

ISSN: 1813-3894

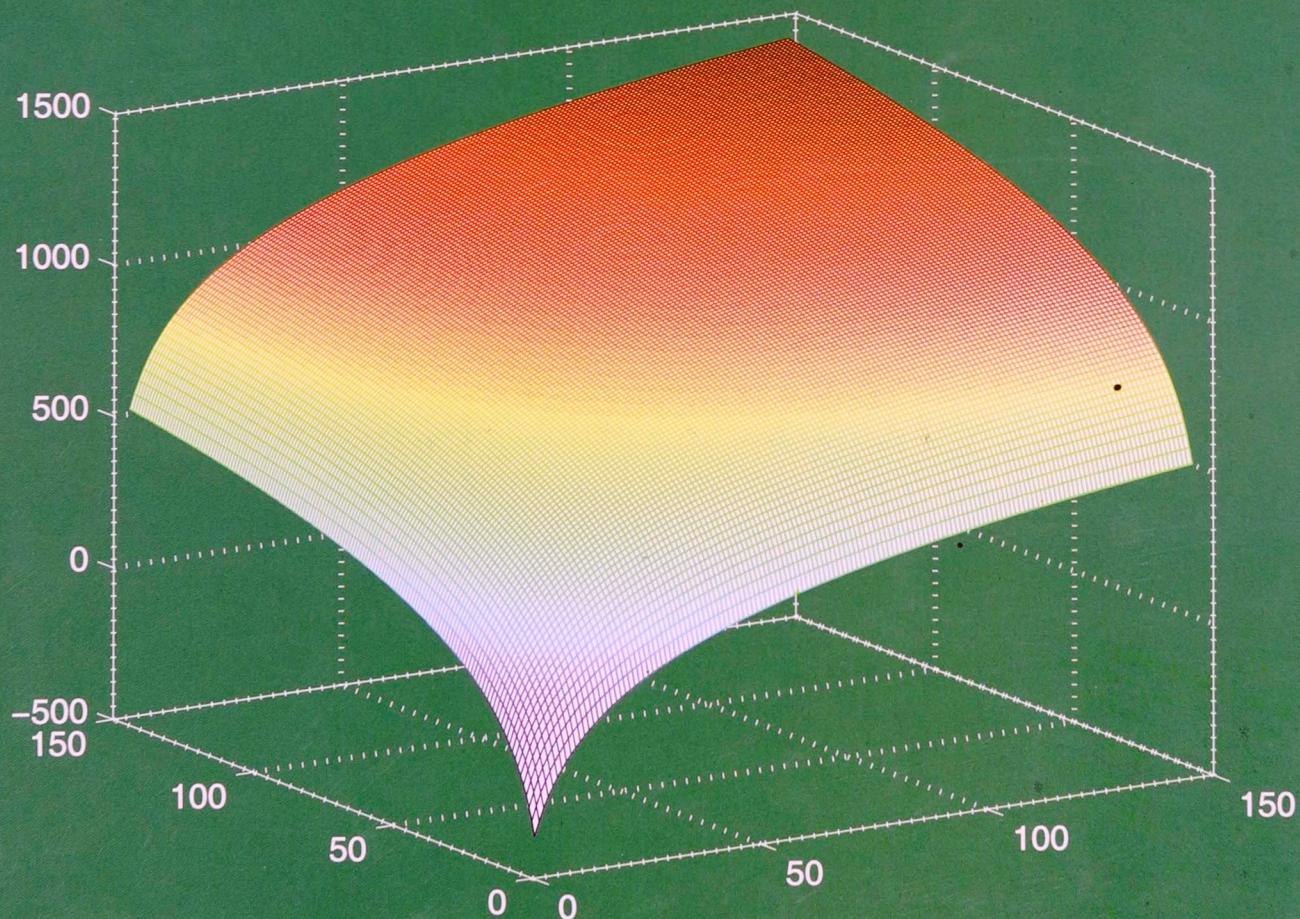
REVCIUNI

VOLUMEN 11

NÚMERO 1

ENERO-DICIEMBRE 2007

Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

LIMA - PERÚ

Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI - REVCIUNI
Volumen 11, Número 1, enero - diciembre 2007
ISSN: 1813-3894

Publicada por el Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Nacional de Ingeniería

Director del Instituto de Investigación
Dr. Wilfredo Sosa Sandoval

Editor: Dr. Rosendo Ochoa Jiménez

Comité Científico

- Dr. Wilfredo Hernández
- Dr. Roger Metzger Alván
- Dipl. Holger Valqui Casas

La revista se distribuye en la Facultad de Ciencias - UNI
Av. Túpac Amaru 210 - Rímac
Lima - Perú
Teléfono: (51-1) 381 - 3868
Página web: <http://fc.uni.edu.pe/revciuni>
E-mail:rochoaj@uni.edu.pe

Registro de Depósito legal No 15010199-3597
Revista indexada en el LATINDEX

Impresión: Diagramaciones y Diseño Gráfico FABET
Jr. José Mendiburo y Bonet 134. Teléfonos: 567-9576 / 996307721
. E-mail: fabianamensajes@yahoo.com, fabianabeatriz@hotmail.com

EDITORIAL

En la actualidad la ciencia y tecnología cobra un rol preponderante en la permanencia y supervivencia del ser humano, la modernidad ha traído como consecuencia una serie de condiciones medio ambientales que dificultan su desarrollo integral y en particular su adaptabilidad frente a las difíciles condiciones de vida, es así que ante esta realidad la ciencia y tecnología busca facilitar esa supervivencia de los seres humanos.

En la Universidad Nacional de Ingeniería, la investigación no es desarrollada por la mayoría de docentes, pero aquellos que la practican dedicándole tiempo y con bastante sacrificio, son los que prestigian a nuestra institución. La Facultad de Ciencias cuenta con el mayor número de investigadores, dedicados por completo a esta noble tarea, son aquellos que en muchas ocasiones son reconocidos por instituciones externas antes que por nuestra propia UNI; desde estas líneas hago llegar un saludo y el reconocimiento a esa labor sin límites ni fronteras que es la ciencia.

Los escasos apoyos económicos que recibe la Facultad de Ciencias, los destina íntegramente para investigación, cuidando que estos sean realmente proyectos de investigación los cuales culminan con resultados que son publicados o presentados en Congresos, Simposios, etc.

El presente número es el resultado del esfuerzo de investigadores, editor y personal de apoyo, gracias a todos ellos y hago votos porque sigan adelante en bien de la sociedad y el prestigio de nuestra querida Facultad y la UNI.

Dr. Pedro Canales García
Decano

Caracterización Fisicoquímica de Quitosano para su Aplicación como Biosorbente de Metales

Ily Maza Mejía^a, Christian Jacinto Hernández^b

*Laboratorio de Química Analítica e Instrumental, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería
e-mail: ^ailyuni2002@yahoo.com, ^bchristian@uni.edu.pe*

Recibido el 14 de marzo del 2007; aceptado el 21 de marzo del 2007

El presente trabajo tiene como objetivo caracterizar el quitosano como material biosorbente y posteriormente realizar el estudio de sorción de metales en medio acuoso, relacionando sus características con su capacidad de sorción. El quitosano fue caracterizado mediante FTIR donde se identifica las bandas características de este compuesto, se determinaron además características como el grado de desacetilación, masa molecular y la cristalinidad, estas propiedades, pueden cambiar debido a muchas variables en el proceso de obtención, influenciando las características del producto final; otro factor que se debe tener en cuenta es el origen biológico. Las muestras de quitosano comercial, generalmente varían en la masa molecular, el grado de desacetilación y la cristalinidad, características que tienen gran influencia en las propiedades y aplicaciones como biosorbente.

Palabras claves: Quitosano, biosorción, biopolímero, biosorbente.

The objective of this work is to characterize chitosan as biosorbent material and then, to study its metal sorption capacity in aqueous solution media, relating its characteristics with its sorption capacity. Main chitosan bands were characterized by FTIR, furthermore, desacetylation degree, molecular mass and crystallinity were determined. These properties can change during their obtention due to many variables of the process, modifying the final product; another factor that should be in account is their biological origin. Samples of commercial quitosan, have usually variable molecular mass, desacetylation degree and crystallinity, which have a strong influence on biosorbent applications and properties.

Keywords: Chitosan, biosorption, biopolymer, biosorbent.

1. Introducción

El quitosano es uno de los polisacáridos más importantes obtenido a partir de la quitina, biopolímero más abundante después de la celulosa. El quitosano es un biopolímero biodegradable y natural, tiene un comportamiento catiónico en soluciones ácidas y es extensamente estudiado por sus aplicaciones en muchas áreas.

La quitina (β -(1,4)-2-acetamido-2-deoxi-D-glucosa) es obtenida generalmente por tratamiento químico [1] de exoesqueletos de crustáceos, entre ellos el camarón y el cangrejo (también se encuentra en insectos, moluscos y hongos), el producto final es blanco, duro e inelástico.

El quitosano (β -(1,4)-2-amino-2-deoxi-D-glucosa), se obtiene por modificación química de la quitina, el cual es tratado con una solución alcalina concentrada y en caliente, el polímero que se obtiene posee un comportamiento marcadamente básico debido al grupo amino libre en su estructura, proporcionándole características químico-físicas de gran interés industrial.

El quitosano es el derivado N-desacetilado de la quitina, es una amina primaria y su monómero es 2-amino-2-deoxi-D-glucosa.

La ecuación química correspondiente a la desacetilación de la quitina se muestra en la figura 1.

