes se descomponen a nivel de detalles; cada parte de la imagen contiene información sobre las demás partes.

Análisis de la señal

Disponiendo de una señal, su tratamiento consiste en devolver las informaciones o datos que ella contenga, y que pueden haberse formado y acumulado por muchos años. Por esta razón podemos considerar la variable tiempo t para representar la señal $s(t)$; esta representación de la señal podría informar poco sobre sus periodicidades y sobre sus frecuencias, por ello se usaron otros tipos de representaciones como la frecuencial lo que se consigue con el análisis de Fourier (series y transformadas de Fourier), análisis que fue el sustento de investigaciones en la tecnología por muchos años y cuyo proceso llevó al análisis según las ondículas.

Como sabemos, las series de Fourier analizan señales periódicas, es decir, aquellas señales que se repiten cada cierto periodo de tiempo y ello, en forma indefinida. Por esta razón, tales señales periódicas son superposiciones de ondas (seno y coseno); las amplitudes de esas ondas son llamadas **coeficientes de Fourier**, las que se calculan por las fórmulas conocidas.

¿Qué hacer para los casos no-periódicos? En este caso se recurre a la representación integral de la señal, esto es, consideramos superposiciones de ondas sinusoidales de todas las frecuencias posibles. Cada amplitud, asociada a cada frecuencia de onda, contienen la respectiva información de la onda dentro del total de la señal. Así,

nos estamos refiriendo a la transformada de Fourier de la señal $s(t)$, que sabemos es de la forma

$$\hat{S}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} s(t) dt$$

(o en otra notación). Esta transformada representa el **espectro continuo de la frecuencia de la señal**. Observemos que la transformada de Fourier descompone la señal en funciones sinusoidales, las que oscilan indefinidamente en el tiempo y cualquier perturbación en alguna región del eje-tiempo afectará la información deseada. Esto es un inconveniente de la transformada de Fourier.

En conclusión, tenemos una representación en el tiempo que describe a la señal en forma directa, pero tenemos también una representación frecuencial que describe a la señal por su transformada de Fourier vía una superposición de funciones sinusoidales, las cuales vibran sin amortiguamiento alguno en el eje del tiempo. Así obtenemos una representación "tiempo-frecuencia" la que consiste en operar con dos operaciones recíprocas: el análisis y la síntesis. Vía el análisis, la señal es descompuesta en elementos simples y universales, que son llamados **funciones elementales** (por ejemplo, e^{ix} en el análisis de Fourier). La representación tiempo-frecuencia trabaja con dos parámetros: a , ligado a la frecuencia, y b ligado al tiempo. Vía la síntesis se dan las "recetas" que permiten reconstruir la señal conociéndose sus "coeficientes de ondículas" (o de Fourier, en el análisis de Fourier) los que son obtenidos en la etapa del análisis.

La idea y la metodología "ondícula" se remonta a años atrás a su formulación matemática (1984) hecho por el geofísico francés Jean Morlet, quien propuso un método revolucionario para investigar señales que provienen de indagaciones petrolíferas. Estas ideas fueron rápidamente extendidas para resolver problemas en otras aplicaciones.

Algunos argumentos matemáticos

El punto de partida es la noción de Análisis Multiresolución (AMR), el que podemos considerar como un "microscopio" o "telescopio" matemático.

DEFINICIÓN:

Un **análisis multiresolución** en $\mathbf{R}$ es una sucesión de subespacios cerrados $(V_j)_{j \in \mathbf{Z}}$, $V_j \subset L^2(\mathbf{R})$ tal que:

$$(1) \quad \dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

$$(2) \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$$

$$(3) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$(4) f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0$$

$$(5) f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$(6) \exists \phi \in V_0 \text{ tal que } (\phi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ es una base ortonormal (b.o.n.) para } V_0, \text{ donde, de un modo general, } \phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$$

Un personaje importante: ψ , llamada la **ondícula** (o "wavelet") y que es el fundamento de la teoría. ¿Cómo se la construye?

Veamos el siguiente camino: $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$, luego

$$\phi = \sum_k h_k \phi_{-1,k} \text{ (pues } (\phi_{-1,k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ es una b.o.n. para } V_{-1}). \text{ Al tomar transformada}$$

de Fourier en la anterior igualdad aparece el término $2^{-1/2} \sum_k h_k e^{-i\xi k}$, que llamaremos $m_0(\xi)$, la misma que es una función 2π -periódica y que está en $L^2([0, 2\pi])$.

DEFINICIÓN:

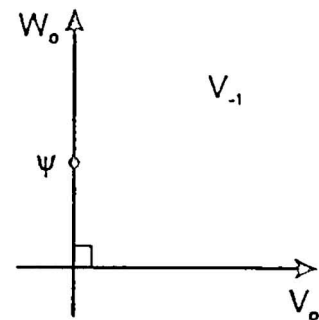
ψ es definida vía su transformada de Fourier en la forma:

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\frac{\xi}{2}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Se tiene que $\psi \in W_0$, donde W_0 es el complemento ortogonal de V_0 , con respecto a V_{-1} .

$$\text{Así, } V_{-1} = V_0 \oplus W_0.$$

ψ da origen a una b.o.n. de $L^2(\mathbb{R})$.



Veamos (suscintamente). Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Se verifica que:

$$\hat{f}(\xi) = v(\xi) e^{-i\frac{\xi}{2}} m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = v(\xi) \hat{\psi}(\xi)$$

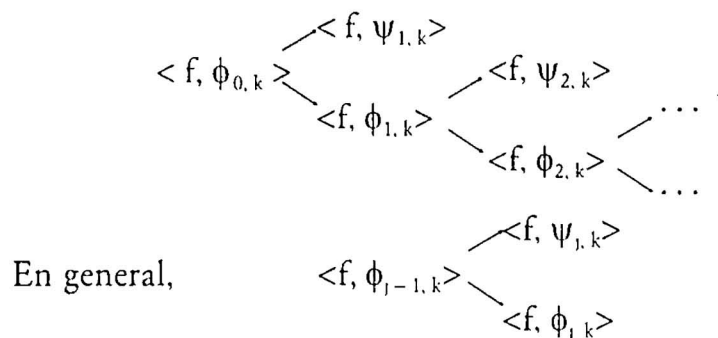
donde $v(\xi)$ es 2π -periódica, lo que permite escribir $\hat{f}(\xi) = (\sum_k v_k e^{-i\xi k}) \hat{\psi}(\xi)$, de donde antitransformando $f(x) = \sum_k v_k \psi(x-k)$. Se verifica que $(\psi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. para W_0 . Ahora usamos la propiedad $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in W_0$ (W_j es el complemento ortogonal de V_j con respecto a V_{j-1}) para concluir que $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. de W_j , donde $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Desde que $L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ (se verifica), se concluye que $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una b.o.n. para $L^2(\mathbb{R})$.

Veamos ahora un algoritmo para realizar el análisis y la síntesis usando ondículas. Se verifica que $\psi(x) = \sum_n (-1)^n h_{-n+1} \phi_{-1,n}(x) \cong \sum_n g_n \phi_{-1,n}(x)$. Luego, $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) = 2^{-j/2} \sum_n g_n 2^{1/2} \phi(2^{-j+1}x - 2k - n) = \sum_n g_n \phi_{j-1,2k+n}(x) = \sum_n g_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x)$.

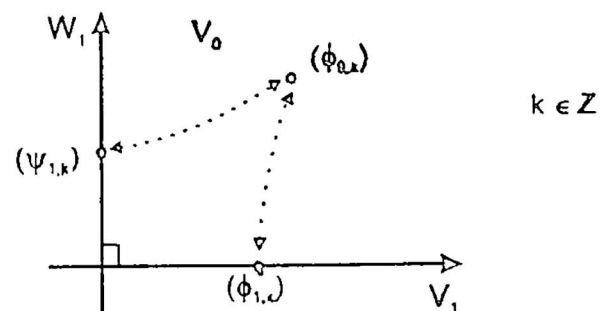
$$\text{Por tanto, } \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_n \bar{g}_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad \dots (1)$$

$$\text{En forma similar, } \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_n \bar{h}_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad \dots (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) nos permiten establecer el siguiente procedimiento:



El siguiente gráfico nos ilustra lo hecho.

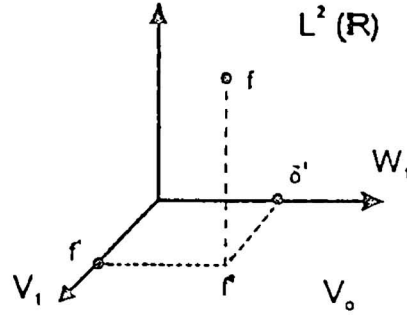


Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, sea f° la proyección de f sobre V_0 .

Luego $f^\circ \in V_0 = V_1 \oplus W_1$; así

$$f^\circ = f^1 + \delta^1.$$

Por tanto,



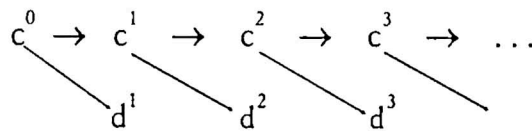
$$f^\circ = \sum_n c_n^0 \phi_{0,n}, \quad f^1 = \sum_n c_n^1 \phi_{1,n}, \quad \delta^1 = \sum_n d_n^1 \psi_{1,n}$$

Se verifica que:

$$\begin{cases} c_k^1 = \sum_n \bar{h}_{n-2k} c_n^0 \\ d_k^1 = \sum_n \bar{g}_{n-2k} c_n^0 \end{cases} \quad (3)$$

Con las notaciones $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\bar{a} = (\bar{a}_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(Ab)_k = \sum_n a_{2k-n} b_n$, (3) se escribe en la forma $\begin{matrix} c^1 = \bar{H} c^0 \\ d^1 = \bar{G} c^0 \end{matrix}$ análogamente, $\begin{matrix} c^2 = \bar{H} c^1 \\ d^2 = \bar{G} c^1 \end{matrix}, \dots$

Gráficamente:



representación gráfica de (3)

Las fórmulas (3) es el **análisis**. La operación inversa, la **síntesis**, es dada por

$$c_n^{j-1} = \sum_k [h_{n-2k} c_k^j + g_{n-2k} d_k^j] \quad (4)$$

Las fórmulas (3) y (4) tienen la misma estructura que algunas fórmulas que aparecen en la teoría de la señal, que pasamos a dar una idea.

Filtros y algoritmos de análisis y síntesis

A. Sea el espacio $L^2([0, 2\pi])$. Una **función filtro** es $H \in L^2([0, 2\pi])$; luego existe $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que $H(\xi) = \sum_k h_k e^{i\xi k}$. Recíprocamente, para todo $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $H \in L^2([0, 2\pi])$. (h_k) es llamada la **respuesta impulso** de H , y H es la **función de transferencia** de (h_k) .

Sea $H \in L^\infty([0, 2\pi])$ una función filtro con respuesta (h_k) . Entonces un **filtro** F es definido vía

$$F: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \begin{matrix} (x_k) \rightarrow (y_k) \end{matrix}, \quad \text{donde } y_k = \sum_{h \in \mathbb{Z}} x_{k-h} h_n \quad (\text{convolución discreta})$$

Decimos que F es el filtro asociado a H y que H es la representación de F . Sean ahora las asociaciones:

$$(h_k) \leftrightarrow H(\xi)$$

$$(x_k) \leftrightarrow X(\xi)$$

$$(y_k) \leftrightarrow Y(\xi)$$

El gráfico $X(\xi) \rightarrow \boxed{H(\xi)} \rightarrow Y(\xi)$ representa un filtro lineal invariante por traslaciones.

B. Algoritmo de descomposición (análisis)

La señal $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ entra el proceso de filtramiento vía dos funciones filtros H_0 y H_1 obteniéndose dos subseñales $(y_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ y $(y_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ las que a su vez son submuestradas seleccionándose los índices pares; así obtenemos las sub-señales $(y_{0,2k})_{k \in \mathbb{Z}}$ y $(y_{1,2k})_{k \in \mathbb{Z}}$, a las que asociamos las series $Y_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_{0,2k} e^{2i\xi k}$ y

$Y_1(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_{1,2k} e^{2i\xi k}$ las que satisfacen:

$$Y_0(\xi) = \frac{1}{2} [H_0(\xi) X(\xi) + H_0(\xi + \pi) X(\xi + \pi)]$$

$$Y_1(\xi) = \frac{1}{2} [H_1(\xi) X(\xi) + H_1(\xi + \pi) X(\xi + \pi)]$$

$$\text{donde } X(\xi) = \sum_k x_k e^{i\xi k}.$$

Las dos señales $Y_0(\frac{\xi}{2}) = \sum_k y_{0,2k} e^{i\xi k}$, $Y_1(\frac{\xi}{2}) = \sum_k y_{1,2k} e^{i\xi k}$ constituyen la "salida" de la etapa del análisis.

Y_0 es la señal de "bajas" frecuencias y Y_1 la de "altas" frecuencias.

C. Algoritmo de reconstrucción (síntesis)

Las señales $Y_0(\frac{\xi}{2})$ y $Y_1(\frac{\xi}{2})$ son codificadas y transmitidas nuevamente, las que al ser recepcionadas son descodificadas e interpoladas, poniéndose cero entre dos muestras.

Así recuperamos $Y_0(\xi)$ y $Y_1(\xi)$ en el caso ideal de que no tengamos pérdidas. El éxito de la operación consiste en recuperar la señal $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ con su mejor aproximación.

Así continuamos. El canal de baja frecuencia es filtrado por una función filtro G_0 y el canal de alta frecuencia por un filtro G_1 . La acción resultante es la suma de tales dos canales filtrados. Sea X' la transformada de Fourier de tal señal resultante. Se obtiene

$$X'(\xi) = \frac{1}{2} [(H_0(\xi) G_0(\xi) + H_1(\xi) G_1(\xi)) X(\xi) + (H_0(\xi + \pi) G_0(\xi) + H_1(\xi + \pi) G_1(\xi)) X(\xi + \pi)]$$

Por razones técnicas asumamos la condición

$$H_0(\xi + \pi) G_0(\xi) + H_1(\xi + \pi) G_1(\xi) = 0,$$

lo que implicará

$$X'(\xi) = \frac{1}{2} (H_0(\xi) G_0(\xi) + H_1(\xi) G_1(\xi)) X(\xi)$$

y obtendremos la reconstrucción exacta si tuviéramos

$$H_0(\xi) G_0(\xi) + H_1(\xi) G_1(\xi) = 2 e^{-i\xi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se remarca que el término $e^{-i\xi k}$ es la "demora" entre la señal original y la señal reconstruída.

Comentarios finales

Las ondículas puede ser interpretada como una teoría que unifica diversas técnicas que fueron desarrolladas, antes que la teoría fuera formalizada, en diversas áreas de la ciencia y la tecnología. Así, por ejemplo, en la visión computacional se usan técnicas del procesamiento de la señal multiresolución; en el estudio de la voz y de la imagen se usan los códigos subbandas. Ultimamente técnicas "wavelets" están siendo aplicadas en ciertos sectores de la medicina, realizándose múltiples reuniones en donde participan matemáticos especializados en ondículas así como médicos investigadores que utilizan tales técnicas. Existen argumentos fundados de que las proyecciones de la teoría de ondículas son de gran expectativa.

