

VOLUMEN 1

NUMERO 1

JUNIO 1995

Revista de la Facultad de

# CIENCIAS

de la UNI

**REVCUNI**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

LIMA - PERU

VOLUMEN 1

NUMERO 1

JUNIO 1995

Revista de la Facultad de  
**CIENCIAS**  
de la UNI  
**REVCUNI**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

LIMA - PERU



---

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Holger G. Valqui C.**  
DECANO

**Nolberto Catalán Sánchez**  
SECRETARIO ACADEMICO

**Manfred Horn Mutschler**  
JEFE DE LA SECCION DE POSTGRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACION PROFESIONAL  
DIRECTOR DEL INSTITUTO DE INVESTIGACION

---

***Escuelas Profesionales***

**Juan Vega Lino**  
DIRECTOR DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE FISICA

**Félix Escalante del Aguila**  
DIRECTOR DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

**Víctor Reyna Pinedo**  
DIRECTOR DE LA ESCUELA PROFESIONAL DE QUIMICA

---

***Areas Académicas***

**Walter Estrada López**  
COORDINADOR DEL AREA ACADEMICA DE FISICA

**Pedro Canales García**  
COORDINADOR DEL AREA ACADEMICA DE MATEMATICA

**Favio Tenorio de la Cruz**  
COORDINADOR DEL AREA ACADEMICA DE QUIMICA

## *Laboratorios*

**Arturo Talledo Coronado**

JEFE DEL LABORATORIO DE FISICA GENERAL

**Heriberto Sánchez Córdova**

JEFE DEL LABORATORIO DE FISICA INTERMEDIA

**Adolfo La Rosa Toro Gómez**

JEFE DEL LABORATORIO DE QUIMICA INORGANICA

**Elvira Noemí Pereira Reyna**

JEFE DEL LABORATORIO DE QUIMICA INSTRUMENTAL

**Rolf Schroeder**

JEFE DEL LABORATORIO DE COMPUTO

---

**Circe Rondinel**

JEFE DE LA SECCION DE PROYECCION SOCIAL, EXTENSION UNIVERSITARIA, PRODUCCION DE BIENES Y PRESTACION DE SERVICIOS

**Juan Vega Lino**

JEFE DE LA OFICINA DE ESTADISTICA Y REGISTROS ACADEMICOS

---

***Heriberto Sánchez Córdova***

*Director de la Revista de la Facultad de Ciencias*

*REVCUNI*

---

## **Editorial**

*Este primer número de la revista pretende ser el inicio de una serie de publicaciones de la Facultad de Ciencias. Allí donde no existe la costumbre ni la necesidad de escribir, la tarea de sacar a luz una revista como la presente es más dura de lo que puede parecer.*

*La misma Universidad Nacional de Ingeniería, a pesar del potencial aporte de sus once Facultades, carece de una revista científico-tecnológica que aparezca más o menos periódicamente. Esto no sólo es una lástima, sino que es también un síntoma claro de nuestra incapacidad para escribir y publicar artículos de nivel aceptable, no necesariamente sobre temas muy especializados.*

*Por otra parte, teniendo presente lo difícil que es obtener artículos de investigación de un nivel internacional, la revista de la Facultad de Ciencias tiene varias secciones: la primera es para artículos de investigación, incluyendo los resúmenes de algunas tesis de antegrado y de postgrado, la segunda está dedicada a artículos de divulgación especializada y la tercera para artículos didácticos o de divulgación científica.*

*Para la Facultad de Ciencias esta revista constituye, a la vez que un motivo de satisfacción, también un motivo de preocupación, creado por el no irreal temor de que este primer número se quede en una aventura aislada, sin continuidad. Pero se trata de un desafío que estamos dispuestos a enfrentar, a pesar de las difíciles condiciones económicas en las que los docentes de la Universidad Nacional de Ingeniería tenemos que trabajar.*

El Decano.

# I n d i c e

	Pag.
□ <i>Electrocromismo del NiO<sub>x</sub> y WO<sub>x</sub> obtenidos por rociado pirolítico</i> J. Arakaki, R. Rodríguez, M. Horn y W. Estrada	1
■ <i>El rol de la convexidad en elasticidad finita</i> Fabián Flores Bazán	11
■ <i>Datación por huellas nucleares (de fisión) aplicado a vidrios volcánicos (obsidianas)</i> Manuel Brocca Pobis	16
■ <i>Estabilidad de soluciones de una ecuación diferencial no-lineal</i> Armando Bernui	25
■ <i>Análisis de variancia para datos colineales</i> Alipio Ordoñez Mercado	37
■ <i>Fenómenos homoclínicos</i> Félix Escalante Del Aguila	47
■ <i>Aislamiento del alcaloide N, N-Dimetiltriptamina de la "Chacruna" (Psychotria viridis R. &amp; P.)</i> Victor Reyna Pinedo y Virginia Torpoco Carmen	57
□ <i>El problema de la integral de Feynman</i> H. G. Valqui	61
□ <i>Movimiento de un trompo inversible (sin fricción)</i> Edgard Vidalon Vidalon	77
□ <i>Series de Fourier y sus aplicaciones en la instrumentación</i> Fernando Camino M.	85
□ <i>Nuevo uso de la coca: Vino de coca</i> Gladys Escobedo Torres y Otilia Acha de la Cruz	93
□ <i>Estudios de la hidratación del anhídrido acético</i> Gino I. Picasso E.	100
□ <i>Colorantes y saborizantes del ají panca (Capsicum Sinense)</i> Elsa Díaz Flores y Otilia Acha de la Cruz	110
□ <i>Evaluación del propagador cuántico de sistemas 1-Dimensionales en el formalismo de Path-Integral</i> Rodolfo Casana Sifuentes	117
■ <i>El problema de los cuatro colores</i> <i>Un ejemplo del carácter esencialmente experimental de la actividad matemática</i> H. G. Valqui	125
□ <i>¿Existe la longitud de una varilla?</i> H. G. Valqui	135

---

# *Electrocromismo del NiO<sub>x</sub> y WO<sub>x</sub> obtenidos por rociado pirolítico*

J. Arakaki, R. Rodriguez, M. Horn y W. Estrada (\*)

---

## *Resumen*

*Películas de NiO<sub>x</sub> y WO<sub>x</sub> fueron producidas por la técnica de rociado pirolítico (spray pirolisis). Las películas NiO<sub>x</sub> fueron obtenidas a partir de una solución acuosa de nitrato de níquel. Aquellas producidas por debajo de 300 °C no presentan picos de difracción al ser analizadas por difracción de rayos-x, y las obtenidas sobre los 400 °C presentan una estructura policristalina correspondiente al NiO cúbico. Sólo las películas producidas debajo de 300 °C presentan electrocromismo. Se midió para el NiO<sub>x</sub> una eficiencia electrocrómica de 21 cm<sup>2</sup>/C.*

*Las películas de WO<sub>x</sub> fueron obtenidas a partir de una solución de H<sub>2</sub>WO<sub>4</sub> en amoníaco al 10%. Las películas se obtuvieron a temperaturas menores de 300 °C, y todas presentan una estructura nanocristalina (ó amorfa). Estas películas presentaron un claro electrocromismo, midiéndose en ellas una eficiencia electrocrómica de 42 cm<sup>2</sup>/C.*

## INTRODUCCION

El fenómeno del electrocromismo ha despertado enorme interés en los últimos diez años, dadas las interesantes aplicaciones que podrían realizarse con materiales que posean esta propiedad. Dentro de estas aplicaciones destacan el control del flujo de la radiación solar hacia los ambientes interiores en viviendas ("smart windows") y autos, espejos retrovisores en autos y pantallas de información no-emisivas [1,2].

El electrocromismo se define como el cambio persistente y reversible de las propiedades ópticas de un material cuando este es sometido a la acción de un campo eléctrico. Un material que puede en forma reversible variar su transmitancia óptica al paso de una corriente eléctrica se denomina **electrocrómico**.

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.



En un dispositivo electrocrómico práctico, la película electrocrómica está integrada dentro de una configuración de multicapas, la cual comprende un contraelectrodo, un conductor iónico y conductores electrónicos transparentes. La modulación óptica está asociada con la inserción y extracción electroquímica de iones del material electrocrómico.

El fenómeno del electrocromismo se presenta en muchos materiales, particularmente en los óxidos de los metales de transición. Dentro de estos óxidos los más ampliamente estudiados son el  $\text{WO}_x$  [1-3] y el  $\text{NiO}_x$  [1-5], los cuales han mostrado poseer buenas características electrocrómicas: buen contraste óptico, buena eficiencia electrocrómica y alta durabilidad. Las técnicas empleadas generalmente han sido basadas usando alto vacío (sputtering, evaporación, etc.) o técnicas electroquímicas.

En el presente trabajo se presenta los primeros resultados de las características electrocrómicas del  $\text{WO}_x$  y del  $\text{NiO}_x$  obtenidos por rociado pirolítico (spray pirólisis), que en adelante denominaremos RP. Esta técnica es simple y de bajo costo, lo cual la hacen atractiva para aplicaciones en áreas grandes y por consiguiente para ser implementado industrialmente.

## EXPERIMENTO

Las películas de  $\text{NiO}_x$  y el  $\text{WO}_x$  se obtuvieron por RP cuya disposición experimental se muestra en la fig. 1. El aerosol se produce en P, al entrar en contacto el gas portador (aire) con la solución acuosa que contiene los iones metálicos. El aerosol arrastrado por el gas portador sube por la tobera B mediante un flujo laminar, llegando sobre el substrato caliente (F, en la fig. 1), en donde se produce la reacción pirolítica para la formación del óxido.

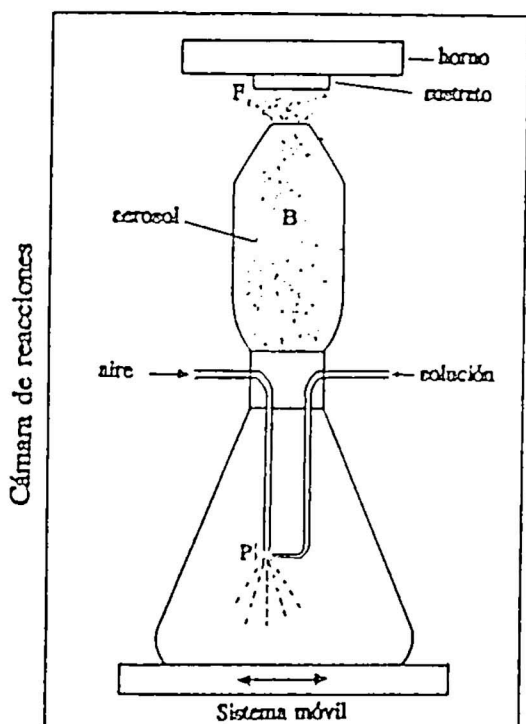
El substrato empleado para la deposición de los óxidos de níquel y tungsteno, fué ya sea simplemente un portaobjeto de vidrio o un vidrio portaobjeto recubierto de una película transparente y conductora de  $\text{SnO}_2:\text{F}$ , también producido por R.P. en nuestro laboratorio [6]. Típicamente el  $\text{SnO}_2:\text{F}$  tenía una resistencia de 50 Ohms/ $\square$ .

Para los análisis de difracción por rayos-X se empleó un difractómetro ZEIS JENA, de  $\text{CuK } \alpha$  a 40KV/35 mA.

Para el estudio del electrocromismo se emplearon aquellas muestras con substrato de vidrio recubierto con la película transparente y conductora, los mismos que fueron dispuestos como electrodos de trabajo dentro de una celda electroquímica de tres electrodos. Los otros dos electrodos de la celda electroquímica fueron un contraelectrodo de Pt, y un electrodo de referencia calomel saturado. La inserción y extracción de los iones se procedió mediante

la voltametría cíclica con un instrumento Wenkin, POS 73. La solución electrolítica empleada fue una solución acuosa de KOH 0.1M para el NiO<sub>x</sub>, y una solución acuosa de ácido sulfúrico de 0,1M para el WO<sub>x</sub>.

Las medidas electroquímicas fueron acompañadas con medidas in situ de transmitancia óptica monocromática. Para esto se empleó la luz de un laser HeNe de 635 nm de longitud de onda, que luego de atravesar al sistema, celda + electrolito + muestra, fue detectada por un fotodiodo. Se tomó como 100% de transmitancia al sistema, celda + electrolito. Todos los datos de la voltametría cíclica y de la transmitancia óptica fueron registrados en una computadora personal compatible mediante una tarjeta A/D.



*Fig. 1 Sistema de deposición pirolítica. El aerosol producido en P es llevado por el gas portador (aire) hacia la columna B en donde se equilibran las fuerzas de Stokes con las gravitatorias, produciendo un flujo laminar. Finalmente se produce la deposición pirolítica en F.*

## RESULTADOS Y DISCUSIONES

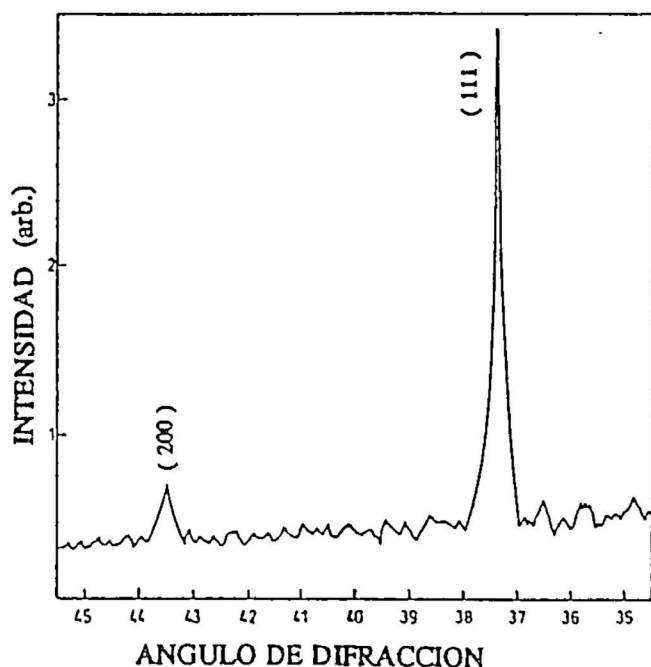
### Películas de NiO<sub>x</sub>

Las películas de NiO<sub>x</sub> fueron obtenidas a partir de una solución acuosa 0,1M de nitrato de níquel que en forma de aerosol fue transportada por el gas portador (aire) hacia el sustrato caliente, según el esquema descrito en la sección anterior. La temperatura del sustrato se varió entre 220°C y 400°C, y la solución pirolítica se pre-calentó hasta 50°C. El tiempo de deposición se fijó para todas las muestras en 30 minutos.

Las películas de NiO<sub>x</sub> obtenidas fueron posteriormente sometidas al análisis por difracción de rayos-x. Las películas producidas por debajo de 300°C

mostraron una apariencia gris oscura, y no presentan picos de difracción. Aquellas producidas alrededor de 400°C muestran una apariencia verdusca transparente, y presentan un patrón de difracción coincidente con la del NiO cúbico [7]. La fig. 2 muestra los picos de difracción para este caso, y en ella se observa los picos de difracción correspondientes a los ángulos  $2\theta = 37,4^\circ$  y  $43,5^\circ$ .

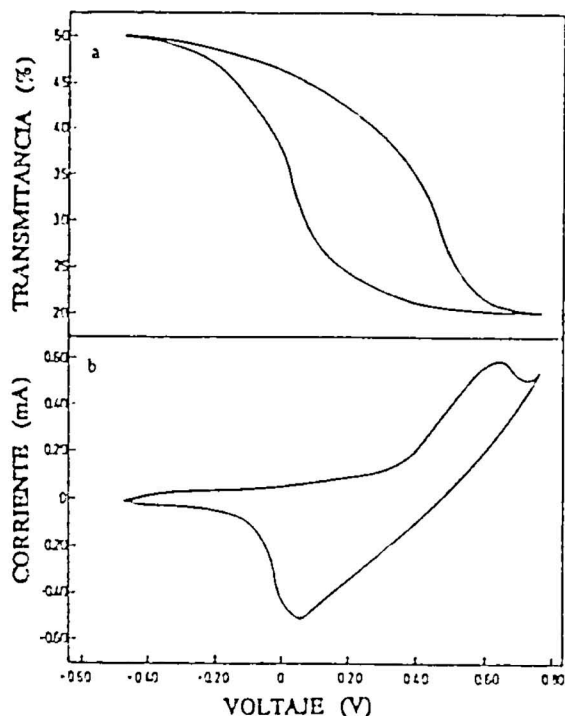
Las muestras obtenidas a alta temperatura (400°C) al ser sometidas a la inserción/extracción de cargas mediante la voltametría cíclica, a un barrido de potencial de 10 mV/s, producen respuesta electroquímica, pero la variación de su transmitancia óptica entre el estado más transparente (decolorado) y el estado menos transparente (coloreado) fue muy pequeña. La curva potenciométrica indicó claramente los picos de reacción anódica y catódica en 0,6 V y 0,1 V respectivamente, sin embargo el cambio de transmitancia óptica fue alrededor del 5%.



*Fig. 2 Patrón de difracción de rayos-X para una muestra de NiO<sub>x</sub> producida a 400°C. Los picos corresponden a la estructura cúbica de NiO.*

Las muestras obtenidas a baja temperatura (< 300°C) si presentan un claro efecto electrocrómico. La fig. 3 muestra los resultados de las medidas in-situ de la voltametría cíclica y de la transmitancia óptica para una muestra de NiO<sub>x</sub> obtenida a 220°C. Aquí también podemos observar que a medida que el barrido de potencial varía de negativo a positivo (fig. 3b), la transmitancia (fig. 3a) va disminuyendo progresivamente desde 50% hasta 15%. Cuando se llega a 0,6V se produce la reacción anódica, después del cual no hay más variación de la transmitancia, indicando que la reacción electrocrómica se ha completado, con una variación total de la transmitancia del 35%. El pequeño pico que empieza a evolucionar después de 0,6V corresponde a la evolución del oxígeno.



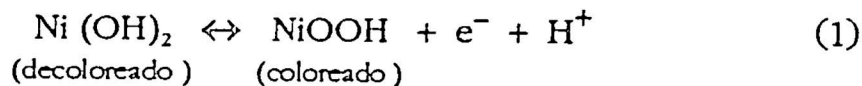


*Fig. 3 Transmittancia óptica a una longitud de onda de 635 nm para una muestra de NiO<sub>x</sub> obtenida a 220°C. Esta medida se hizo in-situ con la voltametría cíclica, bajo un barrido de 10 mV/s, indicada en (b). Las muestras tuvieron una área de 0,5 cm<sup>2</sup>, y se usó como electrolito KOH; 0,1 M.*

Cuando el barrido de potencial varía de positivo a negativo, la transmittancia óptica aumenta paulatinamente desde 15% hasta 50%. La reacción catódica se produce a 0,1V; de modo que cuando esta termina la película ya alcanzó el máximo valor de su transmittancia, esto es que nuevamente se obtiene un 35% de incremento total de la transmittancia. Este proceso cíclico continúa reversiblemente, y no se ha observado cambio significativo en la transmittancia óptica ni en la cantidad de carga anódica y catódica (área positiva y negativa respectivamente de la curva voltamétrica) después de haber efectuado más de 100 voltametrías cíclicas, indicando buena durabilidad de la película electrocrómica.

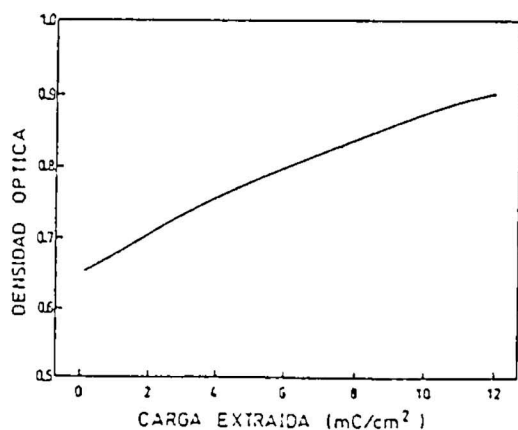
La fig. 4. muestra los datos de la densidad óptica (-log. T) en función de la cantidad de carga extraída por unidad de área (mC/cm<sup>2</sup>). A partir de ella podemos deducir que el NiO<sub>x</sub> pirolítico posee una eficiencia electrocrómica de 21 cm<sup>2</sup>/C (pendiente de la curva), indicando un buen comportamiento electrocrómico de la película.

El proceso de inserción y extracción de cargas en el NiO<sub>x</sub> ha sido ampliamente discutido en numerosos trabajos, por el gran interés que despertó este material para aplicaciones en las baterías de Ni/Cd [8,9]. De acuerdo a ellas el óxido de níquel adopta dos estructuras básicas que se diferencian por el estado de valencia del Ni. El estado transparente o decolorado corresponde a una fase en donde el níquel está con valencia +2, y que globalmente se la representa como Ni(OH)<sub>2</sub>, y el estado coloreado corresponde a una fase en donde el níquel está con valencia +3, y que globalmente podemos representarla como NiOOH, de modo que las reacciones anódica y catódica se producen por un intercambio de electrones y cationes (protones, H<sup>+</sup>) de acuerdo a la siguiente reacción [8,9]:



Lo anterior implica que la película original de  $\text{NiO}_x$  después de producidos los primeros ciclos voltamétricos se transforma en hidróxido de níquel,  $\text{NiO}_x\text{H}_y$ , a partir del cual se produce el intercambio de cationes y electrones, según la reacción (1).

En conclusión, el  $\text{NiO}_x$  pirolítico es un material electrocrómico de coloración anódica y de buena durabilidad. Por otro lado el grado el electrocromismo en esta película depende de las características estructurales del material que a su vez dependen de los parámetros de fabricación. Así estructuras nanocristalinas (o eventualmente amorfas) son favorables para la inserción y extracción de los cationes, y por consiguiente la aparición del fenómeno del electrocromismo; en cambio estructuras policristalinas dificultan la inserción iónica, produciendo un escaso efecto electrocrómico. Finalmente debemos señalar el bajo nivel de transmitancia óptica para el estado transparente. Atribuimos este hecho al carácter rugoso de la superficie de la película, el cual estaría provocando pérdidas por "scattering" de la radiación transmitida. Actualmente estamos trabajando para disminuir estas pérdidas, introduciendo innovaciones en los parámetros de deposición.



*Fig. 4 Densidad óptica en función de la carga extraída para una película pirolítica de  $\text{NiO}_x\text{H}_y$ , correspondiente a la fig. 3.*

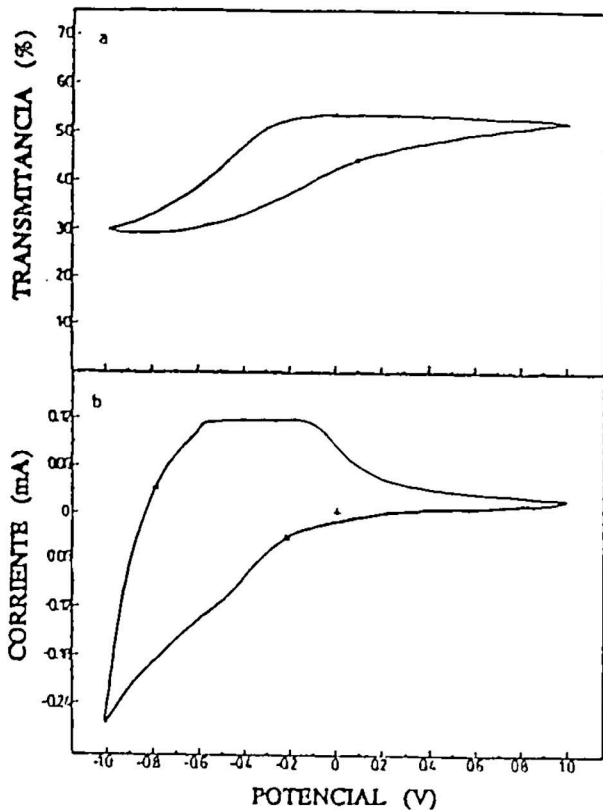
### **Películas de $\text{WO}_x$**

Las películas de  $\text{WO}_x$  se obtuvieron a partir de una solución de ácido de wolframio (VI) en amoníaco al 10%. La proporción empleada fue de 10 grs de  $\text{H}_2\text{WO}_4$  en 500 ml de amoníaco. Se procedió de una manera similar a la obtención del óxido de níquel, obteniéndose las mejores películas cuando se precalentó la solución pirolítica a  $40^\circ\text{C}$ , previo al rociado del aerosol sobre el sustrato caliente. La temperatura del sustrato se varió entre  $150^\circ\text{C}$  y  $250^\circ\text{C}$ , y el tiempo de deposición empleado fue de 30 minutos.

Las películas de  $WO_x$  depositadas fueron analizadas por difracción de rayos-x, y no mostró la presencia de picos de difracción. Indicando también en este caso el carácter nanocrystalino de la muestra, aunque no se descarta una estructura amorfa.

Para el estudio del electrocromismo se empleó la misma disposición experimental que para el caso del  $NiO_x$ , usándose para este caso una solución acuosa 0,1M de ácido sulfúrico.

La figura 5, muestra los datos de la voltametría cíclica in situ con la transmitancia óptica. En este caso también se empleó un barrido de potencial de 10 mV/s. De la parte inferior de la figura podemos observar que cuando el barrido se realiza del potencial negativo al potencial positivo el proceso anódico se produce alrededor de -0,6V, y yendo de positivo a negativo el proceso catódico se produce alrededor de -0,4V. De la parte superior de la figura, se observa que el coloramiento se produce durante la reacción catódica, y al decoloramiento durante la reacción anódica, indicando que a diferencia del  $NiO_x$ , el  $WO_x$  es un material electrocromático de coloramiento catódico. Esto abre la posibilidad de utilizar ambos materiales simultáneamente dentro de un dispositivo electrocromático.



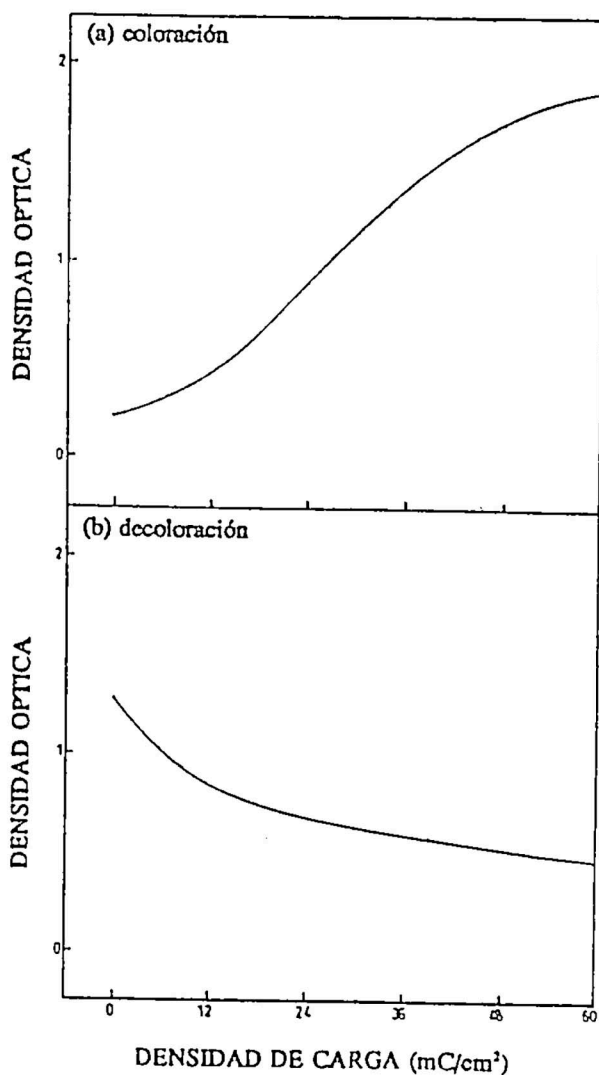
*Fig. 5 a) Transmitancia óptica para una película pirolítica  $WO_x$  para la longitud de onda de 635 nm. b) Medida in-situ de la voltametría cíclica, a una velocidad de barrido de 10 mV/s. La muestra posee un área de 0,5 cm<sup>2</sup>, y el electrolito empleado fue  $H_2SO_4$ ; 0,1 M.*

La transmitancia varía desde un 30% hasta un 56% durante el proceso anódico, obteniéndose una variación total de la transmitancia de un 26%. En el retorno, durante el barrido catódico, se logra variar la transmitancia en los mismos niveles, desde un estado completamente transparente hasta un estado completamente coloreado. Este proceso cíclico continúa de una manera

reversible, no observándose degradación en las películas después de 100 ciclos consecutivos.

La fig. 6 (parte superior) muestra los datos de la densidad óptica del  $WO_x$  en función de las cargas por  $cm^2$  introducidas (coloramiento), y en la parte inferior de la misma figura se muestran los datos de los mismos parámetros pero durante la extracción de cargas (decoloración). De ellas podemos deducir que hay una mayor eficiencia electrocrómica (pendiente de las curvas) durante el proceso catódico. La eficiencia electrocrómica durante la coloración es de  $42 \text{ cm}^2/C$ , valor comparable a las reportadas para el  $WO_x$  obtenidas por otras técnicas [10].

En conclusión el  $WO_x$  pirolítico ha probado poseer buenas características electrocromáticas. Sin embargo, al igual que en el caso el  $NiO_x$ , el estado transparente aún mantiene valores relativamente bajos de la transmitancia óptica. Nuestros trabajos actuales están encaminados a resolver este problema, y los resultados serán presentados en una próxima publicación.



*Fig. 6 a) Densidad óptica versus carga insertada, para una muestra de  $WO_x$ . El electrolito empleado fue  $H_2SO_4$ ; 0,1 M. b) Densidad óptica versus carga extraída, para una situación similar en (a).*

## Conclusiones

Mediante una técnica simple y de relativo bajo costo, pero potencialmente una técnica con muchas posibilidades de ser utilizada para la fabricación de recubrimientos en áreas grandes, se han fabricado películas delgadas de NiO<sub>x</sub> y WO<sub>x</sub>. Estos materiales pirolíticos presentaron eficiencias electrocrómicas buenas, del orden 21 cm<sup>2</sup>/C y 42 cm<sup>2</sup>/C respectivamente, y con cambios de la transmitancia óptica entre los estados transparente y coloreado del orden del 35% y 25% respectivamente, para una longitud de onda de 635 nm.

Las películas de NiO<sub>x</sub> y WO<sub>x</sub> electrocrómicas presentan una estructura nanocristalina, sin descartarse la posibilidad de que sean amorfas. Para temperaturas altas de deposición el NiO<sub>x</sub> adopta una estructura claramente policristalina, con una estructura cúbica correspondiente al NiO, pero pierde su capacidad electrocrómica. Películas depositadas a 400°C no presentan electrocromismo.

Tanto las películas de NiO<sub>x</sub> como las de WO<sub>x</sub> presentan niveles muy bajos de transmitancia óptica, para el estado transparente. El factor atribuible más relevante para este efecto es el carácter relativamente rugoso de la superficie de las películas.

## Agradecimientos

*Los autores agradecen al International Science Program, Uppsala University, Sweden, por financiar parte de este proyecto. También se agradece al Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias, UNI, por financiar parcialmente este trabajo.*

## REFERENCIAS

- [1] C.M. Lampert and C.G. Granqvist, Editors, "Large Area Chromogenics: Materials and Devices for Transmission Control". SPIE Press Vol. IS4, 1988.
- [2] C.M. Lampert and C.G. Granqvist, Editors, "Optical Materials Technology for Energy Efficiency and Solar Energy Conversion X". Proc. SPIE, Vol. 1536 (1991).
- [3] M. Carpenter and D. Corrigan, Editors, Proc. Symp. Electrochromic Materials, The Electrochem. Soc., Vol. 90-2 (1990).
- [4] W. Estrada, A. M. Andersson and C. G. Granqvist, J. Appl. Phys., 64, 3678 (1988).
- [5] A.M. Andersson, W. Estrada and C. G. Granqvist, A. Gorenstein and F. Decker, "Optical Materials Technology for Energy Efficiency and Solar Energy Conversion IX", Proc. SPIE, Vol. 1272 (1990).

- [6] A. Gutarra, *Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, UNI (Lima, Perú), 1990.*
- [7] ASTM card 4-0865.
- [8] G. W. D. Briggs, "Specialist Periodical Report", *The Chem. Soc., London, Vol. 4, 33 (1974).*
- [9] P. Oliva, J. Leonardi, J. Laurent, C. Delmas, J. Braconnier, M. Figlarz, F. Fiebet and A. Guibert, *J. Power Sources* 8, 229 (1982).
- [10] S.I. Córdova de Torresi, A. Gorenstein, R. Torresi and M. Vásquez, *J. Electroanal. Chem.* 318 (1991) 131-144.

---

# *El rol de la convexidad en elasticidad finita*

Fablán Flores Bazán (\*)

---

## *Resumen*

*En esta nota presentamos algunas consecuencias de la falta de convexidad en un problema de elasticidad finita, asociado con las deformaciones de un sólido elástico, incomprensible, homogéneo e isotrópico. Se presenta también un resultado de existencia de soluciones para un problema del Cálculo de Variaciones en ausencia de convexidad.*

## INTRODUCCION

El propósito de este artículo es, de algún modo, justificar el estudio de problemas de minimización de funcionales del tipo integral que no son semicontinuas inferiormente en la topología débil (dentro de un espacio de Banach), lo que equivale a decir que la funcional a ser minimizada no es convexa en la variable donde aparece la derivada de mayor orden de la función de estado.

Funcionales que satisfacen las condiciones anteriores aparecen, por ejemplo, en elasticidad finita: el estudio del desplazamiento en un problema de valor de frontera asociada con deformaciones del tipo "anti-plane shear" (ver la definición más abajo) de un sólido homogéneo, isotrópico, incomprensible y elástico. En este caso, puesto que la energía no es convexa (en el argumento del gradiente), sucesiones minimizantes del funcional pueden converger a una función límite no necesariamente una solución. Sin embargo, tal función límite será una solución de algún problema variacional asociado al original (ver [E-T]). Para una descripción en detalle del fenómeno presentado en esta situación citamos los trabajos [Gur-T], [Er].

A groso modo, uno puede intuir que debido a la falta de convexidad, las soluciones, de existir, no podrían ser soluciones clásicas (regulares) de la ecuación de Euler-Lagrange asociada (asumiendo que ésta pueda ser escrita). Evidentemente la falta de convexidad de la función integrando en la variable del gradiente da lugar a que las soluciones posean gradiente discontinuo.

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemáticas.

## UN MODELO EN ELASTICIDAD FINITA

A continuación presentamos a grandes rasgos un modelo en elasticidad finita. Consideremos un cuerpo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  elástico, homogéneo, isotrópico e incompresible. A causa de la isotropía e incompresibilidad la energía de esfuerzo  $W$  debe reducirse a una función de los dos primeros invariantes:

$$I = \text{Tr} B \quad \Pi = \frac{1}{2} \{ (\text{Tr} B)^2 - \text{Tr} B^2 \}$$

del tensor de esfuerzo izquierdo Cauchy-Green  $B = FF^t$ , donde  $F$  es el gradiente de deformación. Nos limitamos a materiales para los cuales  $W$  es independiente de  $\Pi$ , i.e.  $W(I, \Pi) = W(I)$ . Asumiremos que  $\Omega$  es un cilindro con generatriz paralela al eje  $x_3$  y con sección transversal  $\mathcal{R}$  suficientemente regular.

**Definición.**- Una deformación  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma  $f(x) = (x_1, x_2, x_3 + u(x_1, x_2))$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  es llamada "anti-plane shear".

El correspondiente gradiente de deformación es  $F = \nabla f$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{x_1} & u_{x_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Así,  $\det F = 1$ ,  $I = 3 + |\nabla u|^2$ .

## EL PROBLEMA VARIACIONAL

Asumiendo que el desplazamiento  $u$  es prescrito sobre la frontera de  $\mathcal{R}$ :  $u = g$  sobre  $\partial\mathcal{R}$ , el problema variacional es  $y = (x_1, x_2)$ :

$$\min_{u \in W^{1,p}(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} W(3 + |\nabla u(y)|^2) dy + \int_{\mathcal{R}} c(y) u(y) dy,$$

donde  $W$  es como antes,  $c$  representa la fuerza externa actuando sobre las caras laterales del cilindro  $\Omega$  y

$$W_g^{1,p}(\mathcal{R}) = \{ u \in L^p(\mathcal{R}): u_{x_1}, u_{x_2} \in L^p(\mathcal{R}), u = g \text{ sobre } \partial\mathcal{R} \},$$

$p$  es un número real mayor que 1 e indica el grado de crecimiento -más que lineal- de la función  $W$  en el infinito. Tal hipótesis garantiza que la funcional



sea coercivo, i.e. que las sucesiones minimizantes admitan puntos límites en la topología débil de  $W^{1,p}(\mathcal{R})$ , ver [Bre].

Resultados de existencia de mínimo de funcionales dependiendo del gradiente se pueden encontrar en [A-T1, A-T2, A-T3, Ma, C1, C-P].

### UN PROBLEMA VARIACIONAL DONDE APARECE EL OPERADOR DE LA LAPLACE

Las secciones anteriores fueron dedicadas a la descripción de un modelo de elasticidad finita, la cual justifica, matemáticamente, el estudio de las mismas. Entonces, se trata de encontrar condiciones suficientes a fin que el problema de minimización (no-convexo) admita soluciones. En esta dirección, sin presentar un modelo concreto, se enunciará un resultado de existencia de mínimo para el caso de una funcional con simetría radial y dependiente del laplaciano. Aquí  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

**Hipótesis (H).** Sea  $I = [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La función  $c : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $r \rightarrow r^{n-1} c(r)$  está  $L^{p'}(I)$  con  $p'$  siendo el exponente conjugado de  $p > 1$ . La función  $b : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifica

- (h<sub>1</sub>)  $b$  es  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$  - medible;
- (h<sub>2</sub>)  $\xi \rightarrow b(r, \xi)$  es semicontinua inferiormente para casi todo  $r$  en  $I$ ;
- (h<sub>3</sub>) Existe una constante positiva  $\gamma$ , tal que  $b(r, \xi) \geq \gamma |\xi|^p - \beta(r)$  donde la función  $r \rightarrow r^{n-1} \beta(r)$  está en  $L^1(I)$ .

**Teorema. ([C-F])** Sea  $b$  y  $c$  funciones que satisfacen la hipótesis (H) y sea  $\lambda$  no-negativo. Asumimos que la funcional  $\int_{\Omega} b(|x|, \Delta u(x) - \lambda u(x)) dx$  tiene un valor finito para algún  $u$  en  $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Entonces el problema

$$\left. \begin{aligned} \min \int_{\Omega} c(|x|) u(x) dx + \int_{\Omega} b(|x|, \Delta u(x) - \lambda u(x)) dx \\ u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{aligned} \right\} (P)$$

admite al menos una solución radialmente simétrica.

La demostración de este teorema se deduce demostrando que el problema convexificado ( $P^{\#}$ ) (que es el problema ( $P$ ) con  $b^{\#}$  en lugar de  $b$ , ver [E-T]) admite al menos una solución radialmente simétrica. Entonces, de la solución radial encontrada de ( $P^{\#}$ ), nosotros construimos una función radial usando el teorema de Liapunov (ver [ce]) sobre el rango de una medida vectorial, que será una solución a nuestro problema.

Resultados de otro tipo pueden ser encontrados en [F1, F2, Ra, R1, R2, R3].