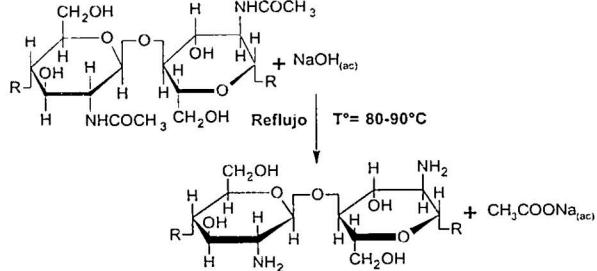


Figura 1. Reacción de desacetilación de la quitina.

En comparación con la quitina, el quitosano es el biopolímero más adecuado para atrapar metales iónicos por quelación, debido a la presencia de los grupos aminos en su unidad estructural, figura 2.

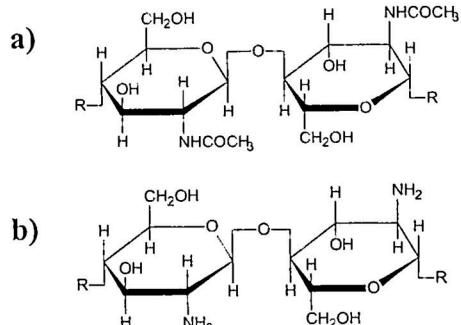


Figura 2. a) Unidad estructural de la quitina. b) Unidad estructural del quitosano

Quitosano

El quitosano es un polisacárido que se encuentra también en forma natural en las paredes celulares de algunos hongos; sin embargo su fuente de producción principal es la hidrólisis de la quitina en medio alcalino, obteniendo una parcial desacetilación de la quitina. El quitosano es un material con distintas propiedades, siendo una mezcla de cadenas que tiene distintas proporciones de unidades cuya relación depende de las condiciones de hidrólisis. Cuando se tiene una completa desacetilación el producto se denomina quitano.

El quitosano es considerado un polímero heterogéneo de unidades D-glucosamina y N-acetil-D-glucosamina. El quitosano es un material altamente variable en sus características, entre ellos el porcentaje de desacetilación, masa molecular y cristalinidad. Observándose discrepancias entre los diferentes estudios relacionados con la sorción de metales.

Estas diferencias también pueden ser explicadas en el origen del material, ya que la quitina puede ser extraída de diferentes materiales biológicos, las cuales darán origen a tres tipos de quitina, y son definidas en relación con la orientación de sus cadenas: un arreglo antiparalelo se denominara α -quitina, forma más estable y abundante (generalmente se encuentra en la cutícula de artrópodos y exoesqueletos de cangrejos y camarones), un arreglo paralelo se denominara β -quitina, y una mezcla de arreglos dos paralelos y uno antiparalelo se denominara γ -quitina (ambas formas obtenidas a partir del esqueleto del calamar). Estas tres formas generalmente diferenciadas en la dureza, siguiendo el orden: α -quitina, β -quitina, γ -quitina. Otra razón que puede afectar las características del material son las condiciones experimentales empleadas en la obtención de la quitina y quitosano, esto básicamente puede afectar el porcentaje de desacetilación, la cristalinidad y la masa molecular del quitosano.

2. Parte Experimental

Reactivos y equipos

El quitosano de camarón fue obtenido de los laboratorios Fluka, Francia. Todos los reactivos utilizados fueron de grado analítico para análisis.

El difractograma se obtuvo a partir de un difractómetro de rayos X marca Rigaku, modelo mini-Flex con ánodo de cobre y radiación $K_{\alpha,\text{cu}}$, el voltaje fue de 40 kv y una intensidad de 40 mA. Las medidas de viscosidad y densidad de las soluciones de quitosano se realizaron en un picnómetro con termómetro y capilar lateral con caperuza y un viscosímetro Ostwald *Cannon - Fenske rutina Serie 9721-A50 tamaño 400*; de 20,3 cm de longitud y 5 mm de diámetro, para obtener el espectro infrarrojo de las películas de quitosano se utilizó Espectrómetro infrarrojo con transformada de Fourier FTIR Perkin Elmer 1001-R con frecuencia de 4000-400 cm^{-1} .

Caracterización de Quitosano

Porcentaje de Desacetilación

Se prepararon películas de quitosano, según la bibliografía de Baxter [2]. Las películas de quitosano se prepararon al 0.5 w/v en solución de ácido acético al 1%, se secaron a 60° C por 24 horas, se lavó de 3 – 4 veces con una solución de 8% de amoniaco en metanol y finalmente lavadas con metanol. Estas películas fueron secadas a 60° C por 24 horas y luego almacenadas en un desecador por 24 horas a más, hasta las medidas por FTIR.

Masa Molecular

La viscosimetría es uno de las técnicas más utilizadas y mide la viscosidad intrínseca, $[\eta]$, que está relacionada con la masa molecular en la ecuación de Mark-Houwink [4]. En la siguiente ecuación, M_v es la masa molecular viscosimétrica, K y α son constantes que dependen de la naturaleza del polímero, del sistema disolvente utilizado y de la temperatura.

$$[\eta] = K \cdot M_v^\alpha \quad (1)$$

Se preparó una solución de 0.1M de CH_3COONa en 0.2M de CH_3COOH , que se utilizó como disolvente (Buffer), para preparar las diferentes concentraciones de quitosano: 1%; 0,5%; 0,25%; 0,125% y 0,0625% (w/v). Se midió la densidad y la viscosidad de las disoluciones de quitosano. Estas mediciones se realizaron en un baño a temperatura constante $T = 30^\circ\text{C}$, por triplicado. Estas medidas de viscosidad y densidad también se realizaron para el buffer y agua destilada.

Una vez obtenida la viscosidad y densidad de las distintas soluciones de quitosano, se procedió a realizar los cálculos de los distintos parámetros, que después nos ayudarán a obtener la viscosidad intrínseca, estos parámetros se calculan considerando los valores de tabla 1:

Tabla 1. Viscosidades que se consideran en los cálculos.

Símbolo	Nombre	Unidades
η	Viscosidad de la solución	P ó Pa.s
η_{stc}	Viscosidad del solvente	P ó Pa.s
$\eta_r = \eta / \eta_{\text{stc}}$	Viscosidad relativa	-
$\eta_{\text{esp}} = \eta_r - 1$	Viscosidad específica	-
$(\ln(\eta)) / C$	Viscosidad inherente	L/g
$(\eta_{\text{esp}}) / C$	Viscosidad reducida	L/g
$[\eta]$	Viscosidad intrínseca	L/g

En la figura 5 se muestra el gráfico ($\ln(\eta_r)$) / C vs C y $(\eta_{\text{esp}}) / C$, empleado en la determinación de la viscosidad intrínseca $[\eta]$. Seguidamente, con el dato del porcentaje de desacetilación se determina la masa molecular, interpolando a partir de las ecuaciones de Mark-Houwink para el quitosano.

Cristalinidad

A partir de la muestra pulverizada se obtiene el difractograma, en los intervalos de $2\theta = 2,5 - 40^\circ$ con un

paso de ángulo de 0,02° entre cada punto (figura 6). Además de caracterizar el quitosano se calcula el índice de cristalinidad, usando el método propuesto por Focher.

3. Resultados y Discusiones

Caracterización del Quitosano

Espectro Infrarrojo del Quitosano

En la figura 3 se muestra el espectro infrarrojo de una película de quitosano al 0,5% (w/v).

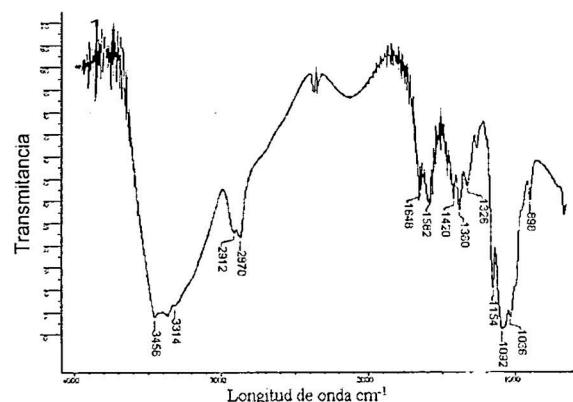


Figura 3. Espectro infrarrojo del quitosano.

Tabla 2. Grupos funcionales característicos.

Nº	Grupo Funcional	cm ⁻¹	Intensidad	% Transmision
1	Grupo -OH	3456	VS	3,87
2	Grupo N-H	3314	VS	6,53
3	Grupo C-H	2870 y 2912	S/S	21,75 y 22,92
4	Grupo amida primaria	1654	M	30,36
5	Grupo -NH ₂	1582	M	30,57
6	Grupo -CH ₂	1420	M	30,67
7	-CH ₃ y C-CH ₃	1380	S	28,25
8	Amida terciaria	1326	VS	3,95
9	C-O-C	1154	S	10,49
10	Vibraciones del esqueleto	1036 y 1082	VS/VS	3,95/1,62
11	C-H de los grupos anoméricos	898	M	30,33

S : Fuerte, M: Medio, V: Variable

Las bandas características del quitosano están a 3450 cm⁻¹ que corresponde a los grupos -OH del polímero, a 1654 cm⁻¹ corresponde a la presencia de los grupos -NH de una amida primaria asociada con los restos de grupos acetamida después de la desacetilación, la banda a 3314 cm⁻¹ es debida al grupo -NH incrementándose este grupo después del proceso de desacetilación, la banda 1582 cm⁻¹ es característica del grupo -NH₂, a 1420 cm⁻¹ corresponde al grupo CH₂, en 1381 cm⁻¹ corresponde al -CH y deformación del C-CH₃, a 2912 y 2870 cm⁻¹ corresponde

al grupo -CH, a 1154 cm⁻¹ es característica la tensión antisimétrica del grupo C-O-C, a 1036 y 1082 cm⁻¹ corresponde las vibraciones del esqueleto propias de su estructura y por último a 898 cm⁻¹ la tensión -CH de los grupos anoméricos.