BIBLIOGRAFÍA

1. I. Danbechies: *"Ten Lectures on Wavelets"*. SLAM. 1992.
2. J. Ch. Feauveau: *"Analyse Multiresolution par Ondelettes non orthogonales et Bases de Filtres Numeriques"*. Universite Paris. 1990.
3. Ch. Chui: *"An Introduction to Wavelets"*. Ac. Press. 1992.
4. Ch. Chui (editor): *"Wavelets: a Tutorial in Theory and Applications"*. Ac. Press. 1992.
5. L. Schumaker - G. Webb: *"Recent Advances in Wavelet Analysis"*. Ac. Press. 1994.
6. R. Young: *"Wavelets Theory and its Applications"*. Kluwer Ac. Public. 1994.

Programación lineal entera pura algoritmo fraccional y totalmente entero de Gomory

Rolando Raúl Palomino Vildoso ()*

RESUMEN

Se desea resolver el programa:

$$\begin{aligned} \text{Máx} \quad & b^T u \\ & A^T u \leq c \dots\dots\dots (L) \\ & u \geq 0, \text{ entero.} \end{aligned}$$

Para solucionarlo se trabajará con la siguiente tabla:

		$-u_N$	
	0	-b	
u	0	-I	
v	c	A^T	[1]

Tabla 1

(*) Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Casilla postal 31-139. Lima.

Pues la restricción (Plano de corte) que se agregue después de cada iteración se omite porque se convierte en trivial, a diferencia de la tabla siguiente:

$c^T x_B$	d^T	
u_B	$(A^T_B)^{-1} A^T$	B

[2]

Tabla 2.

En cuyo caso no se convierte en trivial y por lo tanto aumentan el número de filas y de columnas. Para efectos computacionales se nota la diferencia, luego para solucionar el Problema (L) estudiaremos los Algoritmos Fraccional y Totalmente Entero de Gomory basados en los Planos de Corte.

La figura 1, muestra gráficamente cómo actúan los Planos de Corte en el espacio de Soluciones Factibles del Problema de P.L.C. asociado a (L). Se observa que el punto C da la solución óptima correspondiente al Problema P.L.C. que tienen como Espacio de Soluciones Factibles OABCD y función objetivo Z.

Una vez impuesta la primera restricción S_1 , que es un Plano de Corte ya que únicamente descarta Soluciones No Enteras del Espacio de Soluciones Factibles la Solución del Problema de P.L.C. asociado que tiene como Espacio de Soluciones Factibles OAGC₁D pasa el punto C₁ y como sus coordenadas no son enteras es necesario imponer otra restricción.

Sea ésta la que se indica en la figura 1 por S_2 , que también descarta puntos no enteros del espacio de soluciones factibles, y reduce éste a OAGC₂HD y cuya Solución Óptima es el punto C₂ de coordenadas $u_1 = 4$, $u_2 = 2$.

Introducción

El objetivo de la presente es implementar dos de los algoritmos para solucionar Programas Lineales Enteros Puros ambos de Gomory, basados en los planos de corte como son:

- Algoritmo fraccional.
- Algoritmo totalmente entero.

Respecto al algoritmo fraccional éste genera **planos de corte** (nueva restricción) con coeficientes fraccionarios si al aplicar el Método simplex la solución óptima no es entera (no negativa); pues de serlo resulta ser la solución buscada.

El algoritmo totalmente entero parte de una tabla dual admisible, si la tabla no es primal admisible entonces se añade el plano de corte (nueva restricción) con coeficientes enteros, de lo contrario se obtiene la tabla óptima deseada.

¿Para qué se utilizan estos algoritmos?

Pues en muchas situaciones prácticas, los valores no enteros pueden carecer de sentido. Así, por ejemplo, para una empresa que fabrica pantalones de los tipos A y B el saber que para maximizar la ganancia necesita fabricar semanalmente 45,3 pantalones del tipo A y 55,7 pantalones del tipo B, aunque constituya una solución óptima, no resulta una solución útil. Lógicamente, la empresa necesitará tener una solución expresada en números enteros positivos.

Algoritmo fraccional de Gomory

Primero se resuelve el P.L.C. asociado a (L) por el Método simplex, y si la solución no es entera, se construye el plano de corte correspondiente, para lo cual consideramos la siguiente ecuación [1]:

$$u_B = \hat{u}_B - T_N u_N \dots\dots\dots (\alpha)$$

Se sabe: $T_N = \|T_N\| + F_N$
 $\hat{u}_B = \|\hat{u}_B\| + f_B$

donde: $0 \leq F_N < 1$, $0 \leq f_B < 1$ y $\| \cdot \|$ es el máximo entero.

Reemplazando en (α) se tiene:

$$u_B = \|\hat{u}_B\| + f_B - (\|T_N\| + F_N) u_N$$

$$u_B = \|\hat{u}_B\| + f_B - \|T_N\| u_N - F_N u_N$$

$$\Rightarrow u_B - \|\hat{u}_B\| + \|T_N\| u_N = f_B - F_N u_N < f_B < 1$$

↑
Entero

$$\Rightarrow f_B - F_N u_N \leq 0$$

$$\Rightarrow S = -f_B + F_N u_N$$

Se elige el plano de corte con mayor f_{B_i} , se añade la nueva restricción y se resuelve por el Método simplex primal, hasta que se llegue al **óptimo entero**.

Se asegura la convergencia por el método Dual Lexicográfico [2].

Algoritmo totalmente entero de Gomory

Se inicia con una tabla admisible dual y luego se construye el plano de corte correspondiente [1]:

Sea:
$$v_k = c_k - \sum_{j=1}^n T_{kj} u_j \dots\dots\dots(\beta)$$

Dividiendo (β) por $\lambda \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{v_k}{\lambda} = \frac{c_k}{\lambda} - \sum_{j=1}^n \left(\frac{T_{kj}}{\lambda} \right) u_j$$

$$\frac{1}{\lambda} = \left\| \frac{1}{\lambda} \right\| + f_\lambda$$

Se sabe que:

$$\frac{T_{kj}}{\lambda} = \left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\| + f_{kj}$$

donde: $0 \leq f_\lambda < 1$, $0 \leq f_{kj} < 1$.

Reemplazando se tiene:

$$\left(\left\| \frac{1}{\lambda} \right\| + f_\lambda \right) v_k = \frac{c_k}{\lambda} - \sum_{j=1}^n \left(\left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\| + f_{kj} \right) u_j$$

Obviando la parte fraccionaria se deduce lo siguiente:

$$\left\| \frac{1}{\lambda} \right\| v_k + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\| u_j \leq \frac{c_k}{\lambda}$$

↑
Entero

Tomando máximo entero a ambos miembros se obtiene:

$$\left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil v_k + \sum_{j=1}^n \left\lceil \left| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right| \right\rceil u_j \leq \left\lceil \left| \frac{c_k}{\lambda} \right| \right\rceil \dots\dots\dots (R)$$

Multiplicando la expresión (R) por $\left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil$:

$$\left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil v_k + \sum_{j=1}^n \left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil \left\lceil \left| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right| \right\rceil u_j = \left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil \left\lceil \left| \frac{c_k}{\lambda} \right| \right\rceil \dots\dots\dots (S)$$

Restando de (R) la expresión (S) se tiene:

$$\sum_{j=1}^n \left(\left\lceil \left| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right| \right\rceil - \left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil T_{kj} \right) u_j \leq \left\lceil \left| \frac{c_k}{\lambda} \right| \right\rceil - \left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil c_k$$

Considerando $\lambda > 1$ entonces $\left\lceil \left| \frac{1}{\lambda} \right| \right\rceil = 0$, e introduciendo la variable de holgura S_k se tiene la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^n \left\lceil \left| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right| \right\rceil u_j + S_k = \left\lceil \left| \frac{c_k}{\lambda} \right| \right\rceil$$

Para una mayor eficacia del plano de corte anterior, se tomará como λ el siguiente:

$$\lambda = \text{Máx} \left\{ -\frac{T_{kj}}{m_j}, T_{kj} < 0 \right\}, m_j = \left\lceil \left| \frac{T_{mj}}{T_{mr}} \right| \right\rceil, T_{mr} = \text{mín} \{ T_{mj}, T_{mj} > 0 \}$$

Además se considera el plano de corte asociado al c_k más negativo.

La convergencia se determina suponiendo apriori que el valor de la función objetivo Z está acotado inferiormente [3].

Resultados y discusión

En el algoritmo fraccional se presenta errores de redondeo computacionales a diferencia del algoritmo totalmente entero en donde solamente se restringe el tipo de problema.

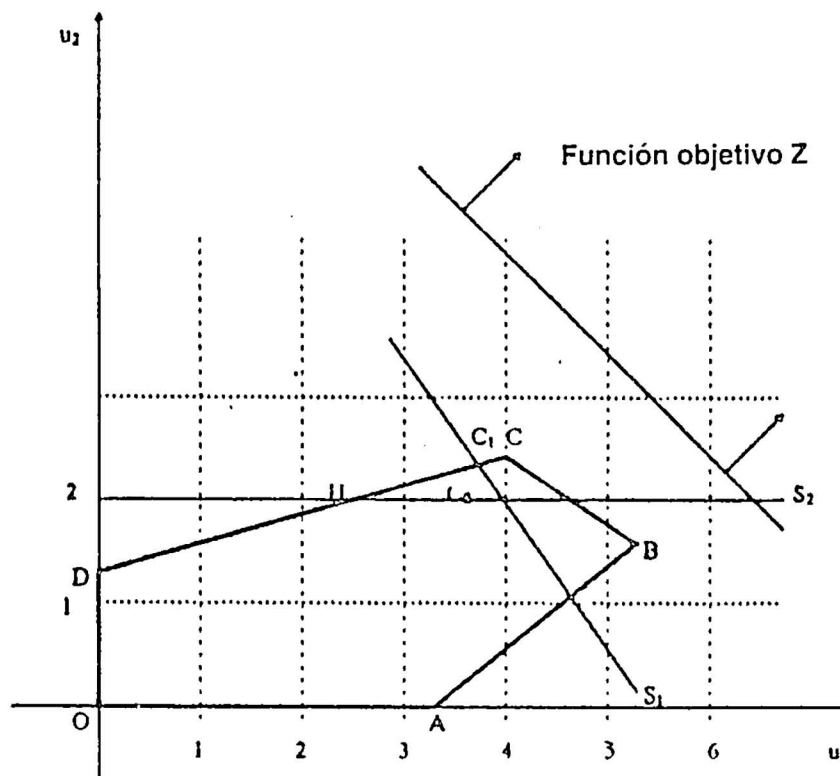


Figura 1

Los algoritmos anteriormente mencionados basados en los planos de corte, permiten obtener la solución óptima de manera directa, es decir añadiendo una nueva restricción a la tabla solamente a diferencia del algoritmo de Dakin (Ramificación y acotamiento) [1] en donde se subdivide los dominios de los programas, más aún haciéndose necesario hallar las cotas que dan un criterio acerca de la búsqueda de la solución óptima.

Conclusiones:

- El algoritmo fraccional produce errores de redondeo computacionales, pues se opera con número reales.
- Por los errores de redondeo tal vez nunca se llegaría al óptimo entero, por lo tanto se debe imponer un margen de error.
- Con el algoritmo totalmente entero se evita los errores de redondeo, ya que se opera con números enteros, pues la construcción de los planos de corte tienen como pivot a -1.
- El algoritmo totalmente entero inicia con una base dual admisible, por esta razón solamente puede ser aplicado para un determinado tipo de problemas.

REFERENCIAS:

1. Leandro Pardo Llorente, *Ediciones Díaz de Santos S.A. Madrid, 1990. Programación Lineal Entera.*
2. Taha A. Hamdy, *Academic Press, Inc. New York, 1975. Integer Programming.*
3. Simonnard M., *Paraninfo, Madrid, 1972. Programación Lineal.*

Control óptimo fuzzy

Marko A. Rojas-Medar^(*)

RESUMEN

Presentaremos una posible manera de abordar el problema de control óptimo fuzzy. Discutiremos los aspectos matemáticos involucrados con esta problemática, donde introduciremos el concepto de inclusión diferencial fuzzy.

Introducción

Es bien conocida la amplia variedad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y control óptimo en el ámbito de las aplicaciones. Sin embargo, en algunos casos, tales sistemas determinísticos parecen ser muy restrictivos para describir la evolución de una gran clase de macrosistemas o microsistemas que surgen en la realidad, donde frecuentemente aparecen problemas del tipo siguiente ("fuzzyness"):

- 1) Desconocimiento del medio ambiente futuro del sistema.
- 2) Falta de determinismo (incluyendo, en algunos casos, la imposibilidad de dar una descripción cabal de la dinámica del sistema).
- 3) Desconocimiento de las leyes que gobiernan el control para los posibles estados del sistema.
- 4) La variedad de dinámicas "admisibles" del sistema.

(*) Departamento de Matemática Aplicada IMECC-UNICAMP, C.P. 6065, 13081-970, Campinas - S.P. Brasil.
Trabajo parcialmente financiado por el CNPq-Brasil y por DEXA-UTA, Proyecto 4741-95.

Es posible, en parte, traducir tales problemáticas en términos matemáticos haciendo uso de las llamadas inclusiones diferenciales del tipo.

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x) \quad (1)$$

donde $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función y $\Gamma: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ es una multifunción;

$\dot{x}$ denota la derivada de x con respecto al tiempo y $P(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Elas describen, a grosso modo, como la velocidad depende, de modo multivaluado, de la tendencia del estado del sistema en el tiempo.

Este problema ha sido intensamente estudiado en los últimos años y se conocen diversos métodos y técnicas para su resolución, entre las cuales sobresalen técnicas de punto fijo y de selección continua.

Bajo ciertas hipótesis puede probarse la equivalencia entre el problema de control

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ u(t) &\in U, \end{aligned} \quad (2)$$

donde $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función y $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ (el control), con el problema (1), considerando

$$\Gamma(t, x) = f(t, x, U) = \{v \in \mathbb{R}^n / \exists w \in U \text{ tal que } v = f(t, x, w)\}.$$

siendo $U \subseteq \mathbb{R}^k$ una restricción geométrica (física o económica) del sistema en el sentido que $u(t) \in U, \forall t \in [0, T]$.

También, es bien conocido que un criterio esencial para determinar puntos óptimos en el problema de control es el llamado "Principio del Máximo de Pontryagin".