#### REFERENCIAS

- [A-T1] G. Aubert, R. Tabraoui, *Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations ...*, *J. Diff. Eq.*, 33 (1979), 1-15.
- [A-T2] G. Aubert, R. Tabraoui, *Théorèmes d'existence en Optimisation non Convexe*, *Applicable Analysis*, 18 (1984), 75-100.
- [A-T3] G. Aubert, R. Tabraoui, *Sur une classe de problèmes différentiels non linéaires par une méthode variationnelle*, *Bolletino U.M.I.*, 7 3-B (1989), 739-757.
- [Bre] H. Brézis, *"Analyse Fonctionnelle"*, Masson, 1987.
- [C1] A. Cellina, *On minima of a functional of the gradient: sufficient conditions*, *Nonlinear Analysis: Theory Method and Applications*, 20 N° 4 (1993), 343-347.
- [C-F] A. Cellina, F. Flores, *Radially Symmetric Solutions of a class of problems of the Calculus of Variations without Convexity assumptions*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 9 N° 4 (1992), 465-478.
- [C-P] A. Cellina, S. Perrota, *On Minima of Radially Symmetric Functionals of the Gradient*, Preprint SISSA 1992.
- [Ce] L. Cesari, *"Optimization - Theory and Applications"*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Er] J. L. Ericksen, *Equilibrium of bars*, *Journal of Elasticity*, 5 (1975), 191-201.
- [E-T] I. Ekeland, R. Teman, *"Convex Analysis and Variational Problems"*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [F1] F. Flores, *Existence theorems for a class of non convex problems in the Calculus of Variations*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 78 N° 1, (1993), 31-48.
- [F2] F. Flores, *On radial solutions for non-convex variational problems*, *Applicable Analysis*, to appear.
- [F3] F. Flores, *The lack of lower semicontinuity implies non-existence of minimizer*, *Non-linear analysis: Theory Method and Applications*, to appear.

- [Gur-T] M.E. Gurtin, R. Teman, *On the anti-plane shear problem in finite elasticity*, *Journal of Elasticity*, 11 (1981), 197-206.
- [Ma] P. Marcellini, *A relation between existence of minima for non convex integrals and uniqueness for non strictly convex integrals of the Calculus of Variations*, in "Mathematical Theories of Optimization", *Springer Lectures Notes in Mathematics*, 979 (1983), 216-231.
- [Ra] P. J. Rabier, *New Existence results for some nonconvex optimization problems*, *Commun. in Partial Diff, Equa.* 14 N° 6 (1989), 699-740.
- [R1] J. P. Raymond, *Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions en Calcul des Variations*, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 4 N° 2 (1987), 169-202.
- [R2] J. P. Raymond, *Existence Theorems in Optimal Control Problems without Convexity Assumptions*, *Journal of Opti. Theory and Appl.*, 67 N° 1 (1990), 109-132.
- [R3] J.P. Raymond, *Existence theorems without convexity assumptions for optimal control problems governed by parabolic and elliptic systems*, *Applied Mathematics and Optimization*, 26 (1992), 36-62.

---

# *Datación por huellas nucleares (de fisión) aplicado a vidrios volcánicos (obsidianas)*

Manuel Brocca Pobes (\*)

---

El propósito del siguiente trabajo es el de utilizar la técnica de huellas de fisión para datar material arqueológico, en este caso se ha trabajado con tres vidrios volcánicos (obsidianas), 2 procedentes del Cusco y 1 de Arequipa; para lo cual se tuvo que construir la curva de calibración que nos permita la obtención de los parámetros de tiempo y ataque químico, obtenido estos parámetros se pasó a datar las muestras.

La muestra de Arequipa arrojó resultados coincidentes con el obtenido en el laboratorio del Instituto Dolomieu de Francia; este resultado nos permite afirmar que las edades halladas en las dos muestras del Cuzco son correctas comprobándose de esta manera la confiabilidad y reproducibilidad de dicha técnica en el país.

## INTRODUCCION

Durante la última década se ha venido desarrollando una técnica para la datación de material geológico y arqueológico, utilizando las trazas dejadas por los fragmentos de fisión. Las primeras investigaciones fueron hechas por R. Fleischer, P. Bufard Price y Robert m. Walker en el año 1971.

Una traza es la zona de daño formada cuando una partícula pasa a través de un sólido, su tamaño y su forma depende del tipo de partícula que la forma. En particular una traza de fisión se forma cuando el núcleo original  $U^{238}$  se fracciona en dos núcleos ligeros de aproximadamente igual masa, liberando cerca de 200 MeV de energía y provocando el retroceso de los fragmentos en direcciones opuestas.

Los fragmentos formados al momento de la fisión son núcleos fuertemente cargados que rompen el balance electrónico de los átomos en el sólido a lo largo de su camino; cuando el fragmento pasa, deja una zona de cargas positivas en su recorrido, produciéndose una repulsión entre ellas y formándose la huella.

---

(\*) UNI - Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.

Escogiendo el reactivo químico apropiado es posible disolver la zona dañada y no el cristal, esto con la finalidad de hacer visible la traza con un microscopio óptico.

Entonces si conocemos cuantas trazas hay en el sólido y el tiempo de vida media del  $U^{238}$  podemos calcular el tiempo transcurrido o edad de la muestra desde su formación mediante la ecuación:

$$t = \frac{1}{\lambda_{d_8}} \ln \left[ \frac{\lambda_{d_8}}{\lambda_{f_8}} \frac{N_5^+}{N_8^+} \frac{\rho_s}{\rho_i} \sigma \phi + 1 \right]$$

donde  $\sigma$  es la sección transversal de fisión inducida de  $U^{235}$ ,  $\lambda_{d_8}$  y  $\lambda_{f_8}$  son respectivamente las constantes de decaimiento total y de fisión de  $U^{238}$  y  $N_5^+$  y  $N_8^+$  son el número de átomos de  $U^{235}$  y  $U^{238}$  por unidad de volumen al tiempo  $t$  respectivamente.

Por lo tanto, para calcular la edad de la muestra son necesarios tres parámetros: las densidades superficiales de trazas  $\rho_s$  y  $\rho_i$  formadas por la fisión espontánea de  $U^{238}$ , e inducida de  $U^{235}$ , respectivamente.

El tercer parámetro es el flujo  $\phi$  con que se irradia la muestra.

Esta técnica puede utilizarse en forma rutinaria debido a su simplicidad y al hecho que se cuenta con el reactor de 10 MW de Huarangal.

## **OBTENCION DE LOS PARAMETROS DE TIEMPO Y ATAQUE QUIMICO TRABAJO EXPERIMENTAL**

Para la obtención de los parámetros, se trabajó con la muestra N° 1 Rajchi del Cusco; nuestro propósito era averiguar el comportamiento de una obsidiana típica frente a la concentración del ácido HF y el tiempo de ataque químico.

Se preparan distintas concentraciones de HF al 25%, 30%, 35%, 40% en peso, la muestra es introducida en el ácido ya preparado durante tiempos que van desde 20 hasta 140 segundos en intervalos de 10 seg; inmediatamente después que la muestra es atacada, ésta es lavada en un agente neutralizante a fin de cortar el poder corrosivo del ácido y posteriormente colocado en un flujo de agua para limpiar el ácido residual que pudiese quedar en la muestra.

Realizando finalmente un contaje de las trazas con el fin de obtener su densidad.

El área del reticulado o del campo visual de trabajo en este caso fue de  $10^{-4}$  cm<sup>2</sup>.

Obtenido el dato de la densidad se vuelve a atacar la muestra incrementando el tiempo de ataque químico en 10 seg.

Los datos obtenidos se muestran en la tabla I.

### LA TEMPERATURA EN TODO MOMENTO FUE DE 22,5°C

La gráfica correspondiente a la densidad de trazas encontradas como función de la concentración del ácido fluorhídrico y el tiempo de ataque químico es la que se indica en la figura 1.

*Tabla I*

En la tabla se indica los valores encontrados de la densidad para distintos tiempos de ataque químico y distintas concentraciones del ácido fluorhídrico.

Concentración (HF)	Tiempo (seg)	Nº Campos	Cuentas Promedio	Densidad (tr/cm <sup>2</sup> )	Error
25%	20	500	0,024	240	70
	30	100	0,51	5100	714
	40	502	2,26	22600	670
	50	500	2,54	25420	710
	60	500	2,70	26940	734
	70	500	2,87	28680	757
	80	500	3,02	30160	777
	90	500	3,05	30340	782
	100	500	2,97	29660	770
	110	500	3,00	30540	782
30%	20	100	0,33	3300	574
	40	500	1,99	19960	632
	50	300	2,48	24800	909
	60	564	3,02	30200	732
	70	500	3,38	33800	822
	84	500	3,47	34700	833
	90	500	3,67	36740	857
	100	500	3,54	35360	841
	110	500	3,54	35440	842
	120	500	33,71	37100	861

Concentración (II)	Tiempo (seg)	Nº campos	Cuentas Promedio	Densidad (tr/cm <sup>2</sup> )	
35%	20	500	0,794	7940	399
	30	500	2,71	27100	734
	40	500	3,16	31660	796
	50	500	3,38	33800	822
	60	500	3,58	35820	846
	70	500	3,78	37800	869
	80	500	3,62	36280	852
	90	500	3,90	39040	883
	100	500	3,51	35140	838
	120	500	3,92	39240	885
40%	20	507	2,87	28700	763
	30	500	3,34	33440	817
	40	506	3,61	36106	845
	50	500	3,78	37980	872
	60	500	4,12	41180	908
	70	500	3,97	39720	891
	80	501	3,81	38123	874

### CARACTERISTICAS OBTENIDAS DE LAS GRAFICAS

1. Cuando la concentración del ácido es baja el crecimiento del valor de la densidad de la muestra se incrementa hasta saturarse.

2. Cuando la concentración del ácido es relativamente alta la zona de saturación se alcanza más rápidamente, pero el incremento de la densidad indica que se están contando también impurezas como trazas, esto producirá un error en el cálculo de la densidad de trazas.

3. Cada curva tiene su zona de trabajo, definida como la zona, donde la revelación de las trazas permita distinguir fácilmente una traza de una falla del material.

4. Mientras más se incrementa la concentración del ácido, la zona de trabajo, disminuye más, tornándose crítico la elección del tiempo de ataque químico.

5. La zona de trabajo para cada curva es:

para  $c = 25$  el tiempo de ataque está entre 50 y 100 seg.

para  $c = 30$  el tiempo de ataque está entre 60 y 100 seg.

para  $c = 35$  el tiempo de ataque está entre 40 y 70 seg.

para  $c = 45$  el tiempo de ataque está entre 20 y 30 seg.

## DATAACION DE LA OBSIDIANA

Obtenidos los parámetros de trabajo para una obsidiana típica, nuestro siguiente propósito es encontrar la edad de las muestras de obsidiana para lo cual escogimos los siguientes parámetros:

Concentración del HF (%)	Tiempo de ataque (seg)
35	60

Los datos obtenidos en cada uno de los tres casos fueron:

### I. Nombre de la Muestra:

Muestra N° 1 AREQUIPA

Lugar de datación: Laboratorio de Datación R2-120

Tipo	Campos	Nº Cuentas	Cuentas / Campo	Densidad (tr/cm <sup>2</sup> )	Diámetro (μ)
Fósiles	1500	194	0,1293	1293 ± 93	3,245
Inducidas	500	2507	5,104	50140 ± 1001	3,892

Flujo de Neutrones (Neutr/cm <sup>2</sup> )	(0,77 ± 0,002) 10 <sup>15</sup>
---	---------------------------------

Edad de la Muestra °	1,22 ± 0,07
----------------------	-------------

Lugar: Instituto Dolomieu - Grenoble Francia

Razón DF/DI	Edad °
0,81	1,34

° En millones de años.



**II. Nombre de la Muestra:**

Muestra N° 2 Procedencia: **RAJCHI - CUSCO**

Tipo	Campos	Nº Cuentas	Cuentas / Campo	Densidad (tr/cm <sup>2</sup> )	Diámetro (μ)
Fósiles	1500	317	0,2113	2113 ± 121	5,85
Inducidas	500	2761	5,522	55220 ± 1071	6,22

Flujo de Neutrones (Neutr/cm <sup>2</sup> )	0,77 ± 0,002 10 <sup>15</sup>
---	-------------------------------

Edad de la Muestra X 10 <sup>0</sup>	1,84 ± 0,08
--------------------------------------	-------------

**III. Nombre de la Muestra:**

Muestra N° 3 Procedencia: **BATAN ORQUIO - CUSCO**

Lugar de datación: **Laboratorio de Datación R2-120**

Tipo	Campos	Nº Cuentas	Cuentas / Campo	Densidad (tr/cm <sup>2</sup> )	Diámetro (μ)
Fósiles	1500	243	0,162	1620 ± 107	
Inducidas	500	2945	5,89	58900 ± 1085	5,90

Flujo de Neutrones (Neutr/cm <sup>2</sup> ) X 10 <sup>15</sup>	0,77 ± 0,002
--	--------------

Edad de la Muestra °	1,30 ± 0,07
----------------------	-------------

\* En millones de años.

En el caso de la muestra N° 1 se ha agregado la datación obtenida en el Instituto Dolomieu-Grenoble Francia como una manera de comparar nuestros resultados.

### Conclusiones

Se puede observar que el resultado obtenido con la muestra N° 1 (Arequipa) concuerda bastante bien con el hallado en los Laboratorios de Francia, esto indica pues la eficacia y reproducibilidad del método y la confiabilidad de las edades encontradas en las muestras 2 y 3.

Como una manera de ver que tan confiables son nuestros resultados, se procedió a datar una muestra cedida por el Dr. Gerard Poupeau (Arci 4/81) obteniéndose los resultados que se indican en la tabla IV.4.

*Tabla IV.4*

A. En la tabla se indica los valores hallados en la densidad de huellas fósiles e inducidas, para la muestra ARCI 4/81.

Tipo	Campos	Nº Cuentas	Cuentas / Campo	Densidad (tr/cm <sup>2</sup> )	Diámetro (μ)
Fósiles	701	351	0,500	5007 ± 287	—
Inducidas	400	2163	5,4075	54075 ± 1097	—

Flujo de Neutrones (Neutr/cm <sup>2</sup> ) x 10 <sup>15</sup>	4,458 ± 0,025
---	---------------

haciendo uso de la ecuación de la edad y de la constante de decaimiento de U<sup>238</sup> obtenemos:

Edad de la Muestra *	2,73 ± 0,11
----------------------	-------------

Relación de diámetros DF/DI
-----------------------------

Correlación	0,89
-------------	------

\* En millones de años.

B. En la tabla se indica los valores de la densidad de huellas fósiles e inducidas así como la edad, halladas en los laboratorios del Instituto Dolomieu Grenoble Francia, de la muestra Arci.

ARCI 4/81

Lugar de datación: Grenoble Francia

Tipo	Campos	Nº Cuentas	Cuentas / Campo	Densidad	Diámetro
Fósiles	700	408	—	4410	—
Inducidas	400	2410	—	45560	—

Flujo de Neutrones (Neutr/cm <sup>2</sup> ) x 10 <sup>15</sup>	4,458 ± 0,025
---	---------------

haciendo uso de la ecuación de la edad y de la constante de decaimiento del uranio 238 obtenemos:

Edad de la Muestra *	2,55 ± 0,20
-------------------------	-------------

**LA MUESTRA FUE IRRADIADA EN EL  
CENTRO NUCLEAR DE HUARANGAL - RACSO**

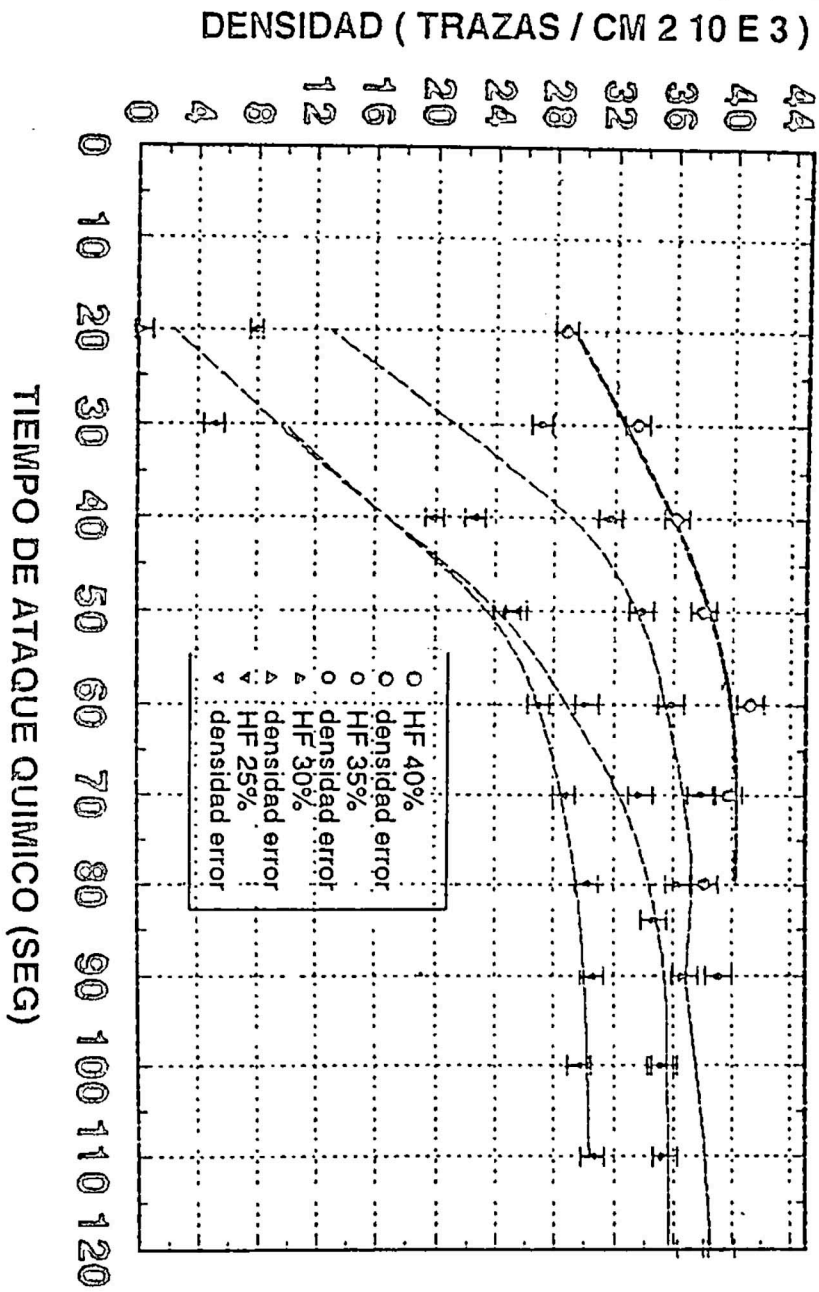
Estos resultados confirman una vez más la confiabilidad de nuestro trabajo.

El método de datación por huellas de fisión nos permite de esta manera poder calcular edades de muestras de tipos arqueológicos tales como cabezas de flechas o de tipo geológicos que son de gran utilidad en el estudio de eventos geológicos; es así que este método que es de gran utilidad para el geólogo como el arqueólogo puede ser utilizado en el país con grandes perspectivas.

---

\* En millones de años.

# CURVA DE CALIBRACION MUESTRA: OBSIDIANA



---

# *Estabilidad de soluciones de una ecuación diferencial no-lineal*

Armando Bernul (\*)

---

## *Resumen*

*Estudiamos una ecuación diferencial ordinaria no-lineal. Esta ecuación posee  $n$  soluciones las cuales son alternadamente asintóticamente estables e inestables. La importancia de esta ecuación es que puede ser utilizada para modelar (i.e. interpretar, comprender) procesos en los cuales un aparato de medición interactúa con un sistema físico cuyos parámetros característicos son funciones continuas y sin embargo el aparato detecta (i.e. mide) sólo valores discretos de estos parámetros.*

## *Abstract*

*We study an ordinary non-linear differential equation. This equation possesses  $n$  solutions which are alternatively, asymptotically stable and unstable. The study of this equation is important because it can be used to simulate processes in which a measure device interacts with a physical system having continuous characteristic parameters, however the equipment detects only a set of discrete values.*

## **INTRODUCCION**

En este trabajo estudiamos el comportamiento del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial no-lineal. La principal característica de estas soluciones es que son alternadamente asintóticamente estables e inestables. Esta característica puede ser utilizada para entender procesos de interacción de sistemas físicos con aparatos de medición, resultando de la medición de cierta variable un conjunto discreto de valores, y sin embargo el modelo teórico prevee el carácter continuo de dicha variable.

La ecuación diferencial la obtenemos al derivar el determinante de una matriz  $n \times n$ . El número total de soluciones (asintóticamente estables e inestables) es  $n$ . Los cofactores del desarrollo de este determinante son los determinantes de las matrices de Vandermonde. Esta característica será usada para encontrar propiedades interesantes de las soluciones.

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.

La ecuación diferencial que estudiaremos es de la forma:

$$\alpha_1 (u - f_2) (u - f_3) \dots (u - f_n) (\dot{u} - \dot{f}_1) + \alpha_2 (u - f_1) (u - f_3) \dots (u - f_n) (\dot{u} - \dot{f}_2) + \dots$$

$$+ \alpha_n (u - f_1) (u - f_2) \dots (u - f_{n-1}) (\dot{u} - \dot{f}_n) = \gamma \prod_{i=1}^n (u - f_i)$$

donde  $u = u(t)$  es la función incógnita de la ecuación,  $t \in [t_0, \infty)$  es la variable independiente,  $f_i = f_i(t)$  son funciones arbitrarias de  $t$ ,  $\alpha_i$  son constantes arbitrarias.

### LA ECUACION DIFERENCIAL Y SUS SOLUCIONES

Sea la ecuación diferencial ( $n \geq 3$ ):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ \ln(u - f_1) & \ln(u - f_2) & \dots & \ln(u - f_n) \end{vmatrix} = \gamma \quad (1)$$

donde  $u = u(t)$ ,  $f_i = f_i(t)$ ,  $t \in [t_0, \infty)$  y  $a_i \in \mathbb{R}$ . Asumimos que:

$$a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \dots > a_2 > a_1 \quad (2)$$

Si desarrollamos el determinante obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ \ln(u - f_1) & \dots & \ln(u - f_n) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n \alpha_j (-1)^{j+1} \ln(u - f_j) \quad (3)$$

donde  $\alpha_j$  son los cofactores de la matriz dada, o sea:

$$\alpha_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_{j-1} & a_{j+1} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_{j-1}^{n-2} & a_{j+1}^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Pero este determinante es el de la matriz de **Vandermonde**. En el apéndice I se demuestra que:

$$\alpha_j = \prod_{1 \leq i < k \leq n-1} (x_k - x_i) = \prod_{1 \leq i < k \leq n-1} (a_k - a_i) \Rightarrow \alpha_j > 0$$

usando la condición (2). Luego de (3):

$$\sum_{j=1}^n |u - f_j| \alpha_j (-1)^{j+1} = \ln \left\{ \prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \right\} \quad (4)$$

Usando (4) y (3) en (1):

$$\left[ \ln \left( \prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \right) \right]' = \frac{1}{\prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j}} \prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} = \gamma \quad (5)$$

y por lo tanto (ver apéndice II):

$$\left\{ \alpha_1 \frac{\dot{u} - \dot{f}_1}{u - f_1} + \alpha_2 \frac{\dot{u} - \dot{f}_2}{u - f_2} + \dots + \alpha_n \frac{\dot{u} - \dot{f}_n}{u - f_n} \right\} = \gamma \quad (6)$$

o equivalentemente:

$$\left\{ \alpha_1 (u - f_2) (u - f_3) \dots (u - f_n) (\dot{u} - \dot{f}_1) + \alpha_2 (u - f_1) (u - f_3) \dots (u - f_n) (\dot{u} - \dot{f}_2) + \dots \right. \\ \left. \dots + \alpha_n (u - f_1) (u - f_2) \dots (u - f_{n-1}) (\dot{u} - \dot{f}_n) \right\} = \gamma \prod_{i=1}^n (u - f_i) \quad (7)$$

que fue la ecuación mencionada en la introducción.

PROPOSICIÓN 1.  $u = f_i$  son soluciones de (7).

*Demostración.* Probemos ahora que  $u = f_i$  es solución de la ecuación diferencial (7). Si  $u = f_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ , entonces  $u = f_i$ .

De este modo en (7) tenemos:

$$\{ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_i (u - f_i) (u - f_2) \dots (u - f_{i-1}) (u - f_{i+1}) \dots \\ \dots (u - f_n) (\dot{u} - \dot{f}_i) + \dots \} = 0$$

y por otro lado:

$$\gamma \prod_{j=1}^n (u - f_j) = 0$$

con lo cual se verifica que  $u = f_i$  es solución de (7)  $\forall i$ .

Observando la ecuación (5) notamos que:

$$\dot{u} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{u - f_j} = \gamma + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j f_j}{u - f_j} \\ \Rightarrow \dot{u} = \frac{\gamma + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j f_j}{u - f_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{u - f_j}} \quad (8)$$

## ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES

Analicemos ahora las soluciones  $u_i = f_i$ . Integrando (5) obtenemos:

$$\ln \left\{ \prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \right\} = \gamma t + \beta, \quad t_0 = 0 \Rightarrow \prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} = A e^{\gamma t} \quad (9)$$

Primeramente haremos un análisis heurístico de dichas soluciones, luego haremos una demostración rigurosa de sus propiedades.



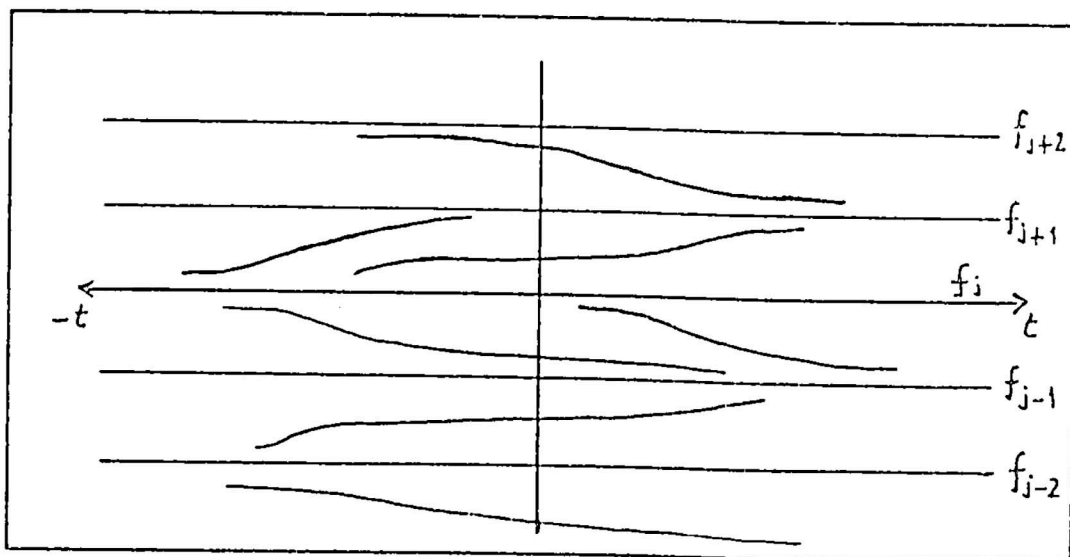
Supongamos en (9) que  $\gamma < 0$ ; si  $t \rightarrow \infty \Rightarrow A e^{\gamma t} \rightarrow 0$ , entonces

$$\prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \rightarrow 0 \Rightarrow |u - f_j| \rightarrow 0 \text{ siempre que } (-1)^{j+1} \alpha_j > 0.$$

Como por definición  $\alpha_j > 0$  entonces debemos tener que  $(-1)^{j+1} > 0$ , de lo cual se deduce que  $|u - f_j| \rightarrow 0$  siempre que  $j$  sea impar.

Entonces las soluciones  $u \approx f_j$  con  $j$  impar son asintóticamente estables para  $t > 0$ . Si  $t \rightarrow -\infty \Rightarrow A e^{\gamma t} \rightarrow \infty$  entonces  $\prod_{j=1}^n |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \rightarrow \infty$  entonces  $|u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \rightarrow 0$  si  $(-1)^{j+1} \alpha_j < 0 \Rightarrow (-1)^{j+1} < 0$ , debiendo  $j$  ser par entonces  $|u - f_j| \rightarrow 0 \Rightarrow u = f_j$  con  $j$  par son asintóticamente estables para  $t < 0$ .

Geoméricamente tenemos:



### Resumiendo:

Para  $t > 0$ ,  $u = f_j$ ,  $j$  impar y  $t < 0$ ,  $u = f_j$ ,  $j$  par son asintóticamente estables.  
 Para  $t > 0$ ,  $u = f_j$ ,  $j$  par y  $t < 0$ ,  $u = f_j$ ,  $j$  impar son asintóticamente inestables.

Probemos esto más rigurosamente; para ello hagamos uso de las definiciones de estabilidad asintótica e inestabilidad según Liapunov.

**Definición 1.** Sea un sistema dado de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{y}_i = g_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde  $\frac{\partial g_i}{\partial y_k}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , existen y son continuas. Sea además  $\phi_i(t)$  la solución de este sistema que para  $t = t_0$  satisface:

$$\phi_i(t_0) = \phi_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

La solución  $\phi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , del sistema de ecuaciones diferenciales se dice que es estable según Liapunov si para cualquier  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists$  un  $\delta(\varepsilon) > 0$ , tal que para cualquier solución  $y_i(t)$  del sistema dado, cuyos valores en  $t = t_0$  son tales que:

$$|y_i(t_0) - \phi_i| < \delta(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

obtenemos que:  $|y_i(t) - \phi_i(t)| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$  (es decir que las soluciones que son próximas según los valores iniciales permanecen próximas para todo  $t \geq t_0$ ).

Si además la solución  $\phi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0$$

entonces la solución  $\phi_i(t)$  es llamada **asintóticamente estable**.

Si en cambio, para cualquier  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeño no se cumple que:

$$|y_i(t) - \phi_i(t)| < \varepsilon$$

al menos para alguna solución  $y_i(t)$ , entonces la solución  $\phi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  es llamada **inestable**.

**PROPOSICIÓN 2.** Si  $\gamma < 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $j$  impar,  $\alpha_j > 0$ , entonces  $u = f_j$ ,  $j = \text{impar}$ , es una solución asintóticamente estable.

*Demostración.* Supongamos que  $|u - f_j| < \delta_\epsilon$  entonces como:

$$f_j > f_{j-1} \quad \forall j, \Rightarrow |u - f_1| < \delta_\epsilon + |f_j - f_1| \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |u - f_j|^{\alpha_j} &= \frac{A e^{\gamma t}}{|u - f_1|^{\alpha_1} \dots |u - f_{j-1}|^{\alpha_{j-1}} |u - f_{j+1}|^{\alpha_{j+1}} \dots |u - f_n|^{\alpha_n}} \\ &< \frac{A}{\prod_{k=1}^n |u - f_k|^{\alpha_k}} = \prod_{k=1}^n \frac{A}{|u - f_k|^{\alpha_k}}, \quad k \neq j \end{aligned}$$

$\forall j = \text{impar}$ .

$$\begin{aligned} \text{Pero de (9): } \delta_\epsilon < |u - f_1| < \delta_\epsilon + |f_j - f_1| &\Rightarrow \frac{1}{|u - f_1|} < \frac{1}{\delta_\epsilon} < \prod_{k=1}^n A \cdot \frac{1}{\delta_\epsilon^{\alpha_k}} \\ &= A \cdot \frac{1}{\delta_\epsilon^{\sum_{k \neq j} \alpha_k}}, \text{ pero } \sum_{k \neq j} \alpha_k = -\alpha_j \text{ (ver apéndice III)} \\ &= \frac{A}{\delta_\epsilon^{-\alpha_j}} = A \delta_\epsilon^{\alpha_j} \Rightarrow |u - f_j| < A^{1/\alpha_j} \delta_\epsilon \quad (10) \end{aligned}$$

Podemos normalizar, o sea poner  $A = 1$ . Entonces basta definir  $\delta_\epsilon = \epsilon$  y así para cualquier  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_\epsilon = \epsilon > 0$  de modo tal que si:

$$|u - f_j| < \delta_\epsilon \Rightarrow |u - f_j| < \epsilon \quad \text{para todo } j \text{ impar, de acuerdo a (10).}$$

$$\text{Pero además, como } |u - f_j| = \frac{e^{\gamma t \alpha_j}}{\left\{ \prod_{k=1}^n |u - f_k|^{\alpha_k} \right\}^{\alpha_j}} \quad k \neq j, \quad \forall j \text{ impar, } \alpha_j > 0$$

$$\text{entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - f_j(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{\gamma t \alpha_j}}{\left\{ \prod_{k=1}^n |u - f_k|^{\alpha_k} \right\}^{\alpha_j}} = 0 \quad \forall j \text{ impar, } \gamma < 0$$

pues el denominador siempre es finito y no nulo.

Luego  $u = f_j$ ,  $j$  impar,  $\gamma < 0$ ,  $\forall j$  impar es una solución de (1) **asintóticamente estable**.

**PROPOSICIÓN 3.** Si  $\gamma < 0$ ,  $t > 0$ ,  $t_0 = 0$  y  $j$  par:  $\alpha_j < 0$ , entonces  $u = f_j$ ,  $j =$  par es una solución inestable.

*Demostración.* Supongamos que  $|u - f_j|_{t_0} < \delta_\epsilon$ , veamos si  $|u - f_j|$  permanece acotada  $\forall t > t_0$ .

$$|u - f_j|^{\alpha_j} = \frac{A e^{\gamma t}}{\prod_{k=1}^n |u - f_k|^{\alpha_k}} \Rightarrow |u - f_j| = e^{\gamma t / \alpha_j} \cdot \prod_{k=1}^n |u - f_k|^{-\alpha_k / \alpha_j}, \quad \forall k \neq j, \quad \forall j$$

par tal que  $\alpha_j < 0$ .

Como  $\gamma < 0$ ,  $\alpha_j < 0 \Rightarrow \gamma t / \alpha_j > 0$  el producto es dominado por la función exponencial que siempre crece, luego:

$$|u - f_j| \geq \prod_{k=1}^n |u - f_k|^{-\alpha_k / \alpha_j} \quad \forall k \neq j, j \text{ par}, \alpha_j < 0$$

Luego, para  $\delta_\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeño,  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $|u(t) - f_j(t)|$  sea acotado, es decir  $|u(t) - f_j(t)| < \epsilon$ , que  $u(t)$  esté tan cerca como se quiera de  $f_j(t) \forall t > t_0$  con  $j$  par.

Luego  $u = f_j$ ,  $\forall j$  par,  $\gamma < 0$  es una solución de (1) **inestable**.

De modo semejante, si  $j$  es par,  $\alpha_j < 0$ , para  $t < t_0 = 0$  se prueba que las soluciones:  $u = f_j$  son soluciones asintóticamente estables del sistema (1) pues  $|u - f_j|$  es proporcional a  $e^{\gamma t / \alpha_j}$ ,  $\gamma t / \alpha_j < 0$  y dado que la función exponencial es predominante una solución  $u$  cerca de  $f_j$  en  $t_0$  permanecerá siempre cerca para cualquier  $t > t_0$ . Igualmente se prueba que si  $j$  es impar,  $\alpha_j > 0$  y para  $t < t_0 = 0$  las soluciones  $u = f_j$  son soluciones inestables del sistema dado (1).

## APÉNDICE I

Demostremos la relación para el determinante de Vandermonde:

$$\prod (x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Por inducción, para  $n = 2$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \text{ se cumple.}$$

Supongamos que se cumple para  $n$ :

$$\begin{aligned} \prod (x_j - x_i) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-1)^n}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)} \begin{vmatrix} (x_1 - x_{n+1}) & (x_2 - x_{n+1}) & \dots \\ x_1(x_1 - x_{n+1}) & x_2(x_2 - x_{n+1}) & \dots \\ x_1^2(x_1 - x_{n+1}) & x_2^2(x_2 - x_{n+1}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & \dots \end{vmatrix} \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\
x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \dots & x_j - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} & 0 \\
x_1(x_1 - x_{n+1}) & x_2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n(x_n - x_{n+1}) & 0 \\
x_1^2(x_1 - x_{n+1}) & x_2^2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^2(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^2(x_n - x_{n+1}) & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^{n-1}(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) & 0
\end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)}$$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\
x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \dots & x_j - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} & 0 \\
x_1(x_1 - x_{n+1}) & x_2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n(x_n - x_{n+1}) & 0 \\
x_1^2(x_1 - x_{n+1}) & x_2^2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^2(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^2(x_n - x_{n+1}) & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^{n-1}(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) & 0
\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)}$$

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & x_{n+1} \\
x_1(x_1 - x_{n+1}) & x_2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n(x_n - x_{n+1}) & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^{n-1}(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) & 0
\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_j^2 & \dots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ x_1^2(x_1 - x_{n+1}) & x_2^2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^2(x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^2(x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x_{n+1} - x_1) \dots (x_{n+1} - x_n)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Vemos que se satisface para  $n + 1$ , luego está probado.

## APÉNDICE II

Demostrar que:

$$\frac{d(\ln |x|)}{dt} = \frac{d(\ln x)}{dt}$$

$$x^2 = |x|^2 \Rightarrow 2x \frac{dx}{dt} = 2|x| \frac{d(|x|)}{dt} \Rightarrow x \frac{dx}{dt} = |x| \frac{d|x|}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{x \dot{x}}{x^2} = \frac{|x| \dot{|x|}}{|x|^2} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{|x|}}{|x|} \Rightarrow \frac{d \ln |x|}{dt} = \frac{d \ln x}{dt}$$

l.q.q.d.

## APÉNDICE III

Sea:

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
 a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\
 a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\
 1 & 1 & \dots & 1 & 1
 \end{vmatrix} = c_{n1} + c_{n2} + \dots + c_{nn} = \sum_{j=1}^n c_{nj} = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

Pero este determinante tiene dos filas iguales, luego:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1, k \neq j}^n \alpha_k = -\alpha_j$$

### REFERENCIAS

- [1] Valqui, H., *Apuntes del Seminario de Física Teórica*, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, 1980.
- [2] Krasnov, Kiseliou, Makarenko, *Variable Compleja y Teoría de la Estabilidad*, Ed. MIR.
- [3] Brauer & Nobel; *Differential Equations*, Wiley, 1980.



---

# Análisis de variancia para datos colineales <sup>(1)</sup>

Allplo Ordoñez Mercado <sup>(2)</sup>

---

## Resumen

*Este trabajo presenta el uso de la "Ley de los Cosenos", para realizar el análisis de variancias de modelos de regresión, en las cuales existe entre las variables explicativas el problema de "Multicolínealidad". También se presenta una aplicación numérica para detallar la implementación de la técnica.*

*Palabras claves: Análisis de Variancia, Datos Colineales, Regresión, Grados de Libertad Fraccional.*

## INTRODUCCION

El análisis de la variancia, es una de las técnicas estadísticas que más se ha extendido entre los investigadores de las diferentes disciplinas científicas. El objetivo principal que se persigue es el de realizar la prueba de hipótesis siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k; k \geq 2 \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j; \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (1)$$

Para el modelo de regresión lineal múltiple, se considera el siguiente modelo:

$$Y_{n \times 1} = X_{n \times p} \beta_{p \times 1} + \epsilon_{n \times 1} \quad (2)$$

Donde las variables X e Y, están definidas en su forma correlación, como se explica en Ordoñez (1993). La técnica del análisis de variancia aplicado al modelo (2), proporciona un medio para realizar la siguiente prueba de hipótesis

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k; k \geq 1 \\ H_1 : \beta_i \neq \beta_j; \text{ para algún } i = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup> Subvencionado por el FEDU N° 4117-93-406 del Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias, Univ. Nac. de Ingeniería. Lima - Perú.

<sup>2</sup> UNI, Facultad de Ciencias. Escuela Profesional de Estadística.

Es muy conocido, que bajo las suposiciones usuales, los estimadores mínimo cuadráticos para  $\beta$  y  $\sigma^2$ , son dados por

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y; \hat{\sigma}^2 = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) / (n - p - 1) \quad (4)$$

y se constituyen como los mejores en un sentido estadístico.