Porcentaje de Desacetilación

Tamveer [3], realizó un estudio estadístico de resultados del porcentaje de desacetilación, que se obtienen aplicando tres métodos: Titulación con Bromuro de Hidrógeno, método de Espectroscopía Infrarroja y el método de la primera derivada con Espectroscopía Ultravioleta-Visible, concluyendo que el método de titulación es muy impreciso y algunas veces erróneas en comparación con los otros dos métodos espectroscópicos.

El método espectrométrico FTIR fue utilizado para nuestros análisis por ser uno de los más rápidos y simples, la muestra se preparó en forma de películas.

Una vez obtenido el espectro infrarrojo, el porcentaje de desacetilación de la muestra de quitosano fue calculado usando dos líneas bases diferentes: Domszy - Roberts y Baxter.

$$DD = 100 - [(A_{1655} / A_{3450}) \times 100 / 1,33] \quad (2)$$

El factor 1,33 se considera para una quitina completamente desacetilada, mientras que la siguiente ecuación es una modificación de Baxter [2]. Para muestras parcialmente desacetiladas.

$$DD = 100 - [(A_{1655} / A_{3450}) \times 115] \quad (3)$$

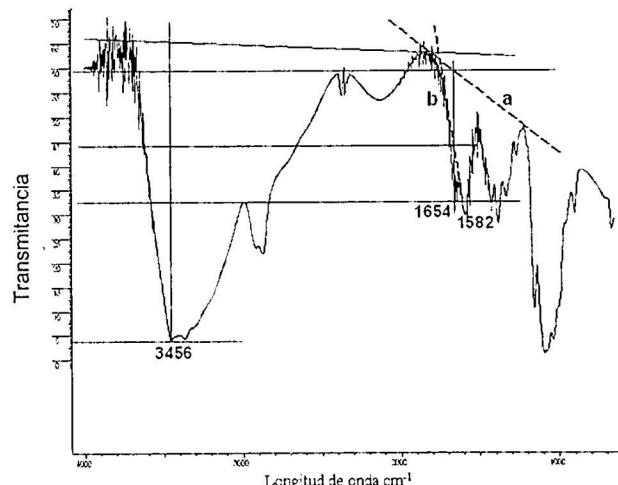


Figura 4. a. Domszy - Roberts b. Baxter; para determinar el Porcentaje de desacetilación.

El porcentaje de desacetilación obtenido para la muestra de quitosano, según los cálculos con respecto a la línea base "a" es de 84,6% y con respecto a la línea base "b" es 84,8%, como se puede ver no existe diferencia significativa para las muestras de quitosano evaluadas como películas. Por lo tanto el porcentaje de desacetilación (DD) de la muestra será de 84,7%, a partir de este valor alto, obtenemos la alta solubilidad de la muestra de quitosano en medio ácido por medio de la protonación de sus grupos -NH₂. Además se espera una gran capacidad de

sorción como absorbente de metales, ya que a mayor porcentaje de desacetilación la cantidad de los grupos NH_2 con respecto a los grupos acetamidas es mayor.

Masa Molecular

A partir de la ecuación de Mark-Houwink [4] que muestra una serie de ecuaciones que relacionan los valores la masa molecular de una muestra con respecto a la viscosidad intrínseca $[\eta]$ y su porcentaje de desacetilación, obtenemos la ecuación para la muestra de quitosano en estudio:

$$84,7\% (\text{DD}) \quad [\eta] = 1,604 * 10^{-3} M^{0,956} (\text{mL/g}) \quad (4)$$

Una vez obtenida la viscosidad y densidad de las distintas soluciones de quitosano, se procede a realizar los siguientes cálculos de los distintos parámetros, presentada en la tabla 3.

Tabla 3. Determinaciones de η_{esp} , η_r de las diferentes concentraciones de quitosano a 30°C.

Muestra	Q (1)	Q (1/2)	Q (1/4)	Q (1/8)	Q (1/16)
C(g/100 mL)	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
$\eta \times 10^{-4}$	189,69	53,29	23,88	14,62	11,08
η_r	22,39	6,29	2,82	1,73	1,31
η_{esp}	21,39	5,29	1,82	0,73	0,31
$(\eta_{esp})/C$	21,39	10,58	7,28	5,81	4,92
$(\ln(\eta_r))/C$	3,11	3,68	4,15	4,37	4,29

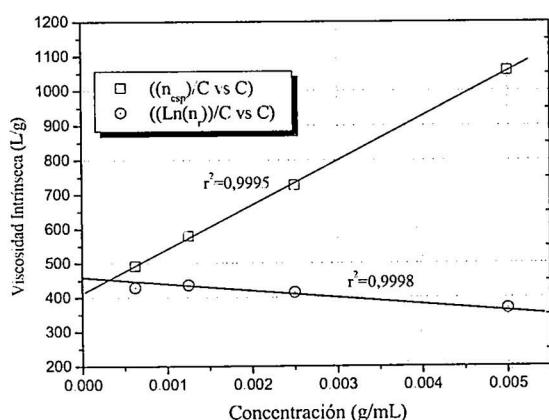


Figura 5. Relación de $(\ln(\eta_r))/C$ vs C y $(\eta_{esp})/C$ vs C, para calcular $[\eta]$.

De la Figura 5, de $(\ln(\eta_r))/C$ vs C y $(\eta_{esp})/C$ se determina la viscosidad intrínseca $[\eta]$, este valor es introducido en la ecuación de Mark-Houwink y obtenemos el valor de la masa molecular de $5,04 \times 10^5$ Dalton.

La masa molecular da una idea de la distribución del tamaño de las cadenas del polímero cuando se encuentran en solución. Además, un peso molecular alto nos indica la presencia de cadenas de polímero relativamente largas, generando posible entrecruzamiento entre las cadenas que producen un decrecimiento en la solubilidad.

Las condiciones de los procedimientos de desacetilación y obtención del quitosano pueden reducir la masa molecular y en consecuencia provocar la reducción de los coeficientes de hinchamiento.

Cristalinidad

Comparando con los patrones establecidos por Guibal [5] el difractograma de la figura 6, muestra un quitosano hidratado al presentar los picos característicos a $2\theta = 10,58^\circ$; $2\theta = 20,04^\circ$ y uno menos intenso $2\theta = 22,097^\circ$.

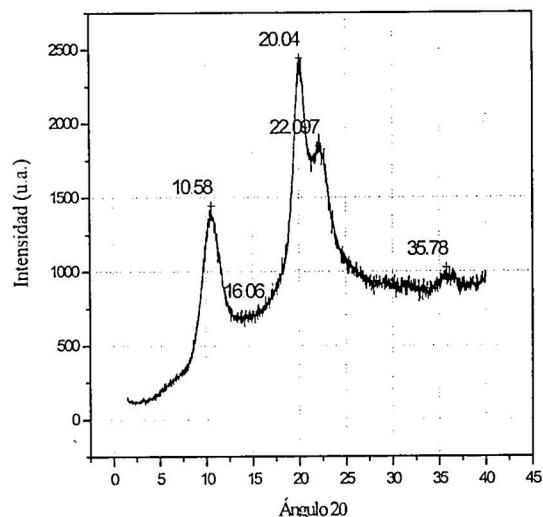


Figura 6. Difractograma del quitosano.

Calculamos el índice de cristalinidad, usando el método propuesto por Focher [5], tomando en cuenta las intensidades en $2\theta = 20^\circ$ y 16° en el difractograma.

$$I_{crist} = \frac{(I_{20^\circ} - I_{16^\circ}) \times 100}{I_{20^\circ}} \quad (5)$$

Reemplazamos los datos de la Figura 6 en la ecuación 5, determinamos el índice de cristalinidad para la muestra de quitosano de 70,5%. Consistente con los valores reportados por Guibal [5], donde realizó un estudio del grado de cristalinidad con respecto a la especie de origen, este resultado, según los estudios de Miyoshi como lo menciona Guibal [6], sugiere que una estructura altamente ordenada aumenta su capacidad de sorción de metales, a su vez se ve influenciado por la accesibilidad de las moléculas de agua.

4. Conclusiones

El porcentaje de desacetilación se determinó mediante el método espectrométrico FTIR con películas de quitosano, el valor promedio fue de 84,7%; el cual indica un alto porcentaje de los grupos NH₂ presentes con respecto a los grupos acetamidas.

La masa molecular, se determinó por viscosimetría capilar reportando 5,04 x 10⁵ Dalton, este valor indica la presencia de cadenas de polímero relativamente largas que generan posibles entrecruzamientos que pueden producir un decrecimiento en la solubilidad.

En cuanto a la cristalinidad, según el difractograma de la muestra indica un quitosano hidratado y un índice de cristalinidad de 70,5%, característica que favorece a un fácil acceso de las moléculas de agua.

Agradecimientos

Ily Maza Mejía y Christian Jacinto Hernández agradecen a la Facultad de Ciencias de la UNI a través del Instituto de Investigación por el apoyo económico, de igual manera agradecen al Msc. Holger Maldonado y la Dr. Ana Valderrama por el apoyo brindado.