Si bien es cierto, el uso de las inclusiones diferenciales permite flexibilizar el problema propuesto y por ser este de naturaleza intrínsecamente fuzzy, creemos que el contexto ideal para su solución es plantearlo en el ámbito fuzzy, lo cual nos lleva a señalar el objetivo central de esta conferencia, cual es estudiar el problema de inclusiones diferenciales fuzzy siguiente:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad (3)$$

donde $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $F: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow E^n$ es una "variable fuzzy", siendo $E^n = \{u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1] \mid L_\alpha u \in K(\mathbb{R}^n) \quad 0 \leq \alpha \leq 1\}$,

donde $K(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \neq \emptyset \text{ y compacto}\}$ y $L_\alpha u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\}$ es el nivel α de u y $L_0 u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}$.

Es claro que este problema es una extensión del problema (1) vía la "inclusión canónica":

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \chi_A \in E^n, \text{ donde } \chi_A \text{ es la función característica de } A.$$

Se hace necesario entonces desarrollar la infraestructura conceptual fuzzy que permita abordar este problema, lo cual supone extender las ideas y conceptos usados en el contexto multivaluado al ámbito fuzzy.

En las próximas secciones discutiremos brevemente las inclusiones clásicas y el principio de Pontryagin, como también los conceptos básicos de la teoría fuzzy y mostraremos algunos resultados para el problema (3) obtenidos por el autor y su grupo de colaboradores.

Finalmente desearía agradecer las conversaciones sobre el tema tenidas con los Prof. Dr. Heriberto Román-Flores de la Universidad de Tarapacá, Arica (Chile), Prof. Dr. Rodney C. Bassanezi de la UNICAMP (Brasil) y Prof. Geraldo Nunes Silva de la UNESP, São José do Rio Preto (Brasil).

Consideremos, por ejemplo, la técnica que utiliza Teoremas de punto fijo. Dada la inclusión diferencial (6), vamos a introducir un operador integral Y , (en verdad una multiaplicación que hará el papel correspondiente en el caso de ecuaciones) actuando sobre $C([t_0, T]) = \{Z: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ continua}\}$ es decir:

$$Y: C([t_0, T]) \rightrightarrows C([t_0, T])$$

dada por:

$$Y(Z(\cdot)) = \{Z \in C([t_0, T]) \mid Z(\cdot) \text{ es absolutamente continua y } x' \in G(t, Z(t)) \text{ para casi todo } t \in [t_0, T]\}.$$

Entonces, si $x(t)$ es solución de (6), debemos tener:

$$x(\cdot) \in Y(x(\cdot)),$$

esto es, $x(\cdot)$ debe ser un punto fijo de la multiaplicación Y (la definición de punto fijo de una función g es sustituida por la pertenencia de $x \in G(x)$ en el caso de una multiaplicación). De esta forma, somos llevados a estudiar condiciones que garanticen la existencia de puntos fijos y, en particular, un teorema equivalente al resultado clásico de Schauder para operadores compactos, actuando sobre convexos, como también

extender las nociones del grado topológico de Brouwer y de Leray-Schauder para el caso de las multiaplicaciones, ver Borisovich y alg [7].

Otra técnica bastante utilizada es aquella basada en el siguiente resultado, el cual es verdadero para ecuaciones (bajo ciertas restricciones de regularidad):

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ es solución de} \\ x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \text{ es solución de} \\ x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x) dx. \end{array} \right.$$

En el caso multívoco, debe estudiarse que sentido puede tener la integral de una multifunción, para tranquilidad de los lectores, existe una noción debida a Aumann [4], Debreu [8], y con esta noción se prueba que:

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ es solución de} \\ x(t) \in \Gamma(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \text{ es solución de} \\ x(t) \in x_0 + \int_0^t \Gamma(s, x(s)) ds \end{array} \right.$$

Existen otras técnicas (aproximaciones, poligonales, etc.), cada una de ellas con sus particularidades: no obstante, el objetivo y limitación de estas notas nos impiden describirlas. Los lectores interesados en más detalles podrán consultar la bibliografía siguiente [2], [5], [7], [15].

Otro tipo de ecuaciones tienen su correspondiente al nivel de multifunciones: para inclusiones integrales, tenemos, por ejemplo, [1], [15]; para inclusiones con retardo [12], [13], [21] y las referencias citadas allí.

Para resultados sobre inclusiones de evolución del tipo:

$$\frac{dx(t)}{dt} \in A(t)x(t) + \Gamma(t, x(t))$$

donde $\{A(t)\}_{t \in I}$ es una familia que genera un operador de evolución, consulte por ejemplo [18].

Consideremos el siguiente resultado de estabilidad para ecuaciones debido a Lyapunov.

“Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, con $f(0) = 0$, continuamente diferenciable en una vecindad del origen, con diferencial de Fréchet f' en el 0. Supongamos que todos los autovalores de f' tienen partes reales negativas, es decir, el origen es asintóticamente estable para:

$$\dot{x} = f'(x)$$

Entonces el origen es asintóticamente estable para:

$$\dot{x} = f(x)$$

Una generalización de tal resultado precisa, primero, de una generalización de diferenciabilidad. Así, somos llevados nuevamente en forma natural a considerar derivadas de multiaplicaciones (nótese que el problema grave aquí es el siguiente; si

$$T: E \rightrightarrows F$$

es una multiaplicación, donde E, F son espacios vectoriales, satisface $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, para todo $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces T es una función. En efecto, para $-\alpha = \beta = 1$ y $x = y$ tenemos $T(x) + T(x) = T(0)$. Como $T(0) = 0$ se sigue que $T(x)$ es un singletón para cualquier $x \in E$. Luego, la definición de diferenciabilidad para funciones no puede extenderse al caso de las multiaplicaciones palabra por palabra. No obstante, consulte [7].

A seguir restringiremos al caso de dimensión finita por simplicidad.

Sea $K(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n, A \neq \emptyset \text{ y compacto}\}$. Sobre este conjunto podemos definir la llamada distancia de Hausdorff:

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\},$$

puede probarse que $(K(\mathbb{R}^n), H)$ es un espacio métrico completo y separable.

Así, podemos definir el concepto de multifunción Lipschitz:

$\Gamma: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ es Lipschitz $\forall u_1, u_2 \in U$ se verifica

$$H(\Gamma(u_1), \Gamma(u_2)) \leq \lambda d(u_1, u_2)$$

en particular, si $0 \leq \lambda < 1$, decimos que Γ es una contracción multívoca.

El análogo del teorema de punto fijo de Banach-Picard fue probado por Nadler [43] en los años 60 y dice lo siguiente.

Teorema. Sea $\Gamma: \mathbb{R}^k \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ una contracción multívoca. Entonces Γ tiene punto fijo, es decir existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\bar{x} \in \Gamma(\bar{x}).$$

Para algunos refinamientos del teorema anterior puede consultarse Istrátescu [44], donde también se encontrarán los análogos multívocos de los teoremas de Schauder, Kakutani, etc.

Una herramienta esencial para el estudio de multifunciones con valores convexos compactos es la llamada *funcional soporte* del análisis convexo, la cual ahora definiremos.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Definimos su funcional soporte $\sigma_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$\sigma_A(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle$$

Algunas propiedades importantes de esta funcional son dadas en la próxima proposición.

Proposición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, $\sigma_A(\cdot)$ su función soporte y $D(\sigma_A(\cdot)) = \{y \in \mathbb{R}^n / \sigma_A(y) < +\infty\}$ su dominio efectivo. Entonces lo siguiente se satisface

- (a) $D(\sigma_A(\cdot))$ es un cono convexo con vértice en 0,
- (b) $\sigma_A(\lambda y) = \lambda \sigma_A(y)$, $\forall \lambda \geq 0$ (homogéneamente positiva),
- (c) $\sigma_A(\cdot)$ es convexa,
- (d) $\sigma_A(\cdot)$ es semicontínua inferior y $\sigma_A \neq +\infty$.
- (e) $\sigma_A(\cdot) = \sigma_{\overline{\text{co}} A}(\cdot)$,

donde $\overline{\text{co}} A$ indica la envoltura convexa cerrada de A , es decir, la intersección de todos los conjuntos convexos cerrados que contienen a A .

El nombre de función soporte está justificado por el siguiente teorema.

Teorema. Sea A un conjunto convexo compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $\sigma_A(\cdot)$ su función soporte. Si $u \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario fijo, $u \neq 0$, entonces lo siguiente se satisface

- (a) existe un punto $x_u \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\sigma_A(u) = \langle x_u, u \rangle$$

- (b) El hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_A(u) = \langle x, u \rangle\}$ soporta A en x_u .

$$(c) d(0, H) = \sigma_A\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$$

Otros resultados interesantes son:

Proposición. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$. Entonces se verifican

$$1) \sigma_A(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow 0 \in \overline{\text{co}A}$$

2) Si $\mu, \lambda > 0$, entonces

$$\sigma_{\lambda A + \mu B}(y) = \lambda \sigma_A(y) + \mu \sigma_B(y)$$

3) $A \subseteq B \Rightarrow \sigma_A(y) \leq \sigma_B(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, recíprocamente, si para todo $y \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\sigma_A(y) \leq \sigma_B(y)$, entonces $\overline{\text{co}A} \subseteq \overline{\text{co}B}$. En particular si A, B son convexos cerrados no vacíos se verifica

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \sigma_A(y) \leq \sigma_B(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

4) Si $\{A_i | i \in I\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\sigma_{\bigcup_i A_i}(y) = \sigma_{A_i}(y)$$

5) A es simétrico (es decir, $A = -A$) si y sólo si $\sigma_A(\cdot)$ es par (es decir, $\sigma_A(y) = \sigma_A(-y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$).

6) $\sigma_A(\cdot) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$ se reduce a un punto.

7) Suponga que $A = A_1 \times \dots \times A_n$, entonces

$$\sigma_A(y) = \sum_{i=1}^n \sigma_{A_i}(y_i)$$

Ahora vamos a explicitar el concepto de integral de una multifunción en el sentido de Aumann.

Consideremos un espacio de medida completo (Ω, Σ, μ) , para cualquier multifunción $\Gamma: \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, denotaremos por $S^1(\Gamma)$ el siguiente conjunto

$$S^1(\Gamma) = \{f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^n) / f(w) \in \Gamma(w), \mu\text{-c.t.p.}\}$$

donde μ es la medida sobre Ω .

Definición. Definimos la integral de Γ , denotada por $\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu$ como el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu = \left\{ \int_{\Omega} f(w) d\mu, f \in S^1(\Gamma) \right\}$$

Definición. Una multifunción Γ se dice limitada integralmente, si ella es medible (es decir, para todo subconjunto medible ϕ de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma^{-1}(\phi) = \{x \in \Omega / \Gamma(x) \cap \phi \neq \emptyset\}$ pertenece a la σ -álgebra Σ) y

$$\|\Gamma(\cdot)\| = \sup \{\|f(\cdot)\| / f(w) \in \Gamma(w)\} \in L_+^1,$$

es decir, existe una función integrable $z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|\Gamma(w)\| \leq z(w) \quad \mu\text{-c.t.p.} \quad \text{en } \Omega$$

Las principales propiedades de la integral multívoca son dadas en el siguiente teorema.

Teorema. $\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu$ es un conjunto convexo. Si además Γ es integralmente limitada $S^1(\Gamma) \neq \emptyset$ y consecuentemente $\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu \neq \emptyset$; si suponemos también que los valores de Γ son cerrados, entonces $\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y

$$\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu = \int_{\Omega} \overline{\text{co}} \Gamma(w) d\mu.$$

Un resultado de suma importancia es el siguiente.

Teorema. Si Γ es integralmente limitada y con valores compactos, entonces

$$\sigma_{\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu}(\psi) = \int_{\Omega} \sigma_{\Gamma(w)}(\psi) d\mu.$$

Con el resultado anterior es posible calcular explícitamente algunas integrales. Para esto, es suficiente construir la función soporte $\sigma_{\Gamma(w)}(\psi)$, integrar la función $\sigma_{\Gamma(w)}(\psi)$ (la cual ahora es una función) con respecto a w para cada valor $\psi \in \mathbb{R}^n$, y entonces reconstruir el conjunto convexo compacto no vacío $\int_{\Omega} \Gamma(w) d\mu$ de la función soporte resultante. Veamos algunos ejemplos que aclaran, aún, más este procedimiento.

Ejemplo. Sea A un conjunto convexo, compacto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} A dt = (t_2 - t_1)A, \quad t_2 > t_1,$$

En efecto, por el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{\int_{t_1}^{t_2} A dt}(\psi) &= \int_{t_1}^{t_2} \sigma_A(\psi) dt \\ &= \sigma_A(\psi) \int_{t_1}^{t_2} dt \\ &= \sigma_A(\psi) (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Luego por el teorema, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} A dt &= \{x \in \mathbb{R}^n / (x, y) \leq \sigma_{\int_{t_1}^{t_2} A dt}(\psi), \forall \psi \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / (x, \psi) \leq \sigma_A(\psi) (t_2 - t_1), \forall \psi\} \\ &= (t_2 - t_1) \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \psi) \leq \sigma_A(\psi), \forall \psi\} \\ &= (t_2 - t_1) A. \end{aligned}$$

Si A no fuese convexo, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} A dt = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\text{co}} A dt = (t_2 - t_1) \overline{\text{co}} A$$

Ejemplo. Sea $\Gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Gamma(t) = U(t) \{-v, v\}$$

$$\text{donde } U(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \tan gt \\ \cos t & \cot gt \end{pmatrix}, \quad v = (1, 0)$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(t) dt = \overline{B}(0, 4) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 4\}$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_{\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(t) dt}(\psi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{\Gamma(t)}(\psi) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t| dt \\ &= 4 \|\psi\|\end{aligned}$$

donde $\psi = (\psi_1, \psi_2)$

Así

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(t) dt &= \overline{\text{co}} \{x \in \mathbb{R}^2 / \sigma_{\int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(t) dt}(\psi) \geq \langle x, \psi \rangle, \forall \psi \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \overline{\text{co}} \{x \in \mathbb{R}^2 / 4 \|\psi\| \geq \langle x, \psi \rangle, \forall \psi \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \overline{\text{co}} \{x \in \mathbb{R}^2 / 4 \|x\| \geq \|x\|^2\} \\ &\equiv \overline{B}(0, \psi).\end{aligned}$$

Observe que en este último ejemplo es imposible calcular la integral de Γ haciendo uso directo de la definición de integral multívoca.

Conceptos de la teoría fuzzy

Desde que el concepto de conjunto fuzzy fue introducido por Zadeh [45] en 1965, un gran número de publicaciones fueron dedicadas a extender los conceptos clásicos al nuevo campo y para resolver los nuevos “problemas fuzzy”. La idea principal del nuevo concepto de conjunto fuzzy es la de medir, en algún sentido, cosas subjetivas, es decir, ampliar el sentido de la pertenencia clásica al de “grados de pertenencia”. Para ello Zadeh recurrió a lo siguiente:

Los conjuntos usuales pueden ser caracterizados por la llamada función característica, es decir, por la función

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

donde A es un subconjunto usual de X (conjunto ambiente). Así la pertenencia de un elemento arbitrario x de X al conjunto A se traduce en 0 (si no está en A) o 1 (si está

en A). Zadeh tomó definición de conjunto fuzzy cualquier función $u: X \rightarrow [0, 1]$. De esta forma los grados de pertenencia se traducen en el valor $u(x)$ que varía entre 0 y 1. Esta definición extiende claramente el concepto de conjunto usual.