Sin embargo, en casi todas las aplicaciones prácticas de la vida real se tienen con frecuencia, matrices diseños  $X^T X$ , con determinantes próximos de "0" y los estimados por mínimos cuadrados ordinarios se tornan inestables en signo y magnitud, y se utilizan procedimientos alternativos como el de Regresión Ridge, cuyos detalles teóricos y prácticos se describen en los trabajos de Hocking (1976), y Hoerl and Kennard (1970).

La Regresión Ridge, es una familia de estimadores indexados

$$\hat{\beta}(k) = \{X^T X + kI\}^{-1} X^T Y; k \geq 0 \quad (5)$$

Expresiones alternativas para esta ecuación, se encuentran realizando las siguientes definiciones

$$W = (X^T X + kI)^{-1}, \quad Z = WX^T X$$

Observa que existen dos expresiones útiles para Z

$$1) \quad Z = WX^T X = (X^T X + kI)^{-1} (X^T X + kI - kI) \\ = I - k (X^T X + kI)^{-1} \quad (6)$$

$$2) \quad Z = WX^T X = \{ (X^T X)^{-1} W^{-1} \}^{-1} = \{ (X^T X)^{-1} (X^T X + kI) \}^{-1} \\ = \{ I - k (X^T X)^{-1} \}^{-1} \quad (7)$$

estas expresiones, conducen a otra expresión muy útil para el estimador de regresión ridge

$$\hat{\beta}(k) = W X^T Y = Z \hat{\beta} \quad (8)$$

La matriz "Z", hace las veces de una ponderación de los estimadores clásicos  $\hat{\beta}_i$ , y por lo general las reduce en magnitud, por lo que es llamado de "Factor de Reducción de los  $\beta_i$ ".

## LEY DE LOS COSENOS EN LA DESCOMPOSICION DE LA VARIACION TOTAL

La no ortogonalidad de la matriz X, lleva a aplicar, la famosa ley de los cosenos, para descomponer la suma de cuadrados del total de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 Y^T Y &= \|Y - XZ\hat{\beta} + XZ\hat{\beta}\|^2 = \left[ (Y - XZ\hat{\beta}) + XZ\hat{\beta} \right]^T \left[ (Y - XZ\hat{\beta}) + XZ\hat{\beta} \right] \\
 &= (Y - XZ\hat{\beta})^T (Y - XZ\hat{\beta}) + (XZ\hat{\beta})^T XZ\hat{\beta} + (Y - XZ\hat{\beta})^T XZ\hat{\beta} + (XZ\hat{\beta})^T (Y - XZ\hat{\beta}) \\
 &= \|Y - XZ\hat{\beta}\|^2 + \|XZ\hat{\beta}\|^2 + 2 (Y - XZ\hat{\beta})^T XZ\hat{\beta} \\
 &= \text{SC. Residual} + \text{SC. Regresión Ridge} + \text{Non} \tag{9}
 \end{aligned}$$

donde:

$$\text{Cos } \theta = \frac{(Y - XZ\hat{\beta})^T XZ\hat{\beta}}{\|Y - XZ\hat{\beta}\| \|XZ\hat{\beta}\|} = \frac{\text{Non}/2}{\left\{ \|Y - XZ\hat{\beta}\|^2 \|XZ\hat{\beta}\|^2 \right\}^{1/2}} \tag{10}$$

también observe que:

$$\text{Cos } \theta = \begin{cases} > 0 & \text{si } \theta < 90^\circ \\ = 0 & \text{si } \theta = 90^\circ \\ < 0 & \text{si } \theta > 90^\circ \end{cases}$$

La descomposición de la suma del total, según la ley de los cosenos, usando el estimador de regresión ridge, involucra a tres componentes no ortogonales: una suma de cuadrados debido al residual, otra debido a la regresión ridge, y finalmente otra debida a la parte no ortogonal de los dos vectores;  $(Y - XZ\hat{\beta})$  y  $XZ\hat{\beta}$ ;

$$Y^T Y = (Y - XZ\hat{\beta})^T (Y - XZ\hat{\beta}) + \hat{\beta}^T Z^T X^T XZ\hat{\beta} + 2 (Y - XZ\hat{\beta})^T XZ\hat{\beta} \tag{11}$$

De otro lado, el uso de la Regresión Ridge origina el problema de asignar grados de libertad fraccionarios, a cada fuente de variación, estudios preliminares relacionados a este punto se encuentran en; Garmer and Hsieh (1978) Hoerl and Kennard (1990), y Ordoñez (1993).

## ASIGNACION DE GRADOS DE LIBERTAD FRACCIONAL

La no ortogonalidad de la matriz  $X^T X$ , obliga a distribuir una parte de los grados de libertad correspondientes a la regresión, entre las otras fuentes restantes. Así los grados de libertad debido a la regresión, será fraccional y menor que "p".

La determinación es realizada en forma análoga a la confección del cuadro del análisis de variancia; sin embargo se requiere definir el concepto de grados de libertad en forma general.

En el cuadro N° 1, se observa que el número de los grados de libertad  $v_h$ , es el divisor de las sumas de cuadrados respectivamente, en la columna de los cuadrados medios; de forma que el cociente en ausencia de los  $\beta_p$ , son simplemente los estimadores insesgados para  $\sigma_\varepsilon^2$ . Esto es, sobre la hipótesis nula;  $H_0 : \beta = 0$ ,

$$E \{SC_h / v_h\} = \sigma_\varepsilon^2, \text{ para cada } h. \quad (12)$$

o equivalentemente

$$v_h = E \{SC_h\} / \sigma_\varepsilon^2, \text{ para cada } h. \quad (13)$$

Por tanto, sobre la suposición de que la hipótesis nula  $H_0 : \beta = 0$  sea verdad, entonces el multiplicador de  $\sigma_\varepsilon^2$ , en  $E \{S. C_h\}$  constituyen los grados de libertad. Este principio se aplicará en la sección siguiente, para obtener los grados de libertad para cada una de las fuentes de variabilidad, consideradas en el cuadro del análisis de la varianza.

Cuadro N° 1: *Tabla tradicional del análisis de varianza*

TERMINO EN EL MODELO	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO
1. $T_1$	$v_1$	$S.C_1$	$S.C_1 / v_1$
2. $T_2$	$v_2$	$S.C_2$	$S.C_2 / v_2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
h. $T_h$	$v_h$	$S.C_h$	$S.C_h / v_h$
Total	n-1	$Y^T Y$	

## Grados de libertad para el residual

La aplicación de la ecuación (13), sugiere el cálculo de la esperanza de las sumas de cuadrados para cada fuente y evaluarla sobre la hipótesis nula.

Bajo las siguientes suposiciones:

$$Y \sim N_n (X\beta; \sigma_e^2 I)$$

$$\hat{\beta} \sim N_p (\beta; (X^T X)^{-1} \sigma_e^2)$$

Y usando la expresión de "Z" en la ecuación (6), se tiene:

$$\begin{aligned} Y - XZ\hat{\beta} &= Y - X [I - k (X^T X + kI)^{-1}] \hat{\beta} \\ &= (Y - X\hat{\beta}) + kX (X^T X + kI)^{-1} \hat{\beta} = (Y - X\hat{\beta}) + kXW\hat{\beta} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} (Y - XZ\hat{\beta})^T (Y - XZ\hat{\beta}) &= (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) + kY^T XW\hat{\beta} - k\hat{\beta}^T X^T XW\hat{\beta} + k\hat{\beta}^T W X^T Y \\ &\quad - k\hat{\beta}^T X^T XW\hat{\beta} + k\hat{\beta}^T W X^T X\hat{\beta} + k^2 \hat{\beta}^T W X^T XW\hat{\beta} \end{aligned}$$

y por uso de la ecuación (7), se obtiene:

$$\begin{aligned} &= (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) + k^2 \hat{\beta}^T Z^T (X^T X)^{-1} Z \hat{\beta} \\ &= Y^T [I - X (X^T X)^{-1} X^T] Y + k^2 \hat{\beta}^T Z^T (X^T X)^{-1} Z \hat{\beta} \end{aligned}$$

Por tanto aplicando el operador de esperanza para esta última expresión:

$$\begin{aligned} E \{ (Y - XZ\hat{\beta})^T (Y - XZ\hat{\beta}) \} &= (n-p-1) \sigma_e^2 + k^2 \{ \text{Tr} [Z^T (X^T X)^{-1} Z (X^T X)^{-1}] \sigma_e^2 \\ &\quad + \beta^T Z^T (X^T X)^{-1} Z \beta \} \\ &= (n-p-1) \sigma_e^2 + k^2 \text{Tr} [W^T W] \sigma_e^2 + k^2 \beta^T Z^T (X^T X)^{-1} Z \beta \\ &= (n-p-1) \sigma_e^2 + k^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{(\lambda_i + k)^2} \sigma_e^2 + k^2 \beta^T Z^T (X^T X)^{-1} Z \beta \end{aligned} \quad (14)$$

Y sobre la hipótesis nula  $H_0 : \beta = 0$ ;

$$E \{ \text{SC. Residual} \} / \sigma_e^2 = n - m - 1 \quad (15)$$

donde:

$$m = p - k^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{(\lambda_i + k)^2}$$

### Grados de libertad para la Regresión Ridge

En forma análoga el procedimiento de la sección anterior, se necesita hallar la esperanza de la suma de cuadrados debido a la Regresión Ridge

$$\begin{aligned} E \{ \|XZ\hat{\beta}\|^2 \} &= E \{ [XZ\hat{\beta}]^T [XZ\hat{\beta}] \} = E \{ \hat{\beta}^T Z^T X^T X Z \hat{\beta} \} \\ &= \text{Traza} \{ Z^T X^T X Z (X^T X)^{-1} \} \sigma_e^2 + \beta^T Z^T X^T X Z \beta \\ &= \text{Traza} \{ \Lambda (\Lambda + k I)^{-1} \Lambda (\Lambda + k I)^{-1} \} \sigma_e^2 + \beta^T Z^T X^T X Z \beta \end{aligned}$$

y sobre la suposición de que la hipótesis  $H_0 : \beta = 0$ , es cierta se obtiene que:

$$E \left\{ \frac{\text{S.C. Regr. Ridge}}{\sigma_e^2} \right\} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i + k)^2} = q \quad (16)$$

### Grados de libertad para la componente no ortogonal

De la ecuación (9), la suma de cuadrados debido a la componente no ortogonal es:

$$\begin{aligned} \text{NON} &= 2 [Y - X\hat{\beta}(k)]^T X\hat{\beta}(k) = 2 [Y - X\hat{\beta}(k)]^T XZ\hat{\beta} = 2 [Y^T XZ\hat{\beta} - \hat{\beta}^T Z^T X^T X Z \hat{\beta}] \\ &= 2 [ \hat{\beta}^T Z^T X^T X Z \hat{\beta} - \hat{\beta}^T (I + kW) X^T X Z \hat{\beta} ] = 2k\hat{\beta}^T [WX^T XZ] \hat{\beta} \\ &= 2k\hat{\beta}^T [I + k (X^T X)^{-1}]^{-1} Z\hat{\beta} = 2k\hat{\beta}^T Z^T Z \hat{\beta} \end{aligned} \quad (17)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 E(\text{NON}) &= 2k E\{\hat{\beta}^T Z^T Z \hat{\beta}\} = 2k \{\text{Tr}\{Z^T Z (X^T X)^{-1}\} \sigma_e^2 + \beta^T Z^T Z \beta\} \\
 &= 2k \sigma_e^2 \text{Tr}\{\Lambda (\Lambda + kI)^{-2}\} + 2k \beta^T Z^T Z \beta \\
 &= 2k \sigma_e^2 \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + 2k \hat{\beta}^T Z^T Z \beta
 \end{aligned}$$

y sobre la suposición de que la hipótesis nula es cierta:

$$E\left\{\frac{\text{NON}}{\sigma_e^2}\right\} = 2k \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} = 2kr \quad (18)$$

Observe que los grados de libertad del total, también obedece a la regla aplicada para las otras fuentes de variación, y además verifica la aditividad del modelo; esto es

$$(n-1) = (n-1-m) + q + 2kr, \quad (19)$$

Así la descomposición de la "Ley de los Cosenos", produce un cuadro análogo al del teorema de "Pitágoras":

*Cuadro N°2: Anva según la "Ley de los Cosenos"*

FUENTES DE VARIACION	G.L.	SUMA DE CUADRADOS	VALOR ESPERADO DE LOS CUADRADOS MEDIOS
Regresión	q	$ X \hat{\beta}(k) ^2$	$q \sigma^2 + \beta^T Z^T X^T X Z \beta$
Sesgo	2kr	$2k  \hat{\beta}(k) ^2$	$2k \sigma^2 + 2k \beta^T Z^T Z \beta$
Residual	n-1-m	$ Y - X \hat{\beta}(k) ^2$	$(n-1-m)\sigma^2 + k \beta^T Z^T (X^T X)^{-1} Z \beta$
Total	n-1	$ Y ^2$	$(n-1)\sigma^2 + \beta^T X^T X \beta$

## APLICACION: DATOS ESTATURA DE UN BEBE

Para ilustrar el comportamiento de los estimadores de Regresión Ridge en la construcción del cuadro del ANVA, vía la aplicación de la "Ley de los Cosenos"; se usará un conjunto de datos referentes a un bebé, nacido el 01/02/1993 en la clínica de San Pablo; los datos tomados por el pediatra fueron: la estatura, peso, edad y perímetro cefálico durante los meses de febrero a noviembre. El problema que se planteó, fue el de obtener un pronóstico de la estatura del bebé para el mes siguiente en función de otras variables;

$$\text{Estatura} = f(\text{edad, peso, y perímetro cefálico}) \quad (20)$$

La matriz de correlaciones para este conjunto de datos fue:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,9806 & 0,9658 \\ & 1,0000 & 0,9916 \\ & & 1,0000 \end{bmatrix}$$

Cuyas raíces características son:

$$\lambda_1 = 0,005693, \lambda_2 = 2,9587, \lambda_3 = 0,0356$$

la magnitud  $\lambda_1$ , está indicando que el problema de multicolinealidad está presente en la matriz de datos y en consecuencia se usará el estimador Ridge con  $k = \lambda_{\min}$  para combatir los efectos perturbadores de la colinealidad, los resultados se muestran en los siguientes cuadros:

*Cuadro N° 3: Estimados de los parámetros (forma correlación)  
Datos: estatura de un bebé.*

PARAMETRO EN MODELO	MINIMOS CUADRADOS K=0	REGRESION RIDGE K=0,005693
$\hat{\beta}_1$	- 0,273875	- 0,130204
$\hat{\beta}_2$	0,975851	0,689624
$\hat{\beta}_3$	0,290499	0,433115



Cuadro N° 4: Estimados de parámetros (forma original)

Datos: estatura de un bebé.

PARAMETRO EN MODELO	MINIMOS CUADRADOS K=0	REGRESION RIDGE K=0,005693
$\hat{\beta}_0$	17,7774	11,5544
$\hat{\beta}_1$	- 0,6261	- 0,2977
$\hat{\beta}_2$	3,5932	2,5393
$\hat{\beta}_3$	0,5685	0,8476

La forma original es obtenida de la forma correlación o viceversa, aplicada la siguiente relación:

$$\hat{\beta}(k) = \hat{\beta}^*(k) (S.C_{YY} / S.C_{XX})^{1/2} \quad (21)$$

Cuadro N° 5: Anva para los datos, estatura de un bebé  
Mínimos Cuadrados Ordinarios, k = 0

FUENTES DE VARIACION	G.L.	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO	RAZON F
Regresión	3,0	505,2176	168,4059	595,761
Residual	7,0	1,9787	0,28267	
Total	10,0	507,1963		

*Regresión Ridge k = 0,005693*

FUENTES DE VARIACION	G.L.	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO	RAZON F
Regresión	1,98954	500,8474	251,7398	292,017
Sesgo	0,74146	0,0826	8,9804	
Residual	7,26899	6,2664	0,8621	
Total	10,00000	507,19637	$\theta = 89,96$	

Las ecuaciones para obtener los pronósticos se obtienen, desde el cuadro N° 4, y son:

$$\hat{Y} = 17,7774 - 0,6261X_1 + 3,5932X_2 + 0,5685X_3,$$

$$\hat{Y}(k) = 11,5584 - 0,2977X_1 + 2,5393X_2 + 0,8476X_3,$$

### *Conclusiones y recomendaciones*

Las siguientes conclusiones se reportan para el presente trabajo:

1. La razón "F", para la Regresión Ridge se reduce en aproximadamente el 104,02%.
2. Según el punto N° 1, la aplicación del teorema de Pitágoras, en presencia de la multicolinealidad, puede conducir a tomar decisiones incorrectas en la prueba de hipótesis  $H_0 : \beta = 0$ .
3. La razón "F" para Regresión Ridge debe obtenerse mediante integración numérica de la expresión:

$$P \{(Y^T A Y / Y^T B Y) \leq z\} = P \{Y^T (A - zB) Y \leq 0\}$$

4. Investigaciones adicionales se requiere para determinar la distribución exacta de la razón "F" para el caso de la Regresión Ridge.

### REFERENCIAS

- [1] *Carmer S. and Hsieh W. (1978). "A simulation study of five biased for straight line regression" Comm. Statist. "Simulation and Computation" B7(6), Pág. 529-548.*
- [2] *Hocking R. R. (1976). "The analysis and selection of variables in linear regression". Biometrics Vol. 32; Pág. 1-49.*
- [3] *Hoerl A. and Kennard R. (1970). "Ridge regression: Biased estimation for non orthogonal problems". Technometrics Vol 12; Pág. 55-67.*
- [4] *Hoerl A. and Kennard W. (1970). "Ridge regression: Degrees of freedom in the analysis of variance". Communications in Statistics Simulation 19 (4), Pág. 1485-1495.*
- [5] *Ordoñez M. A. (1993). "Regresión ridge lineal simple", XI - Coloquio Nacional de Matemáticas; 08-12 Nov. 1993; Huaraz - Perú.*

# Fenómenos Homoclínicos

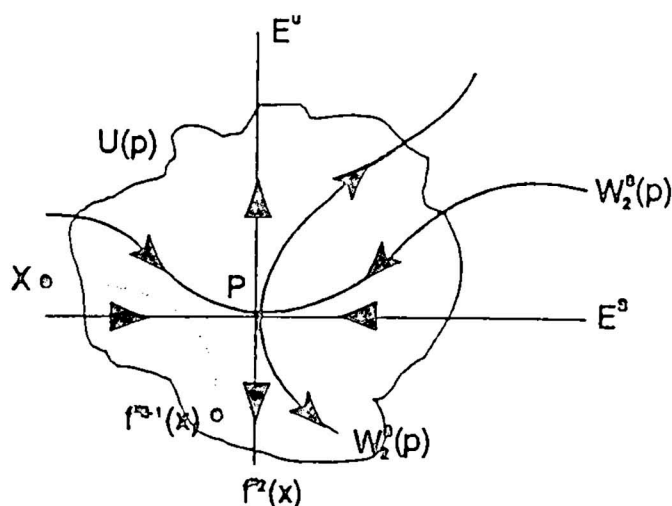
Felx Escalante Del Aguila (\*)

## INTRODUCCION

La idea es ilustrar que si bien el comportamiento (Dinámica) de un difeomorfismo en la vecindad de un punto fijo hiperbólico, es bastante simple; esto no ocurre desde el punto de vista global.

Sea  $f \in D_1 f^r(M)$ ,  $r \geq 1$   $p \in M$  un punto fijo hiperbólico de tipo silla (i.e.  $\dim E^s \geq 1$  y  $\dim E^u \geq 1$ ).

El teorema de Grobman - Hartman, asegura que  $f$  es localmente conjugado con  $df_p$ ; por lo tanto la dinámica de  $f$  en una vecindad  $U(p)$  es bien entendida.



Esto es:

$$x \in W_\epsilon^u(p) \Rightarrow f^{-n}(x) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow +\infty$$

$$x \in W_\epsilon^s(p) \Rightarrow f^n(x) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow +\infty$$

$x \notin W_\epsilon^u(p) \cup W_\epsilon^s(p)$ , entonces existen  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  tales que:

$$f^{-k_1}(x) \notin U(p), f^{k_2}(x) \notin U(p)$$

$$\text{pero } f^j(x) \in U(p) \quad \forall j \in \{-k_1 + 1, \dots, k_2 - 1\}$$

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemáticas.

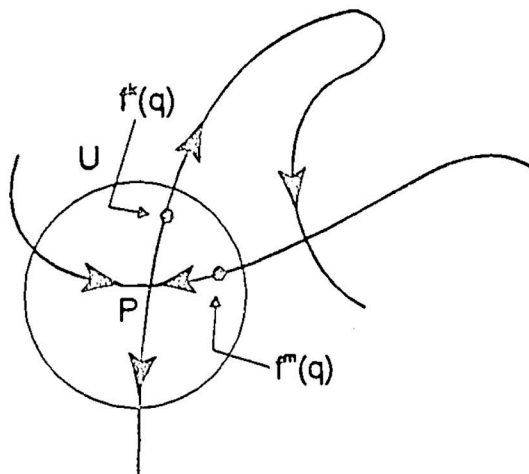
Surgen naturalmente varias preguntas:

- ¿Existen puntos en  $U(p)$  que retornan después de un tiempo a  $U$ ?
- ¿Existen puntos periódicos  $\neq p$  cuya órbita intercepta a  $U$ ?
- ¿Existen puntos no errantes en  $U$ ?

En efecto estas tres situaciones pueden ocurrir, cuando:

$$W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

**Definición.**- Si  $q \in W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\})$ , entonces  $q$  se denomina **punto homoclínico** asociado a  $p$ . Si  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$  son transversales en  $q$ , en este caso se dice que  $q$  es un punto homoclínico transversal; si no lo son entonces  $q$  es una tangencia homoclínica.



- $q \in W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\})$  implica que  $f(q) \in W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\})$  es decir también es homoclínico.
- Observemos que si  $q$  es un punto homoclínico asociado a  $p$ , entonces  $\omega(q) = \alpha(q) = \{p\}$ , y puesto que  $W^s(p)$ ,  $W^u(p)$  son  $f$ -invariantes, entonces  $f^k(q)$  también es homoclínico para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Así, es evidente que la existencia de un punto homoclínico implica respuesta afirmativa a la primera pregunta.

### Proposición

Sea  $f \in D_1$ ,  $f^r(M)$  y  $p$  un punto fijo (periódico) hiperbólico. Si  $q$  es un punto homoclínico asociado a  $p$ , entonces  $q \in \Omega(f)$ .

Este resultado es consecuencia directa del  $\lambda$ -Lema, que dice lo siguiente:

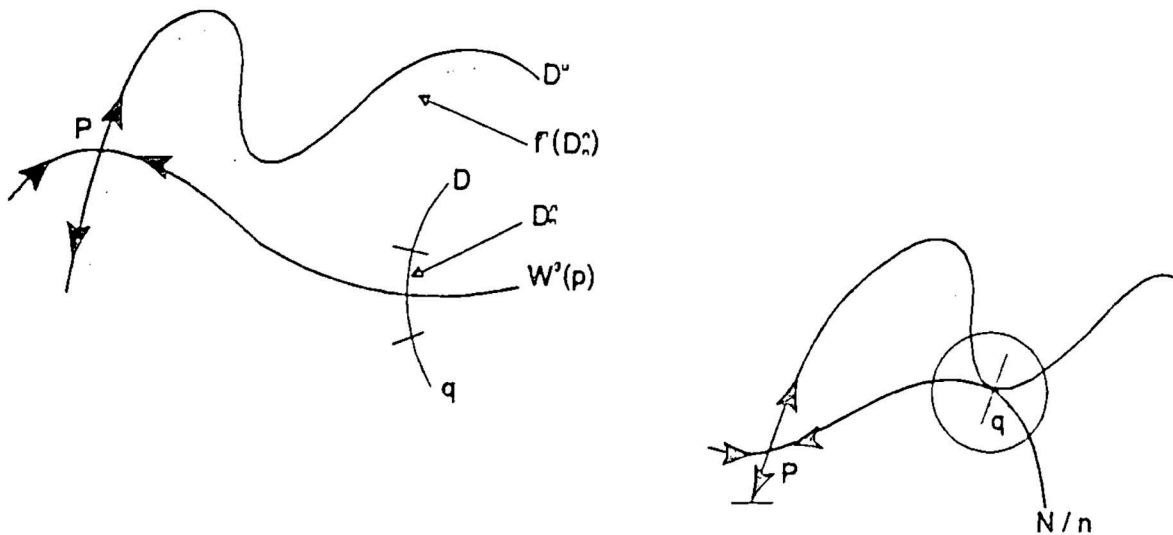
**Proposición: ( $\lambda$ -Lema)**

Sea  $f \in D_1 f^r(M)$ ,  $p$  un punto fijo hiperbólico. Sea  $D$  un disco transversal a  $W^s(p)$  en  $q$ , de dimensión igual al de  $E^u$  y  $D^u$  un disco compacto contenido en  $W^u(p)$ , con  $p \in D^u$  y  $\dim(D^u) = \dim(E^u)$ .

Entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$  existe un disco compacto  $D_n \subseteq D$  con  $q \in D_n$ ; satisfaciendo:

$$f^n(D_n) \text{ está } \varepsilon - c^1 - \text{ pr\u00f3ximo de } D^u$$

La siguiente figura ilustra el resultado.



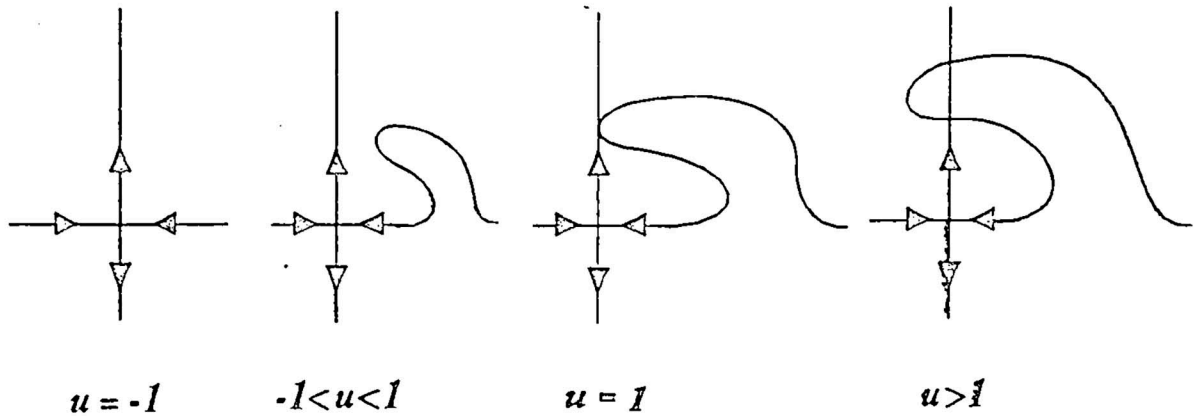
**Prueba de la Proposición:**

Sea  $p$  punto fijo hiperbólico de  $f$  y  $q$ , un punto homoclínico asociado. Sea  $V(q)$  una vecindad cualquiera de  $q$ ; y escojamos  $D \subset V$  un pequeño disco transversal a  $W^s(p)$  en  $q \in D$ ; con  $\dim(D) = \dim(E^u)$ . Por el  $\lambda$ -Lema, existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{m_0}(D) \cap V \neq \emptyset$ . Como  $D \subset V$ , entonces existe  $z \in V$  tal que  $f^{m_0}(z) \in V$ ; lo que implica que:  $f^{-m_0}(V) \cap V \neq \emptyset$ . Como  $V$  fue arbitraria se sigue que  $q$  es no errante, esto es  $q \in \Omega(f)$ .

**Comentario:**

*Es intuitivo que la creación de una tangencia homoclínica, impide la estabilidad estructural ya que el conjunto  $\Omega(f)$  puede "explotar".*

Es posible construir una familia a un parámetro de difeomorfismos  $f_u$ ,  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $f_{-1}$  es lineal,  $\Omega(f_u) = \{(0,0)\}$  para  $u_0 < u < 1$  y  $\Omega(f_u)$  no es finito para  $u \geq u_0$ . En estas condiciones es claro que  $f_{u_0}$  no puede ser estructuralmente estable.



Para evitar este tipo de situaciones se considera el siguiente subconjunto de difeomorfismos:

$KS^r(M) = \{f \in D_i f^r(M) : \text{ todos los puntos periódicos son hiperbólicos y } \forall p, q \in \text{Per}(f), W^s(p) \text{ y } W^u(q) \text{ son transversales}\}$

El conjunto  $KS^r(M)$  se denomina **conjunto de difeomorfismos de Kupka - Smale**.

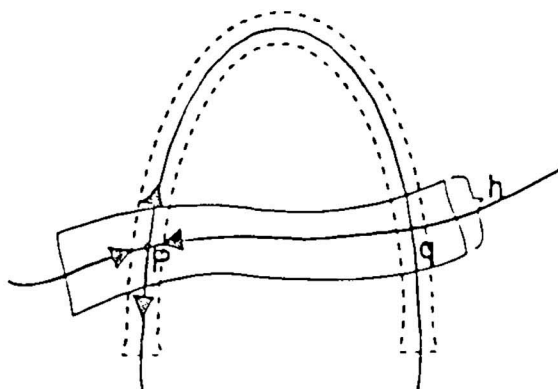
**Teorema: (Kupka - Smale).**-  $KS^r(M)$  es  $C^r$ -residual en  $D_i f^r(M)$ ; es decir es intersección de conjuntos abiertos y densos de  $D_i f^r(M)$ .

Finalmente observamos que si  $f$  es estructuralmente estable, entonces  $f$  es de Kupka - Smale.

El recíproco es falso; en efecto una rotación irracional en  $S^1$ ,  $R_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es un difeomorfismo de  $K - S$ , sin embargo no es estructuralmente estable. Veremos ahora que el caso de la existencia de un punto homoclínico transversal implica riqueza dinámica.

Sea  $p$  un punto fijo hiperbólico de  $f$  y  $q$  un punto homoclínico transversal asociado a  $p$ , como se muestra en la figura adjunta.

Sea  $\mathcal{R}$  un rectángulo, conteniendo el arco de variedad estable de  $p$  que une  $p$  con  $q$ , y digamos que tenga altura adecuada  $b$ .



Cuando iteramos  $\mathcal{R}$  por  $f$  obtenemos un rectángulo topológico cuya altura es muy superior a la de  $\mathcal{R}$  y cuyo ancho es muy inferior al de  $\mathcal{R}$ , después de un cierto número de iteraciones; esto es debido a la presencia del punto homoclínico transversal  $q$  y como consecuencia del  $\lambda$  - Lema.

Para un cierto  $k$  y para una altura suficientemente pequeña, obtenemos:  $f^k(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  y obtenemos una situación presentada en la figura de arriba.

Nuestro objetivo, es entender la dinámica de  $f^k$  en el subconjunto maximal invariante  $\Lambda \subset \mathcal{R}$ ; esto es el compacto  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-kn}(\mathcal{R})$ .

Para hacer este estudio introducimos un modelo debido a Smale que describe un difeomorfismo en  $S^2$  el cual es estructuralmente estable y tiene un número infinito de puntos periódicos.

## HORSESHOE DE SMALE

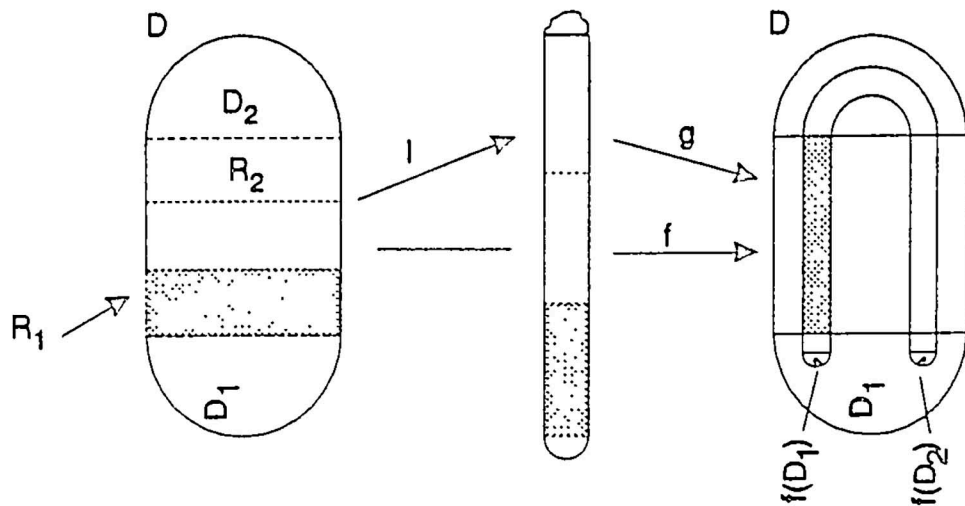
Vamos a describir  $f: S^2 \rightarrow S^2$  difeomorfismo tal que el polo norte  $N$  sea una fuente hiperbólica, con  $W^u(N) = \overline{H}^+$ , es decir el hemisferio norte incluido el Ecuador.

Por lo tanto, si  $H_-$  representa el hemisferio sur, tendremos que  $f(H_-) \subset H_-$ .

Vamos entonces a describir  $f$  en  $H_-$ ; pero describir  $f$  en  $H_-$ , es equivalente a describir  $f$  en un disco topológico  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Sea  $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / l(x,y) = (\lambda x, \mu y)$  donde  $0 < \lambda < \frac{1}{4}$ ,  $\mu > 4$ ; entonces  $l$  es una contracción en las líneas horizontales y es una expansión en las líneas verticales.

Sea  $g: D \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$  que curva en U las líneas verticales; entonces  $f = g \circ l$  transforma el disco  $D$  como se muestra en la figura:



Entonces observamos que  $Q \cap f(Q)$  tiene dos componentes.

$$\text{Esto es: } Q \cap f(Q) = f(R_1) \cup f(R_2)$$

También es fácil ver  $f|_{R_i}$  es afín (lineal), contrae horizontalmente en un factor  $\lambda < \frac{1}{4}$  y expande verticalmente en un factor  $\mu > \frac{1}{4}$ .

Ahora en el disco  $\hat{D}_1 = f(D_1)$  colocamos un punto fijo  $S$  hiperbólico atractor con  $\hat{D}_1 \subset W^s(S)$ .

Vamos ahora a analizar el conjunto  $\Omega(f)$  de puntos no errantes de  $f$ .

Si  $x \in \bar{H}_+ \setminus \{N\}$ , entonces  $x$  es errante, pues  $x$  está en la variedad inestable de una fuente.

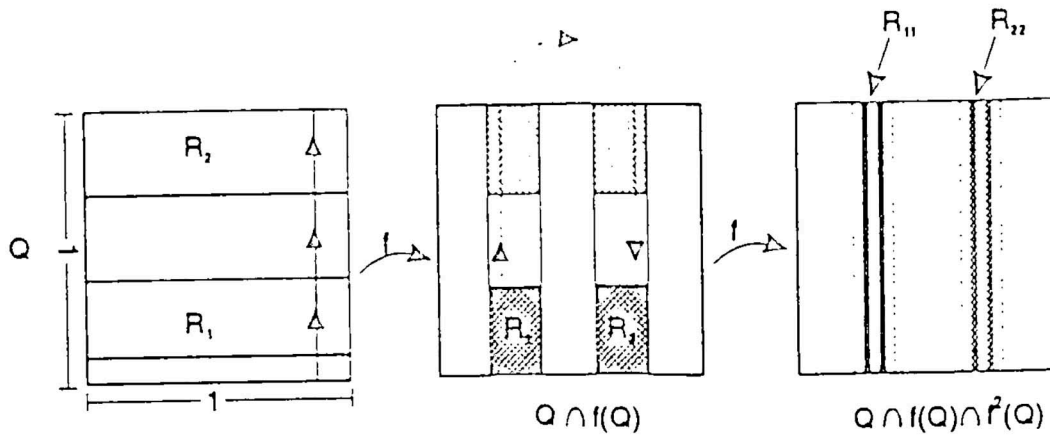
Si  $x \in \hat{D}_1 \setminus \{S\}$ , entonces  $x$  es también errante; pues pertenece a la variedad estable de un pozo.

Si  $x \in D_1 \Rightarrow f(x) \in \hat{D}_1$ , luego  $x$  es errante. También, si  $x \in D_2 \Rightarrow f(x) \in D_1$ , luego otra vez  $x$  es errante.



Por lo tanto concluimos que si  $x \in H_- \setminus (S)$ , entonces  $x$  será no - errante (p puede ser no errante) si la órbita de  $x$ ,  $O(x) \subset Q$ . Así que si  $x \in \Omega \setminus (N, S)$  entonces  $x \in \Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(Q)$ .

Descripción del Conjunto  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(Q)$ .



Como  $Q \cap f(Q)$  tiene 2 componentes rectangulares, vemos que  $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$  tiene 4 componentes rectangulares; y así sucesivamente.

Esquemáticamente tenemos:

$$Q; Q \cap f(Q) = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2; Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = \mathcal{R}_{11} \cup \mathcal{R}_{12} \cup \mathcal{R}_{21} \cup \mathcal{R}_{22}$$

Los índices son colocados de la siguiente manera:

$$f(\mathcal{R}_1) \cap Q = \mathcal{R}_{11} \cup \mathcal{R}_{12} \text{ y } \mathcal{R}_{11} \subset \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_{12} \cap \mathcal{R}_1 = \phi$$

Análogamente:

$$f(\mathcal{R}_2) \cap Q = \mathcal{R}_{21} \cup \mathcal{R}_{22} \text{ donde } \mathcal{R}_{22} \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{R}_2 = \phi$$

Esto es:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= \mathcal{R}_1 \cup f(\mathcal{R}_1), \mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_2 \cup f(\mathcal{R}_1) \\ \mathcal{R}_{12} &= \mathcal{R}_1 \cup f(\mathcal{R}_2), \mathcal{R}_{22} = \mathcal{R}_2 \cup f(\mathcal{R}_2) \end{aligned}$$

En general, dado cualquier sucesión  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N$  de unos (1) y dos (2) tenemos:

$$\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} = \mathcal{R}_{\sigma_1} \cap f(\mathcal{R}_{\sigma_2}) \cap \dots \cap f^N(\mathcal{R}_{\sigma_N})$$

(Está constituido de  $2^N$  bandas verticales de ancho  $\lambda^N$ ).

Afirmamos que  $\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N}$  forma una sucesión anidada de intervalos cerrados no vacíos cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Notemos también que:

$$\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} = \mathcal{R}_{\sigma_1} \cap f(\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N})$$

Por inducción podemos asumir que  $\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N}$  es un sub-rectángulo no vacío, así que  $f(\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N})$  consiste de dos rectángulos cerrados, uno en  $\mathcal{R}_1$  y el otro en  $\mathcal{R}_2$ . Luego  $\mathcal{R}_{\sigma_1} \cap f(\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N})$  es un simple rectángulo cerrado.

Estos rectángulos son anidados, porque:

$$\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} = \mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-1}} \cap f^N(\mathcal{R}_{\sigma_N}) \subset \mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-1}}$$

Por tanto concluimos que:

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} \neq \emptyset$$

Sea ahora  $\alpha$  cualquier línea horizontal tal que  $\alpha \cap Q = \emptyset$ . Denotemos por  $[a, b] = \alpha \cap Q$ .

Entonces  $[a, b] \cap f(Q)$  es dos intervalos cerrados que es obtenido de  $[a, b]$  removiendo tres (3) segmentos disjuntos.

Cuando hacemos  $[a, b] \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ , el resultado es remover 3 segmentos disjuntos de cada subintervalo de  $[a, b] \cap f(Q)$ , y así sucesivamente. Entonces  $[a, b] \cap \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)$  es un conjunto de Cantor  $K_1$ .

Luego  $\Lambda_+ = K_1 \times I$ , donde  $I$  es un intervalo vertical.