1. Gudmund Skjak-Braek, Thorleif Anthonsen, Paul Sandford, "Chitin And Chitosan: Sources, Chemistry, Biochemistry, Physical Properties and Applications", New York, Elsevier, 1989, 23-101.
2. Baxter, A., Dillon. M., Taylor. K.D.A. and Roberts. G.A.F., "Improved method for IR Determination of Degree of N-acetylation of Chitosan." *J. Biol. Macromol.*, 14, (1992), 166-169.
3. Tanveer Ahmad Kahn, KoK Khiang Peh, Hung Seng Ching, "Reporting Degree of Deacetylation Values of Chitosan: the Influence of Analytical Methods", *J. Pharm Pharmaceut Sci*, 5, (2002), 205–212.
4. Wei wang, Shuquin Bo, Shuqing Li and Wen Qin., "Determination of the Mark-Houwink Equation for Chitosans whith Different Degrees of Deactylation", *Int. J. Biol. Macromol.*, 13, (1991), 281 – 285.
5. Małgorzata Jaworska, Kensuke Sakurai, Pierre Gaudon and Eric Guibal, "Influence of Chitosan Characteristics on polymer Properties I: Crystallographic Properties", *Polymer International*, 52, (2003), 198-205.
6. Małgorzata Jaworska, Karolina Kula, Philippe Chassay and Guibal. "Influence of Chitosan Characteristics on Polymer Properties: II. Platinum Sorption Properties", *Polymer International*, 52, (2003), 206–212.

Estudio de la adsorción de especies cianuradas sobre electrodos Cu y Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO mediante técnicas electroquímicas y Raman-Potenciómetro acoplados

Adolfo La Rosa Toro Gómez

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería

toro@uni.edu.pe

Recibido el 06 de mayo del 2007; aceptado el 13 de mayo del 2007

El cobre y óxidos de cobre son conocidos como buenos catalizadores y son muy utilizados para la síntesis de alcoholes y otros compuestos químicos. El estudio de la interacción del cobre con cianuro es de interés para conocer el mecanismo de la adsorción, formación de complejos -Cu-CN- y su posterior oxidación en medio alcalino. Los métodos de voltametría cíclica y sistema acoplado Raman-potenciómetro posibilitan obtener importante información cuya interpretación permitió deducir que el cianuro en contacto con el cobre forma especies complejas adsorbidas en la superficie Cu-xCN. Estas especies, a potenciales cercanos a 1,4V (ERH), son oxidados irreversiblemente participando como intermediario la especie Cu(III).

Palabras claves: Cianuro, Raman, adsorción.

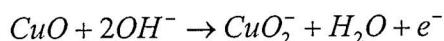
The copper and copper oxides are known as good catalysts for the alcohol synthesis and other chemical compounds. The study of the cyanide -copper interaction is very important to know of the adsorption, complex formation -Cu-CN- and oxidation in alkaline solution. Cyclic voltammetry and Raman-potentiostat coupled system methods give important information which meaning allowed us to deduce that cyanide in contact with cooper form complex, Cu-xCN adsorbed on the surface and at some near potentials to 1,4 V (ERH) they are irreversibly oxidizing where the Cu (III) acting as intermediary.

Clave: Cyanide, Raman, adsorption

1. Introducción

Se ha establecido que en medio alcalino y aplicando corriente anódica el electrodo de cobre forma especies oxidadas insolubles, por lo general películas de Cu(OH)₂, CuO las cuales actúan catalíticamente en la formación de oxígeno [1]. Electrodes basados en películas de CuO han sido preparados para la oxidación de fenol [2], surfactantes [3], cianuros [1] y otras especies contaminantes.

El cianuro es un ligando de base blanda capaz de formar complejos estables con el cobre. La estabilidad del complejo adsorbido sobre electrodos depende del potencial aplicado y de la naturaleza electrónica del adsorbente. El cianuro adsorbido sobre cobre descompone a potenciales cercanos a la generación de especies de Cu(III) los cuales actúan como intermediarios redox para la oxidación de las especies adsorbidas [4]. El Cu(III) pueden formarse a través de las siguientes reacciones:



Mediante voltametría cíclica se ha realizado el estudio de la propiedad de adsorción de las especies electroactivas sobre el material electródico, la cual sirve para dilucidar el mecanismo implicado en la oxidación. Los resultados obtenidos son corroborados con técnicas analíticas acopladas, como es el caso potenciómetro-Raman, mediante el cual es posible determinar el efecto del potencial sobre las moléculas adsorbidas identificadas en el espectro Raman.

2. Experimental

Para los estudios voltamétricos se ha utilizado solución de NaOH 0,1 M como soporte, electrodo de cobre de 99,9%, 0,5 mm en forma de hilo (Goodfellow). La limpieza del alambre se realizó por inmersión en acetona y luego en solución 1:1 de HCl y finalmente lavado con agua pura. Las voltametrías cíclicas fueron realizadas utilizando un potenciómetro Autolab-12 con software GPSE implementado con tarjeta SCANGEN y celda de tres electrodos utilizando alambre de platino como contraelectrodo y electrodo de referencia de hidrógeno (ERH). El equipo Raman empleado es un espectrómetro Labram de la compañía Jobin-Ivov Horiba, este sistema utiliza configuración de backscattering [5] para capturar la señal Raman a través de un microscopio vertical Olympus BX40, con un objetivo de larga distancia, por lo que el objetivo no tiene que estar sumergido en el electrolito. Las experiencias Raman implican la medida de pequeños desplazamientos de energía en el orden de 100 a 3000 cm⁻¹ a partir de la energía de excitación, por lo que es imprescindible una fuente de energía monocromática y de alta intensidad, debido a ello son muy utilizados los láseres.

En la figura 1 se muestra una vista frontal de la disposición de la celda de tres electrodos el cual se acopla al espectrómetro Raman.

2.1 Voltametría del cobre en NaOH 0,1 M

La voltametría se realizó empleando una velocidad de barrido de 50 mV/s. En la figura 2 se muestra el voltágrafo

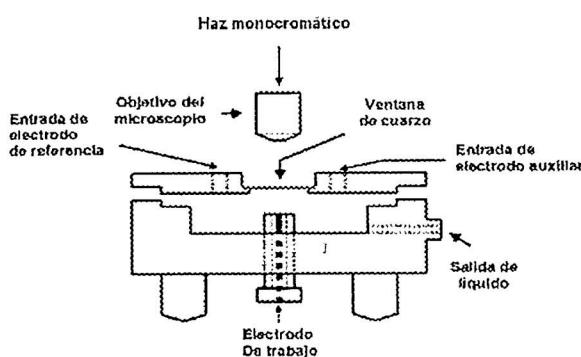


Figura 1. Vista frontal de la celda de tres electrodos acoplada al espectrómetro Raman.

correspondiente al electrodo de cobre, en la cual se observa en el barrido en sentido anódico la formación de tres picos atribuibles a la oxidación Cu a Cu(I) y Cu(II) a potencial de 0,6 V y 1,0 V respectivamente y posterior generación de Cu(III) a potenciales más positivos (cerca de 1,45 V), las reacciones electródicas asociadas se sustentan en trabajos realizados previamente por Thiago R. Paixao y col. mediante mediciones de impedancia electroacústica de microbalanza electroquímica de cristal de cuarzo, EQCM [6], el pico I es observado alrededor de 0,6 V correspondiendo a la formación de Cu₂O representado por la Ec.1.

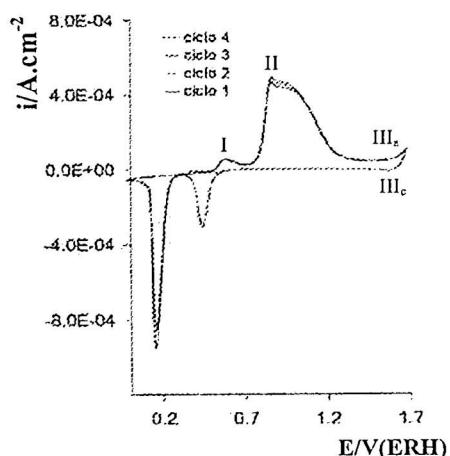
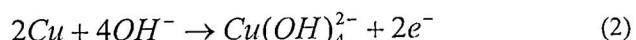


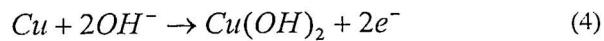
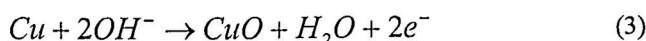
Figura 2. Voltágrafo de cobre en disolución de NaOH 0,1 M, a 50 mV/s, (aumento de ciclos en dirección de la flecha).



El pico II, formado alrededor de 1,0 V representa dos procesos, los cuales ocurren a 0,95 V y 1,1 V; el primero se asigna a la reacción de corrosión de cobre:

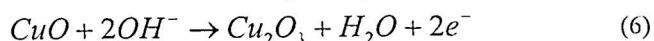
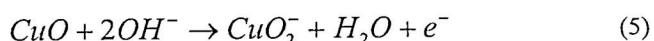


y el segundo a la formación de especies insolubles como se describe en las siguientes ecuaciones:



Además se puede observar que la intensidad del pico aumenta con el número de ciclos voltamétricos, relacionándose al crecimiento de una película de sólido insoluble precipitado sobre el cobre el cual se relaciona bien con la formación de una especie oscura observable al final del ciclado.