Así fue necesario extender las operaciones entre conjuntos, tales como complemento, unión, intersección etc. (vea [46]).

Denotamos por $L_\alpha u = \{x \in \mathbb{R}^n / u(x) \geq \alpha\}$ el conjunto de nivel α de u ($0 < \alpha \leq 1$). Además, denotamos $\text{sopp}(u)$ el soporte de u , es decir, la clausura del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n / u(x) \neq 0\}$. Así

$$\text{sopp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / u(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / u(x) > 0\}}.$$

Por conveniencia en la notación, colocamos $L_0 u = \text{sopp}(u)$. Observe que

$$L_0 u \supseteq L_\alpha u \supseteq L_\beta u, \forall \beta \geq \alpha \geq 0. \quad (*)$$

Así, a cada conjunto fuzzy $u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ le asociamos una familia no enumerable $\{L_\alpha u / \alpha \in [0, 1]\}$ de conjuntos usuales.

Recíprocamente, tenemos el siguiente resultado debido a Negoita y Ralescu [46].

Teorema. ([46]) Sea M un conjunto y sea $\{M_\alpha / \alpha \in [0, 1]\}$ una familia de subconjuntos de M tal que

$$(i) \quad M_0 = M$$

$$(ii) \quad \alpha \leq \beta \text{ implica } M_\beta \subseteq M_\alpha$$

$$(iii) \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \text{ implica } M_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}.$$

Entonces, la función $\Phi: M \rightarrow [0, 1]$ definida por $\Phi(x) = \sup \{\alpha \in [0, 1] / x \in M_\alpha\}$ tiene la propiedad que $\{x \in M / \Phi(x) \geq \alpha\} = M_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Luego, por el teorema anterior, vemos que es posible, vía niveles, mostrar que cualquier "concepto fuzzy" puede ser identificado con una familia de "conceptos clásicos" del mismo tipo.

Como una extensión de $K(\mathbb{R}^n)$ definimos el espacio E^n de conjuntos fuzzy $u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ con las propiedades:

- a) u es semicontinua superior;
- b) $\text{sopp}(u) = L_0 u$ es compacto;
- c) $\{x \in \mathbb{R}^n / u(x) = 1\} \neq \emptyset$.

En términos de la familia de niveles α de u , las condiciones anteriores se traducen en:

- a') $L_\alpha u$ es compacto para cualquier $\alpha \in [0, 1]$.
- b') $u \neq \chi_{\{0\}}$ (u es no vacío en el sentido fuzzy).
- a') Se deduce de la propiedad (*) en conjunto con a) y b). La condición c'), se deduce de c).

En resumen, tenemos

$$u \in E^n \Leftrightarrow L_\alpha u \in K(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Como veremos más adelante esta caracterización es esencial para abordar las cuestiones levantadas en la introducción.

Podemos definir una estructura métrica sobre E^n colocando

$$D(u, v) = \sup_{\alpha > 0} H(L_\alpha u, L_\alpha v)$$

Es fácil ver que:

$$(\mathbb{R}^n, d) \rightarrow (K(\mathbb{R}^n), H) \rightarrow (E^n, D).$$

Son inclusiones continuas (a través de $x \rightarrow \{x\}$, y $A \rightarrow \chi_A$ respectivamente).

Antes de hacer la generalización al contexto fuzzy de $K_c(\mathbb{R}^n)$, veamos la siguiente definición.

Definición. Un conjunto fuzzy $u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ se dice fuzzy-convexo si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \lambda \leq 1$ se verifica

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{u(x), u(y)\}.$$

Esta definición es bastante natural si pensamos $u(x)$ como el "grado de pertenencia" de x al conjunto fuzzy u .

También, es fácil ver que la definición anterior es equivalente a decir que $L_\alpha u$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Ahora daremos la generalización prometida. Definimos

$$E_c^n = \{u \in E^n / u \text{ es fuzzy convexo}\}$$

Claramente $K_c(R^n) \rightarrow E_c^n$ vía la inclusión canónica: $A \rightarrow \chi_A$.

Así $u \in E_c^n \Leftrightarrow L_\alpha u \in K_c(R^n), \forall \alpha \in [0, 1]$. Una estructura lineal en E^n es definida por las relaciones

$$1) \text{ Suma: } (u + v)(x) = \sup_{y+z=x} \min [y(y), v(z)];$$

$$2) \text{ Producto por escalar: } (\lambda u)(x) = \begin{cases} u(x/\lambda), & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x), & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

donde $u, v \in E_c^n, \lambda \in R$.

Estas operaciones, a primera vista, pueden parecer un poco extrañas, pero son naturales si pensamos en términos de los conjuntos de niveles, la suma se traduce en:

$$1') L_\alpha(u + v) = L_\alpha u + L_\alpha v$$

y el producto por escalar en:

$$2') L_\alpha(\lambda u) = \lambda L_\alpha u$$

con $u, v \in E_c^n, \lambda \in R$ y $\alpha \in [0, 1]$.

Algunos resultados importantes son:

Teorema (E^n, D) es un espacio métrico completo y no separable.

Una prueba puede encontrarse en [23] y [33].

Teorema. (E_c^n, D) es un subespacio métrico cerrado de E^n .

Recordemos que una propiedad importante de $(K_c(R^n), H)$ es el Teorema de Inmersión de Minkowski. Para poder generalizar este resultado al contexto fuzzy precisamos restringir un poco más el espacio E_c^n .

Así, vamos a considerar el subespacio de E_c^n , el cual tiene niveles continuos, más precisamente consideraremos el siguiente conjunto.

$$E_{c,c}^n = \{u \in E_c^n / \alpha \in [0, 1] \rightarrow L_\alpha u \text{ es continua de } ([0, 1], |\cdot|) \text{ en } (K_c(R^n), H)\}.$$

$|\cdot|$ denota el valor absoluto en R .

Una propiedad importante de este subespacio es:

Teorema ([31]). (E_{cc}^n, D) es un subespacio métrico completo de (E_c^n, D) .

La generalización del Teorema de Inmersión de Minkowski es:

Teorema ([31], [32]). Existe una función $j: E_{cc}^n \rightarrow C([0, 1] \times S^{n-1})$ tal que, j es una isometría, aditiva y positivamente homogénea.

La prueba es realizada vía la “funcional soporte fuzzy” $S_u: [0, 1] \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$S_u(\alpha, x) = \sigma_{t_{\alpha} u}(x).$$

Como consecuencia del resultado anterior deducimos:

Corolario. E_{cc}^n es separable.

En resumen, tenemos

Teorema ([31], [32]). (E_{cc}^n, D) es un subespacio métrico completo y separable (E_c^n, D) . Además, es el subespacio maximal de (E_c^n, D) que puede ser inmerso a través de j en $C([0, 1] \times S^{n-1})$.

Definición. Sea $F: X \rightarrow E(X)$ una multifunción fuzzy. Decimos que F es una contracción si existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que

$$D(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

También diremos que $x \in X$ es un punto fijo de F si $X_{\{x\}} \subseteq F(x)$.

El análogo del Teorema de Nadler es

Teorema ([34], [35]) sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $F: X \rightarrow E(X)$ es una multifunción fuzzy contractante, entonces Γ tiene punto fijo.

El problema de estabilidad es resuelto por el teorema que sigue, el cual es importante para estudiar la estabilidad del problema de inclusión diferencial fuzzy, como también para el estudio de la estabilidad del problema de control fuzzy. Antes de enunciar el resultado, tenemos que definir el concepto de conjunto de puntos fijos fuzzy. Para ello, usaremos las siguientes proposiciones:

Proposición. Sea $F: X \rightarrow E(X)$ una multifunción fuzzy contractante con constante λ . Entonces para cada $\alpha \in [0, 1]$, la multifunción $F_\alpha: X \rightarrow K(X)$ dada por $F_\alpha(x) = L_\alpha F(x)$ es una multifunción contractante.

Proposición [34]. Sea $F: X \rightarrow E(X)$ una multifunción contractante. Entonces existe un único $u \in E(X)$ tal que

$$L_\alpha u = S_\alpha \equiv \{ \text{puntos fijos de } F_\alpha \}$$

Para poder probar el teorema anterior, es necesario usar el teorema de representación de Nagoita y Ralescu [46].

Ahora, la definición prometida.

Definición. El conjunto fuzzy u dado en la proposición anterior es llamado el conjunto fuzzy de los puntos fijos asociados con la multifunción fuzzy F .

Una caracterización del conjunto de puntos fijos de una multifunción fuzzy contractiva F es dada:

Proposición [34]. Sea $F: X \rightarrow E(X)$ y $u \in E(X)$ tal que $L_\alpha u = S_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Entonces

$$u(x) = (F(x))(x) \quad \forall x \in X.$$

Ahora el teorema prometido.

Teorema [35]. Sea X un espacio métrico completo y $F_0, F_i: X \rightarrow E(X)$ una sucesión de multifunciones fuzzy contractivas con constante λ ($i = 1, 2, \dots$) tal que $F_i \rightarrow F_0$ uniformemente sobre X , entonces $D(u_i, u_0) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Ahora daremos la extensión de la integral de Aumann para el caso multívoco fuzzy debida a Ralescu. Para ello, primero definiremos la noción de medibilidad.

Definición. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo y $F: \Omega \rightarrow E^n$ una multifunción fuzzy. Diremos que F es medible si $F_\alpha: \Omega \rightarrow P(R^n)$ definida por

$$F_\alpha(w) = L_\alpha F(w)$$

es medible $\forall \alpha \in [0, 1]$. También diremos que F es *integralmente limitada* si cada F_α lo es (Recuerde que F_α es una multifunción usual).

Teorema (Ralescu [23]). Si $F: \Omega \rightarrow E^n$ es una multifunción fuzzy medible e integralmente limitada, entonces existe un único $u \in E^n$ tal que

$$L_\alpha u = \{p \in R^n, u(p) \geq \alpha\} = \int F_\alpha$$

para todo $\alpha. \in [0, 1]$.

Definición. El único conjunto fuzzy u , cuya existencia garantiza el teorema anterior, se define como la integral de la multifunción fuzzy. Es decir, $\int F d\mu$ se define vía niveles, de tal modo que

$$L_\alpha \int F = \int F_\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Un resultado importante es:

Teorema. Si F es una multifunción fuzzy medible entonces, en condiciones razonables (por ejemplo, μ no atómica y F integrablemente limitada), se tiene que $\int F d\mu$ es un subconjunto fuzzy-compacto y fuzzy-convexo.

Este teorema es consecuencia inmediata de las propiedades de la integral de Aumann.

Además, a partir de las definiciones de suma y producto por escalar en E^n , es trivial ver que esta integral fuzzy-multívoca es lineal en el sentido que:

$$L_\alpha [\int F + G] = L_\alpha \int F + L_\alpha \int G \quad y$$

$$L_\alpha [\int \lambda F] = \lambda L_\alpha \int F.$$

Un resultado interesante también, dado en [31] es:

Teorema. Sea $F: \rightarrow E_{cc}^n$ una variable aleatoria fuzzy integralmente acotada, entonces $\int \Gamma \in E_{cc}^n$ y

$$S_{\int \Gamma}(\alpha, x) = \int S_{\Gamma(w)}(\alpha, x) d\mu(w)$$

Para mayores detalles acerca de las propiedades de esta integral, se puede consultar [31], [22], [23], [47], [33].

REFERENCIAS

1. T.S. Angell. *Existence of solutions of multivalued Uryshon integral equations*, JOTA, Vol. 46, N° 2, 1985.
2. J.P. Aubin. *A Survey of viability theory*, SLAM J. Control and Optimization, Vol. 28 (1990). 749-788.
3. J.P. Aubin, A. Cellina. *Differential inclusions, set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, 1984.
4. R. Aumann. *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965), 1-12.
5. V.I. Blagodatskiy y A. F. Filippov. *Differential inclusions and optimal control*. Proc. of the Steklov Inst. Math., 4 (1986), 199-259.
6. V. A. Boldosov. *Differential inclusions with fuzzy right-hand side*, Soviet Math. Dokl., Vol. 40, pág. 567-569, 1990.
7. Y. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Mysnkis, V. V. Obukhovskii. *Multivalued mappings*. J. Soviet Math 24 (1984), N° 6.
8. G. Debreu. *Integration of correspondences in Proc. Fifth Berkeley Symp. Math Statistic. Probability*, p.p. 331-372, Universidad of California Press, Berkeley, 1966.
9. A. Cellina. *Approximation of set valued functions and fixed point theorems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 82 (1969), 247-262.
10. L. Cesari. *Optimization - theory and applications*, Springer-Verlag, 1983.
11. F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley (Canadian Mathematical Society), 1983.
12. F. H. Clarke, G. Watkins. *Necessary conditions, controllability and the value function for differential-difference inclusions, nonlinear analysis, theory, Methods and Applications*, Vol. 10, N° 11, p.p. 1155 - 1179, 1986.
13. B. Cornet, G. Haddad. *Theorems de viabilité pour les inclusions différentielles du second ordre*. Israel J. Math., Vol. 57, N° 2, 1987.
14. C. Castaing, M. Valadier. *Convex analysis and measurable multifunctions; Lectures Notes in Mathematics 580*, Springer-Verlag, 1977.
15. Fan Van Cyong. *On a smooth selection theorem and its applications to multivalued integral equations*, Math. USSR Sbornik, Vol. 34 (1978), N° 4.
16. E. Klein, A. Thompson. *Theory of correspondence*, John Wiley & Sons (Canadian Mathematical Society), 1984.
17. E. Michael. *Continuous selections I*. Ann of Math. (2) 63 (1956), 361-382.