Procediendo del mismo modo, iterando negativamente  $Q$ , obtenemos:  $Q \cap f^{-1}(Q)$  es un conjunto constituido de dos rectángulos horizontales de ancho 1 y altura  $\lambda$ . De igual modo la imagen por  $f^{-1}$ , de cualquier rectángulo de altura  $d$  y ancho 1 (banda horizontal) da origen a dos bandas horizontales de altura  $\lambda \cdot d$ . De donde se desprende que  $Q \cap f^{-1}(Q) \cap \dots \cap f^{-n}(Q)$  está constituido por  $2^n$  bandas horizontales de altura  $\lambda^n$ .

Luego procedemos como en el caso anterior, y obtenemos similarmente que:

$$\Lambda_- = H \times K_2$$

donde  $H$  es un intervalo horizontal y  $K_2$  es un conjunto de Cantor.

Por tanto  $\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$  es un conjunto no vacío.

Es claro que  $f(\Lambda) = \Lambda$  i.e  $\Lambda$  es  $f$ -invariante.

Ahora, a cada punto de  $\Lambda$  asociamos una sucesión infinita de  $1'$  y  $2'$ ,  $\{a_n\}$  del siguiente modo:

$$a_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^n(x) \in \mathcal{R}_1 \\ 2 & \text{si } f^n(x) \in \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

Denotemos por  $\Sigma(2) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in \{1, 2\}\} = \prod_{-\infty}^{\infty} \{1, 2\}$  esto es

$\Sigma(2)$  es el espacio  $\prod \{1, 2\}$  con la topología producto; esta topología es metrizable, definiendo la métrica:

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|+1}} \delta_{a_n, b_n}$$

donde  $\delta_{a_n, b_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = b_n \\ 0 & \text{si } a_n \neq b_n \end{cases}$

Con esta métrica,  $\Sigma(2)$  es un espacio compacto, perfecto y totalmente desconexo; esto es  $\Sigma(2)$  es un conjunto de Cantor.

Hay un automorfismo natural "Shift" en  $\Sigma(2)$  el cual es dado por:

$$\sigma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$$

$$(\sigma(a_n))_k = a_{k+1}$$

**Teorema.**- Por otro lado, la asignación

$$\pi : \Lambda \rightarrow \Sigma(2)$$

$$x \rightarrow (a_n(x))$$

es un homeomorfismo; además el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f|_{\Lambda}} & \Lambda \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Sigma(2) & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma(2) \end{array}$$

i.e.  $\pi \circ (f|_{\Lambda}) = \sigma \circ \pi$ , luego  $\pi$  es una conjugación entre  $f|_{\Lambda}$  y  $\sigma$ . Por lo tanto, conociendo la dinámica de  $\sigma$  conoceremos la dinámica de  $f|_{\Lambda}$ .

Que  $\pi$  es un homeomorfismo resulta del hecho siguiente:

Si  $x, y \in \Lambda$  y  $d(\pi(x), \pi(y)) < \left(\frac{1}{2}\right)^k$ , entonces  $\pi(a_j(x)) = \pi(a_j(y))$ ,  $\forall j \in \{-k, \dots, k\}$  lo que implica que  $x$  e  $y$  están en la misma banda horizontal de ancho  $\lambda^k$ ; de donde se deduce que  $d(x, y) \leq \sqrt{2} \lambda^k$ .

### Corolario

Toda vecindad de  $p$  contiene infinitos puntos periódicos para  $f$ , puesto que esto sucede para  $\sigma$ .

### REFERENCIAS

- [1] Jacob Palis / Welington de Melo "Introdução aos Sistemas Dinamicos".
- [2] Jacob Palis / Floris Takeus "Homoclinic Bifurcations and Hiperbolic Dynamics".
- [3] Z. Nizecki "Differentiable Dynamics".
- [4] W. Szlenk "An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems".

---

# Aislamiento del Alcaloide *N,N*-Dimetiltriptamina de la "Chacrana"<sup>1</sup> (*Psychotria viridis* R. & P.)

Víctor Reyna Plinedo y Virginia Torpoco Carmen<sup>(\*)</sup>

---

## Resumen

De la "chacrana" (*Psychotria viridis* R. & P.), planta colectada en la amazonía peruana, se aisló la *N,N*-dimetiltriptamina. La identificación del alcaloide se realizó mediante sus espectros de masas, de RMNH y de UV.

## INTRODUCCION

De acuerdo a los curanderos de nuestra amazonía el brebaje "ayahuasca", utilizado ampliamente en sus sesiones de medicina tradicional, se prepara a partir de dos plantas básicas: tallos de la liana del mismo nombre "ayahuasca" (*Banisteriopsis caapi*) y hojas del arbusto "chacrana" (*Psychotria viridis* R. & P.) (1-4)

Los tallos de "ayahuasca" (*B. caapi*)<sup>2</sup> contienen alcaloides del tipo  $\beta$ -carbolino principalmente harmina, harmalina (dihydroharmina) y tetrahydroharmina, mientras que el principal, y en algunas muestras el único, alcaloide presente en las hojas de "chacrana" (*P. viridis*) es la *N,N*-dimetiltriptamina, DMT (1, 2), Figura N° 1.

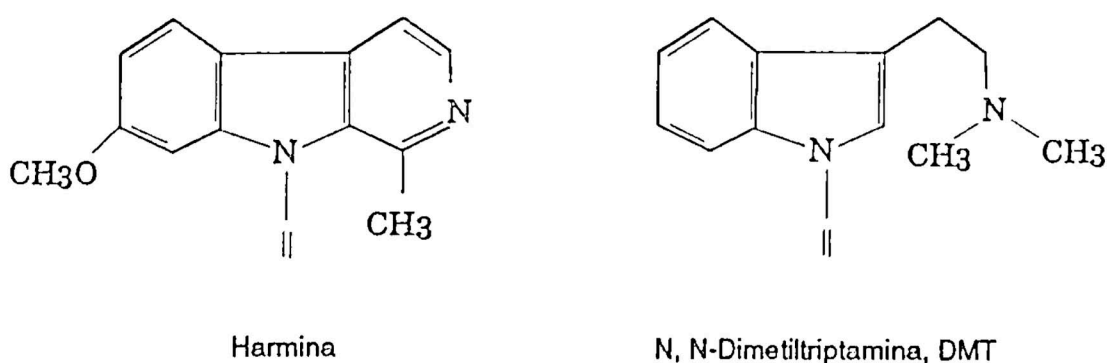


Figura N° 1. Estructuras de la harmina y de la *N,N*-dimetiltriptamina

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Química. Tema Tesis de Licenciatura en Química, sustentada el 16.12.93.

<sup>1</sup> Trabajo presentado en XVIII Congreso Peruano de Química, Lima, 12.10.93.

<sup>2</sup> *B. caapi* (Spruce ex Grisebach) Morton, sinonimias; *B. inebrians* Morton y *B. quitensis* (Niedenzu) Morton (Gates-1986, 5).

## EXTRACCION Y SEPARACION

En la bibliografía se reportan varios procedimientos generales para el aislamiento e identificación de alcaloides en general (6, 7), así como de la DMT presente en diversas plantas (1, 8, 9). En ellos se toman ventaja de las propiedades básicas de los alcaloides y de las propiedades de solubilidad diferenciada que presentan estos compuestos y sus sales para conseguir su separación de los otros tipos de compuestos orgánicos presentes en las plantas. En nuestro trabajo hemos adoptado un procedimiento similar.

El material vegetal, hojas y tallos (por separado), seco y pulverizado, se "desengrasó" con éter de petróleo (50-90°C), se basificó con solución acuosa de amoníaco al 5% y se extrajo a reflujo con etanol 96°. El extracto alcohólico se concentró por destilación simple a presión atmosférica<sup>3</sup> hasta tener unos 10 ml de extracto ("mezcla bruta orgánica"). El tratamiento de estos extractos con ácido sulfúrico diluído (para formar las sales de alcaloides), el "lavado" con solvente orgánico cloruro de metileno CH<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub>, y la subsiguiente regeneración de los alcaloides mediante la basificación de los extractos acuosos con carbonato de sodio Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>, permite la separación -mediante la extracción con cloruro de metileno- de los alcaloides. La eliminación del solvente orgánico mediante destilación simple proporciona el "extracto bruto de alcaloides", en forma de un sólido o masa resinosa de color marrón-anaranjado oscuro (Muestra N° 2A: de 150 g de hojas se obtuvieron 156 mg. - 0,10% de extracto de alcaloides).

## PURIFICACION

La purificación de los extractos de alcaloides (en total 850 mg) mediante Cromatografía en Placa Preparativa-CPP (cuatro placas de Silica Gel 60F-254; 20 x 20 cm<sup>2</sup>; 2 mm de espesor; de 150 a 250 mg de extracto por placa; eluente: Acetato de Etilo-Metanol-Amoníaco, 88:10: 2 (10); triple elución cromatográfica (11); revelador: UV<sup>4</sup> y reactivo de Ehrlich (13); alcaloide de referencia: 5-MeO-DMT) proporcionaron 122 mg de alcaloide prácticamente puro (una sola mancha por CCF, pero su espectro de RMN+H indica la presencia de impurezas).

La ulterior purificación de esta fracción mediante Cromatografía en Columna-CC (adsorbente: óxido de aluminio Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> activo neutro; eluente: 50% n-Heptano/Acetato de Etilo) proporcionan 11 mg del alcaloide.

<sup>3</sup> No disponemos de rotavapores para destilación a presión reducida.

<sup>4</sup> La DMT no presenta fluorescencia con radiación UV (12).

## IDENTIFICACION ESPECTROSCOPICA

La identificación del alcaloide se realizó mediante el análisis de sus espectros de masas, de RMN<sup>1</sup>H y de UV. Estos espectros se registraron en un espectrógrafo de masas MS50, en un espectrofotómetro de RMN<sup>1</sup>H de 200 MHz y en un espectrofotómetro de UV Hewlett Packard Modelo 8452A, respectivamente.

El alcaloide aislado de la "chacrana" (*P. viridis*) presenta las características espectrales siguientes:

**Espectro de masas:** m/e 188 (ion molecular M<sup>+</sup>, 34,4%), 143 (36,7%), 130 (22,2%), 115 (10%), 103 (7,8%) y 58 (pico base, 100%).

Los fragmentos a m/e 130 y 58 se originan por la ruptura característica que presentan los alcaloides indólicos simples (14, 15). Este espectro es similar al espectro de masas de la DMT, aislada de *Piptadenia peregrina* por Holmstedt y Lindgren (14).

**Espectro de RMN<sup>1</sup>H** (200 MHz, en CD<sub>3</sub>COCD<sub>3</sub>): δ (ppm) 2,30 (s, dos grupos N-CH<sub>3</sub>); 2,60 (t, CH<sub>2</sub>); 2,92 (t, CH<sub>2</sub>-N); 7,06 (md, H5 y H6); 7,19 (s, H2); 7,37 (d, H4) y 7,56 (d, H7).

El espectro de la DMT, aislada de la *Lespedeza bicolor*, publicado por Morimoto y Oshio (60 MHz, en CD<sub>3</sub>COCD<sub>3</sub>) (16), presenta una menor resolución.

La asignación de los desplazamientos químicos δ para los protones aromáticos H4, H5, H6 y H7 se realiza teniendo en cuenta los valores de δ del espectro de RMN<sup>1</sup>H (200 MHz, en CDCl<sub>3</sub>) para la N-metil-N-acetilriptamina, publicado por Kawanishi et al. (17); y la asignación del desplazamiento químico del protón H2 (δ = 7,19 ppm) se realiza por comparación con la señal singulete que también presenta este protón en los espectros de RMN (en CDCl<sub>3</sub>) para los alcaloides 5-OH-DMT (δ = 6,98 ppm) y 5-MeO-DMT (δ = 6,99 ppm), y de la diferencia que se observa en los desplazamientos químicos δ de dicho protón en los espectros de RMN (200MHz) del alcaloide de referencia N-metilriptamina en CDCl<sub>3</sub> (δ = 6,97 ppm) y en CD<sub>3</sub>COCD<sub>3</sub> (δ = 7,10 ppm).

**Espectro de UV:** Presenta máximos de absorción (λ<sub>max</sub>, en metanol) a 220 y 282 nm. Estos valores son iguales a aquellos obtenidos por Morimoto y Oshio, en el mismo solvente (16).

## Agradecimientos

Agradecemos a la Biol. Joaquina Albán C., (Universidad Nacional Mayor de San Marcos) por la determinación del material vegetal; al Dr. André Collet (Ecole Normale Supérieure de Lyon, Francia) y a los Drs. Françoise Kbuong-Huu y Michel Benechie (Institut de Chimie des Substances Naturelles, Gif-Sur-Yvette, Francia) por el apoyo y facilidades brindadas, durante nuestra permanencia en sus laboratorios, para la realización de la purificación cromatográfica de los extractos de alcaloides y la obtención de los espectros de Masas y de RMN; al Dr. Ramiro Castro de la Mata y a la Dra. María Salas A. (Universidad Peruana Cayetano Heredia) por la obtención del espectro UV; al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología - Concytec por el apoyo económico que permitió iniciar esta investigación.

## REFERENCIAS

- [1] Rivier, L. and J. Lindgren, *Econ. Bot.* (1972), 26, 101-129.
- [2] McKenna, D., G. Towers and F. Abbott, *J. of Ethnopharm.* (1984), 10, 195-223.
- [3] Reyna P., V., "Estudio químico de los alcaloides de la "ayabuasca" (*Banisteriopsis caapi*)", Informe presentado al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Lima, abril de 1984, pág. a5.5.
- [4] Arévalo V., G., *América Indígena* (1986), 46, 147-161.
- [5] Gates, B., *América Indígena* (1986), 46, 49-72.
- [6] Farnsworth, N. R. and K. L. Euler, *Lloydia* (1962), 25, 186-195.
- [7] Maldoni, B., *J. Chem. Ed.* (1991), 68, 700-703.
- [8] Hochstein, F. A. and A. M. Paradies, *J. Am. Chem. Soc.* (1957), 79, 5735-5736.
- [9] Fish, N., Johnson and E. C. Horning, *J. Am. Chem. Soc.* (1955), 77, 5892-5895.
- [10] Legler, G. und R. Tschesche, *Naturwiss.* (1963), 50, 94-95.
- [11] Bobbitt, J., A. Schwarting et R. Gritter, *Introduction a la Chromatographie*, 1<sup>o</sup> Ed., pág. 86-93, Gautier-Villars Ed., Paris, 1972.
- [12] Der Marderosian, A. H., H. V. Pinkley and M. F. Dobbins, *Am. J. Pharm.* (1968), 140, 137-147.
- [13] Heacock, R. and M. Mabon, *J. Chromat.* (1965), 17, 338-348.
- [14] Holmstedt, B. and J. E. Lindgren, "Chemical Constituents and Pharmacology of South American Snuffs", in: Efron, D., B. Holmstedt and N. Kline (Eds.) *Ethnopharmacological Search for Psychoactive Drugs*, 2<sup>o</sup> Ed. (c.1967), pág. 339-373, Raven Press, New York, 1979.
- [15] Hesse, M., *Indolalkaloide, Teil 1: Text*, 1<sup>o</sup> Ed., pág. 7-8, Verlag - Chemie, 1974.
- [16] Morimoto, H. und H. Osbio, *Ann.* (1965), 682, 212-218.
- [17] Kawanisbi, K., Y. Ubara and Y. Hasbimoto, *Phytochemistry* (1985) 24, 1373-1375.



---

# *El problema de la integral de Feynman*

H. G. Valqui (\*)

---

## *Abstract*

*The Schroedinger equation controls the physical system dynamics, by means of a probability amplitude function (which expresses the probability of the numerical values of the physical observables). Such function is well-determined at time  $t$  if one knows it at initial time  $t_0$ . Feynman built up a probabilistic operator- called the propagator -which if applied to the function at time  $t_0$  gives directly the corresponding function at time  $t$ . To that end, Feynman has to realize a certain "summation" considering all possible differentiable trajectories.*

*In this paper, after a short introduction, it is shown how to achieve that "summation", and it is calculated in the particular case of the free particle. After that, the Schroedinger equation is derived, as well as a formula for the approximated calculation of the propagator, when a potential function is present.*

## *Resumen*

*La ecuación de Schroedinger determina la dinámica de los sistemas físicos, por medio de una función de amplitud de probabilidad (la probabilidad de que los observables físicos tomen valores específicos). Dicha función quedará bien determinada en todo instante  $t$ , si es ella es conocida en un instante inicial  $t_0$ . Feynman construyó un operador probabilístico, llamado propagador, que aplicado a la función inicial reproduce directamente la función en el instante  $t$ . Para ello, Feynman propuso realizar una cierta "suma" sobre todas las trayectorias posibles, continuamente diferenciables.*

*En el presente trabajo, después de una introducción, se muestra la construcción de dicha "suma" y se realiza en el caso particular de la partícula libre. Luego se obtiene la ecuación de Schroedinger y se construye una fórmula para el cálculo aproximado del propagador para el caso en el potencial es no nulo.*

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.

## INTRODUCCION

Para describir la dinámica de los sistemas físicos sometidos a un potencial  $V(t, \mathbf{x})$ , la física clásica postula la existencia de una función lagrangiana.

$$L : \mathbb{R}^{1+2n} \rightarrow \mathbb{R}$$

con la cual se construye la funcional de Acción  $S$ ,

$$S(t_2, \mathbf{a}_2, t_1, \mathbf{a}_1; q) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q(t), q'(t)) \quad (01)$$

correspondiente a cada trayectoria  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que conecta a los "puntos" crono-espaciales  $(t_1, \mathbf{a}_1)$  y  $(t_2, \mathbf{a}_2)$ , previamente fijados, donde  $t_1 \leq t_2$ .

De entre todas las trayectorias posibles, que conecten los puntos indicados, sólo aquella (o aquellas) que proporcione a  $S$  un valor extremal resultará físicamente realizada (Principio de Hamilton). Tal condición extremal implica que la función  $L$  debe satisfacer la ecuación diferencial de Euler-Lagrange (cuyas soluciones son precisamente las trayectorias físicamente realizables).

En cambio, en la física cuántica, dado el potencial  $V(t, \mathbf{x})$ , se postula la existencia de:

1 > una función compleja,

$$\Phi : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{C},$$

que debería contener toda la información sobre el sistema físico en consideración;

2 > un operador diferencial espacial, llamado **hamiltoniano**, que en el caso no relativístico tiene la forma

$$H = -(\hbar^2/2m) \nabla^2 + V,$$

donde  $\nabla^2$  es el laplaciano  $n$ -dimensional y  $V$  es el potencial actuando como un operador multiplicativo (operador diagonal);  $\hbar$  y  $m$  son ciertas constantes;

3 > una ecuación diferencial, llamada **ecuación de Schroedinger**,

$$H \Phi + (\hbar/i) \partial \Phi = 0 \quad (02)$$

donde  $\partial$  es el operador de derivada temporal. Las soluciones contienen, en forma probabilística, con densidad de probabilidad igual a  $|\Phi|^2$ , toda la información sobre el sistema físico considerado.

## EL PROPAGADOR DE FEYNMAN

En la ecuación de Schroedinger, se debe conocer, en el instante  $t_0$ , la función inicial  $\Phi(t_0)$ , para obtener, en el instante  $t$ , la función  $\Phi(t)$ . Por ello, Feynman se propuso construir un operador, llamado **propagador temporal**,  $K(t, t_0)$  con  $t_0 \leq t$ , que al ser aplicado sobre el vector  $\Phi(t_0)$  lo transforme en el vector  $\Phi(t)$ ,

$$K(t, t_0) \Phi(t_0) = \Phi(t) \quad (03)$$

o, en forma desarrollada,

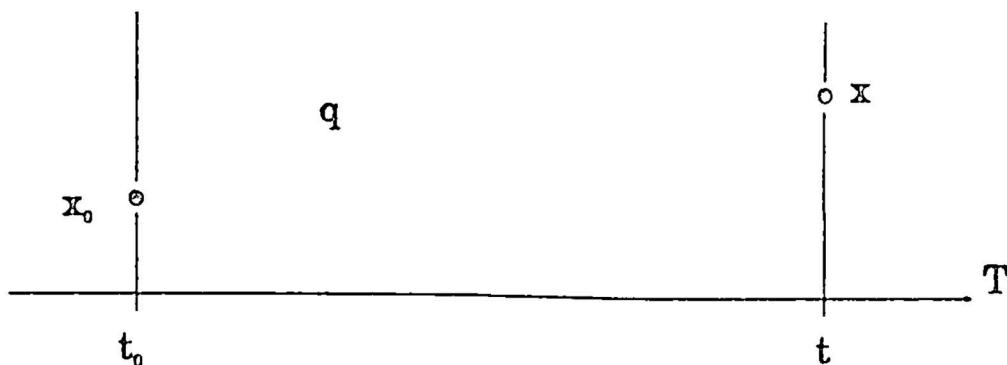
$$\int_{-\infty}^{\infty} dz K(t, x, t_0, z) \Phi(t_0, z) = \Phi(t, x)$$

(donde la integración se realiza en todo el espacio considerado. Debe notarse que la expresión anterior representa el producto de una matriz de índices continuos por un vector de índice también continuo).

El mencionado propagador debería incluir el efecto de todas las posibles trayectorias continuamente diferenciables (y no sólo de la trayectoria extremal). Con tal fin, Feynman postuló:

$$K(t, x, t_0, x_0) = \sum_q e^{(i\hbar)^{-1} S(t, t_0, x, x_0; q)} \quad (04)$$

donde la "suma" debería realizarse -de alguna manera- según todas las trayectorias continuamente diferenciables.



*Fig. 1. Una trayectoria q, que en el instante  $t_0$  parte del punto  $x_0$  para llegar, en el instante  $t$ , al punto  $x$ .*

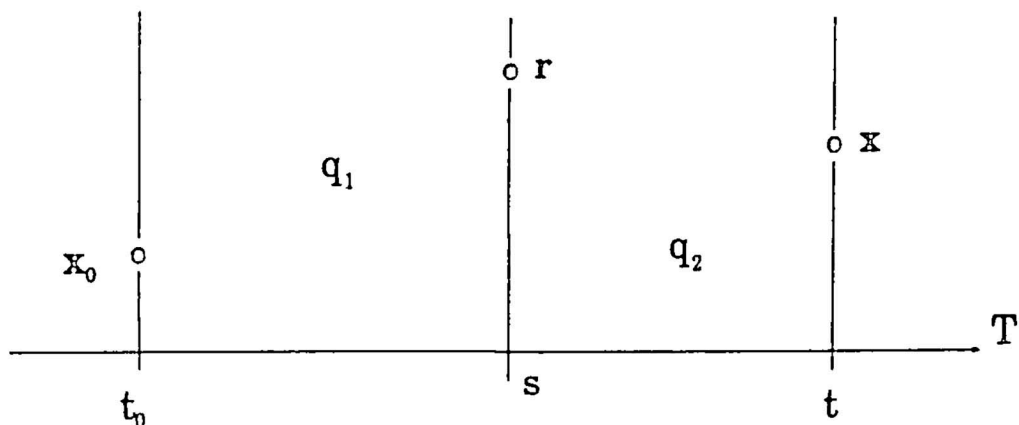


Fig. 2. Una trayectoria  $q^r$ , conecta a los puntos crono-espaciales inicial y final, pero en el instante dado  $s$ , debe pasar por el punto espacial  $r$ .

Fijemos un instante intermedio  $s$ ,  $t_0 < s < t$ , y un punto espacial  $r$ . Consideremos todas las trayectorias  $q^r$ , que conectando los puntos inicial y final pasen, en el instante  $s$ , por el punto espacial  $r$ , como se muestra en la figura 2.

Sea  $q_1$  una trayectoria cualquiera que conecta a los puntos crono-espaciales  $(t_0, x_0)$  y  $(s, r)$ ; sea  $q_2$  una trayectoria que conecta a los puntos  $(s, r)$  y  $(t, x)$ . Entonces, cualquier  $q^r$  puede ser considerada como la reunión de una cierta trayectoria  $q_1$  y una cierta trayectoria  $q_2$ . Ahora, cualquier trayectoria  $q$  puede ser obtenida eligiendo, primeramente y para un instante  $s$ , un cierto punto espacial  $r$ ; luego, eligiendo las correspondientes trayectorias  $q_1$  y  $q_2$ . Para una trayectoria  $q^r = q_1 \cup q_2$ , podemos escribir,

$$S(t, b, t_0, a; q^r) = S(t, b, s, r; q_2) + S(s, r, t_0, a; q_1)$$

y, también

$$e^{\tau \cdot S(t, b, t_0, a; q^r)} = e^{\tau \cdot S(t, b, s, r; q_2)} \cdot e^{\tau \cdot S(s, r, t_0, a; q_1)}$$

Es decir, en general, para incluir todas las trayectorias, podemos escribir,

$$\sum_q F(t, b, t_0, a; q) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \left[ \sum_{q_2} \sum_{q_1} F(t, b, s, r; q_2) \cdot F(s, r, t_0, a; q_1) \right] \quad (05)$$

Aplicando (05) a nuestro caso obtendremos,

$$K(t, x, t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dr K(t, x, s, r) K(s, r, t_0, x_0)$$

o, en forma abreviada,

$$K(t, t_0) = K(t, s) K(s, t_0) \quad (06)$$

donde s es cualquier instante intermedio.

Considerando la propiedad (06) dividamos el intervalo  $(t_0, t)$  en N subintervalos, con  $t_j = t$ ; entonces podemos escribir,

$$K(t, t_0) = \prod_{j=0}^{N-1} K(t_{j+1}, t_j) \quad (07)$$

o, también,

$$K(t, x, t_0, x_0) = \int dx_{N-1} dx_{N-2} \dots dx_1 \dots dx_0 \prod_{j=0}^{N-1} K(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j)$$

donde

$$K(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j) = \sum_{q_j} e^{(i/\hbar) S(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j, q_j)} \quad (08)$$

$$S(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j, q_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt L(t, q_j(t), q'_j(t)) \quad (09)$$

Notemos que, en principio, algunas trayectorias  $q_j$  pueden tomar, para instantes t intermedios entre  $t_j$  y  $t_{j+1}$ , valores  $q_j(t)$  muy alejados tanto de  $x_j$  como de  $x_{j+1}$ . Pero, por otra parte, teniendo presente la continuidad de las trayectorias, cuando la diferencia  $\epsilon_j = t_{j+1} - t_j$  sea muy pequeña, los valores  $x_j$ ,  $x_{j+1}$  y  $q_j(t)$  deberán ser casi coincidentes. Es decir, en tales circunstancias, todas las trayectorias  $q_j$  serán casi coincidentes. Por la continuidad de la derivada, también las velocidades  $q'_j$  serán casi coincidentes.

Ahora, para los casos en los que la función lagrangiana sea continua, y para valores de  $\epsilon_j$  suficientemente pequeños, podemos aplicar en (09) el teorema del valor intermedio,

$$S(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j; q_j) = \epsilon_j L(\theta, q_j(\theta), q'_j(\theta)), \quad t_j \leq \theta \leq t_{j+1}$$

Considerando lo argumentado anteriormente, sobre la casi coincidencia de las trayectorias y las velocidades, una buena aproximación para los valores intermedios sería,

$$\theta \approx t_j + \varepsilon_j/2, q_j(\theta) \approx (x_{j+1} + x_j)/2, q'_j(\theta) \approx (x_{j+1} - x_j)/\varepsilon_j$$

[con lo cual a todas las trayectorias entre  $(t_j, x_j)$  y  $(t_{j+1}, x_{j+1})$  les corresponde un único valor intermedio; lo mismo sucede con las velocidades]

Eligiendo, por comodidad, todos los  $\varepsilon_j = \varepsilon = (t - t_0)/N$ , podremos ensayar la aproximación (postulado de Feynman).

$$K(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j) = \sum_{q_1} e^{(i/\hbar) S_j} \approx A(\varepsilon) e^{(i\varepsilon/\hbar) L(t_j + \varepsilon/2, (x_{j+1} + x_j)/2, (x_{j+1} - x_j)/\varepsilon)}$$
(10)

donde  $A(\varepsilon)$  es un coeficiente que, por una parte, expresaría la multiplicidad de las trayectorias  $q_1$ , y por otra parte, debe permitir la existencia del límite cuando  $\varepsilon$  tienda a cero,

$$K(t, x, t_0, x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(\varepsilon)^N \int dx_{N-1} \dots dx_1 \prod_{j=0}^{N-1} e^{(i\varepsilon/\hbar) L(t_j + \varepsilon/2, (x_{j+1} + x_j)/2, (x_{j+1} - x_j)/\varepsilon)}$$
(11)

Esta es una forma general para el propagador de Feynman, donde el coeficiente  $A(\varepsilon)$  todavía es una incógnita.

## UN CASO PARTICULAR: LA PARTICULA LIBRE

Consideremos el caso de la partícula libre, donde  $V = 0$ . Entonces,

$$L(t_j + \varepsilon/2, (x_{j+1} + x_j)/2, (x_{j+1} - x_j)/\varepsilon) = (m/2) ((x_{j+1} - x_j)/\varepsilon)^2$$

Para  $\alpha = m/(2\hbar\varepsilon)$ ,  $\Gamma(\varepsilon) = \int dx_{N-1} \dots dx_1 \cdot e^{i\alpha \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)^2}$  el propagador quedará expresado por:

$$K_0(t, x, t_0, x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(\varepsilon)^N \Gamma(\varepsilon)$$
(12)

Ahora, teniendo presente la identidad algebraica

$$(1/\mu) (y - x)^2 + (x - z)^2 = (1 + 1/\mu) (x - x^0)^2 + (1/(\mu + 1)) (y - z)^2,$$

con  $x^0 = (y + \mu z)/(\mu + 1)$ , podemos escribir,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)^2 &= (x_1 - x_0^0)^2 + \sum_{j=2}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} (1 + 1/j) (x_j - x_0^0)^2 + (1/N) (x - x_0)^2 \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\Gamma(\varepsilon) = e^{i(\alpha/N)(x-x_0)^2} \prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j e^{i\alpha(1+1/j)(x_j-x_0^0)^2}$$

Pero, en el caso unidimensional, las integrales en el plano complejo (ver Apéndice) tienen la misma expresión que las integrales sobre la recta real,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ix^2} = \sqrt{i\pi/a} \quad (13)$$

entonces,

$$\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j e^{i\alpha(1+1/j)(x_j-x_0^0)^2} = \prod_{j=1}^{N-1} [i\pi \cdot j/\alpha (j+1)]^1$$

de donde,

$$\Gamma(\varepsilon) = e^{i(\alpha/N)(x-x_0)^2} \sqrt{(1/N) (i\pi/\alpha)^{(N-1)/2}}$$

lo que nos permite escribir

$$A(\varepsilon)^N \Gamma(\varepsilon) = \sqrt{(\alpha/(i\pi N))} A(\varepsilon)^N (i\pi/\alpha)^{N/2}$$

o, teniendo presente que  $N \cdot \varepsilon = t - t_0$ ,

$$A(\varepsilon)^N \Gamma(\varepsilon) = \sqrt{(m/(i2\pi h(t-t_0))} A(\varepsilon)^N (i2\pi h\varepsilon/m)^{N/2}$$

Entonces, con el objeto de que la expresión anterior tenga límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero, resulta conveniente asignar al coeficiente  $A(\epsilon)$  el valor

$$A(\epsilon) = \sqrt{(m/(i 2 \pi \hbar \epsilon))} \quad (14)$$

con lo cual, finalmente obtenemos,

$$K_0(t, \mathbf{x}, t_0, \mathbf{x}_0) = \sqrt{(m/(i 2 \pi \hbar (t - t_0))} e^{i(m/2\hbar)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2/(t - t_0)} \quad (15)$$

que es la expresión para el elemento matricial  $K_0(t, t_0)_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}$ , del propagador de la partícula libre.

## EL PROPAGADOR PARA UN POTENCIAL INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

Definiendo el operador hamiltoniano

$$H(t) = (-\hbar^2/2m) \nabla^2 + V(t),$$

donde  $V$  es un operador multiplicativo (diagonal)

$$V(t) \Phi(t) = V(t) \Phi(t)$$

la ecuación de Schroedinger puede ser escrita

$$H(t) \Phi(t) + (\hbar/i) \partial_t \Phi(t) = 0 \quad (16)$$

(donde el tiempo puede ser creciente o decreciente; si se desea que la ecuación sea válida sólo para tiempos crecientes deberá introducirse tal condición en forma explícita).

Para el caso en el que el potencial  $V$  no dependa del tiempo, escribiremos

$$H_0 = (-\hbar^2/2m) \nabla^2 + V;$$

En este caso particular se cumplirá que

$$\partial_t \Phi(t) = (-i/\hbar) H_0 \Phi(t) \Rightarrow \partial_t^n \Phi(t) = (-i/\hbar)^n (H_0)^n \Phi(t)$$

es decir,

$$e^{\tau \partial_t} \Phi(t) = e^{(-i/\hbar)\tau \cdot H_0} \Phi(t) \quad (17)$$



Por otra parte, suponiendo la analiticidad temporal de la función  $\Phi$ , al desarrollarla en su serie de Taylor obtendremos

$$\Phi(t + \tau) = [e^{\tau \cdot \partial}] \cdot \Phi(t),$$

o también

$$\Phi(t + \tau) = U(\tau) \cdot \Phi(t),$$

donde, el operador

$$U(\tau) = e^{(-i/\hbar)\tau \cdot H_0} \quad (18)$$

sólo contiene operadores espaciales. Este operador  $U(\tau)$ , debido a su efecto sobre la función  $\Phi$ , es llamado **operador de propagación temporal** (de las funciones que pertenecen al espacio de soluciones de la ecuación de Schroendiger).

Comparando este resultado con el del propagador  $K_0$ , para el caso en el que  $V$  no dependa del tiempo, podemos deducir que ambos operadores son coincidentes

$$\partial V = 0 \Rightarrow U(\tau) = K_0(t + \tau, t) \quad (19)$$

(eventualmente, para asegurar que  $K_0$  actúe sólo para tiempos crecientes, el operador  $U$  debe ser multiplicado por la función de escalón temporal).

Claro está que, entonces, los elementos de la matriz continua  $U$  serán

$$U(\tau, x, y) = K_0(t + \tau, x, t, y) \quad (20)$$

o, para  $t$  crecientes

$$\theta(\tau) \cdot U(\tau, x, y) = K_0(t + \tau, x, t, y) \quad (20a)$$

Por otra parte, ya hemos visto que para  $\tau$  suficientemente pequeño, por el postulado de Feynman (ver [10]), podemos escribir

$$U(\tau, x, y) = K_0(t + \tau, x, t, y) \approx A(\tau) e^{-\pi \cdot \Lambda(\tau)^2 \cdot (y-x)^2}$$

y también

$$\Phi(t + \tau, x) = [K_0(t + \tau, t) \cdot \Phi(t)](x) \approx A(\tau) \cdot \int dy \cdot e^{-\pi \cdot \Lambda(\tau)^2 \cdot (y-x)^2} \Phi(t, y)$$

donde, en el límite,  $\approx$  se convierte en un signo de igualdad. Cambiando la variable de integración  $y = x + z$ , con lo cual no se alteran los límites de integración

$$\Phi(t + \tau, x) \approx A(\tau) \cdot \int dz \cdot e^{-\pi \cdot A(\tau)^2 \cdot z^2} \Phi(t, x + z)$$

Al desarrollar  $\Phi(t, x + y)$  en serie de Taylor, las correspondientes potencias impares se anularán en la integración, y las potencias pares, al ser integradas producirán sumandos con coeficientes proporcionales a potencias positivas de  $\tau$  (ver apéndice). Sólo el primer sumando, después de multiplicar por  $A(\tau)$ , resulta independiente de  $\tau$ ; de manera que al pasar al límite, cuando  $\tau$  tiende a cero, se anularán todos los sumandos, excepto el primero. Es decir, obtenemos

$$\Phi(t + \tau, x) = [K_o(t + \tau, t) \cdot \Phi(t)](x) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \Phi(t, x)$$

con lo cual se verifica que

$$[K_o(t + \tau, t) = e^{(-i/\hbar)\tau \cdot H_o}]_{x,y} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \delta(x - y)$$

o, si se prefiere

$$K_o(t + \tau, t) = e^{(-i/\hbar)\tau \cdot H_o} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} I$$

es decir, en el límite como debería ser,  $K(t, t)$  se reduce a la matriz unidad.

## LA ECUACION DE SCHROEDINGER

Calculemos la derivada temporal de la función  $\Phi(t)$ . Para ello tratemos de construir la diferencia

$$\Phi(t + \varepsilon) - \Phi(t) = K(t + \varepsilon, t) \Phi(t) - \Phi(t),$$

o, en forma desarrollada

$$\Phi(t + \varepsilon, x) = \int dy K(t + \varepsilon, x, t, y) \Phi(t, y)$$

Usando la aproximación dada en [10], podemos escribir

$$\Phi(t + \varepsilon, x) \approx A(\varepsilon) \int dy e^{(i\varepsilon/\hbar) L(t + \varepsilon/2, (x+y)/2, (y-x)/\varepsilon)} \Phi(t, y)$$

Recurriendo al cambio de variable  $y = z + x$ , con lo cual no resultan afectados los límites de integración

$$\Phi(t + \varepsilon, x) \approx A(\varepsilon) \int dz e^{(i\varepsilon/\hbar) L(t + \varepsilon/2, x + z/2, z/\varepsilon)} \Phi(t, x + z)$$

Para el lagrangeano  $L(t, x, w) = (m/2) w^2 - V(t, x)$ , con el  $\alpha$  definido anteriormente, podemos escribir,

$$\Phi(t + \varepsilon, x) \approx A(\varepsilon) \int dz e^{i\alpha z^2 - i(\varepsilon/\hbar) V(t + \varepsilon/2, x + z/2)} \Phi(t, x + z) \quad (21)$$

Con el objeto de calcular la derivada temporal, basta desarrollar las funciones del segundo miembro de [21] en la primera potencia de  $\varepsilon$ . Notemos que no es necesario desarrollar el potencial, pues él ya está afectado de un coeficiente  $\varepsilon$ . Por otra parte, es claro que  $z$  tenderá a cero cuando  $\varepsilon$  tienda a cero, pero todavía ignoramos la forma cómo  $z$  depende de  $\varepsilon$ .

Ahora, desarrollemos  $\Phi$  en serie de Taylor. Entonces, considerando, por simplicidad, el caso unidimensional

$$\Phi(t, x + z) = \Phi(t, x) + z \Phi_1(t, x) + (z^2/2) \Phi_2(t, x) + \dots + z^n \mu(t, x, z)$$

Además, teniendo presente que  $\varepsilon$  es muy pequeño, podemos escribir, dentro del grado de aproximación indicado

$$e^{-i(\varepsilon/\hbar) V(t + \varepsilon/2, x + z/2)} \Phi(t, x + z) = [1 - i(\varepsilon/\hbar) V(t, x)] [\Phi + z\Phi_1 + (z^2/2) \Phi_2 + \dots]$$

donde, a la derecha aparecen  $2n + 2$  sumandos. Sólo el primero de dichos sumandos es independiente tanto de  $\varepsilon$ , como de  $z$ ,

Ahora reescribiremos la expresión (21),

$$\Phi(t + \varepsilon, x) \approx A(\varepsilon) \int dz e^{i\alpha z^2} \{ \Phi(t, x) + 2n + 1 \text{ sumandos } (\varepsilon, z) \}$$

o, realizando la integración,

$$\Phi(t + \varepsilon, x) \approx A(\varepsilon) \sqrt{(2\pi i h \varepsilon / m)} \Phi(t, x) + A(\varepsilon) \int dz e^{i\alpha z^2} \{2n + 1 \text{ sum. } (\varepsilon, z)\}$$

Aquí nuevamente podemos apreciar la conveniencia de asignar al coeficiente  $A(\varepsilon)$  el valor dado en (14). Entonces obtenemos la diferencia necesaria para la derivación temporal,

$$\Phi(t + \varepsilon, x) - \Phi(t, x) \approx A(\varepsilon) \int dz e^{i\alpha z^2} \{2n + 1 \text{ sumandos } (\varepsilon, z)\}$$

De los  $2n + 1$  sumandos aquí considerados, los que son proporcionales a las potencias impares de  $z$  se anularán al realizar la integración.