El pico III_a, formado alrededor de 1,45 V y su par de reducción, pico III_c, puede ser atribuido al redox Cu(II) → Cu(III), la formación de Cu(III) es deducida debido a la formación de especies solubles (incremento en la frecuencia en el experimento EQCM)[6], experimentos realizados por el mismo autor con electrodos rotatorios mostraron la posibilidad de la formación simultanea de CuO₂⁻ y Cu₂O₃ según las siguientes ecuaciones:



La formación de la especie Cu(III) a partir de Cu(I) y su reactividad ha sido anteriormente documentada en los trabajos de I.G. Casella [1]

2.2 Voltametría del cobre en disolución de cianuro y NaOH 0,1M

En la figura 3 se muestra la voltametría del cobre a diferentes concentraciones de cianuro en electrolito de fondo de NaOH 0,1 M

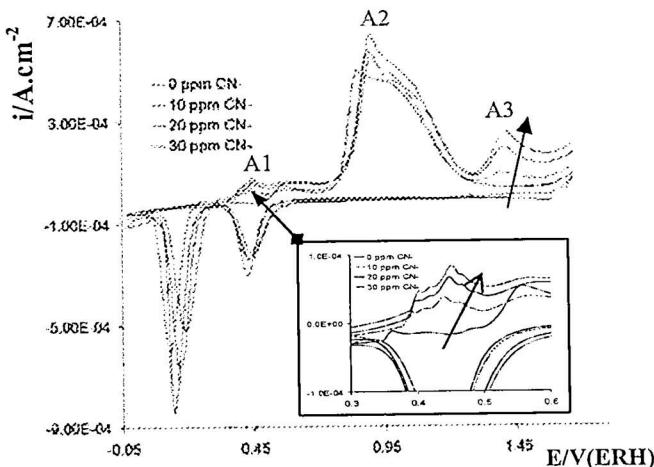


Figura 3. Voltágrafo de cobre en disolución de cianuro a diferentes concentraciones y electrolito soporte de NaOH 0,1 M, a 50 mV/s.

Para explicar con detenimiento el efecto superficial del cianuro en el electrodo de cobre se muestra el diagrama E-pH del equilibrio Cu-CN-H₂O [7] mostrada en la figura 4.

En este diagrama se observa que a pH superior a 9.5 y potencial -1,0 V (SHE), en presencia de cianuro, (CN⁻) el cobre muestra una tendencia a formar el complejo de cobre Cu(CN)₃²⁻, y solo a potenciales más positivos es posible la formación de especies oxidadas de Cu(II). En el voltágrafo de la figura 3 se observa que a potencial 0,47 V se forma el

pico A1, el cual visto a detalle (gráfico interno de la figura 3) corresponde al solapamiento de varios picos, con predominancia de uno de ellos, pudiendo ser representados por la fórmula GENERAL Cu_{-x}CN donde x dependerá de la concentración de cianuro en la interfase y del potencial aplicado; por otro lado, se observa que la intensidad del pico A2 aumenta con el incremento de cianuro en la disolución mostrando su dependencia con esta sustancia.; relacionado a esta reacción se encuentra la inhibición del pico 1 de la figura 2 correspondiente a la transición Cu/Cu₂O, esta disminución de carga puede estar relacionado a la ocurrencia de la reacción competitiva del cobre con cianuro, termodinámicamente más favorable, mostrada en la Ec. 7, interfiriendo en la transición redox asignada a este pico.

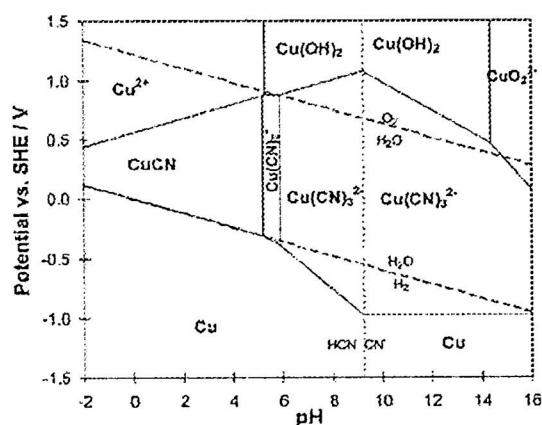


Figura 4. Diagrama E-pH del equilibrio Cu-CN-H₂O.

A potencial de 1,45 V se observa la formación del pico A3 de naturaleza irreversible cuya intensidad aumenta a medida que se aumenta la concentración de cianuro en la solución, este pico se atribuye a la oxidación de las especies Cu_{-x}CN adsorbidas, reacción en la cual el redox Cu(II) → Cu(III), actúa como parte del mecanismo de oxidación. Los resultados son consistentes con el obtenido por I.G. Casella [1] quien asocia la oxidación de complejo de cianuro a un proceso redox en la cual se atribuye a la especie Cu(III) el papel de agente oxidante.

2.3 Voltametría de la adsorción de cianuro sobre cobre en disolución de NaOH 0,1 M

En la figura 5 se presenta el voltamgrama del electrodo de cobre en solución de NaOH 0,1 M. En este caso el electrodo fue previamente sumergido en solución de cianuro durante 2 minutos y posteriormente colocado en la celda de tres electrodos con potencial controlado a 0,2 V y luego ciclado en el rango de 0,2 a 0,7 V (ERH) empleando una velocidad de barrido de 20 mV/s. La forma del voltamgrama es típico de un proceso de adsorción-desorción en la cual la diferencia de potencial del pico principal anódico, p_{3a} y catódico, p_{3c} es cero, $\Delta E_p=0$ y la intensidad de corriente de ambos picos son iguales, $i_{p,a}=i_{p,c}$. Por otro lado en el mismo voltamgrama se observa la formación de dos picos adicionales p_{1a} y p_{2a} con sus correspondientes picos de desorción, p_{1c}, p_{2c} que corresponderían, junto con el pico p₃ a especies adsorbidas Cu_{-x}CN de la misma naturaleza que las observadas en el conjunto de picos (A1) de la figura 3.

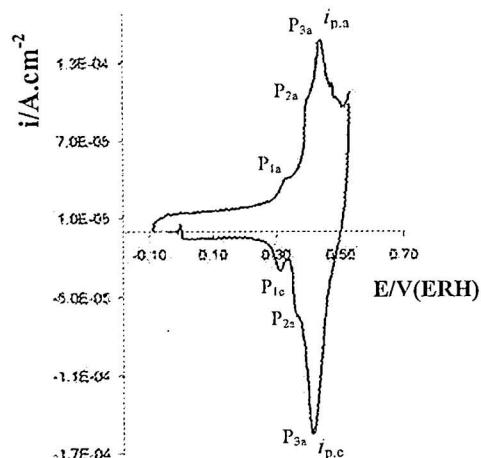


Figura 5 Voltamgrama estabilizado de la adsorción de cianuro sobre cobre adsorbido por contacto medido en electrolito soporte de NaOH 0,1 M, a 20 mV/s.

2.4 Espectroscopia Raman del cianuro sobre electrodo de Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO

Se realizó el estudio de adsorción de cianuro sobre superficies del electrodo de espinela de cobaltita de cobre, Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO [8] el cual fue preparado por impregnación (*brushing*) de una solución de la sal precursora de nitrato de cobre y nitrato de cobalto de acuerdo a la relación atómica Cu/Co = 3/4 sobre un electrodo de platino metálico de alta pureza. El análisis Raman de la superficie del electrodo se presenta en la figura 6 en la cual se muestra dos zonas bien diferenciadas, la primera en la región espectral 479-670 cm⁻¹ correspondiente a los óxidos y la segunda zona en la región (2000-2200 cm⁻¹) correspondiente al cianuro libre y especies complejas posiblemente adsorbidas, cuyos valores de asignación se presentan en la tabla 1. Además de la banda de alta intensidad correspondiente al cianuro (2077 cm⁻¹) se presenta una banda de poca intensidad a la derecha de la banda asignada al cianuro presentada en el gráfico insertado en la figura 7) el que se analizará más adelante.

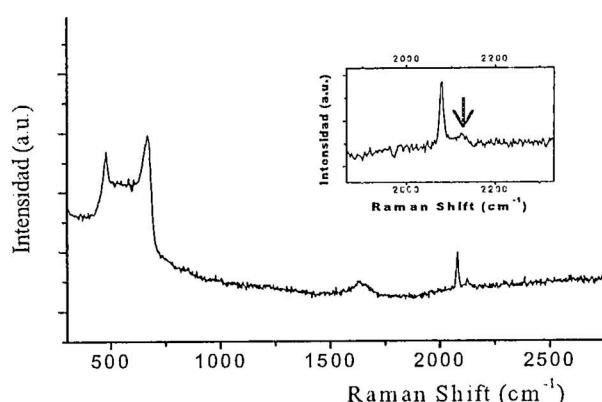


Figura 6 Espectro Raman de un electrodo de Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO en disolución básica (0,1M en NaOH) de CN⁻ de 5000 ppm y al que se le ha aplicado un potencial de 0,2V (frente a Ag/AgCl).

En la figura 7 se muestran las bandas características del electrodo Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO sobre 479 y 670 cm⁻¹ y su evolución en función del potencial eléctrico aplicado, como puede observarse la posición de los picos se mantiene en la misma posición, sin embargo la intensidad de ellos sufre una disminución con el potencial aplicado, atribuyéndose estos resultados a la disminución de la densidad electrónica en los enlaces del óxido, afectando por tanto el tensor de polarizabilidad.

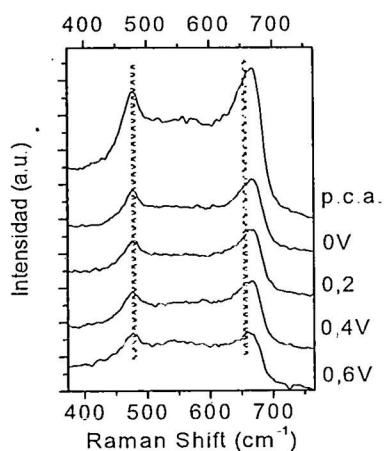


Figura 7. Espectro Raman acoplado a potenciómetro de Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO en función al potencial aplicado (Ag/AgCl).