18. N. S. Papageorgiou. *On multivalued evolution equations and differential equations in Banach spaces. Commentari Mathematici. Universitatis Sancti Pauli, Vol. 36, N° 1, 1987.*
19. T. Pruszko. *Some applications of the topological degree theory to multivalued boundary value problems, CCXXIX Dissertationes Mathematicae, Warszawa 1984, Poland.*
20. H. Roman y M. Rojas. *Sobre inclusiones diferenciales fuzzy, Congreso Internacional de Matemáticas CAPRICORNIO, 1991, Antofagasta-Chile.*
21. J. Warga. *Optimal control of differential and functional equations. Academic Press. 1972.*
22. L. Lushu. *Random fuzzy sets and fuzzy martingales, Fuzzy sets and Systems, 69 (1995), 181-192.*
23. M. Puri and D. A. Ralescu. *Fuzzy random variables. J. Math. Anal. and Appl. 114 (1986), 409-422.*
24. R.C. Bassanezi and H. Román-Flores. *On the continuity of fuzzy entropies, Kybernetes 24 (1995), 111-120.*
25. V. A. Boldosov. *A differential game with a fuzzy target set and fuzzy starting position. PMM USSR 53 (1989), 46-50.*
26. J. P. Aubin. *Fuzzy differential inclusions. Problems of control and information theory 19 (1990), 55-67.*
27. C.A. Cabrelli, B. Forte, V. M. Molter and E. R. Vrscay. *Iterated fuzzy set systems: A new approach to the inverse problem for fractals and other sets, J. Math. Anal. and Appl. 171 (1992), 79-100.*
28. B. Forte, M. Lo Sciavo and E. R. Vrscay. *Continuity properties of attractors for iterated fuzzy set systems. J. Austral. Math. Soc. Ser. B 36 (1994), 175-193.*
29. M. A. Rojas-Medar, H. Román-Flores. *On the equivalence of convergences of fuzzy sets. Aceptado en Fuzzy Sets and Systems, 1995.*
30. H. Román-Flores, A. Flores-Franulic, R.C. Bassanezi, M. A. Rojas-Medar. *On the level-continuity of fuzzy integrals. Aceptado en Fuzzy Sets and Systems, 1995.*
31. M. A. Rojas-Medar, R. C. Bassanezi and H. Román-Flores. *A generalization of the Mikowski embedding theorem and applications.*
32. M. A. Rojas-Medar, R. C. Bassanezi, H. Román-Flores. *Una generalización del teorema de inmersión de Minkowski al contexto fuzzy, Anais do 37º Seminario Brasileiro de Análise (1993).*

33. H. Román-Flores, R. C. Bassanezi, M. A. Rojas-Medar, A. Flores. *Tópicos en análisis fuzzy-multívoco, Actos XI Jornada de Matemáticas. Universidad de Tarapacá, Arica, Chile (1993).*
34. M. A. Rojas-Medar, R.C. Bassanezi, H. Román-Flores. *A fixed point theorem of Banach in the fuzzy context. Proc. of the Brazil-Japan Joint Symp. on Fuzzy Systems (1994).*
35. H. Román-Flores, A. Flores-Franulic, M. A. Rojas-Medar, R. C. Bassanezi. *On stability of fixed points set of fuzzy contractions. Proc. of International Fuzzy Systems Association Congress (IFSA'95).*
36. H. Román-Flores, M. A. Rojas-Medar, A. Flores. *On the variational convergence of fuzzy sets. Actas 3º Congreso Franco-Latinoamericano de Matemáticas Aplicadas, 1992.*
37. H. Román-Flores, A. Flores-Franulic, M. A. Rojas-Medar, R. C. Bassanezi, *Sobre un teorema de densidad en espacios de funciones. Actas 5º Congreso Internacional de Matemática Capricornio (1995).*
38. V. I. Blagodatskiy. *The maximum principle for differential inclusions. Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, 166 (1984), 23-43.*
39. V.I. Blagodatskiy - Skikn, A. F. Filippov, *Differential inclusions and optimal control, Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, 169 (1985), 199-259.*
40. S. M. Aseev. *Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings. Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, 167 (1985), 23-53.*
41. R. A. Vitale, *L_p metrics for compact, convex sets, J. of Approx. Theory 45 (1985), 280-287.*
42. J.P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis, Birkhäuser, 1990.*
43. S. B. Nadler, *Multi-valued contraction mappings, Pac. J. Math. 30 (1969), 475-478.*
44. H. Román, A. Flores, A. Pachá, L. Hernández. *Sobre una extensión de la métrica de Hausdorff. Actas Primer Congreso Internacional de Matemática Capricornio, Antofagasta, Chile (1991).*
45. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965), 338-353.*
46. M. L. Nagaoita, D. Ralescu, *Applications of fuzzy sets to systems analysis, Wiley, New York (1975).*
47. M. Puri, D. Ralescu. *The concept of normality for fuzzy random variables. The Annals of Probability (13) (1985), 1373-1379.*

Algoritmos para la inserción de nodos de B-splines por el concepto de formas polares

Rolf Schröder^()*

En el diseño geométrico (CAGD - Computer Aided Geometric Design), el ingeniero manipula el diseño de una curva o superficie por el cambio de los llamados puntos de control. Las superficies y curvas se construyen por polinomios de Bézier o B-splines. En ambos casos estas superficies o curvas se encuentran en la cápsula convexa de sus puntos de control. Las curvas pasan por lo general por el primer y el último punto de control y las superficies son limitadas por curvas de Bézier o B-splines.

Mientras más puntos de control hay, la construcción es más flexible. Entonces surge la pregunta: ¿Cómo se puede obtener la misma curva o superficie que está dada por un cierto número de puntos de control, si se añaden unos puntos de control adicionales? En el caso de B-splines se habla de una inserción de nodos. Vamos a conocer distintos algoritmos para la inserción de nodos de B-splines en base a una representación en la forma polar (blossom) que fue descubierta por de Casteljau [4] y Ramshaw [10] y [11]. Los algoritmos serán comparados y discutidos. Primero definiremos los B-splines y presentaremos las ideas principales del diseño geométrico. Las formas polares serán introducidas a través del algoritmo de de Boor para la evaluación de una curva de B-splines.

^(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú.

Construcción de los B-splines

Definición:

Sea $T := \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de nodos infinita y monótonamente no decreciente, $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ con $\lim_{i \rightarrow \pm \infty} t_i = \pm \infty$. Para $i \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, se define

$B_{i,1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\omega_{i,k}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B_{i,1}(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$\omega_{i,k}(t) := \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i}, & \text{si } t_i < t_{i+k-1} \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Entonces las funciones

$$B_{i,k} := \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1},$$

definidas recursivamente para $i \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, $B_{i,k}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, son llamados **B-splines del orden k** respecto a la secuencia de nodos $T = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Estos B-splines tienen las propiedades siguientes (vea Dierckx [6] o Stoer-Burkirsch [15]):

- (a) $B_{i,k}$ es por partes un polinomio de grado menor que k y $B_{i,k}$ desaparece fuera de $[t_i, t_{i+k}]$. Especialmente es $B_{i,k} = 0$, si $t_i = t_{i+k}$. Solamente en los nodos $t_i, \dots, t_{i+k}$, $B_{i,k}$ puede ser no continuo.
- (b) Para $t_i < t_{i+k}$ se cumple $B_{i,k} > 0 \forall x \in (t_i, t_{i+k})$ es decir: el intervalo $[t_i, t_{i+k}]$ es el soporte de $B_{i,k}$.
- (c) Para todos $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{i,k}(t) = 1$$

En realidad esta sumatoria es según (a) y (b) finita. Para $t \in [t_j, t_{j+1}]$ se puede escribir entonces

$$\sum_{i=j-k+1}^j B_{i,k}(t) = 1$$

- (d) Los B-splines del orden $m + 1$ forman una base del espacio lineal de los splines de grado m respecto a la partición

$$\Delta_n: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \text{ Más exacto:}$$

Sea

$$S_m(\Delta_n) := \{s \in C^{m-1}[a, b]: s|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \Pi_m, j = 0, \dots, m-1\}$$

el espacio lineal de los splines de grado m (que son $m-1$ veces continuamente diferenciables en $[a, b]$ y cuya restricción al intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es un polinomio del grado $\leq m$), entonces se obtiene con

$$\begin{aligned} T = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad t_i &:= x_i, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{y} \\ \dots &< t_{-(m+1)} < t_{-m} \leq \dots \leq t_{-1} \leq t_0 < \dots < t_n \leq \\ &\leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+m} < t_{n+m+1} < \dots \end{aligned}$$

que

$$S_m(\Delta_n) = \text{span}_{[a, b]} \{B_{-m, m+1}, \dots, B_{n-1, m+1}\}$$

Definición:

Sea $k \in \mathbb{N}$, $T = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ con $t_i < t_{i+k} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. La restricción de

$$x(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i B_{i,k}(t), \quad d_i \in \mathbb{R}^2 \quad \text{o} \quad d_i \in \mathbb{R}^3$$

al intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es llamada una curva de B-splines. Los coeficientes d_i son denominados *puntos de control* o *puntos de de Boor*.

Otra vez, los B-splines $B_{i,k}$ desaparecen fuera de $[t_i, t_{i+k}]$ y por eso la sumatoria es finita, es decir

$$x(t) = \sum_{i=j-k+1}^j d_i B_{i,k}(t) \quad \text{para } t \in [t_j, t_{j+1}]$$

Ejemplo:

Sea $k \in \mathbb{N}$. Elegimos los puntos finales del intervalo $[a, b]$ como k -múltiple nodo y $n-1$ nodos interiores, entonces:

$$a = t_0 = \dots = t_{k-1} < t_k < \dots < t_{k+n-2} < t_{k+n-1} = \dots = t_{2k+n-2} = b.$$

Con los puntos de control $d_0, \dots, d_{k+n-2}$, resulta para $t \in [a, b]$:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{k+n-2} d_i B_{i,k}(t).$$

$x(t)$ pasa entonces por el primer y el último punto de control d_0 y d_{k+n-2} . Gracias a la propiedad (c) de los B-splines, $x(t)$ está en la cápsula convexa de sus puntos de control, es decir

$$x(t) \subset \text{co} \{d_0, \dots, d_{k+n-2}\}$$

$$:= \left\{ \sum_{i=0}^{k+n-2} \lambda_i d_i : \lambda_i \geq 0; i=0, \dots, n, \sum_{i=0}^{k+n-2} \lambda_i = 1 \right\}$$

En caso de que los nodos tengan al inicio del intervalo una multiplicidad menor que k , la curva no empieza en d_0 , y la curva tampoco termina en d_{k+n-2} si tiene al final una multiplicidad menor que k .

Gráfico1

CURVAS DE B-SPLINES CON CAMBIO DE UN PUNTO DE CONTROL

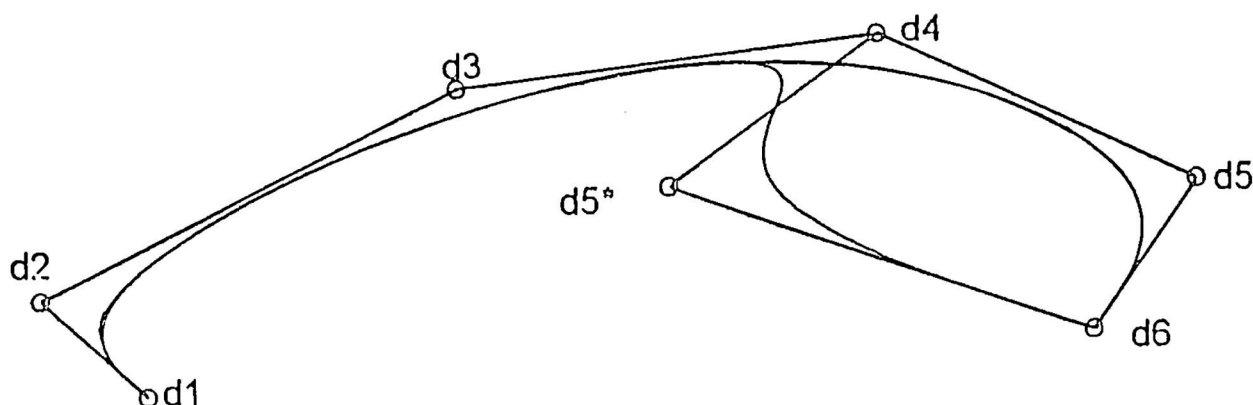
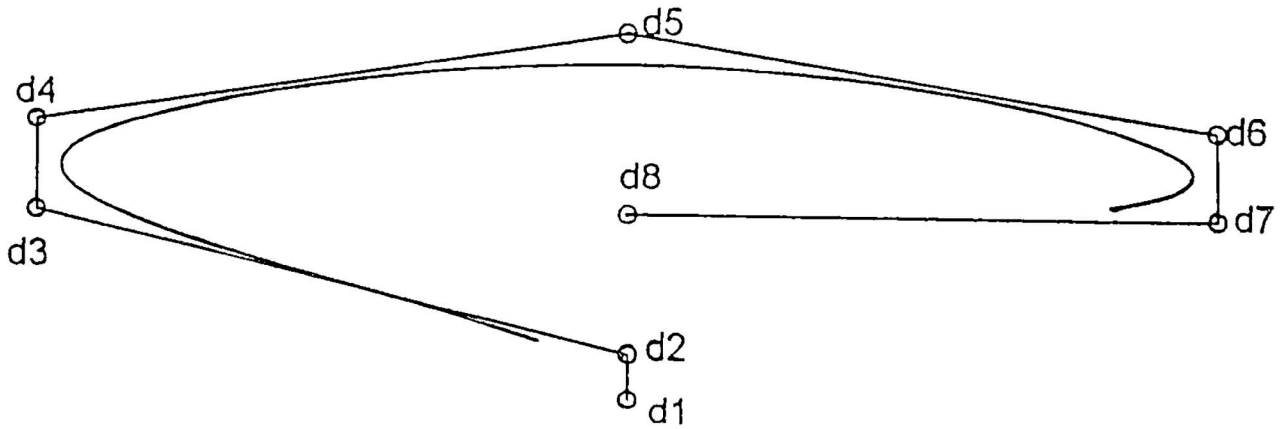


Gráfico 2
CURVA DE B-SPLINES QUE NO PASA POR LOS PUNTOS DE CONTROL EXTREMOS



El algoritmo de de Boor y las formas polares

La evaluación de la curva de B-splines se realiza por el *algoritmo de de Boor*.

- Sean dados $k \in \mathbb{N}$ y los nodos $t_{j-k+1} \leq \dots \leq t_j < t_{j+1} \leq \dots \leq t_{j+k}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$ y los puntos de control $d_{j-k+1}, \dots, d_j$.

- Para $i = j - k + 1, \dots, j$ se define

$$d_i^0(t) := d_i$$

- Para $r = 1, \dots, k - 1$ y para $i = j, \dots, j - k + r + 1$ se define

$$\omega_{i, k-r+1}(t) := \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+k-r} - t_i}, & \text{si } t_i < t_{i+k-r} \\ 0 & \text{de lo contrario,} \end{cases}$$

$$d_i^r(t) := \omega_{i, k-r+1}(t) d_i^{r-1}(t) + [1 - \omega_{i, k-r+1}(t)] d_{i-1}^{r-1}(t)$$

Entonces resulta:

$$d_j^{k-1}(t) = \sum_{i=j-k+1}^j d_i B_{i,k}(t)$$

La prueba es por inducción. Supongamos que $x(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{r-1} B_{i,k-r+1}$ para $r \in \{1, \dots, k-1\}$. Esto es correcto para $r = 1$. Finalmente resulta

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{r-1} B_{i,k-r+1} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{r-1} [\omega_{i,k-r+1} B_{i,k-r} + (1 - \omega_{i+1,k-r+1}) B_{i+1,k-r}] \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} [\omega_{i,k-r+1} d_i^{r-1} + (1 - \omega_{i,k-r+1}) d_{i-1}^{r-1}] B_{i,k-r} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^r B_{i,k-r} \end{aligned}$$

Después de $k-1$ pasos se tiene $x(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} d_i^{k-1} B_{i,1}$. Para $t \in [t_j, t_{j+1}]$ es entonces $x(t) = d_j^{k-1}(t)$.