Por otro lado, para las potencias pares tenemos que (ver Apéndice),  $k = 0, 1, \dots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k+2} e^{i\alpha x^2} = i(2k+1)/(2\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k} e^{i\alpha x^2} \quad (22)$$

lo cual, teniendo presente el valor dado en (13), nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k} e^{i\alpha x^2} = (2k-1)!! \cdot (i/2\alpha)^k \cdot \sqrt{i\pi/\alpha} \sim \alpha^{-k-\frac{1}{2}} \sim \varepsilon^{k+\frac{1}{2}}$$

donde  $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ .

Después de multiplicar por  $A(\varepsilon)$  la diferencia resulta proporcional a una serie de potencias de  $\varepsilon$  con exponentes  $k = 1, 2, \dots$ . Entonces, al dividir entre  $\varepsilon$  y pasar al límite de  $\varepsilon \rightarrow 0$  sólo el primer sumando de la derecha no se anulará, quedando

$$\partial \Phi(t, x) = (-i/h) V(t, x) \Phi(t, x) - h/(2im) \Phi_2,$$

o, también

$$(-h^2/2m) \nabla \Phi(t, x) + V(t, x) \Phi(t, x) + (h/i) \partial \Phi(t, x) = 0$$

o

$$(-h^2/2m) \nabla \Phi(t) + V(t) \Phi(t) + (h/i) \partial \Phi(t) = 0 \quad (23)$$

es decir, el vector  $\Phi(t)$ , obtenido aplicando el propagador al vector arbitrario  $\Phi(t_0)$ , resulta ser solución de la ecuación de Schroedinger, correspondiente a dicho valor inicial  $\Phi(t_0)$ .

Finalmente, teniendo presente que  $\Phi(t) = K(t, t_0) \Phi(t_0)$ , podemos escribir,

$$(-\hbar^2/2m) \nabla K(t, t_0) \Phi(t_0) + V(t) K(t, t_0) \Phi(t_0) + (\hbar/i) \partial K(t, t_0) \Phi(t_0) = 0$$

donde  $\Phi(t_0)$  es un vector arbitrario; entonces, obtenemos

$$(-\hbar^2/2m) \nabla K(t, t_0) + V(t) K(t, t_0) + (\hbar/i) \partial K(t, t_0) = 0 \quad (24)$$

es decir, este propagador de Feynman también es solución de la ecuación de Schroedinger.

En la deducción anterior no se ha considerado que el operador  $K(t, t_0)$  actúe sólo para tiempos crecientes; ésta es una exigencia que es necesario imponer para garantizar su carácter probabilístico. En tal caso, considerando el caso particular en el que  $V$  no depende del tiempo, y teniendo presente (20a), la ecuación de Schroedinger toma la forma

$$(-\hbar^2/2m) \nabla K_0(t, t_0) + V \cdot K_0(t, t_0) + (\hbar/i) \partial K_0(t, t_0) = i \cdot \hbar \cdot \delta(t - t_0)$$

lo que nos permite afirmar que, también en el caso general, la ecuación que asegura el efecto "hacia el futuro" del propagador debe tener la forma

$$(-\hbar^2/2m) \nabla K(t, t_0) + V(t) \cdot K(t, t_0) + (\hbar/i) \partial K(t, t_0) = i \cdot \hbar \cdot \delta(t - t_0)$$

o, si se prefiere

$$H(t) \cdot K(t, t_0) + (\hbar/i) \partial K(t, t_0) = i \cdot \hbar \cdot \delta(t - t_0) \quad (24a)$$

## EL CASO DE PERTURBACION DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Consideremos el caso en que el hamiltoniano  $H(t)$  puede expresarse como la suma

$$H(t) = H_0 + W(t), \text{ con } H_0 = (-\hbar^2/2m) \nabla + V, \partial V = 0$$

entonces tendremos las ecuaciones

$$[H_0 + (\hbar/i) \partial] K(t, t_0) + W(t) \cdot K(t, t_0) = i \cdot \hbar \cdot \delta(t - t_0)$$

y

$$[H_0 + (\hbar/i) \partial] K_0(t, t_0) = i \cdot \hbar \cdot \delta(t - t_0) \quad (25)$$

donde  $K_0(t, t_0)$  está expresado por  $H_0$  como se ve de (18) y (20a), y lo suponemos calculable de alguna manera.

Restando las igualdades anteriores obtenemos

$$H_0 \cdot J(t, t_0) + (\hbar/i) \partial J(t, t_0) = -W(t) \cdot K(t, t_0) \quad (26)$$

donde  $J(t, t_0) = K(t, t_0) - K_0(t, t_0)$ .

Por otra parte, expresando [25] entre los instantes  $t, t_1$  y aplicando ambos miembros al producto  $W(t_1) K(t_1, t_0)$ , tendremos

$$[H_0 + (\hbar/i) \partial] K_0(t, t_1) \cdot W(t_1) \cdot K(t_1, t_0) = i \cdot \hbar \cdot \delta(t - t_1) W(t_1) K(t_1, t_0)$$

e, integrando en el intervalo  $(t, t_0)$ , obtenemos

$$[H_0 + (\hbar/i) \partial] \cdot \int_{t_0}^t K_0(t, t_1) \cdot W(t_1) \cdot K(t_1, t_0) = i \cdot \hbar \cdot W(t) K(t, t_0) \quad (27)$$

Podemos apreciar que multiplicando la ecuación [26] por  $\hbar/i$ , ella coincidirá con la ecuación [27]. Es decir, la expresión integral es una solución para  $J(t, t_0)$ . Así podemos escribir

$$K(t, t_0) = K_0(t, t_0) + (i/\hbar) \cdot \int_{t_0}^t dt_1 \cdot K_0(t, t_1) \cdot W(t_1) \cdot K(t_1, t_0) \quad (28)$$

que es una ecuación integral para  $K(t, t_0)$  en función del operador "conocido"  $K_0(t, t_0)$  y del potencial "perturbador"  $W(t)$ .

Escribamos la ecuación (28) en forma abreviada

$$K = K_0 + \langle K_0 \cdot W \cdot K \rangle \quad (28a)$$

Definamos las soluciones aproximadas

$$K^{(0)} = K_0, \quad K^{(1)} = K_0 + \langle K_0 \cdot W \cdot K^{(0)} \rangle \quad \text{y en general}$$

$$K^{(n+1)} = K_0 + \langle K_0 \cdot W \cdot K^{(n)} \rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

donde, la sucesión, si es convergente, deberá converger hacia  $K(t, t_0)$ . En forma práctica, consideraremos que la convergencia se ha obtenido cuando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas sea "suficientemente pequeña". Es decir, para un valor de  $n$  tal que

$$K^{(n+1)} - K^{(n)} \approx 0 \quad (30)$$

[Debe tenerse presente que los resultados anteriores también son válidos para el caso en el que  $W$  sea independiente del tiempo]

## APENDICE

A: En el intervalo  $(-\pi/4, 0)$  se cumple  $1 + 4\theta/\pi < \cos 2\theta$ , así mismo en el intervalo  $(0, \pi/4)$  se cumple  $1 - 4\theta/\pi < \cos 2\theta$ . Entonces, para  $a > 0$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/4$ , integrando la función  $g(z) = \exp(-a \cdot z^2)$  a lo largo de un arco de radio  $R$  obtenemos que

$$\left| \int_0^{\pm \alpha} dz g(z) \right| < (\pi/4aR) \cdot g(R) \cdot [\exp(-aR^2(4\alpha/\pi)) - 1]$$

que tiende a 0 cuando  $R \rightarrow \infty$ .

B: Integrando  $g(z)$  a lo largo del triángulo curvilíneo con vértices  $0, R, R \cdot \exp(i\alpha)$  o vértices  $0, R, R \cdot \exp(-i\alpha)$ ; luego de tomar el límite para  $R \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\int_0^{\infty} dx g(x \cdot e^{\pm i\alpha}) = [1/\exp(\pm i\alpha)] \cdot \int_0^{\infty} dx g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{(\pi/a)/\exp(\pm i\alpha)}$$

lo que, para  $\alpha = \pi/4$  da

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\alpha x^2} = \sqrt{i\pi/a}$$

C: De  $\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \cdot x^n = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \cdot (-x)^n$

podemos ver que cuando  $n$  es impar los dos miembros se diferencian sólo en el signo, luego la integral será nula.

En particular obtenemos,

$$e^{-i\alpha x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -2ia \int_{-\infty}^{\infty} dx x \cdot e^{-i\alpha x^2} = 0$$

D: Notemos que para  $p(n, x) = x^n e^{-iax^2}$  no existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(n, x)$$

En cambio, si consideramos  $z = x + i\varepsilon$ , tendremos que

$-ia z^2 = -ia(x^2 - \varepsilon^2) + a \cdot \varepsilon \cdot x$ , de donde, para  $a > 0$ , obtenemos

$$\text{si } \varepsilon < 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \lim_{x \rightarrow \infty} p(n, x) = 0$$

$$\text{si } \varepsilon > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{x \rightarrow -\infty} p(n, x) = 0$$

En este sentido escribiremos, simplemente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(n, x) = 0$

E: Para  $p(n, x) = x^n e^{-iax^2}$  obtenemos

$$p(n+1, x)' = (n+1) \cdot p(n, x) - 2ia \cdot p(n+2, x)$$

de donde, para  $n$  par, integrando, y considerando la anulación de los límites  $p(n+1, \pm \infty)$ , obtenemos

$$(n+1)/(2ia) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^n e^{-iax^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x^{n+2} e^{-iax^2}$$



---

# Movimiento de un trompo inversible (sin fricción)

Edgard Vidalon Vidalon (\*)

---

## Abstract

*This work we give some results of the TIPTOP movement over a table not rougous, where will proof numerical and analiticaling what the tiptop not to invert under the applications of the equations of Lagrange and Euler modification.*

## INTRODUCCION

El trompo inversible (llamado tip top) es un pequeño cuerpo esférico en donde se ha hecho un corte reemplazando por una colita. Este cuerpo rígido trae la atención por que cuando se hace girar alrededor de su eje de simetría (que inicialmente se encuentra en equilibrio estable) el tip top da una vuelta de 180 grados girando en la nueva posición. Todo este evento sucede cuando el tip top está sobre una superficie rugosa.

En el presente trabajo se analiza el caso en que no hay fricción, este trabajo es parte del desarrollo de mi tesis de licenciatura donde se estudia la estabilidad del movimiento del tip top (asesorado por el profesor Valqui).

## ANALISIS DEL MOVIMIENTO

Cuando no hay fricción existe dos formas de estudiar el movimiento del tip top, en el primer método se aprovecha la conservación de la energía, en el segundo método se aplica las ecuaciones modificadas de Euler, en ambos métodos las magnitudes físicas serán respecto a un observador S inercial.

### Método 1 (Ecuaciones de Lagranges)

Se tiene dos sistemas de ejes cartesianos  $X Y Z$ ,  $X_1 X_2 X_3$ , para cada sistema de ejes se construyen las bases de vectores  $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$  respectivamente (fig. 1), como se sabe a partir de estos vectores se construyen los ángulos de Euler:

$$\theta, \Psi, \Phi$$

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Física.

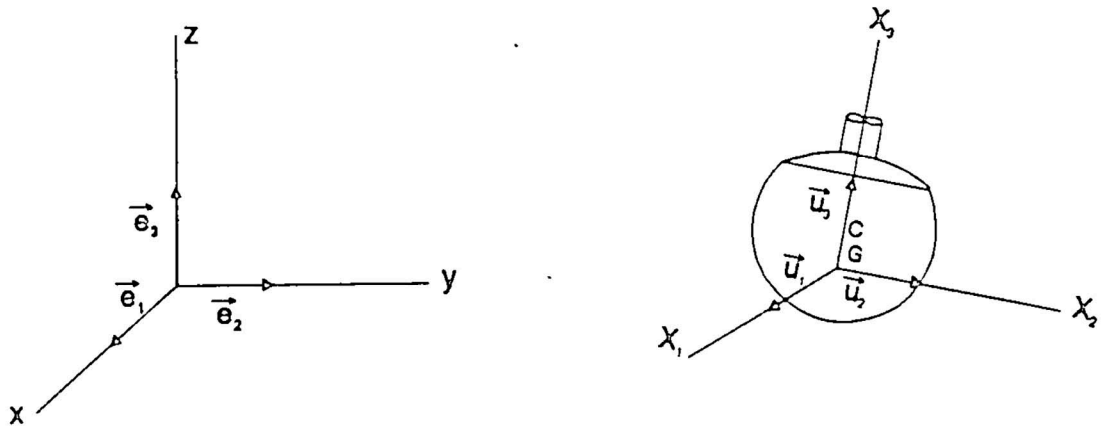


Fig.1

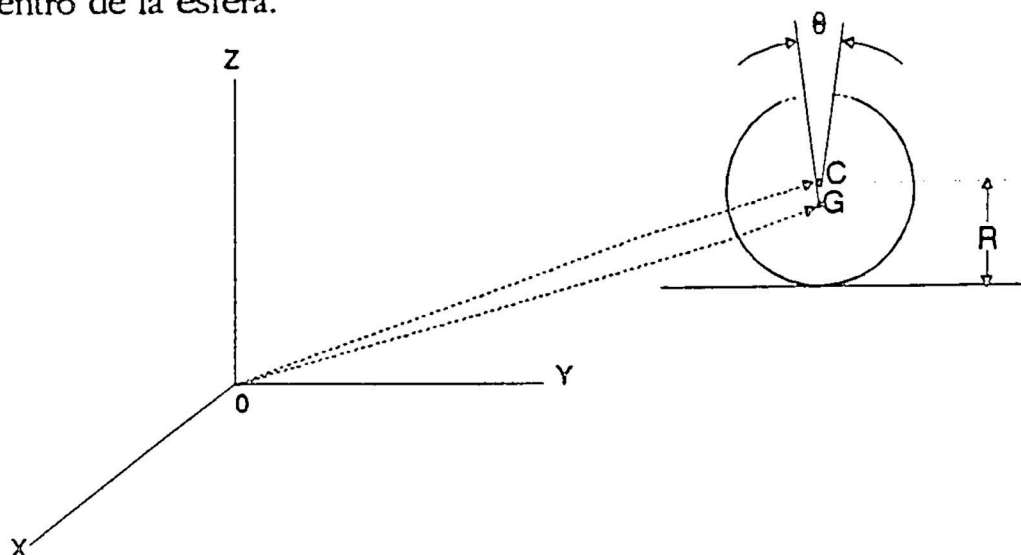
donde  $a$  es la distancia del centro de gravedad (G) al centro de la esfera

$$a = d(G,C) \quad (1)$$

El observador S usará las componentes del torque, velocidad angular, etc tanto en la base  $B_1$  como en la base  $B_2$ . En este caso:

$$x, y, \theta, \Psi, \Phi$$

son las coordenadas generalizadas, donde  $x, y$  son las coordenadas variables del centro de la esfera.



Comenzaremos buscando una ecuación que relaciona el cuadrado de la velocidad del punto G ( $V_G$ ) con las coordenadas generalizadas para esto usaremos la relación obtenida en la figura 2.

$$OG = OC - GC \quad (4)$$

$$GC = au_3 \quad (5)$$

reemplazando (5) en (4) tenemos  $OG = OC - au_3$  que derivando con respecto al tiempo tenemos:

$$OG' = OC' - au_3' \text{ pero } u_3' = Wx_3 \text{ y además } OG' = VG$$

entonces

$$V_g = OC' - aWx_3 \quad (6)$$

en el curso de mecánica teórica se tiene las componentes de  $W$  en la base  $B_2$  función de los ángulos de euler y de sus derivadas, además se tienen las ecuaciones que relacionan los vectores de la base  $B_1$  con la base  $B_2$  usando estas relaciones obtenemos:

$$V_g^2 = X^2 + Y^2 - 2aX' \frac{d}{dt} (\sin \theta \sin \phi) + 2ay' \frac{d}{dt} (\sin \theta \cos \phi) + a^2 (\phi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2)$$

además la energía cinética del cuerpo está dado por:

$$E_k = mV_G/2 + I_1 (W_1^2 + W_2^2) / 2 + I_3 W_3^2 / 2 \quad (10)$$

y la energía potencial es

$$E_p = mgz_g \quad (11)$$

donde

$$z_g = R - a \cos \theta \quad (12)$$

obtenida de la figura 2.

Con estos obtenemos la función de Lagrange:

$$L = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 - 2ax' (\sin \theta \sin \phi)' + 2ay' (\sin \theta \cos \phi)' + a^2 (\phi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2)) + \&$$

donde

$$\& = I_1 (\phi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2) / 2 + I_3 (\phi' \cos \theta + \Psi')^2 / 2 - mg (r - a \cos \theta) \quad (13)$$

se observa que la función de Lagrange no depende de  $x$  por lo tanto su derivada parcial respecto a  $x'$  es una constante que llamaremos  $A_1$  por lo tanto

$$x = a \sin \theta \sin \phi + A_1 t + B_1 \quad (14)$$

de la misma manera encontramos

$$y = -a \sin \theta \cos \phi + A_2 t + B_2 \quad (15)$$

donde  $B_1, B_2$  son constantes.

Mediante (14) y (15) y usando la ecuación de Lagrange para  $\phi$  se tiene

$$(1 \operatorname{sen}^2 \theta + l_3 \cos^2 \theta) \phi' + \Psi' l_3 \cos \theta = A_3 \quad (16)$$

con  $A_3$  como constante, desarrollando la ecuación de Lagrange para  $\Psi$  tenemos

$$l_3 (\phi' \cos \theta + \Psi') = A_4 \quad (17)$$

de (15) y (17) obtenemos  $\phi'$ ,  $\Psi'$  en función de  $\theta$

$$\phi' = (-A_4 \cos \theta + A_3) / (1 \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (18a)$$

$$\Psi' = A_4 / l_3 - (A_3 - A_4 \cos \theta) \cos \theta / (1 \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (18b)$$

con  $\theta$  diferente de 0. Desarrollando la ecuación de Lagrange para  $\theta$  tenemos mediante (18)

$$\theta'^2 + G(\theta) = 0 \quad (19)$$

donde

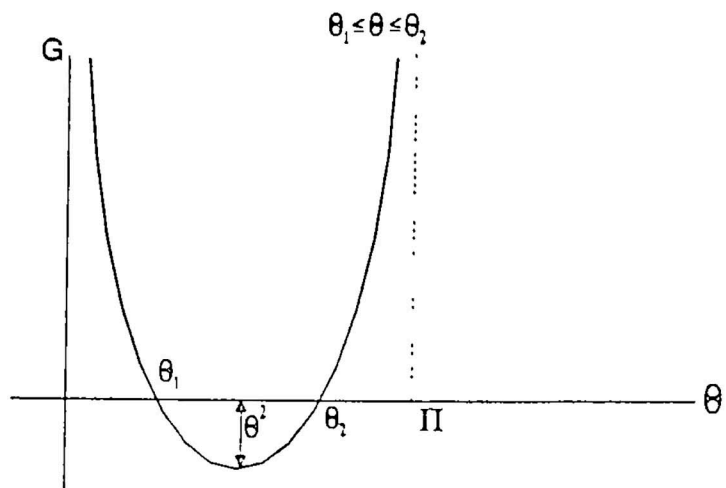
$$G(\theta) = G_1(\theta) / G_2(\theta) \quad (20)$$

con

$$G_1(\theta) = (A_3 - A_4 \cos \theta)^2 - (A_5 + 2 m a g \cos a \theta) 1 \operatorname{sen}^2 \theta \quad (21)$$

$$G_2(\theta) = (1 + m a^2 \operatorname{sen}^2 \theta) (1 \operatorname{sen}^2 \theta) \quad (22)$$

la ecuación (19) es semejante a la que se encuentra cuando se estudió el trompo simétrico. Por esta razón a la función (20) la llamaremos potencial efectivo. De la figura 3 observamos que los únicos valores que el ángulo  $\theta$  puede tener son aquellos  $G(\theta) \leq 0$  por lo tanto



El ángulo  $\theta$  se puede encontrar resolviendo numéricamente la ecuación (19), de esta ecuación tenemos:

$$\theta' = k \sqrt{-G(\theta)} \quad (23)$$

El valor de  $K = \pm 1$  el signo será positivo si  $\theta'(0) > 0$ , en este caso  $\theta$  crece hasta un valor máximo  $\theta_2$ , luego el ángulo  $\theta$  decrecerá hasta un mínimo  $\theta_1$  ( $K = -1$ ) luego crecerá y así sucesivamente, por lo tanto la función  $\theta(t)$  es periódica.

### Método 2 (Ecuación modificada de Euler)

En este caso se usa una nueva base de vectores:

$$B_2 = \{e_n, e_{n'}, u_3\} \quad (24)$$

donde  $e_n$  es paralelo a la línea de nodos y  $e_{n'}$  perpendicular a  $e_n$  y  $u_3$ . Usando las componentes del torque ' $\Gamma$ ' (respecto al centro de gravedad) respecto a la base  $B_2$  se demuestra las siguientes 3 ecuaciones diferenciales no lineales de orden 2:

$$\Gamma_n = I \theta'' + I_3 \Psi' \phi' \sin \theta + (I_3 - I) \phi'^2 \sin \theta \cos \theta \quad (25.1)$$

$$\Gamma_{n'} = I \phi'' \sin \theta + (2I - I_3) \phi' \theta' \cos \theta - \theta' \Psi' I_3 \quad (25.2)$$

$$\Gamma_{n_3} = (\phi'' \cos \theta - \phi' \theta' \sin \theta + \Psi'') I_3 \quad (25.3)$$

donde se tiene

$$\Gamma_G = \Gamma_n e_n + \Gamma_{n'} e_{n'} + \Gamma_{n_3} u_3 \quad (26)$$

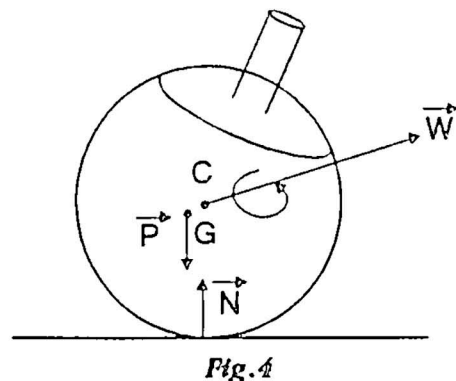
para demostrar la ecuación 25 se usa el concepto de vector de inercia. En esta situación las fuerzas que actúan son el peso  $P$  y la normal  $N$  de la figura 4 tenemos los torques:

$$\Gamma_G^P = 0 \quad (27)$$

$$\Gamma_G^N = GT \times N \quad (28)$$

por lo tanto

$$\Gamma_G = GT \times N \quad (29)$$



Para encontrar la normal en función de los ángulos de Euler se aplica la segunda ley de Newton en el eje Z:

$$mz'' = N - mg \quad (30)$$

donde m es la masa del Tip Top.

Pero de la figura 2 se tiene  $z = R - a \cos \theta$  que reemplazando en (30) se tiene:

$$N = mg + ma\theta'' \sin \theta + ma\theta'^2 \cos \theta \quad (31)$$

usando un poco de álgebra podemos expresar  $\Gamma_T$  y  $e_3$  en base  $B_2$  efectuando operaciones

$$\Gamma_n = -a m \sin \theta (g + a\theta'' \sin \theta + a\theta'^2 \cos \theta) \quad (32)$$

$$\Gamma_n \cdot = 0 \quad (33)$$

$$\Gamma_{u_3} = 0 \quad (34)$$

al reemplazar estas relaciones en las ecuaciones (25) se tiene un sistema de 3 ecuaciones diferenciales no lineales, para resolverlo se hace el cambio de variable:

$$x_1 = \theta \quad x_4 = x_1' = \theta'$$

$$x_2 = \Psi \quad x_5 = x_2' = \Psi'$$

$$x_3 = \phi \quad x_6 = x_3' = \phi'$$

con esto se transforman el sistema anterior en un conjunto de 6 ecuaciones diferenciales no lineales de orden 1:

(con  $x_1$  distinto de 0)

$$x_1' = x_4 \quad (35)$$

$$x_2' = x_5 \quad (36)$$

$$x_3' = x_6 \quad (37)$$

$$x_4' = F_1(x)/F_2(x) \quad (38)$$

donde

$$F_1 = (I - I_3) X_6^2 \text{sen } x_1 \cos x_1 - I_3 x_5 x_6 \text{sen } x_1 - a m \text{sen } x_1 (g + ax_4^2 \cos x_1) \quad (39)$$

$$F_2 = I + a^2 m \text{sen}^2 x_1$$

$$x_5' = x_4 x_6 \text{sen } x_1 - (I_3 x_4 x_5 + (I_3 - 2I) x_4 x_5 \cos x_1) \cos x_1 / (I \text{sen } x_1) \quad (41)$$

$$x_6' = (I_3 x_4 x_5 + (I_3 - 2I) x_4 x_6 \cos x_1) / (I \text{sen } x_1) \quad (42)$$

que son de la forma

$$x_k' = F_k(x_k, t) \quad (35)$$

que se resolvió mediante el método de Runge-kutta.

## RESULTADOS NUMERICOS

Considerando un Tip Top de las siguientes características:

masa =  $m=0,015$  Kg

distancia del centro de gravedad al centro de la esfera  $a = 0,005$  m

momentos de la inercia  $I = I_3 = 0,00000375$  Kgm<sup>2</sup>

radio del tip top  $R = 0,025$  m

se resolvió numéricamente el sistema de 6 ecuaciones y la ecuación (19) encontrando (como el resultado más interesante) el valor de  $\theta$  máximo obtenido con los 2 métodos para distintas condiciones iniciales, algunos resultados se muestra en la tabla siguiente:

$\theta_0$ (en grados)	$\theta'_0$ (rad/seg)	$\Psi^1$ (rad/seg)	$\theta_{MAX}$ (1)	$\theta_{MAX}$ (2)
5,73	0,1	100	5,7433	5,7469
5,73	1	100	6,2335	6,2167
5,73	10	100	13,375	13,419
5,73	100	100	89,197	91,192
1,00	0,1	10	5,114	5,144
1,00	0,01	10	1,1242	1,124
1,00	0,01	20	1,1195	1,120
1,00	0,01	200	1,0415	1,041
1,00	1,00	20	46,236	46,266
1,00	5,00	100	79,194	79,195

donde  $\theta_0, \theta$  máximos están en grados sexagesimales.

## *Conclusiones y observaciones*

1) Usando las ecuaciones de Lagrange se encontró semejanza (entre ellas para el ángulo  $\theta$ ) con las ecuaciones que se tienen cuando se estudia el movimiento del trompo simétrico esto ocurre debido a que ambos movimientos considera que la energía mecánica se conserva. Es decir no se considera la fuerza de fricción. En ambos movimientos se construye una ecuación para el ángulo  $\theta$  y se demuestra (a partir de esta ecuación): que necesariamente  $\theta$  está limitado por un valor mínimo  $\theta_{\min}$  y un máximo  $\theta_{\max}$ . La diferencia de estas ecuaciones diferenciales, consiste que para el tip top el segundo miembro es 0 y en el caso del trompo simétrico es una constante distinto de cero. Pero en ambos casos el  $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$  dependen de las condiciones iniciales.

2) Una comprobación de la conclusión anterior es que también se encuentra entre 2 valores al resolver las 3 ecuaciones ordinarias (obtenidas al usar las ecuaciones modificadas de Euler) numéricamente con condiciones iniciales.

3) De la tabla anterior donde se muestra los  $\theta_{\max}$  (encontrados con ambos métodos) podemos confirmar que ambos son consistentes.

4) La más importante conclusión es la siguiente: que para valores pequeños de  $\theta'$  ( $\theta' < 10$  rad/seg =  $573^\circ$ /seg) el trompo no se invierte a pesar de la enorme velocidad  $\Psi'$  (que físicamente es la rapidez inicial alrededor del eje de simetría), en el caso que hay fricción (con las mismas condiciones iniciales) el tip top se pone de cabeza esto muestra que es la fricción la causante de la inversión. Esto es fácil de comprobar experimentalmente al hacer girar el tip top en una superficie con aceite para evitar la fricción y se observa que la colita del tip top no se invierte solo oscila su eje.

5) Algunas de las ecuaciones mencionadas en el coloquio serán probadas con mayor detalle cuando se publique la tesis a la cual este trabajo pertenece.

## **BIBLIOGRAFIA**

- [1] *Mechanics* (2ª edición) por Symon.
- [2] Coben Richard *Am. J. Física* 45, 12 (1977).
- [3] W. A. Pliskin, *Am. J. Física* 22, 28 (1952).



---

# Series de Fourier y sus aplicaciones en la Instrumentación

Fernando Camino M. <sup>(\*)</sup>

---

## Abstract

*The uninterruptable power supply (UPS) gives energy to equipments that need excellent quality of tension. For example, medical instrumentation, nuclear instrumentation, etc.*

*Uninterruptable power supplies using the technique of filtering high order harmonics from a square wave, give good quality of tension at a high cost. Using the technique of sinusoidal modulation of a high frequency triangular wave we can reduce dramatically the cost of the power supply, maintaining high quality of tension (voltage).*

*This work details the mathematics behind this technique, using Fourier series and some computer numerical methods.*

## LAS FUENTES DE ALIMENTACION ININTERRUMPIDAS CONVENCIONALES

Un sistema de alimentación ininterrumpida (abreviado SAI), se considera de buena calidad cuando cumple con una distorsión total de armónicos menor o igual a 5%. La distorsión total de armónicos (DTH), se define como:

$$DTH = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} a_k^2} \quad (1)$$

Las SAI comunes, filtran los armónicos altos de una onda cuadrada (ver Fig. 1) con el fin de aproximarla lo mejor posible a una señal sinusoidal.

Un desarrollo en series de Fourier de esta onda cuadrada nos arroja los siguientes resultados:

$$V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(k\omega t) \quad (2)$$

donde

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 4D/\pi k & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \quad (3)$$

---

<sup>(\*)</sup> UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.

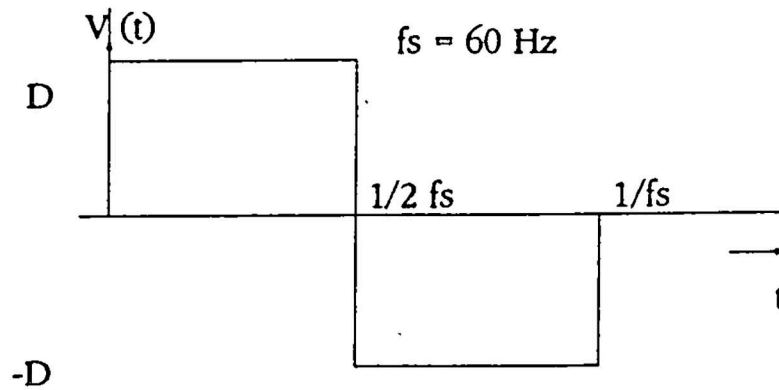


Figura 1

Las amplitudes de los armónicos están dadas por la siguiente tabla:

Armónico	Varlos como % del fundamental
3ro	33 1/3%
5to	20 %
7mo	14 %
.	.
.	.
.	.

Tabla 1.- Valor de las amplitudes de los armónicos como porcentaje de la amplitud de la fundamental para una onda cuadrada.

Para cumplir con la condición de una DTH menor o igual al 5%, tenemos la necesidad de filtrar desde el tercer armónico en adelante (ver Tabla 1). Como consecuencia se hace necesario el uso de filtros de grandes reactancias y capacidades en cascada para disminuir la aportación de cada armónico. Esto trae consigo el aumento del tamaño y del costo del SAI.

Una alternativa a este problema la proporciona la técnica de modulación sinusoidal de una onda triangular de alta frecuencia.

#### LA TECNICA DE MODULACION SINUSOIDAL DE UNA ONDA TRIANGULAR DE ALTA FRECUENCIA (TMSOTAF)

Los SAI que utilizan la TMSOTAF, envían a la etapa de potencia y de filtrado un tren de ondas que es el resultado de la comparación de una onda sinusoidal (de 60 HZ) con una onda triangular de alta frecuencia (en la práctica 7680 Hz). La Fig. 2 muestra estas señales. El resultado de esta comparación

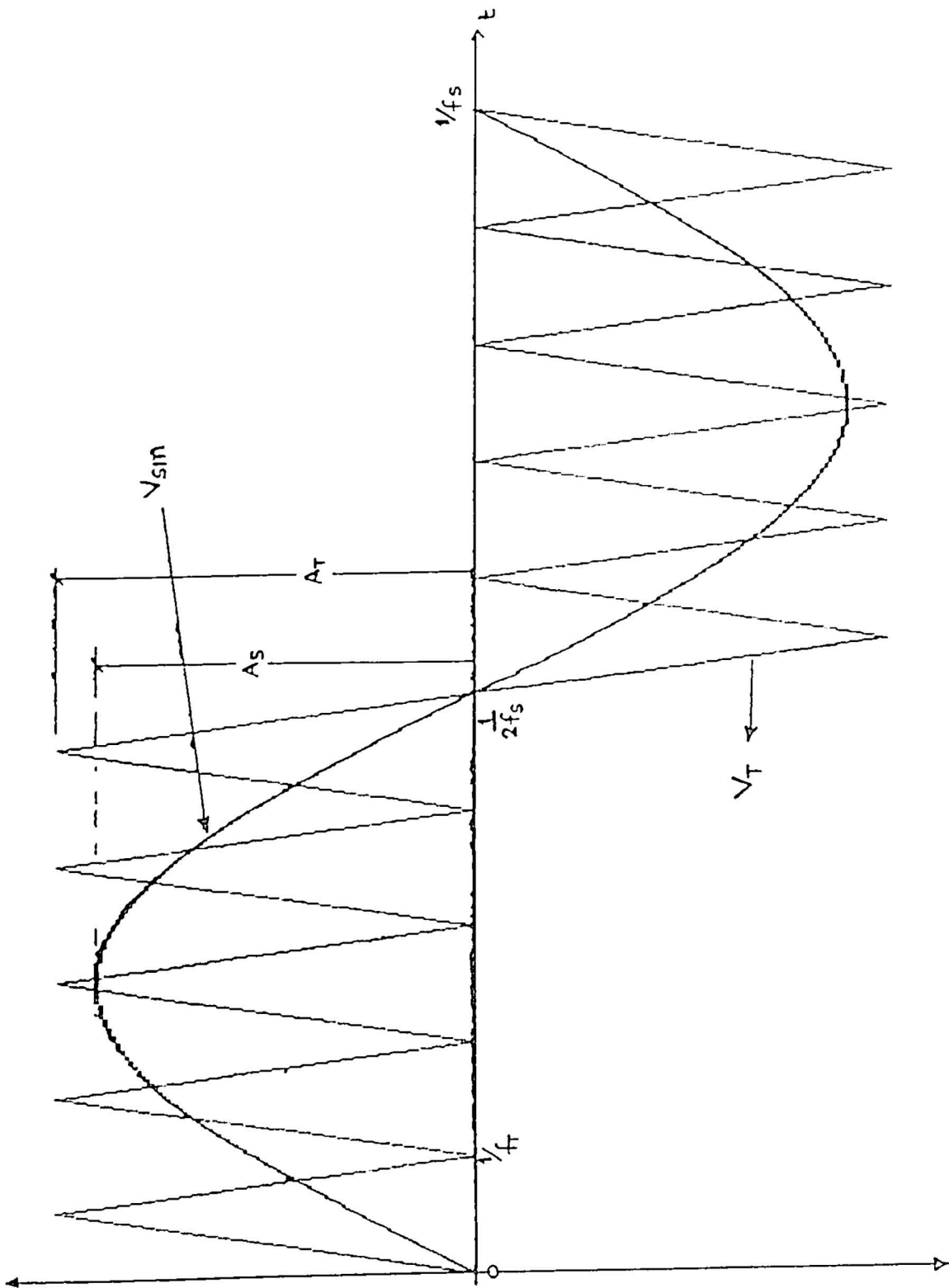


Fig. 2



se muestra en la Fig. 3. Esta comparación se efectúa por medio de circuitos electrónicos, cuyo resultado (onda de la Fig. 3) se expresa matemáticamente por la relación siguiente:

$$V_{\text{out}}(t) = \begin{cases} V_B & \text{si } V_{\text{sin}}(t) \geq V_T(t) \\ 0 & \text{si } V_{\text{sin}}(t) < V_T(t) \end{cases} \quad (4)$$

esto siempre que  $0 \leq t \leq 1/2 f_e$  (el análisis en este semiperiodo es suficiente ya que el otro semiperiodo es el reflejo del primero con respecto al eje t).

Utilizar una onda tal como la de la Fig. 3 (descrita por la ec. (4)) presenta las siguientes ventajas:

a) La TMSOTAF presenta una importante mejora en la disminución de armónicos comparativamente con la onda cuadrada.

b) La cancelación es mayor cuanto menor sea la relación  $A_T/A_e$ , que óptimamente debe de aproximarse a la unidad.

c) El aumento de la relación  $f_r/f_e$  disminuye enormemente el contenido de los armónicos más bajos ( $3^{\text{ro}}$ ,  $5^{\text{to}}$ ,  $7^{\text{mo}}$ , etc.) y por lo tanto reduce ostensiblemente el tamaño del filtro.

Con el fin de comprobar teóricamente las ventajas arriba mencionadas (ventajas que se observan en la práctica), no cabe duda que el único camino es el de desarrollar la serie de Fourier de la onda descrita por la ec. (4).

## DESARROLLO DE FOURIER DE LA ONDA DE SALIDA DE LA TMSOTAF

La función sinusoidal de la Fig. 2 tiene por ecuación:

$$V_{\text{sin}}(t) = A_s \text{ sen } (\omega t) \quad (5)$$

donde  $\omega = 2\pi f_e$ .

La función triangular de la Fig. 2 puede expresarse matemáticamente por la siguiente ecuación:

$$V_T(t) = \begin{cases} 2 A_T (N f_s t - M) \frac{\text{sen}(wt)}{|\text{sen}(wt)|} & \text{si } t \in \left[ \frac{M}{N f_s}, \frac{2M+1}{2 N f_s} \right] \\ 2 A_T (M+1 - N f_s t) \frac{\text{sen}(wt)}{|\text{sen}(wt)|} & \text{si } t \in \left[ \frac{2M+1}{2 N f_s}, \frac{M+1}{N f_s} \right] \end{cases} \quad (06)$$

donde:

$$\begin{aligned} N &= f_r/f_c, N \text{ par.} \\ M &= \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \\ 0 &\leq t \leq 1/f_c \end{aligned}$$

Observando la Fig. 2, vemos que los puntos de intersección de las funciones  $V_T$  y  $V_{\text{sin}}$  determinan los intervalos en los cuales la función modulada  $V_{\text{out}}$  cambia de valor.

El valor de estos puntos sólo puede encontrarse por métodos numéricos.

Para  $0 \leq t \leq 1/(2f_c)$  existen  $N$  intersecciones que llamaremos  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Calculemos los  $t_i$ .

En los intervalos  $[2M/C, (2M+1)/C]$ , busquemos cuando

$$V_{\text{sin}}(t) = 2 A_T (N f_s t - M)$$

En los intervalos  $[2M+1/C, 2(M+1)/C]$ , busquemos cuando

$$V_{\text{sin}}(t) = 2 A_T (M+1 - N f_s t)$$

donde  $C = 2Nf_c$ :  $M = \{0, 1, \dots, (N/2 - 1)\}$

En los intervalos señalados encontramos los valores de  $t_i$  utilizando el método Newton-Raphson o el Half-Interval Search.