En la figura 8a se observa el espectro Raman sobre el electrodo de Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO en la cual se observa que además de la banda correspondiente al cianuro libre aparece un pico de señal débil, el cual está ausente del espectro correspondiente al electrodo Pt/Co₃O₄ (Figura 9b), la nueva banda aparece sobre 2120-2123 cm⁻¹ y se presenta como una banda ancha que podría ser asignada a cianuro o a una especie Cu-xCN adsorbida sobre la superficie del electrodo, su formación está condicionado a la presencia de óxido de cobre en la superficie del electrodo; según las referencias de la tabla 1 podría corresponder a una de las especies complejas de cianuro en solución o adsorbidas sobre el electrodo el cual, como puede verse después, desaparece por efecto del potencial aplicado atribuyéndose a la oxidación de la especie, estos resultados son coherentes con los resultados obtenidos en los estudios voltamétricos (figura 3).

Tabla. 1 Asignación de bandas relacionadas a las especies cianuro y sus complejos con cobre en disolución de NaOH 0.1M

Cu/CN ⁻	Disoluciones	Asignaciones previas			
		[CN ⁻]/[Cu] ≤ 4 (cm ⁻¹)	cm ⁻¹	especies	referencia
2077	2077	2077	2077	CN ⁻	[9]
2091	2095	2094	2094	[Cu(CN) ₄] ³⁻	[10, 11]
2102	2108	2109	2109	[Cu(CN) ₃] ²⁻	[10]
2114	2113	2096	2113	[Cu(CN) ₃] ²⁻	[10]
2130	2137	2137	2137	[Cu(CN) ₂] ⁻	[9]

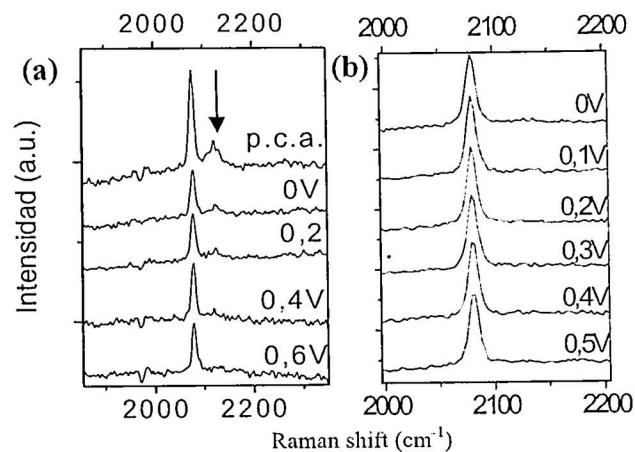


Figura 9. Espectros Raman a) Electrodo de Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO evolución de la banda de CN⁻ libre en disolución y de la banda correspondiente a la especie Cu-xCN en función del potencial aplicado b) Electrodo de Pt/Co₃O₄ evolución de la banda de CN⁻ libre en disolución en función del potencial aplicado (Ag/AgCl).

3. Conclusiones

Los estudios voltamétricos y de espectroscopía Raman de los electrodos muestran interesantes propiedades de interacción cobre - cianuro. El ciclado continuo del electrodo de cobre en solución de NaOH 0,1M genera una película superficial formada por especies insolubles de CuO, Cu(OH)₂. El electrodo de espinela de cobalto dopado con cobre de relación atómica Cu/Co=3/4 aporta un exceso de cobre en la estructura de la espinela el cual es segregado a la superficie formando una película de CuO la que fue detectada mediante análisis XPS realizado en estudios anteriores [8]. El estudio de la interacción Cu-CN de los electrodos Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO en solución de cianuro realizado por espectroscopía Raman acoplado al potenciómetro permitió discernir el mecanismo de la oxidación del cianuro sobre dichos electrodos en el cual se puede observar la formación de un pico en la banda 2120-2123 cm⁻¹ assignable a una especie Cu-xCN coincidente con la formación del pico voltamétrico observado a potencial de 0,47 V (ERH). A potenciales más anódicos, alrededor de 0,40 V (Ag/AgCl) equivalente a 1,37 V (ERH) el pico desaparece debido a la oxidación de la especie Cu-xCN permitiéndonos concluir que el proceso de oxidación de cianuro involucra un paso previo de adsorción del cianuro sobre el cobre presente en la superficie del electrodo formando especies Cu-xCN el cual se oxida a potenciales más anódicos mediante un proceso redox en la que la interacción Cu(III) cumple la función de agente oxidante.

Agradecimientos

El autor agradece al Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias de la UNI por el financiamiento otorgado y al grupo de Electrocatalisis y Electroquímica de Polímeros de la Universidad de Alicante por el apoyo instrumental para la culminación del presente trabajo.

1. I.G. Casella, M. Gatta, *Journal of Electroanalytical Chemistry* **494** (2000) 12–20
2. K.M. Parida and Dharitri Rath, *Applied Catalysis A: General* **321** (2007) 101-108
3. Gu L, Wang B, Ma H, Kong W, *J Hazard Mater.* **2** (2006) 842 .
4. IThiago R. L. C. Paixao, Eduardo A.Ponzio, Roberto M. torresi and Mauro Bertotti *J. Braz.Cehm. soc.* **17** (2006), 374-381
5. LZ. Tian, B. Ren, D. Wu. *J. Phys. Chem. B*, **106** (2002) 9463
6. IThiago R. L. C. Paixao, Eduardo A.Ponzio, Roberto M. Torresi and Mauro Bertotti *J. Braz.Cehm.* **2** (2006) 374-381
7. Jianming Lu, D.B. Dreisinger, W.C. Cooper, *Hydrometallurgy* **66** (2002) 23–36
8. A.La Rosa-Toro, R. Berenguer, C. Quijada, F. Montilla, E. Morallón, and J. L. Vázquez, *J. Phys. Chem. B* **110** (2006) 24021-24029
9. A.S. Taylor, in: J.A. Dean (Ed.), *Lange's Handbook of Chemistry*, 15th ed., McCraw Hill, New York, 1999
10. C.S. Hofseth, T.W. Chapman, *J. Electrochem. Soc.* **8** (1991) 2321.
11. IA. Katagiri, S. Yoshimura, S. Yoshizawa, *Inorg. Chem.* **20** (1981) 4143.

Diseño y Construcción de un Goniofotómetro

M. Ruiz^a, A. Gutarra^b

*Laboratorio de Fotometría, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería
E-mail: ^a myke3ruiz@gmail.com, ^b agutarra@uni.edu.pe*

Recibido el 03 de febrero del 2007; aceptado el 15 de marzo del 2007

En este trabajo se expone el diseño, construcción e implementación de un instrumento óptico automatizado que permite medir dos magnitudes fotométricas, la intensidad luminosa y el flujo luminoso. Se reportan los datos experimentales y resultados obtenidos con este equipo. Las distribuciones de intensidad se presentan en tablas y gráficos polares. El flujo luminoso calculado fue de 570 ± 63 lm y corresponde a una lámpara fluorescente compacta, marca «phocos», modelo «CL1211W/C» a 12.9 VDC, 0.89A y $21.4^{\circ}C$.

Palabras claves: Fotometría, Goniofotómetro, lámparas.

In this work we show the design, construction and implementation of an automatized optical instrument able to measure two photometric magnitudes, the luminous intensity and the luminous flux. We report the experimental data and results obtained by this equipment. The intensity distributions are show in tables and polar graphics. The luminous flux measured was 570 ± 63 lm and correspond to an fluorescent compact lamp, sold by «phocos», «CL1211W/C» model at 12.9 VDC, 0.89A y $21.4^{\circ}C$.

Keywords: Photometry, Goniophotometer, lamps.

1. Introducción

Desde el año 1993 se comenzó a implementar un laboratorio de fotometría en la Facultad de Ciencias. Esto respondió básicamente a las necesidades del grupo de energía solar de la UNI, de evaluar lámparas usadas en instalaciones de electrificación fotovoltaica. Aunque aquí se analiza una lámpara particular, el equipo construido puede ser modificado para medir magnitudes fotométricas de diferentes lámparas. El goniofotómetro puede medir el flujo luminoso; pero la característica principal, que lo diferencia de otros equipos fotométricos, es que puede medir la distribución luminosa de una lámpara. Otra característica importante es que el proceso de medición está automatizado, lo que significa que puede evaluar muchas lámparas en un tiempo corto y sin mucho esfuerzo.

2. Parte teórica

Conceptos fundamentales de fotometría

El objetivo principal de la fotometría es medir la radiación óptica visible (luz) de tal forma que los resultados se correlacionen con la sensación visual para un observador humano normal expuesto a esta radiación.

En la práctica, las mediciones se realizan con fotodetectores. Entonces, para alcanzar el objetivo principal de la fotometría, se deben tomar en cuenta las características de la visión humana. La función de eficiencia lumínosa espectral para visión fotóptica, o simplemente función $V(\lambda)$, fue definida por la CIE¹ en el intervalo de longitud de onda (λ) de 360nm a 830nm y normalizada a uno, en el máximo, a 555nm. Esta función se grafica en la figura 1. Por lo tanto, si un fotodetector tiene una respuesta espectral que coincide con la función $V(\lambda)$ entonces este reemplaza el rol del ojo humano en fotometría.