El esquema de de Boor es el siguiente en el caso de $k = 4$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$:

$$\begin{aligned} d_{j-3} &=: d_{j-3}^0(t) > d_{j-2}^1(t) \\ d_{j-2} &=: d_{j-2}^0(t) > d_{j-1}^1(t) > d_{j-1}^2(t) \\ d_{j-1} &=: d_{j-1}^0(t) > d_j^1(t) > d_j^2(t) \\ d_j &=: d_j^0(t) > d_j^1(t) \end{aligned}$$

Ahora vamos a ver este algoritmo a la base de las formas polares (blossoms). Las formas polares fueron descubiertas por Jolles [8] en 1886. La aplicación a curvas de Bézier y B-splines fue desarrollado por de Casteljau [4] y Ramshaw [10] y [11], y después también por Seidel [14].

El truco consiste en el hecho de que para cada curva polinomial $x(t)$, $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ de grado $\leq n$, existe un polinomio multivariante único $x[t_1, \dots, t_n] \in \mathbb{R}^d$ llamado el blossom o la forma polar de $x(t)$, con las propiedades siguientes:

- $x[t_1, \dots, t_{i-1}, \alpha t_i + (1 - \alpha) \hat{t}_i, t_{i+1}, \dots, t_n]$
 $= \alpha x[t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n] + (1 - \alpha) x[t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n]$
 para todos los índices i y, $\alpha \in \mathbb{R}$ (*multiafinidad*).

- $x [t_1, \dots, t_n] = x [t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}]$ para cualquier permutación π de $\{1, 2, \dots, n\}$ (*simetría*).
- $x [t, \dots, t] = x(t)$ (*diagonalidad*).

Ejemplo:

Calculamos la forma polar para el polinomio

$$x(t) = 7t^3 + 2t^2 - 3t - 5$$

Por la multiafinidad no hay potencias mayores que 1, entonces

$$x[t_1, t_2, t_3] = a_{111} t_1 t_2 t_3 + a_{011} t_2 t_3 + a_{101} t_1 t_3 + a_{110} t_1 t_2 + \\ + a_{100} t_1 + a_{010} t_2 + a_{001} t_3 + a_{000}$$

Por la simetría resulta $a_{110} = a_{101} = a_{011}$ y $a_{100} = a_{010} = a_{001}$, por la diagonalidad finalmente

$$x[t_1, t_2, t_3] = 7 t_1 t_2 t_3 + \frac{2}{3} (t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2) - (t_1 + t_2 + t_3) - 5.$$

La relación entre curvas de B-splines y formas polares todavía no es clara. Primeramente hay que tomar en cuenta que el B-spline es un polinomio por partes. Denominemos con x_j la restricción de la curva de B-splines x al intervalo $\{t_j, t_{j+1}\}$ y con $x_j[\dots]$ la forma polar correspondiente. Poniendo

$$d_i := x_j [t_{i+1}, \dots, t_{i+k-1}], \quad i = j - k + 1, \dots, j,$$

se obtiene finalmente las curvas de B-splines (Barry [1]).

Vamos a estudiar esto en el esquema y el algoritmo de de Boor. Para el mismo esquema anterior resultaría entonces ($k = 4$):

$$\begin{aligned} d_{j-3} &= x_j [t_{j-2}, t_{j-1}, t_j] \\ d_{j-2} &= x_j [t_{j-1}, t_j, t_{j+1}] \\ d_{j-1} &= x_j [t_j, t_{j+1}, t_{j+2}] \\ d_j &= x_j [t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}] \end{aligned} \quad \begin{aligned} &> x_j [t_{j-1}, t_j, t] \\ &> x_j [t_j, t, t_{j+1}] \\ &> x_j [t, t_{j+1}, t_{j+2}] \end{aligned} \quad \begin{aligned} &> x_j [t_j, t, t] \\ &> x_j [t, t, t_{j+1}] \end{aligned} \quad > x_j [t, t, t]$$

donde, por ejemplo, $x_j [t_{j-1}, t_j, t]$ es calculado por

$$\begin{aligned} x_j [t_{j-1}, t_j, t] &= x_j [t_{j-1}, t_j, \frac{t - t_{j-2}}{t_{j+1} - t_{j-2}} t_{j+1} + \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_{j-2}} t_{j-2}] \\ &= \frac{t - t_{j-2}}{t_{j+1} - t_{j-2}} x_j [t_{j-1}, t_j, t_{j+1}] + \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_{j-2}} x_j [t_{j-2}, t_{j-1}, t_j] \end{aligned}$$

lo que es exactamente la descripción del algoritmo de de Boor.

Por la introducción de las formas polares se puede entender algunos algoritmos más fácilmente. Vamos a trabajar con este concepto, entonces, para los algoritmos de la inserción de nodos.

Algoritmos para la inserción de nodos

El algoritmo más conocido para la inserción de nodos es el algoritmo de Boehm [3] del año 1980:

Sea $k \in \mathbb{N}$, $T = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una secuencia de nodos con $t_i < t_{i+k} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$, $\hat{t} \in [t_j, t_{j+1}]$ o $\hat{t} \in (t_j, t_{j+1})$ para $t_{j-k+1} = t_j$.

Definiendo

$$\hat{t}_i := \begin{cases} t_i & \text{para } i \leq j \\ \hat{t} & \text{para } i = j+1 \\ t_{i-1} & \text{para } i \geq j+2 \end{cases}$$

se obtiene una nueva secuencia $\hat{T} := \{\hat{t}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Sean entonces $\hat{B}_{i,k}$ los B-splines que pertenecen a esta secuencia.

Con una nueva secuencia de puntos de control

$$\hat{d}_i := \begin{cases} d_i & \text{para } i \leq j - k + 1 \\ \frac{\hat{t} - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} d_i + \frac{t_{i+k-1} - \hat{t}}{t_{i+k-1} - t_i} d_{i-1} & \text{para } j - k + 2 \leq i \leq j \\ d_{i-1} & \text{para } i \geq j + 1 \end{cases}$$

resulta finalmente:

$$\sum_{i \in Z} d_i B_{i,k} = \sum_{i \in Z} \hat{d}_i B_{i,k},$$

es decir, se obtiene la misma curva de B-splines por introducción de un nodo y un punto de control más y de tal manera más flexibilidad para el diseño.

En la forma polar la prueba para este algoritmo es muy fácil (vea Seidel [13]):

Para $j - k + 2 \leq i \leq j$ es por $t_j \leq \hat{t} < t_{j+1}$.

$$\begin{aligned} \hat{d}_i &= x_j [\hat{t}_{i+1}, \dots, \hat{t}_{i+k-1}] x_j [t_{i+1}, \dots, t_{i+k-2}, t] \\ &= x_j [t_{i+1}, \dots, t_{i+k-2}, \frac{\hat{t} - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} t_{i+k-1} + \frac{t_{i+k-1} - \hat{t}}{t_{i+k-1} - t_i} t_i] \\ &= \frac{\hat{t} - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} x_j [t_{i+1}, \dots, t_{i+k-1}] + \frac{t_{i+k-1} - \hat{t}}{t_{i+k-1} - t_i} x_j [t_i, \dots, t_{i+k-2}] \\ &= \frac{\hat{t} - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} d_i + \frac{t_{i+k-1} - \hat{t}}{t_{i+k-1} - t_i} d_{i-1} \end{aligned}$$

un punto de la curva y corresponde entonces exactamente la fórmula de Boehm.

Gráficamente se puede escribir el algoritmo de Boehm de la manera siguiente (para el caso cúbico).

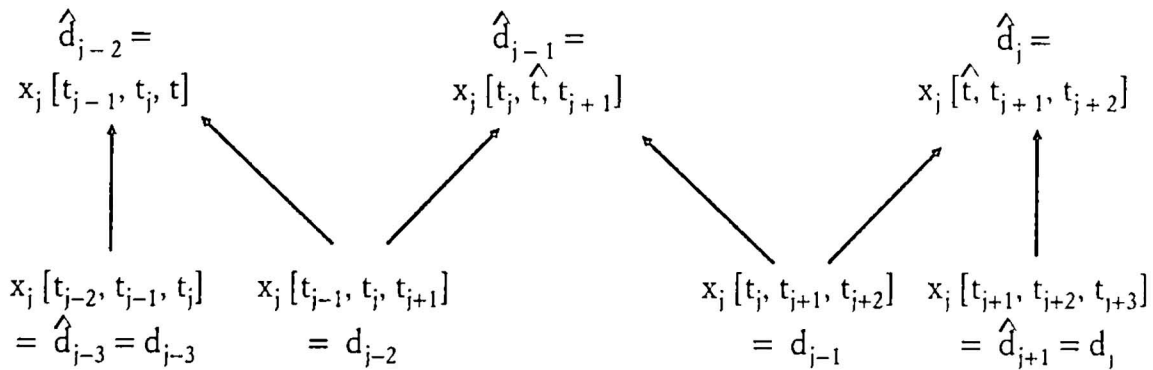
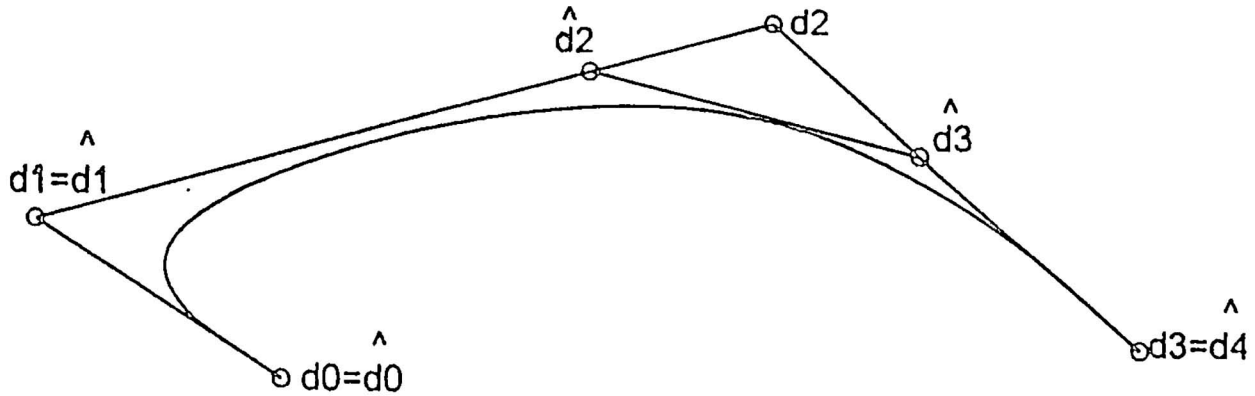


Gráfico 3
INSERCIÓN DE UN NODO



En el mismo año 1980, Cohen/Lyche/Riesenfeld [5] propusieron el algoritmo - Oslo. En términos de las formas polares, ellos insertan a un intervalo $[t_j, t_{j+1})$ maximalmente los $k-1$ nodos $\hat{t}_{j+1}, \dots, \hat{t}_{j+k-1}$, reemplazando así la secuencia de nodos $T_j = \{t_i\}$ por los nodos $\hat{T}_j = \{\hat{t}_i\}$. Después de la inserción se tiene $\hat{t}_i = t_i$ para $i \leq j$. Siguen los nuevos nodos $\hat{t}_{j+1}, \dots, \hat{t}_{j+k-1}$ y finalmente resulta $\hat{t}_{i+k-1} = t_i$ para $i > j$. Los puntos de control idénticos son $\hat{d}_i = d_i$ para $i \leq j - k + 1$ y $d_{i+k-1} = d_i$ para $i \geq j$. El resto de los puntos de control se calcula en el caso $k=4$ por el esquema siguiente:

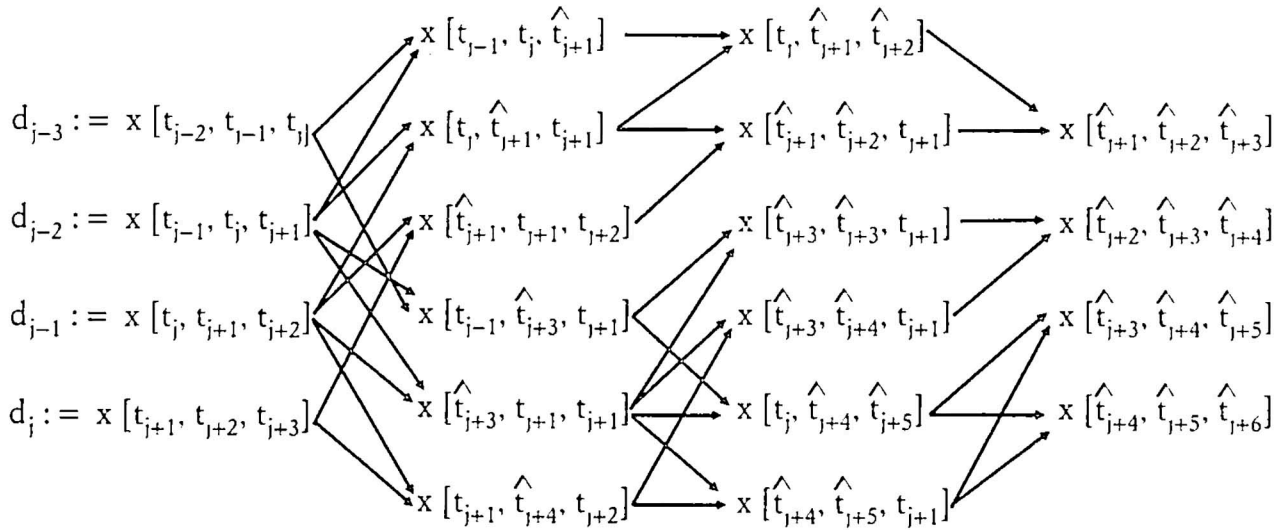
$$\begin{aligned} d_{j-3} &= x[t_{j-2}, t_{j-1}, t_j] > x[t_{j-1}, t_j, \hat{t}_{j+1}] > x[t_j, \hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}] > x[\hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}, \hat{t}_{j+3}] = \hat{d}_j \\ d_{j-2} &= x[t_{j-1}, t_j, t_{j+1}] > x[t_j, \hat{t}_{j+1}, t_{j+1}] > x[\hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}, t_{j+1}] > x[\hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}, \hat{t}_{j+3}] = \hat{d}_j \\ d_{j-1} &= x[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}] > x[\hat{t}_{j+1}, t_{j+1}, t_{j+2}] > x[\hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}, t_{j+1}] > x[\hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}, \hat{t}_{j+3}] = \hat{d}_j \\ d_j &= x[t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}] > x[\hat{t}_{j+1}, t_{j+1}, t_{j+2}] > x[\hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}, t_{j+1}] > x[\hat{t}_{j+1}, \hat{t}_{j+2}, \hat{t}_{j+3}] = \hat{d}_j \end{aligned}$$

donde se ha puesto $x[\dots] = x_j[\dots]$. Los puntos de control d_{j-2} y d_{j-1} resultan de la primera fila oblicua.