Por ejemplo con los siguientes datos:  $A_T = 5 \text{ V}$ ,  $A_c = 4 \text{ V}$ ,  $f_c = 60 \text{ Hz}$  y  $N = 10$ ; las intersecciones tienen como valores:

$i$	$t_i$ ( $10^{-3} \text{ seg}$ )
1	0
2	1,34
3	2,15
4	2,76
5	4,00
6	4,33
7	5,57
8	6,18
9	6,99
10	8,33

Tabla 2

Utilizando los valores de las intersecciones, la función de salida se puede escribir (siempre  $0 \leq t \leq 1/2f_c$ ):

$$V_{\text{out}}(t) = \begin{cases} V_B & \text{si } t \in \langle t_{2(i+1)}, t_{2(i+1)+1} \rangle \\ 0 & \text{si } t \in [t_{2i+1}, t_{2(i+1)}] \cup [t_{2(i+1)+1}, t_{2(i+2)}] \end{cases} \quad (7)$$

donde  $i = \{0, 1, 2, \dots, N/2 - 2\}$ .

Procedamos a efectuar el desarrollo de Fourier de  $V_{\text{out}}$  dada en la ecuación (7).

$$b_k = \frac{2}{\frac{1}{2f_s}} \int_0^{\frac{1}{2f_s}} V_{\text{out}}(t) \text{sen}(k\omega t) dt$$

$$b_k = 4 f_s V_B \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2} \int_{t_{2(i+1)}}^{t_{2(i+1)+1}} \text{sen}(k\omega t) dt \quad (8)$$

$$b_k = \frac{2 V_B}{\pi k} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2} (\cos(k\omega t_{2(i+1)}) - \cos(k\omega t_{2(i+1)+1}))$$

Se observa además que  $V_{out}$  es simétrica con respecto a la recta  $t = 1/(4f_c)$ , luego los coeficientes de Fourier se pueden escribir según la ec. (9), donde  $t_{N+1-i}$  es el simétrico de  $t_i$  con respecto al punto  $t = 1/(4f_c)$ .

$$b_k = \frac{2 V_B}{\pi k} \sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} (\cos(k\omega t_i) - \cos(k\omega t_{N+1-i})) (-1)^i \quad (9)$$

Además por simetría, se cumple que,

$$\omega t_{N+1-i} = \pi - \omega t_i$$

Entonces,

$$b_k = \frac{2 V_B}{\pi k} \sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} (\cos(k\omega t_i) - (-1)^k \cos(k\omega t_i)) (-1)^i \quad (10)$$

Si  $k$  es par, entonces  $b_k = 0$ .

Si  $k$  es impar, se tiene

$$b_k = \frac{4 V_B}{\pi k} \sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} (-1)^k \cos(k\omega t_i) \quad (11)$$

Con esta última relación podemos encontrar (previamente conocidas las intersecciones  $t_i$ ) las amplitudes de los armónicos del desarrollo en serie de Fourier de  $V_{out}$ . Con estos valores podemos corroborar (utilizando algunos programas simples) las ventajas enunciadas en el punto 2, líneas arriba.

*Los programas necesarios para las demostraciones, así como el diseño electrónico de SAI (utilizando el microprocesador Z80), están a disposición de los interesados. Favor escribir a:*

*Fernando Camino M.*

Las Magnolias 601 - Residencial San Felipe

Lima 11 - Perú

#### REFERENCIAS

- [1] J. M<sup>o</sup> Angulo; *Microprocesadores, Curso sobre aplicaciones en Sistemas industriales*; Paraninfo S.A.; 1985.
- [2] *Electrónica Industrial*; Editorial Marcombo.
- [3] Shun S. Kuo; *Computer Applications on Numerical Methods*; Addison-Wesley Publishing Company; 1971.
- [4] E. Butkov; *Mathematical Physics*; Addison-Wesley Publishing Company, 1968.



---

# Nuevo uso de la coca: Vino de coca

Gladys Escobedo Torres y Otilia Acha de la Cruz <sup>(1)</sup>

---

## INTRODUCCION

La coca, mundialmente conocida, ha sido considerada como una planta dañina para la salud y como aquello que destruye al hombre. Se ha tratado de erradicarla, pero su fortaleza y antigüedad de más de 2000 años no lo ha permitido, formando parte aún de la cultura autóctona.

Actualmente por investigaciones científicas realizadas, se sabe que esta planta al contrario de ser dañina, es beneficiosa para la salud cuando se encuentra descocainizada; debido a la gran cantidad de constituyentes químicos que presenta (proteínas, taninos, Na, K, Ca, P, vitaminas, silicatos, etc.).

Es por esta razón que hemos buscado una nueva manera de usarla, aprovechando las virtudes que presenta. De este modo hemos visto la posibilidad de formular un vino de coca, que sirva para el consumo humano sin provocar efectos dañinos para la salud.

El término vino se aplicó en el pasado al zumo fermentado de las uvas, sin embargo actualmente se llama vino al zumo fermentado de muchas frutas, y también se emplea este término al zumo de fermentación alcohólica de materias vegetales que contienen azúcares, ya sean mono o di-sacáridos.

## DEFINICION

**Vino natural.-** El vino natural es considerado como el producto fabricado por la fermentación alcohólica normal del zumo de uvas sanas, maduras, sin adicción ni abstracción, excepto las que puedan ocurrir en el tratamiento de bodega para su clarificación y envejecimiento.

**Vino.-** Producto fabricado a partir del zumo de uvas sanas y maduras por fermentación completa del mosto, bajo un tratamiento adecuado de bodega y corregido por la adición de una solución de agua y azúcar al mosto o al vino para corregir las deficiencias naturales, siempre que estas adiciones no aumenten el volumen del producto resultante más de 35% y que el producto no contenga más del 13% de alcohol después de la fermentación completa.

---

<sup>(1)</sup> UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Química.

**Vino de frutas.**- Bebida proveniente de frutos frescos distintos de la uva, sometidos a la fermentación alcohólica y que han sufrido procesos semejantes a los exigidos para los vinos. La cantidad de azúcar agregada para la elaboración de estos vinos depende del contenido natural de azúcar en los frutos.

**Vino de hierbas y bortalizas.**- Son vinos fortificados (encabezados) secos o dulces a los que se agregan hierbas o extractos de hierbas. Las hierbas en el vino deberán ser perceptibles, pero no habrá de predominar el olor de ninguna de ellas.

### **Clasificación**

Los vinos pueden clasificarse según el lugar de producción, color, contenido de alcohol, métodos de producción o variedad del fruto o de la vid. Por ejemplo pueden clasificarse según el contenido de alcohol:

- Vinos con menos de 14% de alcohol, se clasifican como vinos de mesa, porque normalmente se consumen con las comidas.
- Vinos con más de 14% de alcohol, se les denomina vinos de postre o aperitivos, porque se consumen ordinariamente antes o después de las comidas.

Se los puede clasificar también teniendo en cuenta la coloración:

- Vinos tintos, son los vinos obtenidos por fermentación del mosto proveniente de uvas tintas, en contacto con los orujos.
- Vinos blancos, son los vinos de color pajizo, pajizo verdoso o amarillento más o menos dorado, obtenidos por la fermentación del mosto de uvas blancas, o a partir del mosto blanco de uvas de ollejo rosado o tinto elaborado con precauciones especiales.
- Vinos rosados o claretos, son los vinos de color rojo poco intenso obtenidos por fermentación del mosto de uvas tintas y blancas, que han estado muy poco tiempo en contacto con los orujos.

Por su contenido de azúcares reductores los vinos pueden clasificarse en:

- Vinos secos, son aquellos cuyo contenido de azúcares reductores es menor de 5 g/l.
- Vinos abocados, son aquellos cuyo contenido de azúcares reductores están entre 5-6 g/l.
- Vinos dulces, son aquellos cuyo contenido de azúcares reductores es mayor de 60 g/l.

## Clasificación de vinos a los que se han agregado hierbas

### *Con color rojo:*

- Tipos de marca. Incluyen ciertos vinos que contienen quinina.

### *Sin color rojo:*

- Secos o casi secos. Vermut seco o tipo francés.
- Dulces (ordinariamente con sabor a moscatel).
- Vermut dulce o tipo italiano.
- Tipos de marca. Vinos de postre aromatizados con hierbas.
- Tipos medicinales.

## FORMULACION

Son muchas las fórmulas que se dan en los recetarios industriales, pero ninguna de ellas dan recetas completas. Entre las formulaciones encontradas tenemos:

a.	Hojas de coca pulverizada .....	100 p
	Vino de Jerez .....	1000 p
b.	Hojas de coca pulverizada .....	50 p
	Vino de Jerez .....	950 p
	Azúcar .....	50 p
c.	Extractos fluido de coca .....	5 p
	Vino de Jerez .....	95 p

## TECNOLOGIA DEL PROCESO

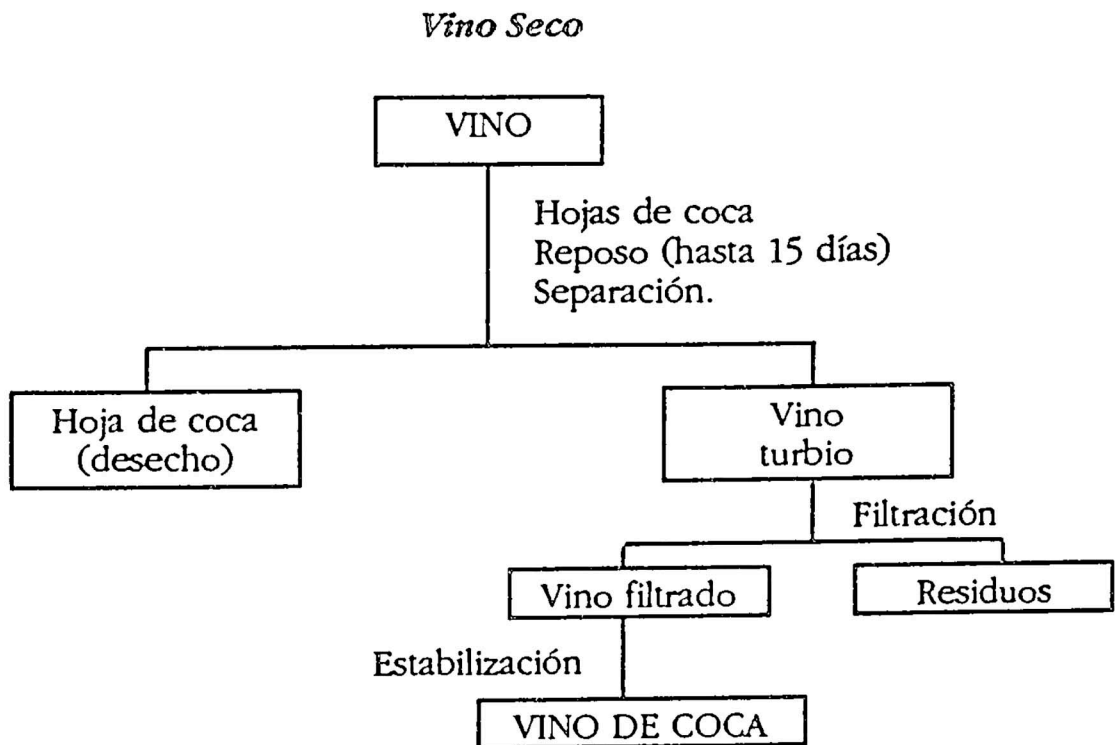
### **Materia prima**

Para obtener un vino de coca de buena calidad ésta debe tener un color verde oscuro, de apariencia fresca, sin coloración amarillenta.

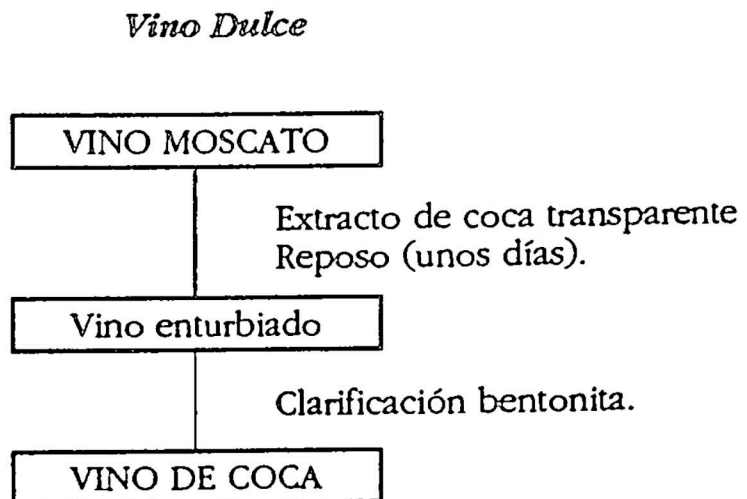
Según el sistema Cronquist (1967) la especie coca investigada tiene la siguiente clasificación taxonómica:

División XVI : Antofitas  
 Clase : Dicotiledóneas  
 Orden : Rutales  
 Familia : Erythroxylon  
 Especie : E. Coca Lam  
 Cultivar : E. Coca Lambrón

### Proceso de Fabricación



*Nota.- Para vino seco se usa vino de color claro y de moderada acidez total hasta un contenido de 17-18% de alcohol, con 12% de azúcar.*



## **ANALISIS QUIMICO**

Para que el vino pueda salir al mercado, tiene que cumplir con una serie de normas (normas técnicas dadas por INDECOPI) para lo cual es necesario realizar ciertos análisis:

### **Humedad y materia seca**

Se puede determinar en una estufa a presión atmosférica a 110°C durante 24 horas, por diferencia de pesos o por densidad.

### **Densidad**

Se la determina utilizando un densímetro.

### **Acidez total**

Se puede determinar utilizando el siguiente método: Se calienta hasta ebullición una cantidad de vino, luego se valora con una base hasta la saturación, lo que se comprueba cuando una gota del líquido aplicada sobre papel tornasol, produce un anillo azul.

### **Acidos volátiles**

Se determina mediante destilación con corriente de vapor. El destilado obtenido se valora con una base y se utiliza como indicador fenolftaleína.

### **Acidez fija**

Se refiere a la acidez obtenida de la diferencia entre los ácidos totales y los ácidos volátiles.

### **pH**

Se determina haciendo uso de un potenciómetro, utilizando como indicador un electrodo de hidrógeno y como referencia un electrodo de calomel.

### **Azucares reductores**

Se determina de la siguiente manera: Se trata una cantidad de vino con sub-acetato de Pb, después de agitar fuertemente, se separa el líquido del precipitado. Luego se añade suficiente cantidad de Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> para precipitar el Pb en exceso y poder separar el líquido por filtración. Se pasa la solución a

un matraz y se le agrega 10 ml de reactivo de Fehling y se calienta a ebullición por 2 minutos, luego se diluye a 100 ml con H<sub>2</sub>O fría y se filtra. Después de enfriar en el desecador, se pesa el óxido cúprico formado y se determina la cantidad de azúcar invertida en el vino.

### Cenizas totales

Para su determinación, se coloca el extracto seco una mufla a 600°C durante 6 horas. Los residuos que quedan corresponden a las cenizas totales.

### Acido tartárico

En una cápsula de porcelana se elimina el alcohol en baño maría. El residuo se pasa a un vaso de 100 ml y se le agrega CH<sub>3</sub>COOH al 20% y KCl, se disuelve y se añade alcohol al 96%, se deja reposar a 10-15°C durante 15 minutos, luego se lava el precipitado con solución de KCl-Alcohol-H<sub>2</sub>O y se pasa el precipitado a un vaso para su valoración con una base.

### Potasio

Se realiza calcinando la muestra a 450°C por 3 horas, atacándolo luego con HCl concentrado, diluyendo luego el residuo con HNO<sub>3</sub> (1:5) para luego filtrarlo y llevarlo a un volumen adecuado para la lectura en el fotómetro de flama.

### Furfural

Para su determinación se puede provocar en la destilación, una reacción con la anilina conteniendo HCl(c) luego se compara la coloración desarrollada con las correspondientes de soluciones tipos de furfural puro para lo que se puede realizar una curva de calibración a una longitud de onda de 520 nm.

### Esteres

Se neutraliza una cantidad de vino con exceso de NaOH 0,1 N; se calienta a ebullición por 2 horas y luego se enfría a temperatura ambiente, el exceso de álcali se valora con HCl 0,1 N.

### Aldehidos

A un determinado volumen de vino se le agrega bisulfito de Na 0,05 N y se le deja reposar por 30 minutos agitando periódicamente, luego se adiciona

un exceso de solución de iodo 0,05 N y se valora este exceso con solución de tiosulfato de Na 0,05 N.

## Minerales

**Calcio.**- Se trata un volumen de vino como cenizas y se disuelve en  $\text{HCl}_{(c)}$ , luego se le agrega algunas gotas de fosfato sódico. Se añade solución de acetato amónico al 10% y se calienta lentamente a  $70-80^{\circ}\text{C}$ , se separa el precipitado. El filtrado se trata con oxalato amónico al 5% hasta que todo el Ca precipite.

**Magnesio.**- Al filtrado del oxalato de Ca se le calienta para eliminar las sales amónicas. Luego se le agrega  $\text{NH}_4\text{Cl}$  y se calienta a ebullición, en este momento se añade amoníaco y se continúa calentando. Después se agrega fosfato de Na al 10% y se deja enfriar.

**Fierro.**- Las cenizas se disuelven en  $\text{HCl}_{(c)}$ , se le añade 1 a 1,5 g de KI y se calienta 5-10 minutos a  $60^{\circ}\text{C}$ . Luego se agrega  $\text{H}_2\text{O}$  y se valora la cantidad de iodo libre con tiosulfato de Na (utilizando almidón).

## Conclusiones

- La coca (sabor) deberá ser claramente perceptible pero no habrá de predominar el olor a ella.
- Para la elaboración del vino seco, se usará vino de color claro y de moderada acidez total hasta un contenido de 17-18% de alcohol.
- La extracción dura desde unos cuantos días hasta una quincena, esto depende de la cantidad de sabor que se desee en el vino acabado. Un periodo demasiado largo no es de desear, porque también se extraen los taninos y otras sustancias amargas.
- Es conveniente cierto grado de envejecimiento, pero el color deberá conservarse claro.
- Para el vino dulce se usa el vino Moscatel.

---

# *Estudio de la Hidratación del Anhidrido Acético*

Gino I. Picasso E. (\*)

---

## *Resumen*

*Se estudia la cinética de hidratación del anhidrido acético con ayuda de un colorímetro (spektrum visible con  $\lambda = 550$  n.m.) y un ph-metro digital. Se determinaron la constante de velocidad de esta reacción a diferentes temperaturas, la energía de activación según la ecuación de Arrhenius y el orden de la reacción.*

## *Abstract*

*The kinetics of hydrolysis of acetic anhydride is followed by a colorimeter (spektrum, visible light  $\lambda = 550$  n.m.) and by a PH-meter. The value of the rate constant of this reaction with the change of temperature, the activation energy from Arrhenius plot and the order of the reaction are determined.*

## INTRODUCCION

La hidratación del anhidrido acético representa un excelente modelo para un curso introductorio en cinética química por la simpleza experimental para determinar el curso de la reacción y por el aparato matemático sencillo que describe la velocidad de la reacción.

Cualquier estudio cinético de un proceso implica establecer el mecanismo molecular de la transformación de reactivos a productos y deducir modelos matemáticos que describan la evolución del proceso químico evaluando la cantidad de productos en el transcurso del tiempo. El conocimiento del orden de la reacción permite introducir la dependencia exponencial entre las contracciones de las sustancias reaccionantes en el tiempo.

Estudiando la dependencia de la constante de velocidad con la temperatura se puede calcular experimentalmente la energía de activación. Esta

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Química.



corresponde a la conocida ecuación de Arrhenius:  $\ln k = \ln A - \frac{E_a}{kT}$  donde  $k$  es la constante de velocidad de la reacción,  $A$  es una constante independiente de la temperatura (en el intervalo de temperaturas establecido) y  $E_a$  es la energía de activación.

Nuestro trabajo persiguió el cálculo de los parámetros cinéticos anteriormente mencionados: La constante de velocidad, la energía de activación y el orden de la reacción. Reconocemos que nuestro aporte representa un estudio básico de una reacción pero fundamental para la comprensión de la cinética de un proceso químico por parte del estudiantado en ramas de química en ingeniería química.

### *Parte experimental*

#### **Reactivos:**

Anhidrido acético Q.P.

Iodato de sodio

Cloruro de potasio

Agua destilada

#### **Instrumentos:**

Colorímetro Specktrom con  $\lambda = 550$  n.m.

Ph-metro

Ultratermostato

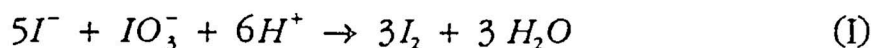
### *Método:*

Se prepararon soluciones de KI 0.02M y de NaIO<sub>3</sub> 0.004M y se vertió anhídrido acético puro en una microbureta graduada. Se calibró dicha bureta para determinar el volumen de reactivo que corresponde a una gota.

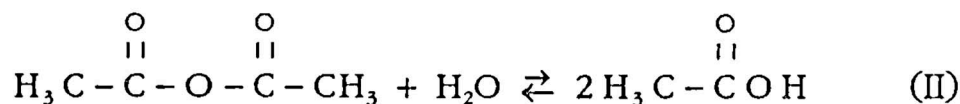
El experimento modelo se realizó de la siguiente manera: Se agregó 5ml de KI y 5 ml de NaIO<sub>3</sub> y a continuación, 2 gotas de anhídrido acético (para otros experimentos se agregaron 3 y 4 gotas). El proceso químico se monitoreó con ayuda de un colorímetro para la temperatura igual a 20°C y con ayuda de un ph-metro para la temperatura 35°C y 42°C. Las condiciones isotérmicas fueron alcanzadas con un ultratermostato en donde se introdujo el electrodo para el estudio de la reacción a 20°C (temperatura ambiental).

## Fundamento teórico

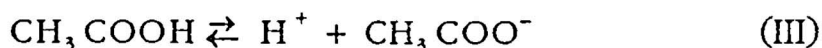
Al combinar KI y NaIO<sub>3</sub> en medio ácido se tiene la siguiente reacción:



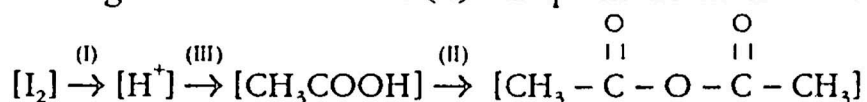
La hidratación del anhídrido acético ocurre del siguiente modo:



Al inicio al mezclar KI y NaIO<sub>3</sub> no se produce todavía I<sub>2</sub> mientras no se introduzca algún medio ácido y por lo tanto la mezcla es incolora. Al agregar gotas de anhídrido acético se produce la reacción (II). Como se produce mediante esta reacción ácido acético y se genera H<sup>+</sup> siguiendo el equilibrio:



Estos iones H<sup>+</sup> reaccionan siguiendo reacción (I) por lo que por un lado facilita la disociación del CH<sub>3</sub>COOH (la disminución de H<sup>+</sup> conlleva a un desplazamiento del equilibrio de la reacción (II) a la derecha) y por el otro, se genera I<sub>2</sub> gradualmente siguiendo la reacción (I). Midiendo por el colorímetro la transmitancia se puede saber la concentración de I<sub>2</sub> formados, que permite conocer H<sup>+</sup> consumidos por el equilibrio (II) se halla a partir de [H<sup>+</sup>], la concentración de [CH<sub>3</sub>COOH] y con este último, la cantidad de anhídrido acético gastado siguiendo la reacción (II). Esquemáticamente se resume así:



La cinética del proceso consiste en el estudio de la concentración [CH<sub>3</sub> -  $\overset{\overset{O}{\parallel}}{C}$  - OC - CH<sub>3</sub>] en el tiempo.

Estrictamente hablando la reacción (II) es reversible pero en las primeras etapas de hidratación prácticamente [CH<sub>3</sub>COOH] es bien pequeña en relación a la del anhídrido acético y por lo tanto se puede considerar irreversible. (1)

La cantidad de anhídrido acético que ha reaccionado según la reacción (II) se considera igual a la cantidad de I<sub>2</sub> que se forma según la reacción (I). Esta suposición se justifica considerando que el proceso de hidratación es

bastante lento y la reacción (I) es prácticamente instantánea e irreversible. Por lo tanto, la cantidad de anhídrido acético gastado se puede calcular del siguiente modo:



La constante de equilibrio  $k$  de esta reacción es:

$$k = \frac{[\text{H}^+][\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = \frac{[\text{H}^+]^2}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = 1,8 \cdot 10^{-5} \quad (\text{OI } 25^\circ\text{C})$$

Entonces:

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{[\text{H}^+]^2}{k}$$

Pero según reacción (I):  $Q \begin{matrix} [\text{H}^+] & \text{---} & 3 [\text{I}_2] \\ [\text{H}^+] & \text{---} & 1/2 [\text{I}_2] \end{matrix}$

Luego:

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{[\text{I}_2]^2}{4k}$$

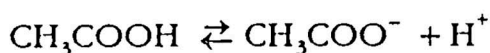
Según reacción (II):  $\begin{matrix} [\text{anh. - ac.}] & \text{---} & 2 [\text{CH}_3\text{COOH}] \\ 1/2 [\text{anh. - ac.}] & \text{---} & [\text{CH}_3\text{COOH}] \end{matrix}$

Luego:

$$\frac{1}{2} [\text{anh. - ac.}] = \frac{[\text{I}_2]^2}{4k} \rightarrow [\text{anh. - ac.}] = \frac{[\text{I}_2]^2}{2k} \quad (1)$$

La concentración de  $[\text{I}_2]$  se puede monitorear a partir de la medición del porcentaje de transmitancia en un colorímetro.

También es posible conocer la cantidad de anhídrido acético que ha reaccionado midiendo el pH del proceso:

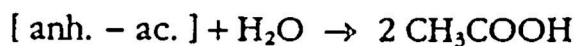


$$k = \frac{[\text{H}^+]^2}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$$

Según reacción (II):  $[\text{CH}_3\text{COOH}] = \frac{[\text{anh.} - \text{ac.}]}{2}$ , luego:

$$k = \frac{[\text{H}^+]^2}{[\text{anh.} - \text{ac.}]/2} \rightarrow [\text{anh.} - \text{ac.}] = \frac{2[\text{H}^+]^2}{k} \quad (2)$$

Si se considera la cantidad inicial de [anh. - ac.] igual a A entonces:



Para  $t = 0$                       A                                      0

Para  $t$                               A - x                                      2x

Entonces la cinética del proceso se rige por la siguiente ecuación:

$$-\frac{d(A-x)}{dt} = k(A-x)^n \quad (3)$$

donde:

n es el orden de la reacción

x es la cantidad de anh. ac que ha reaccionado y calculado según ecuación (1) ó (2).

Hallando experimentalmente la cantidad A-x en función del tiempo se puede establecer según (3) la forma de variación del proceso de hidratación, es decir, su cinética.

El orden de la reacción se calculó por el método de las vidas medias (2). Si se supone que la reacción de hidratación del anhídrido acético es representada por el siguiente esquema:



Si x es la cantidad de A que ha reaccionado, luego:

$$\frac{dx}{dt} = k(A-x)^n \quad (4)$$

Resolviendo la ecuación diferencial e integrando de 0 a t y de 0 a x se tiene:

$$k = \frac{1}{t} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{A^{n-1} - (A-x)^{n-1}}{A^{n-1} (A-x)^{n-1}}$$

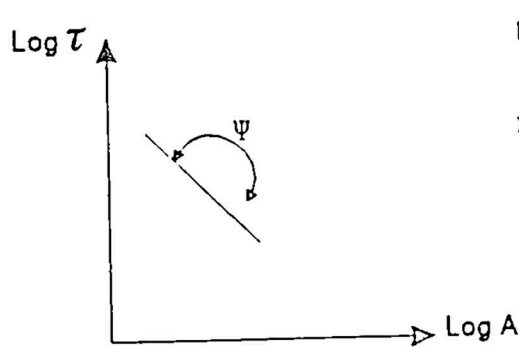
Para  $\tau = \frac{A}{2}$ , luego  $t = \tau$  (tiempo de vida media)

Despejando x, entonces:

$$\tau = \frac{1}{k} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(2^{n-1} - 1)}{A^{n-1}}$$

$$\log \tau = \log \frac{2^{n-1} - 1}{k(n-1)} - (n-1) \log A$$

Si se grafica  $\log \tau$  versus  $\log A$  se tendrá una recta: negativa:



$$\text{tg } \phi = -(n-1)$$

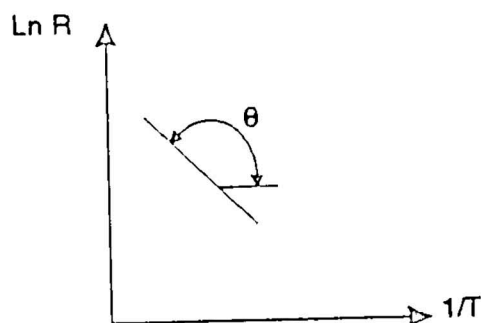
↓

$$n = -\text{tg } \phi + 1$$

(5)

Los valores de  $\tau$  se calcularon a partir de la ecuación (3), graficada.

La energía de activación según Arrhenius se calculó mediante la relación  $\ln k = \ln A - \frac{E_a}{kT}$ , donde k - constante de velocidad, A- constante independiente de la temperatura y  $E_a$ -energía de activación. Graficando la k versus se tendrá:



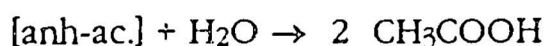
$$\text{tg } \theta = -\frac{E_a}{k} \rightarrow E_a = -k \text{ tg } \theta$$

(6)

Para construir la dependencia de Arrhenius es necesario estudiar el proceso a diferentes temperaturas. En nuestro caso se estudió a la temperatura de 20°C, 35°C y 42°C.

### Discusión y resultados

Un diagrama típico obtenido de la experiencia se observa en la fig. 1. Como se aprecia existe una dependencia lineal de la función  $\ln(a-x)$  versus tiempos hasta un determinado intervalo de tiempo  $t$ . A partir de este tiempo  $t$ ,  $\ln(a-x)$  permanece constante. La dependencia lineal nos induce a afirmar que la reacción transcurre con un orden igual a 1, a pesar de ser una reacción bimolecular. Tal como se dijo anteriormente, cuando la concentración de algunos de los componentes está en gran exceso en relación al otro entonces, la concentración de este puede considerarse constante y por lo tanto puede figurar dentro de la constante de velocidad:



$$-\frac{d[\text{anh.} - \text{ac.}]}{dt} = k' [\text{anh.} - \text{ac.}] [\text{H}_2\text{O}]$$

$[\text{H}_2\text{O}]$  en exceso luego  $k' [\text{H}_2\text{O}] = k$ , entonces,

$$-\frac{d[\text{anh.} - \text{ac.}]}{dt} = k' [\text{anh.} - \text{ac.}]$$

Por lo tanto, esta reacción se comporta como si fuera de orden 1. La literatura denomina a este tipo de reacciones con una reacción de pseudo orden 1 [1]. Nuestros resultados confirman con este orden de reacción.

Fig. 1

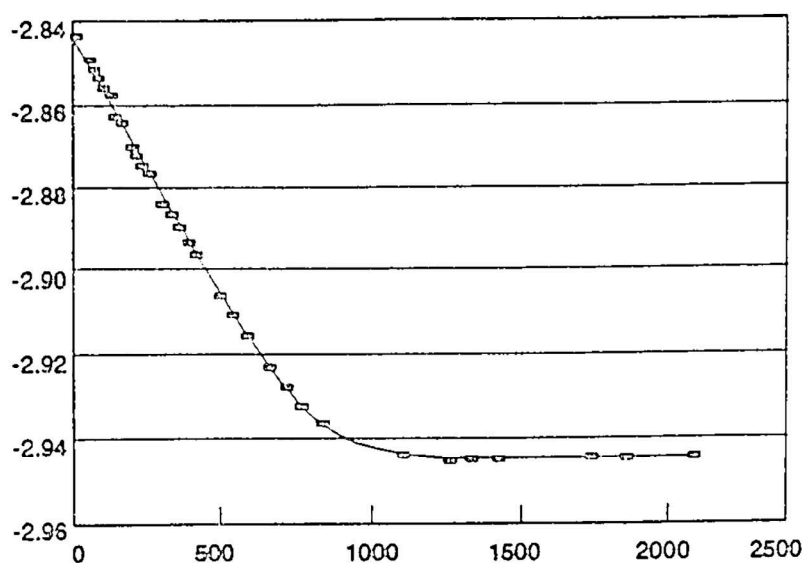


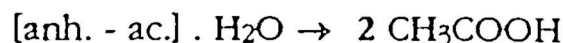
Tabla N° 1

GOTAS	VOLUMEN (ml)	MASA (gr)	CONCENTRACION (mol/l)
2	0,0375	0,0397	0,03892
3	0,05625	0,06086	0,05966
4	0,075	0,0811425	0,0795514

1 gota = 0,01875 ml.

Densidad [anh. - ac.] a 20°C : 1,082 gr/ml.

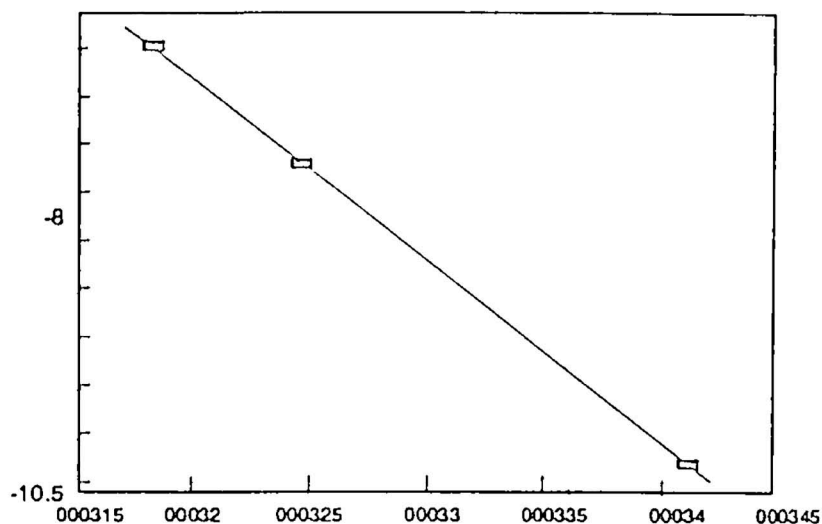
La constancia del  $\ln(a-x)$  luego de un intervalo de tiempo, en la fig. 1, por ejemplo, después de 1200 seg. se explica como la posibilidad de la existencia de un estado estacionario en variación de concentración del  $\text{CH}_3\text{COOH}$ , que tendría relación con el establecimiento de equilibrio en la reacción de hidratación del anhídrido acético. Haciendo un cálculo aproximado, si reaccionase todo el volumen agregado (correspondiente a 3 gotas) de anhídrido acético, se tendría:  $[\text{CH}_3\text{COOH}] = 2 (0,5466) = 0,11932$  moles/litro (ver tabla 1) de la fig. 2 el valor correspondiente a la constancia de  $\ln(a-x)$  es igual a 0,0135885 moles/litro que sería igual a la concentración de ácido acético en equilibrio. Esto representa en relación a la cantidad total de ácido acético que se obtendría si reaccionase todo el anhídrido acético, un 11,38%. Esto es posible considerando que la reacción de hidratación del anhídrido acético es sensible al cambio de concentración del ácido acético siguiendo una relación exponencial cuadrática:



$$k = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}]^2}{[\text{anh. ac.}]}$$

### Cálculo de energía de activación

Fig. 2



Al finalizar los experimentos a diversas temperaturas (20, 35 y 42°C) se confeccionó la siguiente tabla N° 2.

Tabla N° 2

	$k_1$ (S-1)	$k_2$ (S-1)	$k_3$ (S-1)
T (°C)	2 GOTAS	3 GOTAS	4 GOTAS
20	$3,5 \times 10^{-5}$	$5,45 \times 10^{-5}$	0,000127
35	0,00039	0,00031	0,00022
42	0,0012	0,0013	0,00032

Con la tabla 2 como se observa la constante de velocidad  $k$  está en función de la temperatura. Si se grafica  $\ln k$  versus  $1/T$  para 2, 3 y 4 letras se obtiene rectas de tipo de la fig. 2. Con ayuda de la fórmula (6), la energía de activación se obtiene a partir de la pendiente de la recta obtenida. Para los 3 volúmenes que están pendientes son:

$$2 \text{ gotas : } m = -14795,53$$

$$3 \text{ gotas : } m = -12828,828$$

$$4 \text{ gotas : } m = -3781,95$$

Este último dato se rechazó por su gran diferencia con los 2 primeros. Entonces la energía de activación para cada uno de los volúmenes son:

$$\text{Para 2 gotas: } Ea_2 = -R \operatorname{tg} \theta = -1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol}} \times (-14795,53)$$

$$Ea_2 = 29398,718 \text{ cal/mol}$$

$$\text{Para 3 gotas: } Ea_3 = -1,987 \frac{\text{cal}}{\text{mol}} \times (-12828,828)$$

$$Ea_3 = 25490,881 \frac{\text{cal}}{\text{mol}}$$

$$\text{Promediando } E_n = 27444,8 \text{ cal/mol}$$



Este valor corresponde al resultado experimental de la energía de activación de la reacción de hidratación del anhídrido acético.

Hay que mencionar que en los gráficos tipo fig. 1 cuando  $t = 0$  se obtiene para  $x = 0$ ,  $\ln a$  que sería el logaritmo natural de la concentración inicial del anhídrido acético. Por ejemplo para el caso de la fig. 1,  $\ln a$  es igual a:  $\ln a = -2,84779$ . Como corresponde a tres gotas entonces, de la tabla 1,  $\ln a = -2,819$ ; que es un resultado bastante aproximado al hallado experimentalmente.

### Conclusiones

1. Se obtuvieron los valores de la constante específica de velocidad de la reacción de hidratación de anhídrido acético a las temperaturas de 20, 35 y 42°C.
2. Se demostró que esta reacción sigue un orden igual a 1 por la linealidad de la dependencia de  $\ln(a-x)$  versus tiempo, considerando que uno de los componentes de la reacción se encuentra en gran exceso.
3. A partir de la dependencia de Arrhenius,  $\ln k$  versus  $1/T$  se calculó la energía de activación de la reacción igual a: 27444,8 calorías por mol.

### REFERENCIAS

- [1] Sboemaker, David P. "Experiments in Physical Chemistry". Mc Graw-Hill-1962. Book Company, Inc. pag. 214-230.
- [2] Caneda, Rodolfo. "Cinética Química". Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico". Secretaría General de la O.E.A. Washington - 1978. pag. 4-15.
- [3] Kusnetsov E. M. "Físico Química en preguntas y respuestas. Parte, Cinética química". Universidad Lomonosov 1981. pag. 125-130.
- [4] M. J. Pilling "Reaction Kinetics" Clarendon Press, Oxford, 1974. pag. 25-30.
- [5] Glasstone S. K. Laidler, and Eyring, "The theory of rate process". Mc-Graw-Hill, New York, 1941. pag. 80-90.

---

Nota.- En este trabajo se obtuvieron muchos resultados experimentales que no han sido posible publicarlos por razones de espacio. Sin embargo, los resultados principales del trabajo se exponen en este resumen.

Se agradece la colaboración de Angela Medina y Ericka Díaz en la realización de la parte experimental de este trabajo.

---

---

# *Colorantes y saborizantes del ají panca*

*(Capsicum Sinense)*

Elsa Díaz Flores y Otilia Acha de la Cruz (\*)

---

## DESENVOLVIMIENTO HISTORICO

### Origen:

Centro América : México  
Sud-América : Perú  
- Satipo (Junín)  
- San Miguel (Cajamarca)  
- Pachacamac (Lima)

El Perú figura como el país que posee gran número de variedades de la familia solanácea.

Desde épocas remotas el ají era conocido en el Perú como condimento y estimulante; apreciándose estas en representaciones de cerámica y tejidos de las antiguas culturas del Perú, donde el artista indígena plasmó su huella perdurable.

En la actualidad el ají se utiliza como condimento y saborizante en todas las comidas criollas, encontrándose su cultivo generalizado en todo el territorio peruano debido a la gran demanda de los consumidores; sin muchas veces se tenga la idea de su alto valor alimenticio.