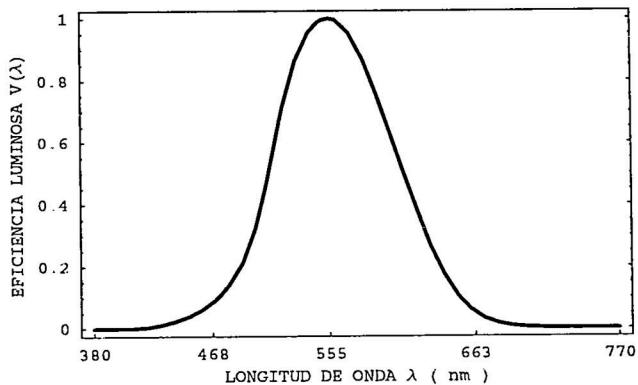


Figura 1. Función de eficiencia lumínosa espectral para la visión fotóptica.

La radiometría involucra mediciones de radiación óptica como una función de su longitud de onda (λ). Una magnitud fotométrica X_V se define en relación a su correspondiente magnitud radiométrica $X_{e,\lambda}$ por la ecuación,

$$X_V = K_m \int_{360}^{830} X_{e,\lambda} V(\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

donde K_m es una constante igual a 683 lm/W.

La unidad base de todas las magnitudes fotométricas es la «candela». En 1979 el CGPM² definió la candela como:

«La candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de $1/683$ watt por estereoradián»

¹Commission Internationale de l'Éclairage.

²Conférence Générale des Poids et Mesures.

Ahora definimos tres magnitudes fotométricas:

Flujo luminoso (Φ_V) Es la tasa de tiempo a la que fluye la luz por el factor de peso $V(\lambda)$. Está definido por:

$$\Phi_V = K_m \int_{\lambda} \Phi_{e,\lambda} V(\lambda) d\lambda, \quad (2)$$

donde $\Phi_{e,\lambda}$ es la concentración espectral del flujo radiante³ en W/nm y es una función de la longitud de onda λ en nm.

Intensidad luminosa (I_V) Está definida por,

$$I_V = \frac{d\Phi_V}{d\Omega}, \quad (3)$$

donde $d\Phi_V$ es el flujo luminoso que deja la fuente y se propaga en un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ en una dirección dada.

Iluminancia (E_V) Es la densidad de flujo luminoso incidente en un punto dado contenido en una superficie. Está definido por,

$$E_V = \frac{d\Phi_V}{dA}, \quad (4)$$

donde $d\Phi_V$ es el flujo luminoso incidente sobre un elemento dA de la superficie que contiene el punto.

Aproximación del inverso al cuadrado

Un banco óptico es un carril lineal graduado por el que se deslizan los soportes de la lámpara y el fotómetro, permitiendo medir la distancia entre ellos. En particular la distancia d , desde el centro fotométrico de la lámpara hasta un punto sobre la superficie sensible del fotómetro, en donde el flujo debe ser medido. En este punto, el flujo se calcula con ayuda de la aproximación⁴ del inverso al cuadrado,

$$E_V = \frac{I_V}{(d + d_0)^2}, \quad (5)$$

donde d_0 es una constante característica de la lámpara y el fotómetro. La suma $d + d_0$ representa la distancia efectiva entre ambos.

Para obtener una buena estimación de la intensidad I_V a partir de la ecuación (5) es necesario que la distancia efectiva sea 15 veces mayor que la longitud (de la porción que emite luz) de la lámpara utilizada [1].

Medición de la iluminación

Un fotómetro es un dispositivo que permite medir la iluminación. Típicamente el fotómetro usa un fotodiodo. La corriente I del fotodiodo se puede expresar por,

$$I = \int_{\lambda} \Phi_{e,\lambda} s(\lambda) d\lambda, \quad (6)$$

donde $s(\lambda)$ es la respuesta espectral y se mide en A/W. Para enfatizar en la similitud entre $s(\lambda)$ y $V(\lambda)$, normalizamos $s(\lambda)$ en $\lambda = 555\text{nm}$

³En adelante se le llamará flujo radiante espectral.

⁴La palabra «aproximación» se usa para señalar que no tratamos con una fuente de luz (o fotómetro) puntual.

⁵Esta magnitud es el equivalente radiométrico de la iluminancia y se relacionan mediante la ecuación (1).

$$s(\lambda) = s(555)s_n(\lambda). \quad (7)$$

La respuesta luminosa del fotómetro, s_V , se mide en A/lm y se expresa por,

$$s_V = \frac{I}{\Phi_V} = \frac{s(555) \int \Phi_{e,\lambda} s_n(\lambda) d\lambda}{K_m \int \Phi_{e,\lambda} V(\lambda) d\lambda}. \quad (8)$$

Para un fotómetro perfecto $s_n(\lambda)$ será igual a $V(\lambda)$ y la respuesta luminosa será independiente del flujo radiante espectral de la luz. En la práctica esto no es posible y se requiere conocer $\Phi_{e,\lambda}$ para calcular el factor de corrección espectral,

$$F = \frac{\int \Phi_{e,\lambda} V(\lambda) d\lambda}{\int \Phi_{e,\lambda} s_n(\lambda) d\lambda}. \quad (9)$$

Ahora supongamos que se conoce con precisión el área, A , de la región sensible del fotodiodo. Entonces si la luz se distribuye uniformemente sobre el área sensible, la photocorriente será proporcional a la iluminación E_V sobre el fotodiodo.

$$E_V = \frac{K_m F}{s(555)A} I. \quad (10)$$

A partir de esta expresión se puede apreciar la importancia del factor de corrección espectral, F . Algunos fotómetros incluyen filtros ópticos con la intención de modificar la respuesta espectral del fotodiodo, s_n , y lograr que $F = 1$. Otros fotómetros calculan F para diferentes $\Phi_{e,\lambda}$ de interés.

Lámparas fluorescentes

La lámpara fluorescente está muy relacionada con la lámpara de vapor de mercurio, cuyas líneas espectrales de emisión pertenecen a la región ultravioleta y visible. Casi la mitad de la potencia radiante emitida por la lámpara de mercurio se debe a la radiación ultravioleta.

Una lámpara fluorescente es un tubo de descarga eléctrica, cuyo interior se ha recubierto de fósforo. El tubo se llena de un gas a baja presión que lleva la descarga eléctrica hasta que las gotas de mercurio líquido se vaporicen. El flujo radiante, especialmente a 253.7 nm, excita el fósforo que emite flujo radiante espectral en la región visible. El fósforo utilizado en las lámparas fluorescentes es un elemento inorgánico cristalino de alta pureza química. Frecuentemente se añaden activadores para incrementar la eficiencia del fósforo y controlar el flujo radiante espectral, $\Phi_{e,\lambda}$. Por lo tanto la elección del fósforo determina el flujo radiante espectral de la lámpara, que nosotros percibimos como tonalidades de luz blanca. La figura 2 muestra la irradiancia⁵ de la lámpara fluorescente que se utiliza para las mediciones fotométricas. En la parte superior de esta figura se muestra el espectro de emisión del mercurio en el rango visible. Al comparar los dos espectros se confirma la presencia de mercurio dentro de la lámpara fluorescente utilizada.

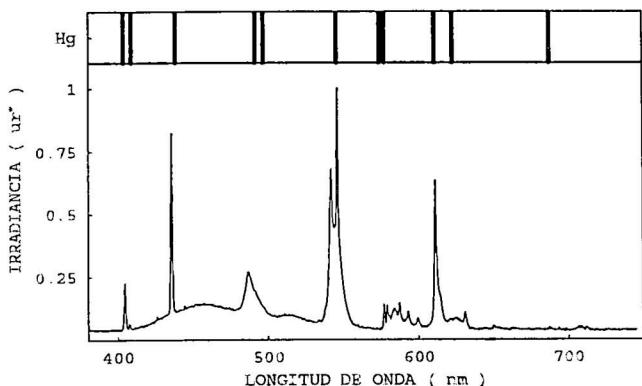


Figura 2. Irradiancia de la lámpara fluorescente utilizada. En la parte superior se muestra el espectro de emisión del mercurio en el rango visible. Los datos se midieron con un espectrómetro «Edmund optics» modelo NT57-052. * unidades relativas.

3. Parte experimental

Instrumentación

Los datos fotométricos básicos de la lámpara consisten en un conjunto de valores de la intensidad luminosa en diferentes direcciones. La medición de la distribución de la intensidad involucra mediciones fotométricas y angulares.

Para las mediciones de la intensidad luminosa en diferentes direcciones, la lámpara se monta en un goníometro para facilitar su posicionamiento en ángulos definidos. El goniofotómetro construido (vea figura 4) consiste en un dispositivo mecánico para soportar y posicionar la lámpara y el cabezal del fotómetro. El goniofotómetro permite rotar a la lámpara alrededor de dos

ejes mutuamente perpendiculares cuya intersección es el centro fotométrico. El cabezal del fotómetro permanece fijo sobre el banco óptico a una distancia adecuada del centro fotométrico y alineado con este. A lo largo de esta sección se muestran los dispositivos construidos para realizar la correcta medición de la distribución de la intensidad.

Sistema de coordenadas

La determinación de la distribución de la intensidad de la lámpara en el espacio involucra el uso de un sistema de coordenadas para definir la dirección en la cual se efectúa la medición de intensidad. Se utiliza el sistema de coordenadas esféricas cuyo origen coincide con el centro fotométrico de la lámpara. Este punto, para el tipo de lámpara usada, es el centro geométrico de la superficie que emite luz.

Una dirección en el espacio queda determinada por dos ángulos. En el sistema de planos C estos ángulos son:

- El ángulo C entre un semiplano, tomado como origen, y un semiplano que contiene la dirección considerada.
- El ángulo γ entre el eje de intersección, de los dos semiplanos anteriores, y la dirección considerada.