De tal manera se puede calcular completamente los nuevos puntos de control $\{\hat{d}_j\}$. En caso de que se quiera insertar más nodos y puntos de control, se recomienda el algoritmo de Sablonnière [12]. Originalmente Sablonnière transformó una curva de B-splines en una curva de Bézier. Barry/Goldman [2] muestran, como también se puede utilizar para este algoritmo el concepto de las formas polares.

Teóricamente se puede calcular los k nuevos puntos de control respecto a nuevos nodos por el algoritmo de Oslo (calculando k triángulos como arriba). Sin embargo,

por la simetría de las formas polares se puede hacer este algoritmo más eficiente. Esto es ya el algoritmo de Sablonnière, cuyo esquema es el siguiente (tomando otra vez el caso cúbico, es decir $k = 4$):



Otra vez se ha puesto $x[\dots] = x_j[\dots]$. Ya hemos conocido los algoritmos principales para la inserción de nodos. Sin embargo, para casos especiales existen varios algoritmos más. Consideremos, por ejemplo, el caso en que se da una secuencia de nodos $\{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Queremos solamente cambiar algunos de los nodos y aplicar el algoritmo de Oslo. En su forma general se repiten muchos cálculos. Entonces se puede desarrollar una forma más eficiente del algoritmo de Oslo (Lyche Mørken [9]). Otras dos versiones del algoritmo de Oslo fueron propuestas por Goldman [7]. Son también versiones más eficientes que combinan ventajas del algoritmo mejorado de Oslo y del algoritmo de Sablonnière. Estas y otras versiones más son presentadas en el trabajo de Barry/Goldman [2]. Todas estas versiones fueron desarrolladas en la forma polar, lo que demuestra la importancia que tiene este concepto, hoy en día, en el diseño geométrico. Sin el uso de las formas polares, las fórmulas de todos estos algoritmos se vuelven muy complicadas y son mucho menos entendibles.

REFERENCIAS

1. Barry, P. J.: *An introducing to blossoming*, en: Goldman, R. N.; Lyche, T. (Ed.): *Knot Insertion and Deletion Algorithms for B-spline Curves and Surfaces*, SLAM, 1993.
2. Barry, P. J.; Goldman, R. N.: *Knot insertion algorithms*, en: Goldman, R. N.; Lyche, T. (Ed.): *Knot Insertion and Deletion Algorithms for B-spline Curves and Surfaces*, SLAM 1993.

3. Boehm, W.: *Inserting new knots into B-splines curves*, *Computer Aided Design* 12, 1980, p. 199-201.
4. Casteljau de P.: *Shape Mathematics and CAD*. Kogan Page, London, 1986.
5. Cohen, E.; Lyche, T.; Riesenfeld, R.F.: *Discrete B-splines and subdivision techniques in computer - Aided - Geometric - Design and computer graphics*. *Computer Graphics and Image Processing* 14, 1980, p. 87-111.
6. Dierckx, P.: *Curve and surface fitting with splines*. Oxford Science Publications, 1995.
7. Goldman, R. N.: *Blossoming and knot insertion algorithms for B-splines curves*. *Computer Aided Geometric Design* 7, 1990, p. 69-81.
8. Jolles, S.: *Die theorie der Oskulanten und das Sehnensystem der Raumkurve 4. Ordnung*, 2. Spezies, Technische Universität Aachen, 1886.
9. Lyche, T.; Mørken, K.: *Making the Oslo algorithm more efficient*. *SLAM J. Numer. Anal.* 23, 1986, p. 663-675.
10. Ramshaw, L.; Blossoming A.: *Connect - the - Dots - Approach to splines*. Tech. Report 19, Digital Equipment Systems Research Center, Palo Alto, CA, 1987.
11. Ramshaw, K.: *Blossoms are polar forms*. *Computer Aided Geometric Design* 6, 1989, p. 323-358.
12. Sablonnière, P.: *Spline and Bézier polygons associated with a polynomial spline curve*. *Computer Aided Design* 6, 1978, p. 257-261.
13. Seidel, H. P.: *Knot insertion from a blossoming point of view*. *Computer Aided Geometric Design* 5, 1988, p. 81-86.
14. Seidel, H. P.: *A new multiaffine approach to splines*. *Computer Aided Geometric Design* 6, 1989, p. 23-32.
15. Stoer, J.; Burlirsch, R.: *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 1993.

Conversión entre triángulos y rectángulos de Bézier

Johnny Moisés Valverde Montoro (*)

RESUMEN

El propósito del presente trabajo es exponer dos métodos de conversión: la conversión de triángulos a rectángulos de Bézier y viceversa, los cuales consisten en una subdivisión de estos. El primero de los métodos es una conversión de un pedazo rectangular integral de Bézier de grado $m \times n$ en dos subpedazos triangulares integrales de Bézier de grado $(m+n)$ cada uno. El segundo consiste en subdividir un pedazo triangular racional de Bézier de grado n en 3 subpedazos rectangulares racionales de Bézier de grado $n \times n$ cada uno (del mismo grado).

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo principal presentar un medio por el cual los sistemas CAD pueden darle un tratamiento uniforme a los triángulos y rectángulos de Bézier. El problema que se ha tenido en el diseño

(*) UNI, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática.

geométrico con respecto a modelar un objeto se puede expresar muy bien por medio de la siguiente pregunta: "¿Qué usar, pedazos triangulares o rectangulares?".

En sus inicios los sistemas CAD fueron desarrollados para la industria automotriz; sus primeras aplicaciones fueron para diseñar las partes del cuerpo de un carro (puertas, techo, etc.) que tienen una geometría rectangular, quizás esta sea la principal razón de la predominancia de los pedazos rectangulares en la mayoría de los sistemas CAD (sus rutinas se basan en estructuras rectangulares). Luego de haber tenido éxito con su primera labor, su uso se extendió a otras tareas; diseñar las partes interiores del carro, que en realidad no tenían una geometría completamente rectangular, por lo que no fue un modo natural de modelarlos. Sin embargo, como los esquemas rectangulares ya existían (y se iban enriqueciendo cada vez más), se les forzó a realizar dichas tareas; lo cual lograron con ciertas dificultades (como en el caso de los llamados pedazos rectangulares degenerados). Los pedazos triangulares en cambio, no sufren de tales degeneraciones y son más adecuados que los rectangulares para describir o modelar objetos de geometrías más complejas. Es así como se aconseja a los desarrolladores de sistemas CAD a agregar en sus rutinas estos esquemas triangulares.

Pero allí surge un gran obstáculo, los pedazos triangulares tienen una estructura geométrica totalmente distinta a los rectangulares, por lo que necesitan rutinas propias que son muy diferentes a las ya existentes en los sistemas CAD (los cuales se basan en rectángulos). Desarrollar dichas rutinas significa crear nuevos sistemas CAD que contemplen ambas estructuras, lo cual, además de ser una enorme tarea, implica un gran costo (siendo esto último lo más importante para nosotros). Por esta razón nos sentimos motivados a buscar un medio de interacción (una interface) entre estos dos esquemas de diseño.

Se han realizado investigaciones en torno a este problema, tales como las de Goldman y Filip (1987) [3] que consisten en convertir pedazos rectangulares de Bézier en pedazos triangulares de Bézier; otro trabajo de investigación es el de Brueckner (1980) [1] que muestra una conversión de pedazos triangulares a rectangulares, para ello define al pedazo triangular como una superficie recortada (trimmed surface) de un pedazo rectangular, pero esta conversión no logra particionar el pedazo triangular en pedazos rectangulares; finalmente tenemos el de Iino y Wilde (1991) [5] que sí logra particionar un pedazo triangular de Bézier en 3 pedazos rectangulares de Bézier en forma exacta.

Rectángulos y triángulos de Bézier

Las superficies rectangulares de Bézier de producto tensorial (llamados rectángulos de Bézier) de grado $m \times n$ están representados paramétricamente por

$$b^{m,n}(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad (1.1)$$

Donde los puntos $u, v \in [0,1] \times [0,1]$ (dominio rectangular). A los coeficientes $b_{i,j}$ ($i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n$) se les llama puntos de Bézier o puntos de control y al conjunto de los puntos de Bézier $\{b_{i,j}\}$ se le conoce como la **red de Bézier** (red de control).

A las sucesiones $\{b_{i,j}\}$ en una red de Bézier correspondientes a un i o j fijo se les llama hilos de la red de Bézier. Los puntos $b_{0,0}, b_{m,0}, b_{0,n}, b_{m,n}$ son los puntos de esquina de la red de Bézier (estos puntos siempre pertenecen a la superficie rectangular de Bézier). Los conjuntos de puntos $\{b_{0,j}\}, \{b_{i,0}\}, \{b_{i,n}\}, \{b_{m,j}\}$ (con $i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n$) son los puntos de Bézier de las curvas de frontera que yacen sobre la superficie de Bézier.

Donde $B_i^m(u), B_j^n(v)$ son los polinomios univariantes de Bernstein de grados m y n (ver Farin [2], Hoscheck [4]).

Se define una **superficie racional de Bézier de producto tensorial** como la proyección de una superficie de Bézier de producto tensorial en R^4 a R^3 , esto es similar al caso de las curvas (Farin [2]). Una superficie racional de Bézier de grado (m, n) tiene la siguiente representación paramétrica en R^3 .

$$X(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} b_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v)} \quad (1.2)$$

donde:

- $b_{i,j}$ son los puntos de control de la superficie.
- $w_{i,j}$ son los pesos respectivos (números no negativos).
- $B_i^m(u)$ y $B_j^n(v)$ son los polinomios de Bernstein.

Este tipo de superficies es útil para poder manipular la forma de una superficie (esto se logra en forma similar al caso de las curvas cambiando el valor de los pesos). Poseen las mismas propiedades que las superficies no racionales de Bézier, pero para el caso de la cápsula convexa los pesos $w_{i,j}$, deben ser no negativos.

Las superficies triangulares integrales de Bézier (llamados triángulos de Bézier) de grado n están representadas por

$$b^n(t) = \sum_{|I|=n} b_I B_I^n(t) \quad (1.3)$$

Donde $t = (u, v, w)$, $0 \leq u, v, w \leq 1$, $|t| = u + v + w = 1$, y
 $I = (i, j, k)$, $0 \leq i, j, k \leq n$, $|I| = i + j + k = n$.

Los coeficientes b_i son llamados puntos de control del triángulo de Bézier, y los $B_i^n(t)$ son los polinomios bivariantes de Bernstein (Farin [2]).

Podemos extender el concepto de superficies racionales de producto tensorial de Bézier a los triángulos de Bézier denominándolos **superficies racionales triangulares de Bézier**. Si indexamos los pesos del mismo modo que los puntos de Bézier b_i , luego (1.3) generalizado a la forma racional tiene la siguiente fórmula paramétrica

$$b^n(t) = b_0^n(t) = X(t) = \frac{\sum_{|I|=n} w_I b_I B_I^n(t)}{\sum_{|I|=n} w_I B_I^n(t)} \quad (1.4)$$

con $t = (u, v, w)$, $|t| = 1$; $I = (i, j, k)$.

Donde los w_I son los pesos asociados con los vértices de control b_i . Este tipo de superficies es útil para poder manipular la forma de una superficie (esto se logra en forma similar al caso de las curvas cambiando el valor de los pesos).

Método I: Conversión de rectángulo a triángulo de Bézier

El problema a ser solucionado es el siguiente: dado un rectángulo de Bézier de grado $m \times n$ con vértices de control $b_{i,j}$ ($0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$), hallar los vértices b_i de un triángulo de Bézier de grado $(m+n)$, (el cual representa la misma superficie sobre el plano de parámetro) en términos de los vértices $b_{i,j}$.

Teóricamente este problema debe tener una solución porque los polinomios bivariantes de Bernstein de grado $(m+n)$ forman una base para el espacio de todos los polinomios bivariantes de grado $(m+n)$, y los polinomios del producto tensorial de grado $m \times n$ pertenecen a este espacio.

Este problema se soluciona por medio del siguiente teorema:

Teorema: Sean $\{b_{i,j}\}$ los puntos de control de una superficie de Bézier de producto tensorial de grado $m \times n$. Luego el triángulo de Bézier de grado $(m+n)$ con puntos de control b_i , donde los b_i están dados por

$$b_{i,j} = \frac{1}{\binom{m+n}{n}} \sum_{i=0}^p \sum_{j=\max\{0, q-m+i\}}^{\min\{q, n-p+i\}} b_{i,j} \binom{p}{i} \binom{p}{j} \binom{m+n-p-q}{m+j-i-q} \quad (2.1)$$

donde $I' = (p, q, l)$, $|I'| = p + q + 1 = m + n$,
representa la misma superficie sobre el plano de parámetro.

Prueba: Se sabe que una superficie de Bézier de producto tensorial puede ser escrito como un triángulo de Bézier (Goldman [3]).

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \\ = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m-i} \sum_{h=0}^{n-j} b_{i,j} \frac{\binom{h+i}{i} \binom{k+j}{j} \binom{m+n-h-i-k-j}{m-i-k}}{\binom{m+n}{n}} B_{i',j'}^{m+n}(u, v, w) \end{aligned}$$

donde: $I' = (h+i, k+j, m+n-h-i-j-k)$, $|I'| = m+n$.

El punto de control $b_{i,j}$ es por definición el coeficiente del polinomio bivalente

$$B_{i,j}^{m+n}(u, v, w)$$

donde: $|I'| = m+n$.

Estableciendo $I' = (p, q, l)$ se obtiene:

$$p = h+i \Rightarrow h = p-i$$

$$q = k+j \Rightarrow k = q-j$$

Como

$$0 \leq h \leq n-j \Rightarrow 0 \leq p-i \leq n-j \Rightarrow i \leq p \leq n-j+i$$

$$0 \leq k \leq m-i \Rightarrow 0 \leq q-j \leq m-i \Rightarrow j \leq q \leq m-i+j$$

pero $i \geq 0$ y $j \geq 0$, entonces tenemos las desigualdades

$$0 \leq i \leq p \leq n-j+i \Rightarrow j \leq n-p+i$$

$$0 \leq j \leq q \leq m-i+j \Rightarrow j \geq q-m+i$$

Por lo tanto se cumple que:

$$0 \leq j \leq p \text{ y } \max\{0, q-m+i\} \leq j \leq \min\{q, n-p+i\}$$

De ello se sigue que b_i está dado por:

$$b_{i'} = \frac{1}{\binom{m+n}{n}} \sum_{i=0}^p \sum_{j=\max\{0, q-m+1\}}^{\min\{q, n-p+1\}} b_{i,j} \binom{p}{i} \binom{p}{j} \binom{m+n-p-q}{m+j-i-q}$$

donde $I' = (p, q, l)$, $|I'| = p + q + 1 = m + n$.