## CLASIFICACION BOTANICA

### Clasificación según Alvistur, A. (1973).

División : Fanerógamas o Antófitas  
Subdivisión : Angiospermas  
Clase : Dicotiledóneas

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Química.

Subclase : Simpétala o Gamopétala  
 Orden : Tubifloras  
 Suborden : Solaninas  
 Familia : Solaneanas  
 Subfamilia : Solaneanas  
 Género : Capsicum  
 Especie : Sinense

## COMPOSICION QUIMICA

La composición química de algunos ajíes peruanos, tal como se muestra en la tabla N° 1. Los resultados difieren unos de otros por los diferentes contenidos de humedad, lo que dificulta su comparación.

Los capsicum son una fuente de vitamina C y su contenido depende de los siguientes factores: madurez del fruto, condiciones climáticas, oriundez y adaptación.

*Tabla N° 1 Composición del Ají  
(Por 100 g de la parte comestible)*

	Ají Verde	Ají Amarillo Entero Fresco	Ají Colorado Seco (Panca)	Ají Amarillo Seco
<b>Calorías</b>	46	40	270	301
<b>Componentes mayores (g)</b>				
Humedad	86,3	88,9	20	16,6
Proteínas	1,9	0,9	7	7,3
Grasas	0,7	0,6	7,7	6,2
Carbohidratos	10,0	8,8	61,8	64,8
Fibras	2,4	2,4	22,3	32,1
Cenizas	1,1	0,7	6,5	0,5
<b>Minerales (mg)</b>				
Calcio	16	31	141	122
Fósforo	48	21	209	166
Hierro	22	0,9	4,9	8,2

Vitaminas (mg)				
Caroteno	1,66	2,89	28,62	6,4
Tiamina	0,04	0,06	0,14	0,12
Rivoflavina	0,08	0,58	1,78	1,48
Niacina	1,56	1,25	3,55	4,15
Acido Ascórbico				
Reducido	57,8	60,0	45,0	6,0

Fuente: "La Composición de los alimentos peruanos". Instituto de Nutrición. Ministerio de Salud Pública, 1962. Lima - Perú.

## COLORANTE Y SABORIZANTE DEL AJI PANCA (CAPSICUM SINENSE)

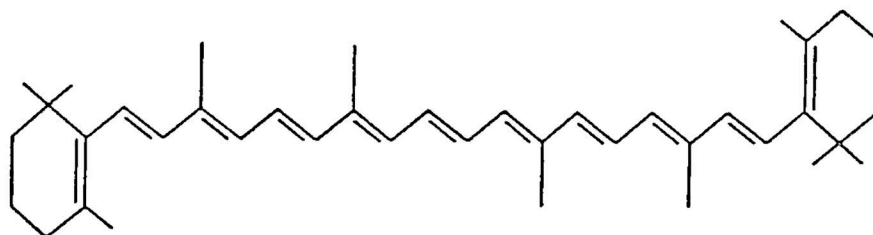
### Colorante

Los responsables del color de aji panca son los **carotenos**; se conocen también como lipócromos o cromolípidos a causa de ser soluble en las grasas o solvente no polares. Dan color azul intenso con  $H_2SO_4(c)$  y con una solución clorofórmica de tricloruro de antimonio (Rxn de Can-Price). Esta reacción constituye la base de un método de valoración cuantitativa de los carotenoides.

El color de los carotenos se atribuyen a la extrema conjugación de la cadena central.

Por otro lado, los **carotenos** de ocurrencia natural, se transforman **in vivo** en vitamina A y, por consiguiente, poseen actividad de vitamina A.

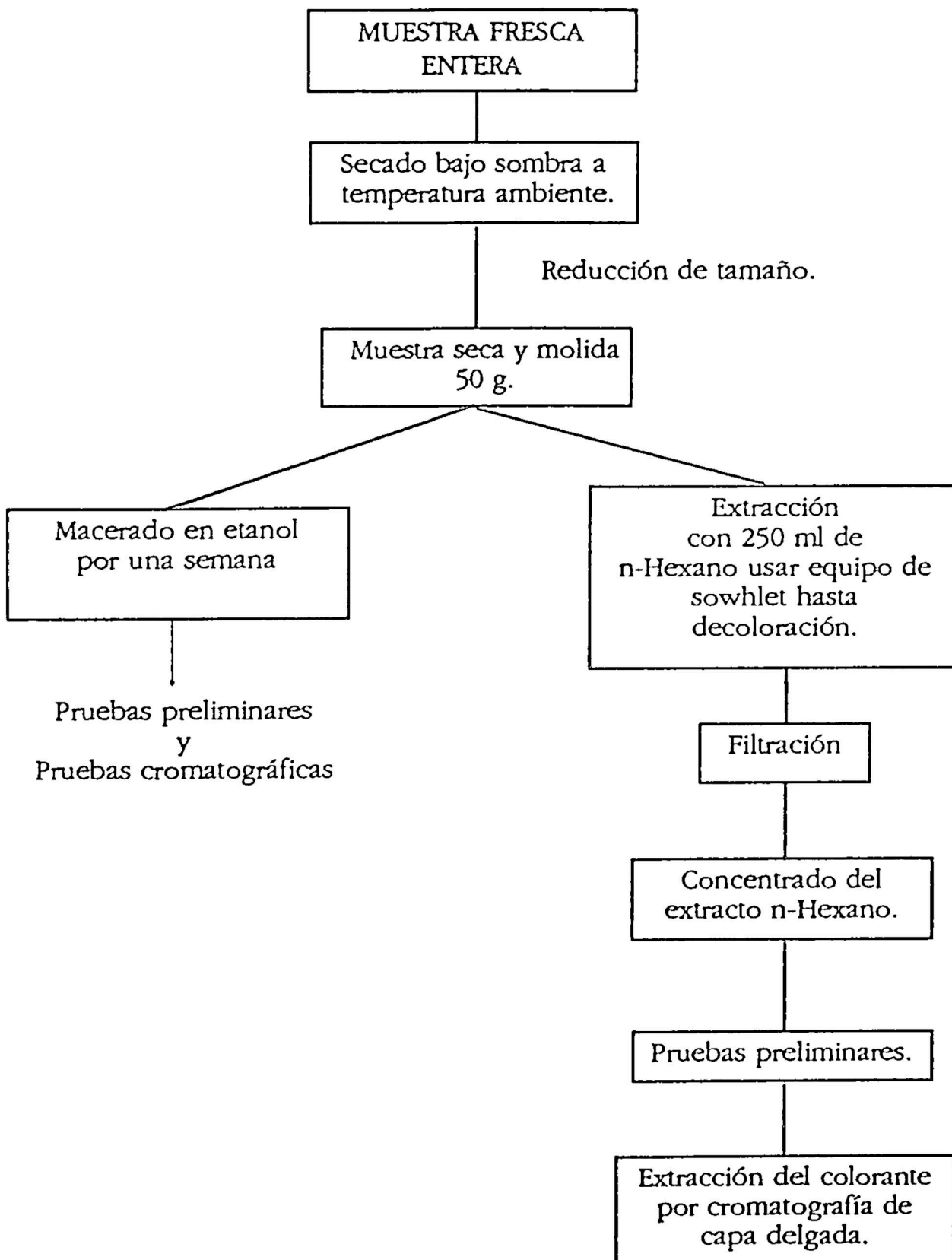
El B-caroteno tiene la capacidad de descomponerse en el interior del organismo (mucosas intestinal originando dos moléculas de vitamina A).



$\beta$  - Caroteno

# EXTRACCION DEL COLORANTE

## Diagrama de Flujo



## Saborizante

Los responsables de dar el sabor puyente al ají panca son los capsaicoides; entre los que se mencionan:

### CAPSAICINA:

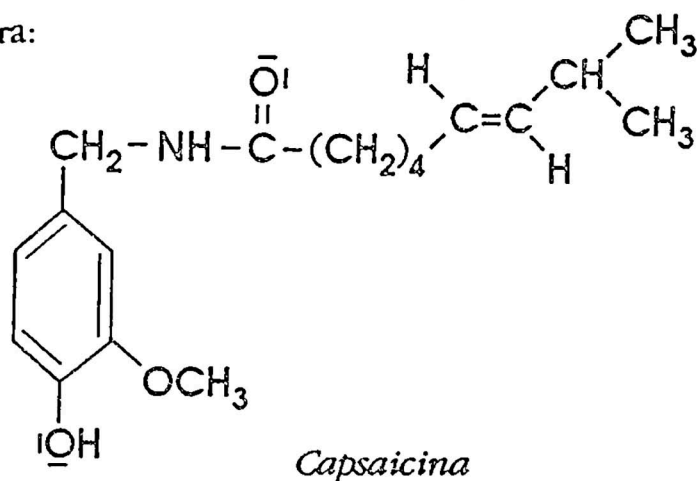
Datos físico-químicos:

- a) Fórmula molecular =  $C_{18}H_{27}NO_3$
- b) Peso molecular = 305,42
- c) Punto de fusión =  $65^{\circ}C$

Análisis elemental:

- C = 70,80%
- H = 8,91%
- O = 15,72%
- H = 4,59%

Estructura:



APARIENCIA.- Cristales finos, lustrosos, casi blanco.

SOLUBILIDAD.- Insoluble en agua fría, sorbitol líquido, glicerina líquida y parafina; soluble en alcohol, éter, etanol, isopropanol, cloroformo y benceno; ligeramente soluble en disulfuro de carbono, y ácido clorhídrico concentrado.

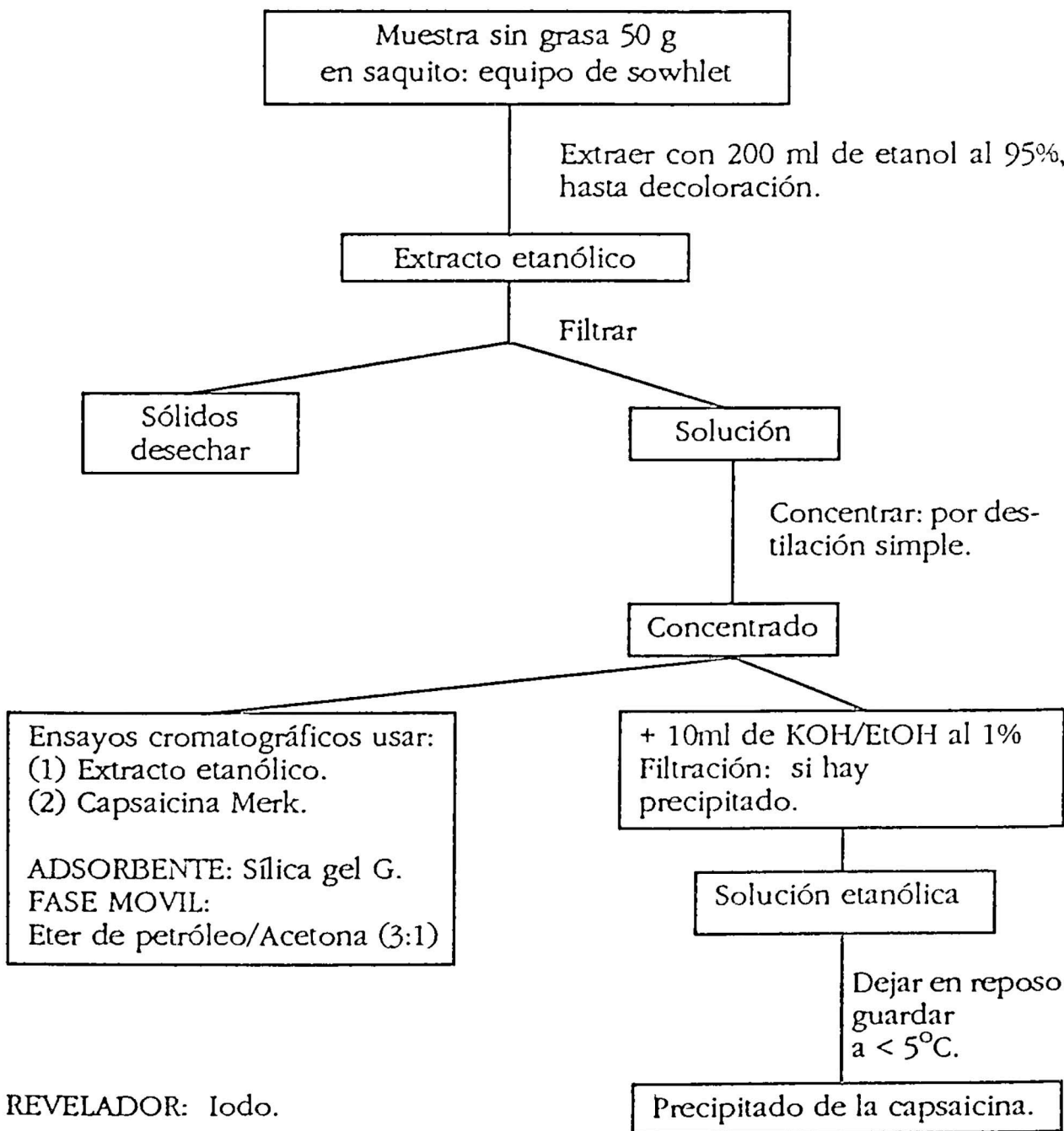
### APLICACIONES Y USOS DE LA CAPSAICINA

- La capsaicina en particular ha ganado gran importancia cosmética (una aplicación especial es como tónico para el cabello) y farmacológica, dependiendo de la dosis. Pequeñas dosis de capsaicina producen un ligero efecto estimulante sobre la secreción del jugo gástrico. Alta dosis producen diarreas.

- La circulación es incrementada y el metabolismo estimulado.
- Exteriormente es aplicado en la forma de unguento y/o emplasto. Unguento, pasta, crema, emulsiones, para los siguientes tratamientos: Artritis crónica, reumatismo crónico, golpes, torceduras, etc.
- Su toxicidad es relativamente baja, excepto para lesiones locales en que puede ser severo si la dosis terapéutica se excede y/o la administración es prolongada. En concentraciones de 0,5% de capsaicina, afecta al nervio.

Experimentos clínicos han demostrado que la capsaicina puede inhibir el crecimiento de tumores en ratones.

### Extracción de la Capsaicina:



### *Conclusiones*

- El ají panca constituye el condimento principal de las comidas peruanas por su intenso color y sabor pungente y se puede considerar como dieta popular porque tiene un alto valor alimenticio.
- Actualmente la Capsaicina está teniendo gran importancia desde el punto de vista de su aplicación en la industria farmacológica.

### *Sugerencia*

- Contribuir con el mejor aprovechamiento del ají en nuestro medio, difundiendo su alto valor alimenticio y paralelamente se estaría fomentando el cultivo de la especie en nuestro país.
- Por su importante aplicación en la industria farmacológica, es conveniente investigar, realizar estudios sobre los métodos para la extracción de la Capsaicina.
- Existe la posibilidad de industrializar al producto como saborizante y colorante ecológico, ya que en nuestro país encontramos las condiciones climáticas y agrológicas adecuadas para su desarrollo. Actualmente los colorantes ecológicos están muy difundidos; en general la demanda de éstas, van cada vez en aumento en la industria alimentaria de los países desarrollados.



---

# *Evaluación del propagador cuántico de sistemas 1- Dimensionales en el formalismo de Path-Integral*

Rodolfo Casana Sifuentes <sup>(1)</sup>

---

## *Abstract*

*The evaluation of the general term of the series expansion is perform. The Kernel for a one-dimensional repulsive delta-function potencial is obtained by an exact summation of the expansion series. Later, I consider the scattering of a wave plane and one-dimensional Gaussian wave packet.*

## INTRODUCCION

El presente trabajo propone un método de expansión para solucionar los problemas en Mecánica Cuántica, partiendo del formalismo de Path-Integral.

En este procedimiento el término general de la serie puede ser expresado en forma analítica y por consiguiente el problema de la convergencia puede ser examinado en detalle. Generalmente, para casos de interés práctico, la suma de esta serie no puede ser realizada explícitamente; excepto en algunas situaciones especiales. Pero conociendo la expresión formal para todos los términos de la serie, podemos determinar, al menos en principio, el propagador del sistema con el grado deseado de precisión.

Para ilustrar el método daremos la descripción cuántica del  $\delta$ -potencial; partiendo del formalismo de Path-Integral.

Nuestro primer paso será calcular el propagador  $K(x, t; x_0, 0)$  para el  $\delta$ -potencial; luego haremos la descripción de scattering de una onda plana, y de un paquete gaussiano causado por dicho potencial.

## METODO DE EXPANSION EN EL FORMALISMO DE PATH-INTEGRAL

Partiremos del propagador  $K(x, t; x_0, 0)$  expresado como una Path-Integral

$$K(x, t; x_0, 0) = \int_a^b \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t L(x, \dot{x}, \tau) d\tau \right] Dx(\tau) \quad (1)$$

---

<sup>(1)</sup> UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.

Donde la integración es realizada sobre todas las trayectorias posibles para la partícula entre los puntos  $(x, t)$  y  $(x_0, 0)$ .

$L(x, \dot{x}, t)$  es el lagrangiano del sistema y asumiremos que tiene la forma

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t)$$

Tomando en ec. (1) la expansión en serie de la función exponencial  $\exp[-(i/\hbar) \int_0^t V[x(\tau)]d\tau]$ , se obtiene

$$K(x, t; x_0, 0) = K_0(x, t; x_0, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(x, t; x_0, 0)$$

donde  $K^{(n)}(x, t; x_0, 0)$  es dado por

$$K^{(n)}(x, t; x_0, 0) = \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{(x_0, 0)}^{(x, t)} \int_0^t dt_n \dots \int_0^t dt_1 V(x(t_n)) \dots V(x(t_1)) * \\ * \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2} m \dot{x}^2 d\tau\right] Dx(\tau)$$

y  $K_0(x, t; x_0, 0)$  es el propagador de la partícula libre expresado por

$$K_0(x, t; x_0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar t} (x - x_0)^2\right]$$

$K^{(n)}(x, t; x_0, 0)$ , para  $0 < t_1 \dots < t_n < t$  se expresa como

$$K^{(n)}(x, t; x_0, 0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int dx_n \dots \int dx_1 K_0(x, t; x_n, t_n) \\ * V(x_n) K_0(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) V(x_{n-1}) \dots V(x_1, t_1) K_0(x_1, t_1; x_0, 0)$$

reemplazando  $K_0(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1})$  en la ecuación anterior obtenemos

$$K^{(n)}(x, t; x_0, 0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int dx_n \dots \int dx_1 H_n(t)$$

$$H_n(t) = \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \exp \left[ \sum_{k=0}^n \frac{im}{2h} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{t_{k+1} - t_k} \right]$$

$$\frac{1}{(t-t_n)^{1/2} (t_n-t_{n-1})^{1/2} \dots (t_2-t_1)^{1/2} t_1^{1/2}}$$

con  $t_0 = 0$ ,  $t_{n+1} = t$ ,  $x_{n+1} = x$ .

En la última ecuación, observamos que las funciones integral son del tipo  $F(t) = \exp[-a/t]/\sqrt{t}$ , cuya transformada de Laplace es  $f(s) = \sqrt{\pi} \exp[-2\sqrt{as}]/\sqrt{s}$ ;

Además sabemos

$$M(t) = \int_0^t F(t-\tau) G(\tau) d\tau = L^{-1}\{f(s)g(s), t\}$$

entonces las integrales temporales son calculadas por medio de la Transformada Laplace. Por consiguiente

$$H_n(t) = \left(-\frac{i}{h}\right)^n \left(\frac{m}{2ih}\right)^{\frac{n+1}{2}} L^{-1} \left[ \frac{\exp[-2\alpha \sqrt{s} \sum_{k=0}^n |x_{k+1} - x_k|]}{s^{\frac{n+1}{2}}}, t \right]$$

donde  $\alpha = \sqrt{m/2hi}$ . Por lo tanto

$$K^{(n)}(x, t; x_0, 0) = \left(-\frac{i}{h}\right)^n \left(\frac{m}{2ih}\right)^{\frac{n+1}{2}} L^{-1} \left[ \int dx_n \dots \int dx_1 V(x_n) \dots V(x_1) * \right.$$

$$\left. * \exp \left[ -2\alpha \frac{\sqrt{s} \sum_{k=0}^n |x_{k+1} - x_k|}{s^{\frac{n+1}{2}}}, t \right] \right]$$

Cada término  $K^{(s)}$  puede ser evaluado de la siguiente manera: primero integrando en las coordenadas, y luego realizando la Transformada inversa de Laplace.

## APLICACION A UN $\delta$ -POTENCIAL 1-DIMENSIONAL

Para ilustrar la aplicabilidad del método de expansión propuesto en la sección anterior, consideremos un  $\delta$ -potencial repulsivo 1-dimensional descrito por

$$V(x) = \lambda \delta(x), \quad \lambda > 0$$

Evaluando el término general de la serie  $K^{(n)}(x, t; x_0, 0)$  obtenemos

$$K^{(n)}(x, t; x_0, 0) = \left(-\frac{i\lambda}{h}\right)^n \left(\frac{m}{2ih}\right)^{\frac{n+1}{2}} L^{-1} \left[ \frac{\exp[-2\alpha \sqrt{s} (|x| + |x_0|)]}{s^{\frac{n+1}{2}}}, t \right]$$

por consiguiente el propagador se expresa como

$$K(x, t; x_0, 0) = K_0(x, t; x_0, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i\lambda}{h}\right)^n \left(\frac{m}{2ih}\right)^{\frac{n+1}{2}} L^{-1} \left[ \frac{\exp[-2\alpha \sqrt{s} (|x| + |x_0|)]}{s^{\frac{n+1}{2}}}, t \right]$$

realizando la suma

$$K(x, t; x_0, 0) = K_0(x, t; x_0, 0) - \frac{\lambda m}{2h^2} L^{-1} \left[ \frac{\exp[-2\alpha \sqrt{s} (|x| + |x_0|)]}{\sqrt{s} \left(\sqrt{s} + \frac{\lambda}{h} \sqrt{\frac{im}{2h}}\right)}, t \right]$$

sea  $f(s) = \frac{\exp[-2\alpha \sqrt{s} (|x| + |x_0|)]}{\sqrt{s} (\sqrt{s} + (\lambda/h) \sqrt{(im/2h)})}$ ;  $s = 0$ , es un punto de ramificación de  $f(s)$ .

$$F(t) = L^{-1} [f(s) e^{st}, t]$$

Realizando la Transformada inversa de Laplace obtenemos la siguiente expresión para  $F(t)$ .

$$F(t) = \left(\frac{2m}{\pi i h t}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp \left[ \frac{im}{2ht} (u + |x| + |x_0|)^2 - \beta u \right] du$$

Por tanto, el propagador para el potencial  $V(x) = \lambda \delta(x)$  es dado por

$$K(x, t; x_0, 0) = K_0(x, t; x_0, 0) - \beta \left(\frac{m}{2\pi i h t}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp \left[ \frac{im}{2ht} (u + |x| + |x_0|)^2 - \beta u \right] du$$

donde

$$\beta = \frac{\lambda m}{h^2}$$

## Scattering de una onda plana

Si en  $t = 0$ :

$$\phi_0(x, 0) = \exp(ikx)$$

\* las partículas son enviadas desde el lado negativo hacia el lado positivo del eje  $x$ , es decir,  $x_0 < 0$ . La función de onda en cualquier instante posterior está dado por

$$\Psi_{\kappa}(x, t) = \int K(x, t; x_0, 0) \phi_0(x_0, 0) dx_0$$

calculando la integral anterior obtenemos

$$\Psi_{\kappa}(x, t) = \exp[ikx - i\omega t] - \alpha \int_0^{\infty} \exp[-\alpha u + ik(|x| + u) - i\omega t] du$$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \dots; \dots \alpha = \frac{\lambda m}{\hbar^2}$$

integrando en  $u$ , se tiene

$$\Psi_{\kappa}(x, t) = \exp[ikx - i\omega t] - \frac{\alpha}{\alpha - ik} \exp[ik|x| - i\omega t]$$

reescribiendo la ecuación anterior

$$\Psi_{\kappa}^{-}(x, t) = \exp[ikx - i\omega t] - \frac{\alpha}{\alpha - ik} \exp[ikx - i\omega t]; \dots \dots \dots x < 0$$

$$\Psi_{\kappa}^{+}(x, t) = \frac{k}{k + i\alpha} \exp[ikx - i\omega t]; \dots \dots \dots x > 0$$

La función de Transmisión y Reflexión son respectivamente

$$T(k) = \frac{k^2}{\alpha^2 + k^2}$$

$$R(k) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + k^2}$$

Los resultados obtenidos en las ecuaciones anteriores son idénticos con aquellos obtenidos por resolver directamente la correspondiente ecuación de Schrödinger.

### Scattering de un paquete gaussiano

Sea la función de onda inicial en  $t = 0$

$$\phi_0(x, 0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} \exp [ik_0 x - (x - x_0)^2/a^2]$$

entonces la función de onda en todo instante posterior  $t$ , será

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) - \Psi^{(*)}(x, t)$$

donde

$$\Psi_0(x, t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\exp \left[ \frac{-(x - x_0 - \hbar k_0 t/m)^2}{a^2 + 2\hbar t i/m} + ik_0 x - i\omega_0 t \right]}{(a^2 + 2\hbar t i/m)^{1/2}}$$

$$\Psi^{(*)}(x, t) = \alpha \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{1/2} \int_0^\infty du \int dz \exp \left[ -\alpha u + \frac{i m}{2\hbar t} (u + |x| - z)^2 + ik_0 z - \frac{(z - x_0)^2}{a^2} \right]$$

integrando en  $z$ , obtenemos

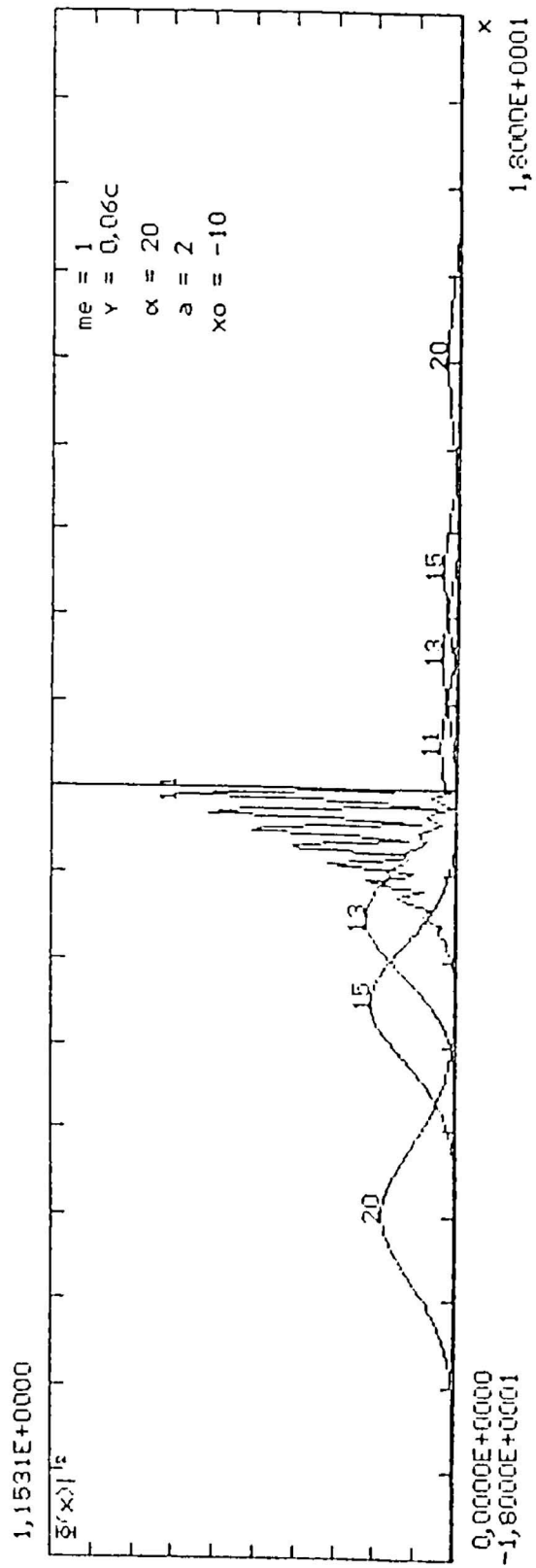
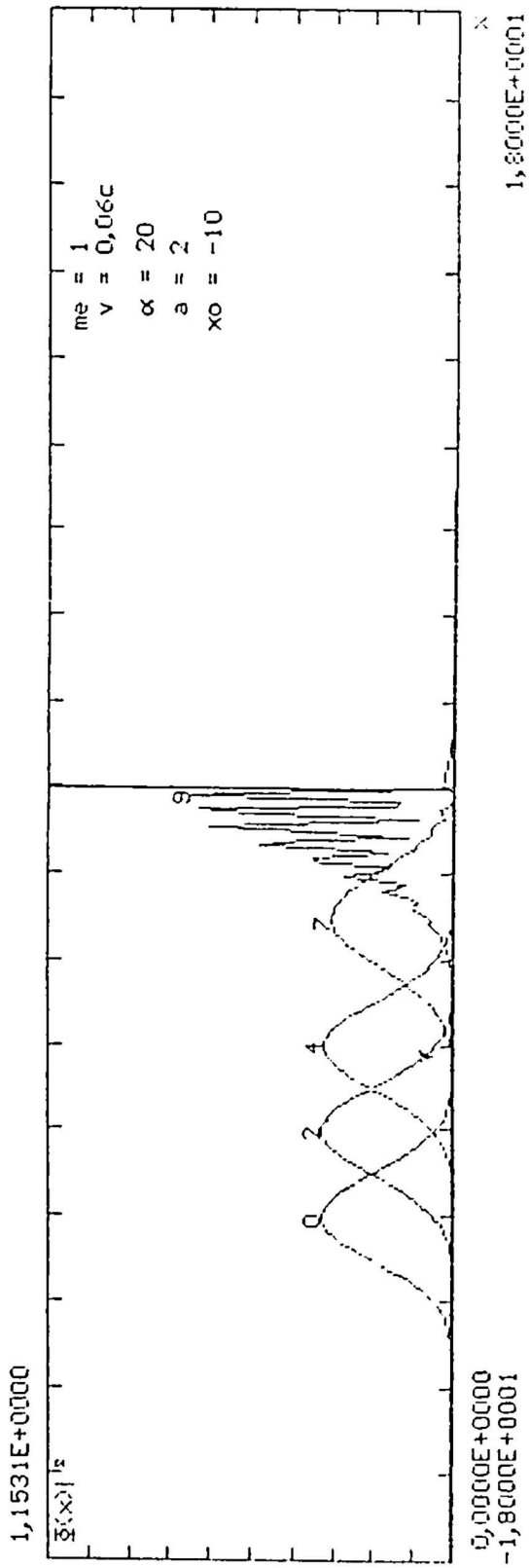
$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) - \alpha \frac{(2a^2/\pi)^{1/4}}{(a^2 + 2\hbar t i/m)^{1/2}} \phi(x, t)$$

$$\phi(x, t) = \exp [ik_0 |x| - i\omega_0 t] \int_0^\infty \exp \left[ -\alpha u + ik_0 u - \frac{(u + |x| - x_0 - \hbar k_0 t/m)^2}{(a^2 + 2\hbar t i/m)^{1/2}} \right] du$$

### Observación:

Si tomamos

$$\phi_0(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp [ikx] \phi_0(k, 0) dk$$



con  $\varphi_0(k, 0)$  es la Transformada de Fourier de  $\varphi_0(x, 0)$ , con

$$\varphi_0(k, 0) = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{a^2}{4}(k - k_0)^2 - i(k - k_0)x_0\right]$$

Calculando la función de onda para  $t > 0$ , tenemos

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) - \Psi^{(*)}(x, t)$$

$$\Psi^{(*)}(x, t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{a^2}{4}(k - k_0)^2 - i(k - k_0)x_0 + ik|x| - i\frac{\hbar k^2 t}{2m}\right]}{\alpha - ik} du$$

reescribiendo  $\Psi^{(*)}(x, t)$ , obtenemos

$$\Psi^{(*)}(x, t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{(|x| - x_0 - \hbar k_0/m)^2}{a^2 + 2\hbar t i/m} + ik_0|x| - i\omega_0 t\right] \equiv \text{AMP}(x, t)$$

donde

$$\text{AMP}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{1}{4}(a^2 + 2\hbar t i/m) \left[k - \frac{a^2 k_0 + 2i(|x| - x_0)}{a^2 + 2\hbar t i/m}\right]^2\right]}{\alpha - ik} dk$$

Las dos expresiones anteriores nos dicen que la función de onda está compuesta por dos ondas:

- Un que viaja hacia la izquierda (región  $x < 0$ );
- Otra hacia la derecha (región  $x > 0$ ).

A continuación mostraremos los resultados obtenidos por métodos numéricos para el scattering de un paquete Gaussiano.

#### REFERENCIAS

[1] R.P. Feynmann and A. R. Gibbs, *Quantum mechanics and path integral* (McGraw-Hill, New York, 1965).



---

# *El problema de los cuatro colores*

## *Un ejemplo del carácter esencialmente experimental de la actividad matemática*

H. G. Valqui <sup>(1)</sup>

---

La Matemática suele ser presentada como una ciencia lógico-deductiva, abstracta, precisa y rigurosa. Posiblemente dichos calificativos pueden ser bien aplicados a ciertos aspectos de la Matemática; sin embargo, aquellos calificativos suelen ser usados con una connotación ingenuamente exagerada. Ver, por ejemplo, [3].

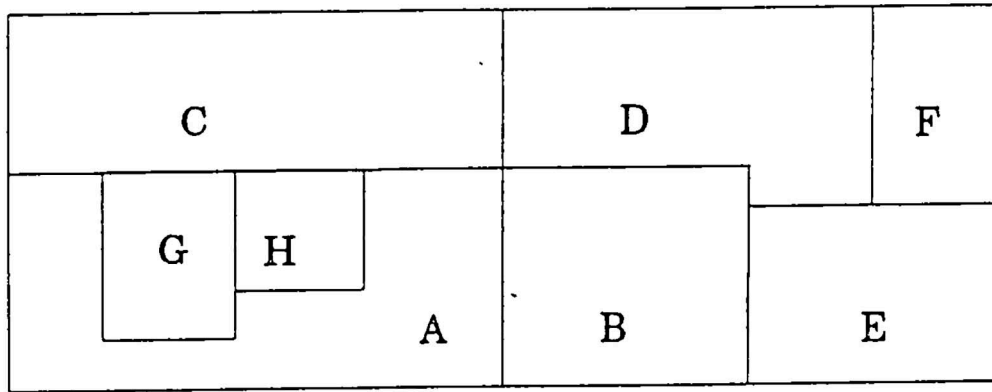
Desgraciadamente, y por muy variadas razones, dicha imagen mítica es tesoneramente cultivada por quienes se dedican casi exclusivamente a la enseñanza de la Matemática. Tanto es así que la "enseñanza" de esta ciencia es convertida en un verdadero proceso de domesticación matemática: el alumno debe memorizar docenas o cientos de teoremas y "aprender" sus demostraciones; igualmente debe tratar de dominar variadas técnicas que le permitan "resolver" gran número de problemas típicos. Todo ello, supuestamente, dentro del (equivocado) espíritu mencionado al comienzo de esta nota.

Diferente es el testimonio de los matemáticos activos en la construcción, reconstrucción, ampliación, crítica y retoque de la estructura matemática, y en el análisis de los problemas que desafían la potencia y elasticidad de dicha estructura. Quizás una afirmación del matemático L. Schwartz -ocurrida en una de sus conferencias ofrecidas en su visita en la UNI en la década del 60- pueda resumir significativamente mi argumentación: "La Teoría de Distribuciones (Funciones Generalizadas) la creé propiamente en una noche...", añadiendo, luego de una calculada pausa, "... después de trabajar cinco años en el asunto".

Considero que es importantísimo destacar el soporte experimental de la Matemática. Con tal fin he elegido exponer el llamado Problema de los Cuatro Colores, cuyo planteamiento es tan elemental, que está al alcance de un niño de siete años (que posea cierta experiencia en el coloreado de mapas), pero cuya solución ha exigido más de un siglo de experimentación por parte de calificados matemáticos y de numerosos aficionados atraídos por la sencillez del enunciado del problema. La solución del problema se obtuvo como resultado del trabajo interactivo entre matemáticos y computadoras, que tuvo lugar entre el año 1972 hasta mediados de 1976.

---

<sup>(1)</sup> UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.



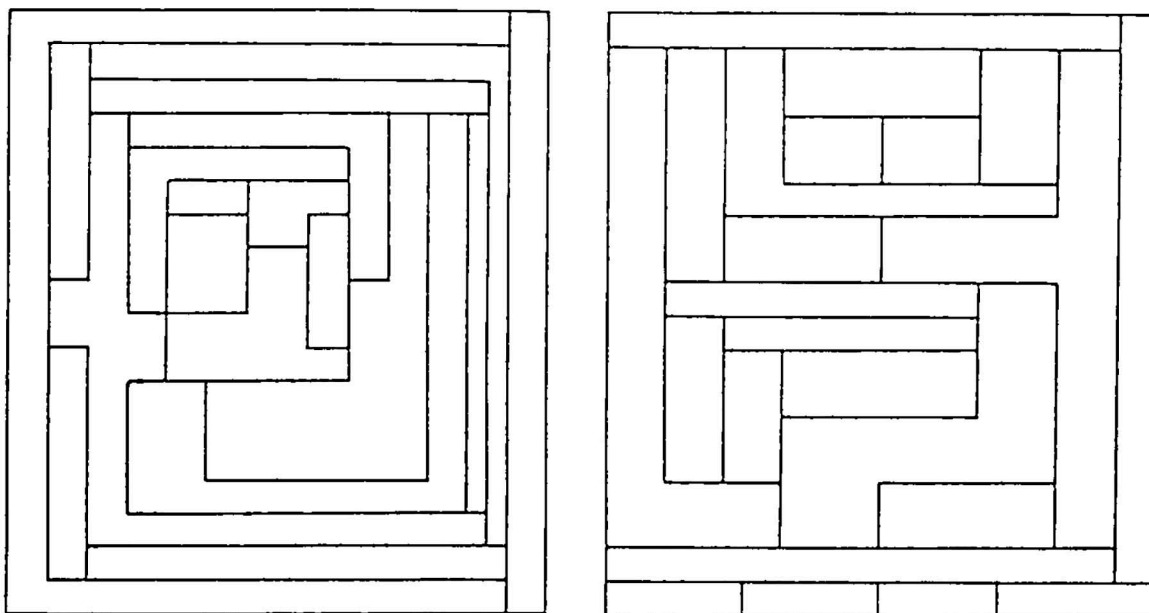
*Figura 1*

La historia comienza propiamente en 1852, cuando un alumno del matemático de Morgan le presentó una pregunta -que le había sido planteada a aquél- acerca de la posibilidad de demostrar matemáticamente lo que los cartógrafos ya conocían por la vía experimental: Todo mapa, sobre un plano o sobre una esfera (la Tierra), puede ser bien coloreado con sólo cuatro colores. En tal sentido es necesario aclarar lo siguiente,

- A1) Dos países vecinos por una frontera común, como es el caso de los países A y B, deben ser pintados con colores diferentes.
- A2) Dos países que no poseen una frontera común, por ejemplo A y E, o dos países que sólo tienen uno o varios puntos en común, por ejemplo A y D, pueden ser pintados del mismo color.
- A3) Si el mapa en consideración se encuentra sobre un plano (mapa planar), entonces la zona exterior al mapa debe ser considerada como un país suplementario -o como un océano- al que, por lo tanto, se le debe asignar un cierto color, distinto al color dado a cada uno de los países del borde.
- A4) Se trata de colorear, según las especificaciones anteriores, cualquier mapa hipotético, que podría estar constituido por tres o cuatro países, o por algunos billones de países.
- A5) Una cosa es demostrar la posibilidad de poder pintar cualquier mapa planar con sólo cuatro colores; otra cosa es construir técnicas de coloreado que permitan pintar con sólo cuatro colores cualquier mapa dado. En este sentido, si el mapa es complicado y de muchos países, puede resultar sumamente difícil, con la sólo guía del "buen criterio", pintarlo bien con menos de siete u ocho colores.
- A6) Por razones de comodidad puede resultar más conveniente asignar a cada país un número en vez de un color. Aquí usaremos los números 1, 2, 3, 4, 5.

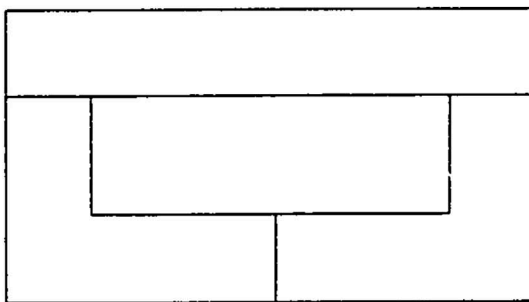
A7) Como un pequeño desafío se ofrecen, a los interesados, en la Figura 2, dos mapas que deberían ser pintados con sólo cuatro colores, respetando las especificaciones mencionadas anteriormente.

A continuación presento algunas consideraciones que deben facilitar la comprensión de algunas de las características del problema:

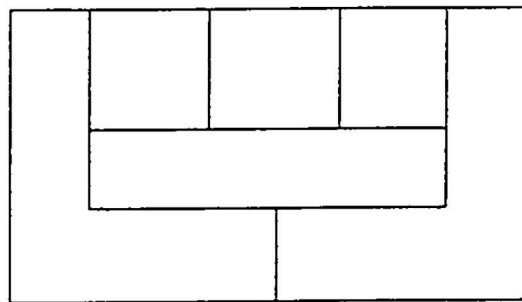


*Fig. 2 Ensaye pintar cada uno de los mapas usando sólo cuatro colores. Tenga en cuenta que el "océano" exterior también debe recibir un color.*

- 2a) Llamaremos Región a una parte conexa de un mapa (es decir, una región no posee subpartes, alguna de ellas aislada de las otras); entonces debe notarse que existen regiones constituidas por cuatro países mutuamente vecinos y que, por lo tanto, deben recibir cuatro colores diferentes. Es decir, para poder pintar un mapa cualquier (de más de 3 países) resulta necesario disponer de, por lo menos, cuatro colores diferentes. El problema se reduce entonces a verificar si dichos cuatro colores son suficientes para un buen coloreado.
- 2b) La necesidad de un mínimo de cuatro colores no proviene de la existencia de regiones constituida por cuatro países mutuamente vecinos. La región mostrada en la Fig. 3b no posee subregiones constituidas por cuatro países mutuamente vecinos, pero requiere ser pintada con, por lo menos, cuatro colores diferentes.
- 2c) Ni sobre el plano, ni sobre la esfera se pueden construir regiones constituidas por cinco países mutuamente vecinos; pero ello no implica -como equivocadamente han supuesto algunos "solucionadores" del problema- que no sea necesario recurrir a cinco colores para pintar ciertos mapas.



*Fig. 3a Región constituida por cuatro países mutuamente vecinos. Se requieren cuatro colores.*



*Fig. 3b Región que no contiene cuatro países mutuamente vecinos, pero que no puede ser pintada con menos de 4 colores.*

Aparentemente de Morgan debió reconocer su incapacidad para demostrar la corrección o falsedad de la conjetura de los Cuatro Colores, y planteó el problema a otros matemáticos. Uno de ellos fue A. Cayley quien, luego de agotar sus esfuerzos presentó el problema, en 1878, a consideración de la Sociedad Matemática de Londres. Según los archivos del caso, antes de transcurrir un año, el abogado y miembro de la Sociedad, A. B. Kempe, publicó un artículo en el que demostraba la validez de la conjetura en el sentido afirmativo. El trabajo de Kempe se reducía a demostrar que la existencia de un mapa necesariamente pentacromático implicaba una contradicción. A continuación desarrollamos dicho argumento:

- 3a) Supongamos que para pintar un mapa cualquiera fuesen necesarios (por lo menos) cinco colores.
- 3b) Es fácil ver que la exigencia anterior no es válida para un mapa constituido por un número pequeño de países, por ejemplo, tres o cuatro países. Es decir, la exigencia de los cinco colores sería válida sólo para mapas constituidos por un número de países que no sea inferior a un cierto número mínimo  $n^{\circ}$ , a partir del cual ya aparecen (¿o pueden aparecer?) mapas que requieren cinco colores.
- 3c) Entonces, un mapa constituido por menos de  $n^{\circ}$  países, debería poder ser pintado con menos de cinco colores.
- 3d) Sea  $M^{\circ}$  un mapa constituido por  $n^{\circ}$  países y que requiere ser pintado con cinco colores.
- 3e) Supongamos que  $M^{\circ}$  posea un país que, sin modificar los colores de los países restantes, pueda ser anexado a uno de los países que le son vecinos. En el mapa de la Fig. 4a es posible anexar el país A al B; pero, sin modificar los colores de los países vecinos, no se lo puede anexar al C.
- 3f) El mapa reducido,  $M^{\circ\circ}$ , obtenido al haber anexado A a B, posee sólo  $n^{\circ}-1$  países y, por lo tanto, puede ser pintado con sólo cuatro colores. Para el ejemplo considerado, la Fig. 4c muestra una posible recoloración de  $M^{\circ\circ}$ .

- 3g) Ahora supongamos que exista una forma de recolorar  $M^{\infty}$  (con sólo cuatro colores), de manera que el espacio correspondiente al país anteriormente suprimido quede rodeado por países de sólo dos o tres colores diferentes. Entonces el país suprimido puede reaparecer asignándosele el cuarto color.
- 3h) Como consecuencia de lo anterior deduciríamos que, en verdad,  $M^{\infty}$  no requeriría cinco colores, ya que hemos podido colorearlo con sólo cuatro.
- 3i) Bajo las dos suposiciones anteriores (la existencia en  $M^{\infty}$  de un país anexable, y la posibilidad de recolorar  $M^{\infty}$  de manera que el "rastros" de dicho país quede rodeado por vecinos de sólo 2 ó 3 colores diferentes) se puede ver que la existencia de  $M^{\infty}$  ha producido una contradicción. Entonces,  $M^{\infty}$  no podría existir. (Excepto para los mapas en los que no se cumplan las mencionadas condiciones).
- 3j) Es decir, no existiría un país que necesite ser pintado con por lo menos cinco colores. Bastarían cuatro colores.

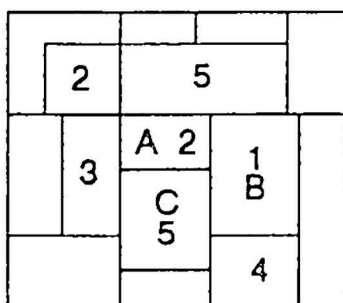


Fig. 4a El mapa  $M^5$  posee  $n^2$  países y exige cinco colores. Sólo se muestra el coloreado de ciertos países.

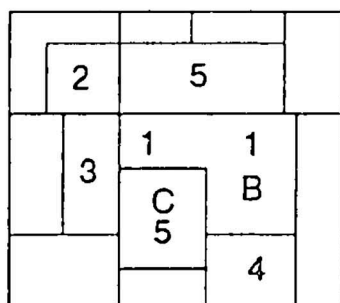


Fig. 4b  $M^{n^2}$  posee sólo  $n^2-1$  países; luego puede ser recolorado con sólo 4 colores.

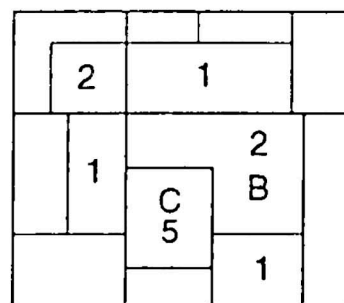
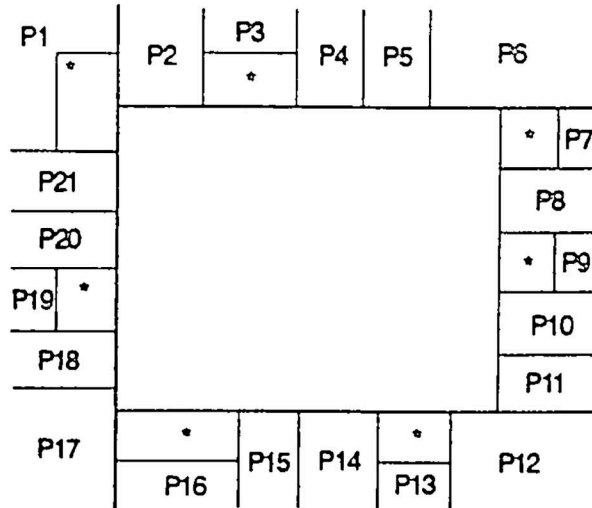


Fig. 4c  $M^{n^2}$  ha sido repintado con sólo 4 colores. El país suprimido puede reaparecer con el color 4 ó con el 5.

Así A. B. Kempe redujo su demostración a la verificación de las dos mencionadas suposiciones. Para ello, primeramente definió un mapa normal,  $M_n$ , que es un mapa en el que no existe un país que encierre totalmente a otros, ni existe ningún punto en el que concurren más de tres países. Luego demostró que todo mapa es normalizable, en el sentido que todo mapa puede ser convertido en un mapa normal, por medio del mecanismo de añadir algunas nuevas fronteras, sin necesidad de incrementar el número de colores empleados en el pintado del mapa original. Después de esto, y sin perder generalidad, todas las operaciones y demostraciones del caso se pueden realizar considerando sólo mapas normales.

Veamos cómo "normalizar" una región en la que existe un punto donde concurren  $m$  países. Como ilustración mostramos un ejemplo con  $m=21$ .

El procedimiento es el siguiente: Alrededor del punto en consideración trazamos una circunferencia (o un rectángulo), de manera que, ahora, la región ha quedado constituida por  $m+1$  países. Luego, de entre los países que rodean al rectángulo en consideración elegimos un conjunto de ellos que posean un mismo color. Suponiendo que, por ejemplo, los países P1, P3, P7, P9, P13, P16 y P19 posean todos el mismo color  $c_1$ , los aislaremos del país rectángulo, creando los correspondientes países intermedios (con "estrella"), como se muestra. Ahora la región es normal, aunque posee  $m + 1 + 7$  países.



Por supuesto que ahora podemos pintar al país central con el color  $c_1$ . Cada país "estrella" posee cuatro vecinos, dos de los cuales son del color  $c_1$ ; los otros dos tendrán los colores  $c_2$  y  $c_3$ , que eventualmente pueden coincidir. Entonces, cada país "estrella" puede tomar el color  $c_4$ . Es decir, la región ha sido normalizada, sin que se haya incrementado el número de colores.

En la siguiente etapa, Kempe demostró que en todo  $M_n$  existen necesariamente países con menos de seis vecinos. Como tal hecho constituye un punto clave en la argumentación de Kempe, presentamos aquí la correspondiente demostración.

$$p = 17 + 1 = 18$$

$$f = 48 \quad v = 32$$

$$p_2 = 2 \quad p_3 = 0$$

$$p_4 = 5 \quad p_5 = 5$$

$$p_6 = 3 \quad p_7 = 0$$

$$p_8 = 1 \quad p_9 = 1$$

$$p_{10} = 0 \quad p_{11} = 0$$

$$p_{12} = 1 \quad p_{13} = 0$$

$$p + v = f + 2 = 50$$

$$\sum k \cdot p_k = 96$$

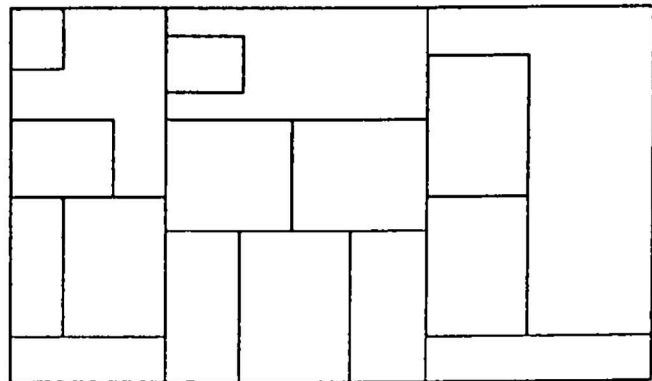


Fig. 5 Ejemplo de un  $M_n$  con  $p = 18$  países,  $f = 48$  fronteras y  $v = 32$  vértices. En él existen inevitablemente países con menos de seis vecinos.

Sea  $p$  el número de países que constituyen un cierto  $M_n$ , incluyendo el país suplementario exterior; sea  $f$  el número de fronteras entre dichos países (teniendo presente que dos países vecinos pueden tener más de una frontera común, como en el caso mostrado en la esquina superior izquierda),  $v$  el número de vértices en el que concurren tres países (no existe otro tipo de vértice, ya que se trata de un mapa normal); entonces, de acuerdo a la fórmula de Euler para poliedros (un mapa normal, en el plano, complementado con el "océano", constituye topológicamente un poliedro), deberá cumplirse que  $p + v = f + 2$ .

Por otra parte, si  $p_k$  es el número de países que poseen  $k$  vértices (y, desde luego, también  $k$  fronteras), entonces  $svf = \sum k \cdot p_k$ , con  $k = 2 \dots p$ , es la suma de todos los vértices (y la suma de todas las fronteras) que poseen todos los países del mapa en consideración. Ahora, teniendo presente que las fronteras son contadas dos veces (pues cada frontera pertenece a dos países) y los vértices han sido contados tres veces (pues cada vértice pertenece a tres países de un  $M_n$ ), podemos escribir,

$$svf = 2 \cdot f = 3 \cdot v \qquad p = \sum_{k=2} p_k$$

Reemplazando en la fórmula de Euler,

$$\sum_{k=2} p_k + (1/3) \cdot \sum_{k=2} k \cdot p_k = (1/2) \cdot \sum_{k=2} k \cdot p_k + 2$$

de donde,

$$\sum_{k=2} (6 - k) \cdot p_k = 12$$

y también

$$4 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k=7} (k - 6) \cdot p_k \geq 12$$

donde vemos que es imposible que simultáneamente se anulen  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  y  $p_5$ . Es decir, en todo mapa normal -y por lo tanto, en cada mapa- existen necesariamente países con dos, tres, cuatro o cinco vecinos.

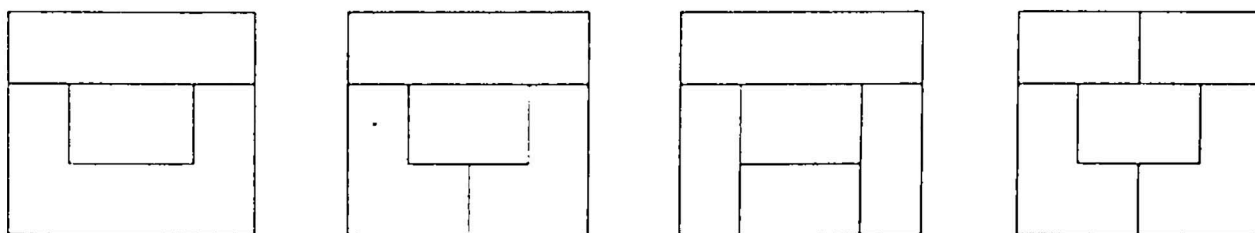


Fig. 6 Regiones donde aparecen países con dos, tres, cuatro o cinco vecinos.



En el caso de países con dos o tres vecinos se pueden anexar dichos países a cualquiera de sus vecinos. Posteriormente, al recolorar el correspondiente mapa  $M^{\infty}$ , dichos países reaparecerán rodeados por vecinos que poseen no más de tres colores distintos.

Para el caso en el que exista algún país con cuatro vecinos,  $p_4 \neq 0$ , él reaparecerá en  $M^{\infty}$  rodeado por cuatro países. Si, por lo menos dos de ellos poseen el mismo color, no existe mayor dificultad para asignarle un color al país que reaparece. Si, en cambio, los cuatro vecinos poseen colores distintos, entonces surge la necesidad de investigar si es posible recolorar  $M^{\infty}$  de manera que dos de dichos vecinos adquieran el mismo color. Kempe demostró que tal cosa era siempre posible.

Por último, en el caso que exista algún país con cinco vecinos,  $p_5 \neq 0$ , Kempe demostró que el correspondiente mapa también era coloreable con sólo cuatro colores. Con ello había demostrado afirmativamente la conjetura de los cuatro colores.

Unos años más tarde, en 1890, P. J. Heawood encontró que la demostración de Kempe para el caso  $p_5 \neq 0$  era incorrecta y mostró que el procedimiento correcto debía ser harto laborioso. También demostró que cinco colores eran suficientes para pintar cualquier mapa sobre un plano o sobre una esfera; además demostró que para pintar bien un mapa sobre una superficie toroidal (por ejemplo, la superficie de una cámara lisa, sin válvula ni costuras), donde pueden existir siete países mutuamente vecinos, era necesario y suficiente disponer de siete colores.

Posteriormente otros matemáticos se ocuparon del problema, sea para complementar el trabajo de Kempe, sea desarrollando otros métodos de demostración. En 1913 ya se había demostrado que  $n^{\circ} > 22$  y en 1950 se llegó a  $n^{\circ} > 36$  (es decir, cualquier mapa con menos de 36 países puede ser bien coloreado con sólo cuatro colores).

A partir de 1936 el matemático H. Heesch comenzó a trabajar en el problema; en 1950 estimaba que sería necesario analizar unas 10 000 configuraciones de regiones reducibles para poder obtener conclusiones definitivas. Heesch creó nuevos métodos para atacar el problema (entre ellos, el grafo dual de un mapa y el llamado proceso de descarga de vecindades), recurriendo inclusive al auxilio de computadoras (de ese tiempo), pero sin poder alcanzar el objetivo propuesto.

En 1972, los matemáticos K. Appel y U. Haken, siguiendo las sendas trazadas por Kempe y Heesch atacaron el problema dispuestos a servirse



significativamente de las ventajas que se obtienen del uso de las computadoras. En un largo proceso de interacción, entre matemáticos que planeaban ciertos experimentos y computadoras que los realizaban, proporcionando de esta manera información para que los matemáticos prepararan nuevos experimentos, la Conjetura de los Cuatro Colores quedó, por fin, demostrada afirmativamente en Junio de 1976.

En tal trabajo que les había tomado cuatro años, los matemáticos Appel y Haken habían analizado manualmente miles de situaciones diferentes (lo cual les permitía preparar los experimentos que deberían realizar las computadoras) y usado unas 1200 horas de tres computadoras.

Después de más de un siglo de experimentación, los matemáticos habían logrado demostrar la validez de una conjetura "casi evidente"; pero, habían tenido que recurrir a herramientas que se salen de los marcos convencionales. Los matemáticos que deseen o necesiten verificar la demostración de Appel y Haken no lo pueden hacer sin el auxilio de la computadora. Por tal razón algunos matemáticos opinan que la validez de la demostración debe ser mantenida en suspenso, hasta que se construya una demostración convencional, o una demostración convencionalmente verificable.

Pero, como manifiestan Appel y Haken, quizá sea ésta la única manera de demostrar la Conjetura de los Cuatro Colores, y de demostrar otras conjeturas matemáticas aún pendientes, o que surjan en el futuro. Si ello fuese así, las computadoras habrían abierto nuevos senderos en las argumentaciones y demostraciones matemáticas, lo que permitiría a los matemáticos alcanzar ciertas regiones (de la estructura formal del pensamiento matemático) antes inaccesible para ellos.

Más de un siglo de experimentación alrededor de un problema cartográfico concreto, de demostraciones ilusorias (no sólo por parte de aficionados ilusos, sino también por parte de ilustres matemáticos), de ensayos y errores, en un esfuerzo inductivo por plantear y resolver múltiples problemas conexos; y una demostración que no puede ser fácilmente aceptada por todo el mundo matemático; ni, de hecho, cualquier matemático, a pesar de poseer toda la información básica sobre el tema, puede verificar la validez de aquella. Sin embargo, para muchos, lamentablemente, la Matemática seguirá siendo sólo el epílogo (o la punta del iceberg) del trabajo de los matemáticos.

Finalmente, quiero dejar escrito que la experimentación matemática no es (necesariamente) una actividad de alto nivel, sino una actividad en la que precisamente debería insistirse y que debería fomentarse desde los niveles más

elementales, en vez de crear en los niños y en los jóvenes, amargura y resentimiento contra lo que (explicablemente) les resulta ininteligible.

**REFERENCIAS:**

[1] *K. Appel, W. Haken: La Solución del Problema del Mapa de los Cuatro Colores. Traducción del Scientific American, 1978.*

[2] *H. M. Rieker, W. F. Rieker: Die Lösung des Vierfarben-Problems. Bild der Wissenschaft 7/1977.*

[3] *H. G. Valqui: Rigor, abstracción y claridad en la Matemática. Actas del Tercer Coloquio Nacional de Matemática, 1985.*

---

## *¿Existe la longitud de una varilla?*

Holger G. Valqui (\*)

---

*La pregunta del título no parece ser muy sensata. En lo que sigue trataremos de mostrar que ella es pertinente, pues la propiedad "longitud" no existe como ingenuamente solemos imaginárnosla. Pero sí existe, porque ha sido inventada. Y tal invención ha revolucionado la física, y sus "alrededores".*

A todos nos parece natural que los cuerpos alargados posean una propiedad que hemos bautizado como **longitud**. Otra propiedad que solemos reconocer en los objetos es aquella que conocemos como **belleza**.

Una de las tareas de la ciencia consiste en tratar de descubrir las características objetivas que posea una propiedad que es atribuida a los diversos objetos del universo. Es decir, en lograr que dicha propiedad sea reconocida, usada y transmitida sin mayor deterioro. Para realizar tal objetivo se ha inventado lo que se conoce como **medición**.

Una medición consiste en un procedimiento, o cadena de procedimientos, que aplicados a un objeto dado -teniendo en la mira a una determinada propiedad del mismo- permite representar a la citada propiedad por medio de algunos números y otros símbolos complementarios.

Para obtener la longitud de una varilla (propiedad: longitud) se realiza un proceso de medición. Para calificar a la Señorita Perú 1994 (propiedad: belleza femenina) se realiza un proceso de "medición". Sin embargo, existe la sospecha de que ambas mediciones poseen diferentes grados de confianza: Uno se preocupa por la calidad de la medición de la longitud, y no suele dudar sobre la validez del resultado obtenido. En cambio, tenemos la convicción de que la calificación de la belleza femenina depende de una serie de factores que no aparecen en el correspondiente proceso de "medición".

¿Existen criterios para calificar la calidad de una medición? ¿Para distinguir entre mediciones y "mediciones"?

Un criterio para verificar la objetividad de una medición consiste en repetir el proceso de medición: el nuevo resultado debe coincidir con el primero (el procedimiento honesto consiste en no tratar de obtener los mismos resultados anteriores: en "olvidarse" de los detalles de la primera medición).

---

(\*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.

La prueba de objetividad debe poder pasar, además, una exigencia mayor: el resultado debe permanecer inalterado cuando, siguiendo el procedimiento especificado para el caso, cambian las personas que realizan la medición. En tal sentido la medición de la longitud de una varilla es objetiva, mientras que la elección de la Señorita Perú no lo es. (Debe tenerse presente que, por una parte, existen otras exigencias adicionales para asegurar la objetividad de una medición; y por otra parte, que existen diferentes grados de objetividad).

Más arriba he mencionado que la propiedad "longitud de una varilla" satisface la mayor exigencia objetividad. Luego, la propiedad **longitud** realmente existe. Veamos en que sentido existe dicha propiedad.

Supongamos que hemos realizado la medición con una regla de 30 centímetros (con marcas hasta los milímetros), y que el resultado de la medición haya sido 120,3 cm.

A continuación supongamos que alguien desconfía del resultado obtenido y se propone repetir el proceso de medición. Sería una gran casualidad (o un engaño) si en la segunda medición se obtuviese el mismo resultado mencionado anteriormente. Posiblemente el resultado sea 120,1 cm; 120,7 cm; 119,7 o algún número vecino a los mencionados.

Justamente, una propiedad que tienen las mediciones (estoy mencionando un hecho experimental) es que si **una medición se repite, cada vez en las mismas condiciones de trabajo**, los resultados numéricos que se obtienen no son necesariamente coincidentes: los resultados numéricos suelen caer dentro de un cierto intervalo de medición. Esta es una característica reconocida como propia de un proceso de medición científica, realizado cuidadosamente, con determinado grado de exactitud.

¿Cómo se explica, entonces, que usualmente se afirme que la longitud de una varilla es 123,5 cm, o que la masa de la porción de azúcar, que hemos comprado, es de 2 kg?

Existen variadas razones para aceptar que una varilla tiene 123,5 cm de longitud, o en general, para aceptar que cierta propiedad tiene tal medida, a pesar que al repetir el proceso de medición se puedan obtener resultados diferentes al especificado.

Mencionaré tres razones justificatorias (pero existen más):

1. La no disponibilidad de los mecanismos que permitan verificar la validez de la medición en cuestión (por ejemplo, no disponemos de una balanza para comprobar la sospecha de que nos han "robado" al pesar los 2 kg de azúcar que hemos comprado).

2. La poca importancia que suele tener una pequeña alteración del valor de la medición (sospechamos que en cada kilogramo de azúcar "faltan" algunos gramos; pero nos parece muy engorroso reclamar por tan poca cantidad).

3. Poseemos una idea muy vaga sobre el significado de la medida en consideración (por ejemplo, cuando en una medicina se afirma que contiene 10 mg de niacinamida).

Es decir, usualmente no le asignamos mayor importancia al hecho que una varilla mida 123,5 cm ó 124,0 cm, o alguna otra cifra vecina.

Por otra parte, si al medir cuidadosamente la longitud de una varilla no obtenemos cada vez el mismo número, sino, en general, números diferentes, entonces ¿cuál es la medida correcta de la longitud de la varilla? ¿cuál es la verdadera longitud de la varilla?

Después de numerosas discusiones y numerosos experimentos -a lo largo de algunos siglos- los científicos llegaron a la conclusión de que "no existe la verdadera longitud de una varilla". No existe esa supuesta medida perfecta de la longitud: medida que, como suele creerse, nosotros los humanos sólo podemos obtener con cierto error. Esa medida ideal no existe.

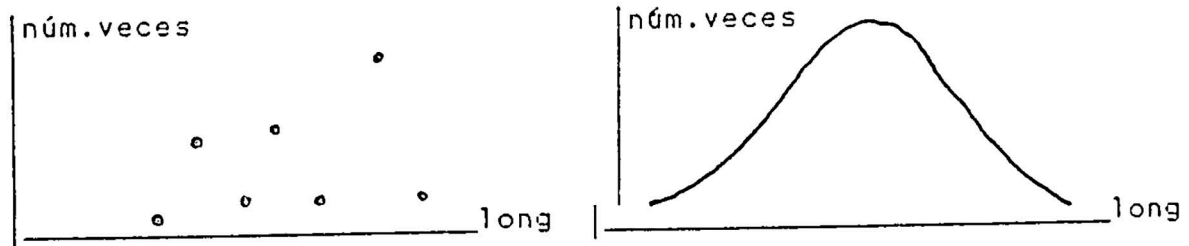
LA LONGITUD DE UNA VARILLA NO ES UN NUMERO, SINO ES TODO EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS QUE SE OBTIENEN EN LAS MEDICIONES QUE SE REALIZAN (cuidadosamente) BAJO UN MISMO PROCEDIMIENTO.

Esta conclusión, siendo correcta, tiene una gran desventaja práctica: no es fácil, ni cómodo, trabajar con un conjunto de muchos números. Por otra parte, no parece acertado descartar la idea intuitiva que tenemos acerca de la medición representada por un sólo número.

Para considerar la posibilidad de simplificar la información ofrecida por el conjunto de números, fruto de una medición, conviene analizar las características más significativas -detectadas experimentalmente- de dicho conjunto:

- M1) La mayoría de los resultados numéricos, fruto de una medición repetida, suelen encontrarse agrupados en un intervalo más o menos angosto.
- M2) Si una medición se repite pocas veces, los resultados numéricos obtenidos no muestran ninguna tendencia especial (aparte de aparecer más o menos agrupados).
- M3) Cuando las mediciones de una cierta propiedad de un objeto son repetidas un gran número de veces, los resultados numéricos muestran una "tendencia gaussiana":  
Existe un cierto número tal que los resultados numéricos vecinos a él aparecen muchas veces, mientras que los resultados alejados de él aparecen menos veces cuanto más alejados estén.

A la curva que se obtiene de representar el número de veces que aparece cada posible resultado de una medición se la denomina **curva de distribución de mediciones**. Como podemos apreciar, la mencionada curva está constituida por un conjunto discreto de puntos; pero si el número de puntos considerados es suficientemente grande, la curva puede ser representada como si fuese continua (entre otras razones, una curva continua es más fácil de representar).



*Distribución "gaussiana" de resultados numéricos.*

*Distribución no "gaussiana".*

- M4) La curva de distribución de las mediciones de una cierta propiedad de un objeto varían según el grado de entrenamiento de quien (o quienes) realiza(n) la medición, y según la calidad de los instrumentos usados en la medición. Pero las correspondientes curvas de distribución tendrán los resultados numéricos más frecuentes (es decir, allí donde las curvas son más altas) más o menos coincidentes. De otro lado, las mediciones realizadas por personas calificadas o por quienes trabajan con instrumentos más tecnificados, resultan representadas por curvas más angostas.
- M5) Por más cuidado que se ponga en la medición, y por mucho que uno trate de obtener resultados numéricos "muy coincidentes" (al repetirse muchas veces la misma medición), cuando se procede honestamente (lo cual no es un asunto tan fácil), no puede evitarse una "distribución" de dichos resultados numéricos.
- M6) El cociente entre el número de veces que aparece un resultado numérico y el número de mediciones realizadas (NM) varía sensiblemente al variar NM si el número NM es pequeño, pero tiende a permanecer constante cuando NM crece.

Las características mencionadas anteriormente son propias de ciertas distribuciones de probabilidades: Consideremos el caso de N monedas.

Si lanzamos (honestamente) las N monedas, obtendremos que  $nc$  de ellas habrán caído "cara", donde  $0 \leq nc \leq N$ . Si repetimos el experimento de lanzar las N monedas, obtendremos que ahora  $nc'$  de ellas habrán caído "cara". Cada



vez que repitamos el mismo experimento obtendremos un cierto número de "caras".

El paralelismo entre este proceso probabilístico y un proceso de medición es el siguiente: Si lanzamos  $N$  monedas, entonces  $nn$  de ellas "deben caer cara". Si deseamos saber cuánto vale  $nn$  realizamos el correspondiente experimento de lanzar las  $N$  monedas, obteniendo cierto valor numérico para  $nn$ . Pero si repetimos el experimento anterior, entonces los resultados numéricos que se obtienen no serán todos coincidentes, sino que ellos se distribuirán en la forma descrita más arriba para el caso de las mediciones. Por ejemplo:

**Tabla** que muestra el número de veces que se han obtenido  $N_c$  "caras", al lanzar  $N_e$  veces un conjunto de 25 monedas. Por ejemplo, se han obtenido 11 veces  $N_c = 6$  "caras" al lanzar las 25 monedas un total de  $N_e = 2500$  veces; por otra parte, en 30000 lanzamientos de las 25 monedas sólo una vez se obtuvieron tres "caras", ninguna vez se obtuvieron dos caras.

$N_c \backslash N_e$	10	20	30	40	50	100	500	1000	2500	30000
00		0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
04	0	0	1	0	0	0	0	1	0	10
05	0	0	0	0	0	0	0	5	0	56
06	0	0	0	0	0	0	2	9	11	142
07	1	0	1	0	2	2	8	16	36	429
08	0	0	1	2	0	5	15	27	98	920
09	1	1	1	2	0	5	32	60	161	1794
10	1	1	2	5	5	13	46	99	240	2842
11	2	2	5	1	10	23	69	127	328	3873
12	1	2	6	7	7	10	79	143	390	4640
13	1	5	7	7	5	13	86	149	380	4736
14	2	2	3	5	5	11	63	121	340	4024
15	1	5	2	3	6	9	41	113	231	2982
16	0	1	1	4	3	5	39	72	152	1833
17	0	1	0	1	5	1	16	36	81	1054
18	0	0	0	0	1	1	2	19	30	460
19	0	0	0	2	1	2	1	3	19	147
20	0	0	0	1	0	0	1	0	2	40
21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	13
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
vp	11,6	13,3	11,3	11,6	13,06	12,13	12,46	12,63	12,47	12,55

Cuando los científicos se convencieron de que realmente no existía la longitud ideal de una varilla (o la medida ideal de alguna propiedad), sino que tal propiedad quedaba representada por un conjunto de números, entonces tuvieron que enfrentarse a la necesidad de construir (o inventar), a partir del conjunto de mediciones (es decir, de la curva de distribución de las mediciones) algún número que, de alguna manera, representara adecuadamente a la ilusoria medida ideal. En tal sentido se consideraron diferentes posibilidades; por ejemplo la medida más frecuente (es decir, el número que en las mediciones había aparecido el mayor número de veces); o la medida media (es decir, el número que equidistaba de la medida de menor valor y la de mayor valor). Después de una serie de análisis -donde se tuvo presente el mencionado paralelismo probabilístico- se optó por considerar al promedio de todos los resultados numéricos obtenidos en una medición como el representante de la longitud ideal de la varilla considerada.

El valor promedio,  $v_p$ , de los resultados numéricos obtenidos en un proceso de medición posee una propiedad muy importante: **es estable**. Este significa lo siguiente:

Cuando se calcula  $v_p$  para un número pequeño de mediciones, dicho promedio varía sensiblemente al incrementar el número de dichas mediciones; pero al crecer el número de mediciones realizadas, el valor de  $v_p$  varía cada vez menos, hasta que, para un gran número de mediciones dicho número  $v_p$  prácticamente no es modificado por las nuevas mediciones.

Esta propiedad de estabilidad también se cumple en los procesos probabilísticos, como puede apreciarse en el ejemplo mostrado anteriormente.

Es decir, el valor promedio (aritmético) de las  $N$  mediciones realizadas representa a la medida de la propiedad en consideración. Tal representación es convencional, pero ha demostrado ser muy conveniente.

Sea  $N$  el número de mediciones realizadas. Sea  $n_k$  el número de veces que se ha obtenido el valor numérico  $v_k$ ; entonces se debe cumplir que

$$\sum n_k = N, \quad v_p = \sum n_k \cdot v_k / N. \quad (01)$$

Si definimos  $f_k = n_k/N$ , la frecuencia con la que aparece el resultado numérico  $v_k$ , podemos escribir,

$$v_p = \sum f_k \cdot v_k \quad (02)$$



Por otra parte, teniendo presente que  $\sum f_k = 1$ , y que los valores de  $f_k$  tienden a estabilizarse cuando  $N$  crece, se define  $p_k =$  Probabilidad de obtener el resultado  $v_k$ , como

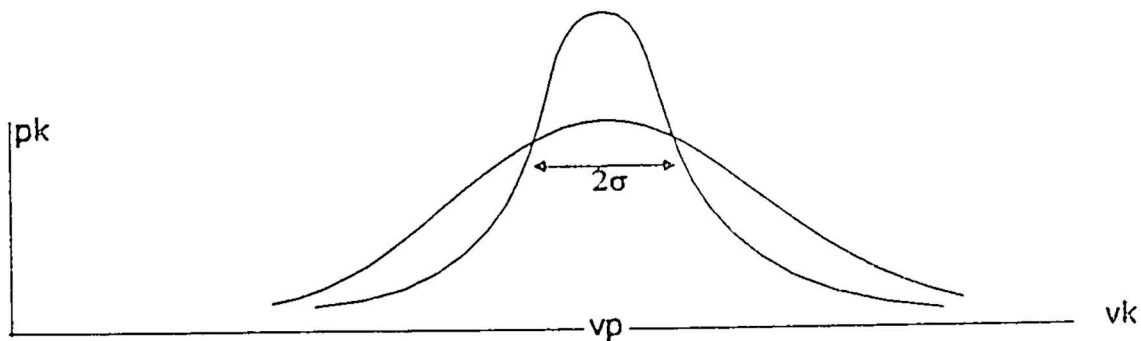
$$p_k = \lim f_k \text{ cuando } N \rightarrow \infty \quad (03)$$

donde, para situaciones reales, dicho límite debe asumirse cuando  $N$  es "suficientemente grande" (se trata de una condición que determinan los interesados en la medición, de acuerdo con una serie de criterios de conveniencia), es decir cuando  $f_k$  es suficientemente estable. Entonces, para el **valor promedio estable** podemos escribir,

$$v_p = \sum p_k \cdot v_k \quad (04)$$

Entonces podemos decir que la convención científica para representar la medida de una propiedad está expresada por el valor más probable de entre los diferentes resultados numéricos obtenidos (donde, debe tenerse presente que tal valor más probable puede no coincidir con ninguno de los valores numéricos obtenidos en las mediciones realizadas).

Por otra parte, es posible que dos mediciones diferentes (es decir, curvas de distribución diferentes) den un mismo valor promedio. Intuitivamente podemos apreciar que la curva más angosta (es la que más se parece al resultado ideal, en el que todas las mediciones darían un mismo resultado numérico) es la "mejor". Es decir, el ancho de la curva representa una medida de la **incertidumbre** con la que hemos obtenido nuestros resultados.



*Dos distribuciones diferentes tienen el mismo valor promedio, pero diferentes grados de incertidumbre.*

Estamos suponiendo que las mediciones han sido realizadas cuidadosamente, de manera que prácticamente podemos decir que no existen errores de medición, sino incertidumbre en la medición. No se puede evitar que las mediciones se realicen con cierta incertidumbre (el modelo ideal supone que tal incertidumbre es nula).

Por supuesto que la curva de distribución, además, se verá afectada por los posibles errores que se cometan en la medición (por falta de cuidado en el análisis de las asunciones realizadas con respecto a las condiciones de contorno imperantes, con respecto a los principios físicos en juego, o por falta de cuidado al realizar las operaciones de medición).

Para representar el grado de incertidumbre de una medición los científicos analizaron diferentes posibilidades; llegando a la conclusión de que la llamada **desviación media cuadrática**,  $\sigma$ , es la cantidad que mejor representa a tal incertidumbre:

$$\sigma^2 = \sum p_k \cdot (v_p - v_k)^2 \quad (05)$$

donde, para las mediciones que muestran la "tendencia gaussiana", dicha desviación media cuadrática expresa el "semi-ancho" de la curva de distribución, de manera que la gran parte de los valores medidos se encontrarán en el intervalo numérico  $(v_p - \sigma, v_p + \sigma)$ .

Entonces, el conjunto de valores numéricos,  $\{v_k\}$ , obtenidos en una medición y que, consecuentemente, representan a dicha medición, suelen ser reemplazados, por razones prácticas, por el par de números,  $v_p, \sigma$ , los mismos que supuestamente representan adecuadamente a dicho conjunto, y se dice que la medida tiene el valor  $v_p$  con la incertidumbre (aunque la costumbre ha impuesto el nombre de "error de medición")  $\sigma$ , lo que suele ser abreviado diciendo que la medida de la propiedad considerada es  $v_p \pm \sigma$ .

De lo dicho podemos deducir que si medimos la longitud de una varilla de longitud  $L$  (que es el valor promedio) no nos debe extrañar que nuestro resultado numérico sea (un poquito) diferente al valor numérico  $L$ . Tampoco nos debería extrañar que al comparar directamente las longitudes de dos varillas de igual longitud  $L$ , dichas longitudes no coincidan.

Finalmente quiero mencionar que el hecho de que la medición -de una propiedad de un cuerpo- esté realmente representada por un conjunto (abundante) de números puede ser usado como punto de partida para construir la actual Teoría Cuántica.

Diagramación, edición e impresión realizada por  
Editorial HOZLO S.R.L.  
Psje. Santa Rosa 191-501 Telf/Fax: 428-4071  
Junio de 1995