En la práctica, ya que una superficie de Bézier de producto tensorial tiene un dominio paramétrico rectangular y las superficies triangulares de Bézier tienen un dominio paramétrico triangular, se necesitarán dos triángulos de Bézier para representar un rectángulo de Bézier. La primera superficie triangular es obtenida del arreglo rectangular de los puntos de control del rectángulo de Bézier $\{b_{i,j}; 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ y la segunda superficie triangular del arreglo opuesto $\{b_{m-i, n-j}; 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$. Ejemplo: Sea una red de control $\{b_{i,j}\}$ $i = 0, \dots, 2$; $j = 0, \dots, 2$ de una superficie rectangular de Bézier bicuadrática ($m=n=2$), usando (2.1) obtendremos la red de control $\{b_i\}$ de la primera superficie triangular de Bézier de grado 4. Estos puntos son:

$$b_{004} = b_{00}$$

$$b_{103} = 1/2 [b_{00} + b_{10}]$$

$$b_{202} = 1/6 [b_{00} + 4b_{10} + b_{20}]$$

$$b_{301} = 1/2 [b_{10} + b_{20}]$$

$$b_{400} = b_{20}$$

$$b_{013} = 1/2 [b_{00} + b_{01}]$$

$$b_{112} = 1/6 [2b_{00} + b_{01} + b_{10} + 2b_{11}]$$

$$b_{211} = 1/6 [b_{00} + 2b_{10} + 2b_{11} + 2b_{21}]$$

$$b_{310} = 1/2 [b_{10} + b_{21}]$$

$$b_{022} = 1/6 [b_{00} + 4b_{01} + b_{02}]$$

$$b_{121} = 1/6 [b_{00} + 2b_{01} + 2b_{11} + b_{12}]$$

$$b_{220} = 1/6 [b_{00} + 4b_{11} + b_{22}]$$

$$b_{031} = 1/2 [b_{01} + b_{02}]$$

$$b_{130} = 1/2 [b_{01} + b_{12}]$$

$$b_{040} = b_{02}$$

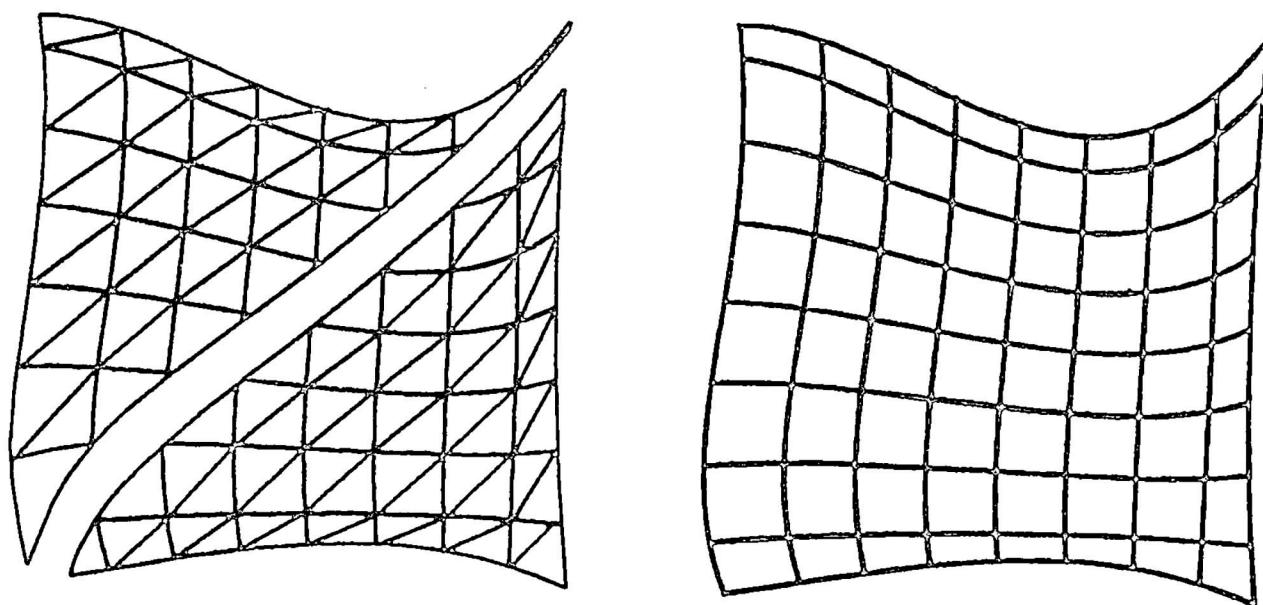


Fig. 1 A la derecha se muestra un rectángulo de Bézier bicúbico. A la izquierda se muestran los dos triángulos de Bézier de grado 6 cuya unión representa la misma superficie bicúbica. (Tomados de Goldman [3]).

Método II: Conversión de triángulos a rectángulos de Bézier

Se toma un pedazo triangular de Bézier racional de grado n , ecuación (1.4). Subdividimos el triángulo de dominio del siguiente modo: primero tomamos un punto $p = [a \ b \ c]^T$ en el interior del triángulo de dominio ($0 < a, b, c < 1$). Luego trazamos 3 segmentos de línea colineales con las líneas conectando p y los 3 vértices del triángulo, del punto p a los lados del triángulo (ver fig. 2). Esto divide el triángulo de dominio en 3 cuadriláteros. Sólo se analizará el subpedazo sombreado en la figura 2, acotado por $u=0$, $v=0$, $u = (a/c)w$, y $v = (b/c)w$. Las ecuaciones para los otros dos subpedazos se obtienen a partir de la simetría.

Se obtiene una nueva parametrización al definir α y β tal que:

$$u = \alpha w \quad (3.1)$$

$$v = \beta w \quad (3.2)$$

y se permite a α variar de 0 a (a/c) , y a β de 0 a (b/c) , es decir

$$\alpha \in [0, a/c] \quad (3.4)$$

$$\beta \in [0, b/c] \quad (3.5)$$

con esta nueva parametrización se obtiene

$$b^n(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{|I|=n} \binom{n}{I} w_I b_I \alpha^i \beta^j}{\sum_{|I|=n} \binom{n}{I} w_I \alpha^i \beta^j} \quad (3.6)$$

Esto representa el subpedazo (del pedazo triangular original) con el subdominio sombreado en la figura 2, porque α y β tienen el rango indicado en (3.4) y (3.5). Luego, aplicamos la conversión de una base de potencias en una combinación lineal de elementos de la base de polinomios univariantes de Bernstein (Valverde [7]).

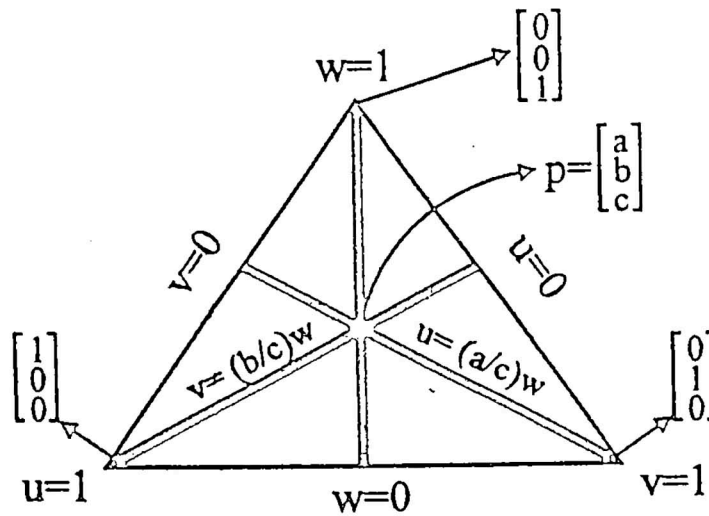


Fig. 2: Subdivisión del dominio triángulo.

Motivados por un interés de estudio escogemos la posición del punto p en $p^* = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]^T$ el cual hace que los rangos de los nuevos parámetros α y β sean el intervalo $[0,1]$. Además, se llamará a la imagen de p^* sobre el pedazo triangular el centro del pedazo; por lo tanto p^* es la preimagen del centro del pedazo.

Obteniéndose la siguiente relación

$$b^n(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{|I|=n} \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n \binom{n}{I} \frac{\binom{h}{i} \binom{l}{j}}{\binom{n}{i} \binom{n}{j}} w_I b_I B_h^n(\alpha) B_l^n(\beta)}{\sum_{|I|=n} \sum_{h=1}^n \sum_{l=1}^n \binom{n}{I} \frac{\binom{h}{i} \binom{l}{j}}{\binom{n}{i} \binom{n}{j}} w_I B_h^n(\alpha) B_l^n(\beta)} \quad (3.7)$$

donde: $I = (i, j, k)$

Podemos reescribir (3.7) como

$$b^n(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{|I'|=n} \sum_{i'=0}^i \sum_{j'=0}^j \binom{n}{I'} \frac{\binom{i}{i'} \binom{j}{j'}}{\binom{n}{i'} \binom{n}{j'}} w_{I'} b_{I'} B_i^n(\alpha) B_j^n(\beta)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{|I'|=n} \sum_{i'=0}^i \sum_{j'=0}^j \binom{n}{I'} \frac{\binom{i}{i'} \binom{j}{j'}}{\binom{n}{i'} \binom{n}{j'}} w_{I'} B_i^n(\alpha) B_j^n(\beta)} \quad (3.7)$$

donde los índices $I' = (i', j', k')$ estarán asociados con el pedazo triangular original; y los i, j (sin prima) con el nuevo subpedazo rectangular.

Ahora, definamos

$$\omega_{i, I'} = \sum_{i'=0}^i \sum_{j'=0}^j \binom{n}{I'} \frac{\binom{i}{i'} \binom{j}{j'}}{\binom{n}{i'} \binom{n}{j'}}, \quad |I'| = n \quad (3.8)$$

como coeficientes de los nuevos pesos

$$w_{i, j} = \sum_{|I'|=n} \omega_{i, I'} w_{I'} \quad (3.9)$$

y los nuevos puntos de control

$$b_{i, j} = \frac{1}{w_{i, j}} \omega_{i, I'} w_{I'} b_{I'} \quad (3.10)$$

Reemplazando las expresiones de (3.8), (3.9) y (3.10) en (3.7'), finalmente obtenemos

$$b^{n, n}(\alpha, \beta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{i, j} b_{i, j} B_i^n(\alpha) B_j^n(\beta)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{i, j} B_i^n(\alpha) B_j^n(\beta)} \quad (3.11)$$

Esta es una ecuación de un pedazo rectangular racional de Bézier de grado $n \times n$.

Se propone un Algoritmo de subdivisión para obtener los puntos de control $b_{i,j}$ (con $i, j=0, \dots, n$) y sus pesos respectivos $w_{i,j}$ de los pedazos rectangulares racionales de Bézier en la forma de vectores en 4D (4-vector), $f_{i,j} = [w_{i,j} b_{i,j}^T, w_{i,j}]^T$, los cuales son combinaciones lineales de aquellos puntos de control b_I (con $I = (i, j, k)$, $0 \leq i, j, k \leq n$, $|I| = n$) con sus pesos respectivos w_I del pedazo triangular racional de Bézier original $f_I = [w_I b_I^T, w_I]^T$. El cual consiste de lo siguiente:

1. Definir el tensor $u_{i',j}$, cuyo componente j -esimo 4-vector está dado por

$$u_{i',j} = \sum_{j'=0}^j \binom{n}{I'} \frac{\binom{j}{j'}}{\binom{n}{i'} \binom{n}{j'}} f_{I'} \quad (3.12)$$

con:

$$|I'| = i' + j' + k' = n, \quad i' = 0, \dots, n$$

2. El tensor f_i con el componente j -esimo 4-vector $f_{i,j}$, está expresado por

$$f_{i,j} = \sum_{i'=0}^i \binom{i}{i'} u_{i',j} \quad (3.13)$$

con:

$$|I'| = i' + j' + k' = n, \quad i' = 0, \dots, n \\ j = 0, \dots, n$$

Conclusiones finales:

Los métodos de conversión que hemos presentado se basan en procesos de subdivisión de la superficie original, es decir, se parte exactamente la superficie (rectangular o triangular) en 2 o más pedazos de superficie (triangulares o rectangulares) de Bézier.

Debemos señalar que hay mucho por ganar al permitir un tratamiento uniforme de pedazos de superficies (triangulares, rectangulares). La subdivisión de triángulos en rectángulos de Bézier presentado cambia completamente la figura de lo que significa el costo extra de incluir pedazos triangulares de Bézier a los sistemas CAD, ya sean los existentes o los nuevos. Ya no se necesitan desarrollar subrutinas separadas para cualquier operación ejecutada. Para todo momento que tengamos un pedazo triangular de Bézier dentro de una definición de superficie, podemos partirlo precisamente en 3

pedazos rectangulares racionales de Bézier. Esto significará que sólo un paso extra tiene que ser implementado. Cualquier operación que sea ejecutada sobre una superficie (modelada por triángulos, rectángulos o combinaciones de ambas) puede ser hecha con la rica librería de subrutinas para pedazos rectangulares.

Nota.- Se han desarrollado unos programas en Turbo Pascal que muestran las curvas de Bézier, las superficies rectangulares y triangulares de Bézier así como los métodos expuestos en esta publicación. Dichos programas se encuentran instalados en la Escuela Profesional de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UNI.

REFERENCIAS

1. Brueckner I. *"Construction of Bézier points of quadrilaterals from those of triangles"*. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 21-24.
2. Farin G. *"Curves and surfaces for computer aided geometric design"*. Third Edition. Academic Press Inc, San Diego, 1992.
3. Goldman R. N., Filip D. J. *"Conversion from Bézier rectangles to Bézier triangles"*. *Computer Aided Design*, Vol. 19, pp. 25-27. 1987.
4. Hoschek J., Lasser D. *"Fundamentals of computer aided geometric design"*. A K Peters Ltd. Wellesley, Massachusetts, 1993.
5. Iino K., Wilde D. J. *"Subdivision of triangular Bézier patches into rectangular Bézier patches"*. *Advances in Design Automation*, Vol. 2, pp. 1-6. 1992.
6. Tian J. *"A geometric condition for smoothness between adjacent rational Bézier surfaces"*. *Computers in Industry*, Vol. 13, pp. 355-360. 1990.
7. Valverde J. *"Conversión entre triángulos y rectángulos de Bézier"*. Tesis de Licenciatura. 1995.

 edición, diagramación e impresión, realizados por
ditorial HOZLO S.R.L.

Psje. Santa Rosa 191-501, Lima
Telefax: 428-4071

Enero 1997
Lima - Perú

Por omisión los artículos siguientes aparecerán en el próximo número :

o Theoretical and numerical treatment of Eddy-current problems.

Martin Reissel.

o Los puntos de *de Boor* de una curva seccionalmente polinómica.

Juan Dueñas Béjar.

La Comisión Organizadora