En este sistema se llama semiplano C a aquel semiplano que forma un ángulo de C grados con el semiplano origen. Además la intersección de los semiplanos C coincide con el primer eje de la lámpara y el segundo eje principal cae en el plano $C = 0^\circ$. Los semiplanos C , los ángulos γ y los ejes principales de la lámpara se muestran en la figura 3.

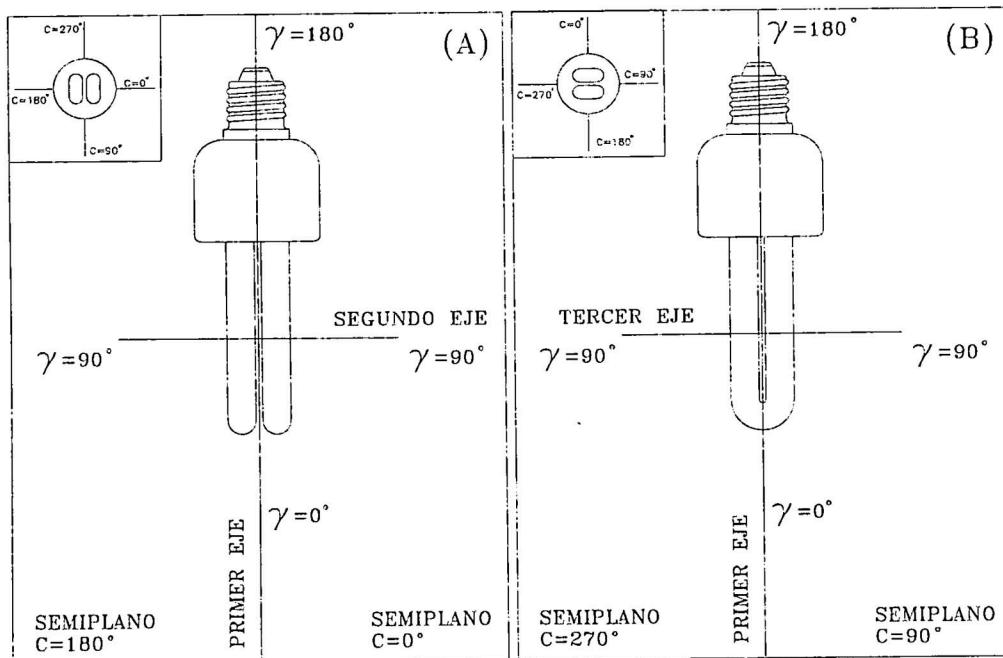


Figura 3. Ejes principales de la lámpara y sistema de coordenadas utilizado. El origen de coordenadas es el centro fotométrico de la lámpara y los ejes del sistema corresponden a los ejes principales de la lámpara según se muestra en la figura. Los recuadros (A) y (B) muestran vistas de dos planos mutuamente perpendiculares formados por los ejes principales.

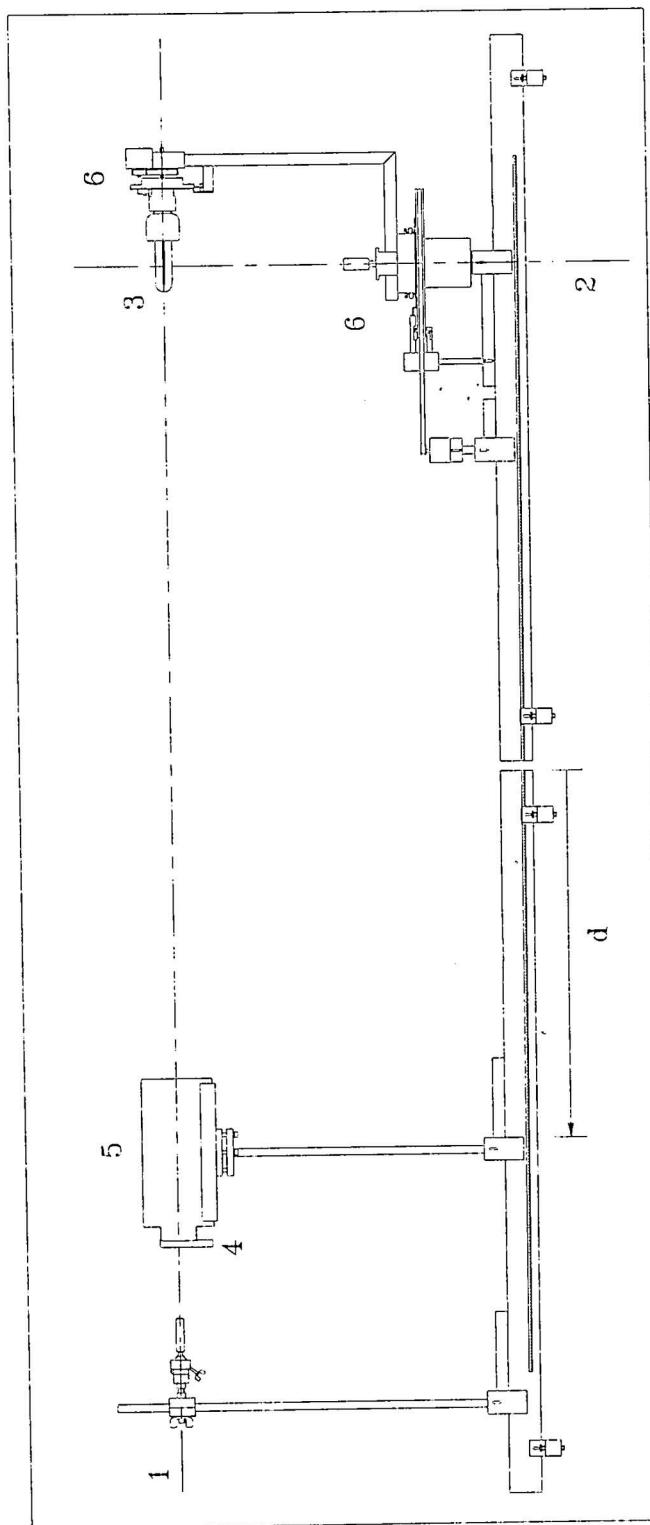


Figura 4. Montaje del goniófotómetro. Se muestra el laser (1) cuyo haz representa la dirección de medición, los ejes de rotación están representados por las líneas punteadas. También se muestra el banco óptico (2), la lámpara (3) que se está caracterizando, el sensor de iluminación (4) que está fijo al tubo con diafragmas (5) y los goniómetros (6).

Sensor de iluminación

La posición del fotómetro se indica en la figura 4 con el número 4. Allí se muestra acoplado a un tubo con difrágmas que reduce el campo angular de medición.

El fotómetro utilizado es un sensor de iluminación fabricado por «Control Company», modelo *LX - 1108*. Esencialmente se eligió realizar las mediciones con este fotómetro debido a que contaba con un certificado de calibración vigente, corrige la medición de acuerdo a la fuente de luz (tungsteno, fluorescente, solar y mercurio) y su interfase para transmisión de datos es digital. En la tabla 1 presentamos las especificaciones del fotómetro utilizado.

Tabla 1. Especificaciones del fotómetro utilizado

Fotómetro	
Rango de medición	Manual
	Rng1: 0 a 1 999 lx
	Rng2: 2 000 a 19 990 lx
	Rng3: 20 000 a 50 000 lx
Resolución	1 lx (Rng1)
	10 lx (Rng2)
	100 lx (Rng3)
Exactitud	4% + 2 dígitos
Tiempo de respuesta	0.4 seg
Salida	Digital (RS-232)

Banco óptico

El banco óptico utilizado consta de dos rieles de aluminio de 120 cm de largo cada uno aproximadamente. Este se muestra en la figura 4. Con la ayuda de un nivel, cada riel debe ser alineado con la horizontal. Para conseguirlo, cada riel se apoya sobre cuatro tornillos graduables. El siguiente paso es alinear longitudinalmente ambos rieles.

Sobre el primer riel (lado derecho en la fig. 4), se acomodan los goniómetros que soportan la lámpara. Estos permanecerán en posiciones fijas. Sobre el segundo riel (lado izquierdo en la fig. 4) se acomoda el soporte del fotómetro, que debe tener la libertad de desplazarse en toda la extensión. Los dos rieles llevan reglas de un metro para medir la posición de los elementos ópticos.

Respecto a las mediciones de d y d_0 , tal como se definieron para la ecuación (5), anotamos que la medición de d no es práctica. Es decir que para determinar d debemos realizar mas de una medición. Este inconveniente tiene dos causas, la primera es la dificultad de proyectar las posiciones de la lámpara y el fotómetro sobre las reglas del banco óptico. La segunda es que el banco óptico está dividido en dos, debido a su gran tamaño.

Se puede solucionar este inconveniente redefiniendo d y d_0 . En la ecuación (5) se puede observar que la magnitud importante es $d + d_0$, que es la distancia efectiva en la cual la lámpara se comporta como una fuente puntual. Por lo tanto se define d como la distancia entre el borde derecho del jinete que soporta el fotómetro y el borde derecho del segundo riel (vea la figura 4). Para determinar d_0 se debe realizar una serie de mediciones del par (d, E_V) a lo largo del segundo riel. Luego se realiza un ajuste de datos utilizando la ecuación (5) para obtener la mejor estimación de d_0 .

Goniómetros

Los goniómetros tienen por propósito medir los ángulos que determinan la dirección en la cual se mide la intensidad, respecto al centro fotométrico de la lámpara. El goniómetro N°1 mide el ángulo C y soporta directamente a la lámpara. El diseño completo se muestra en la figura 5.

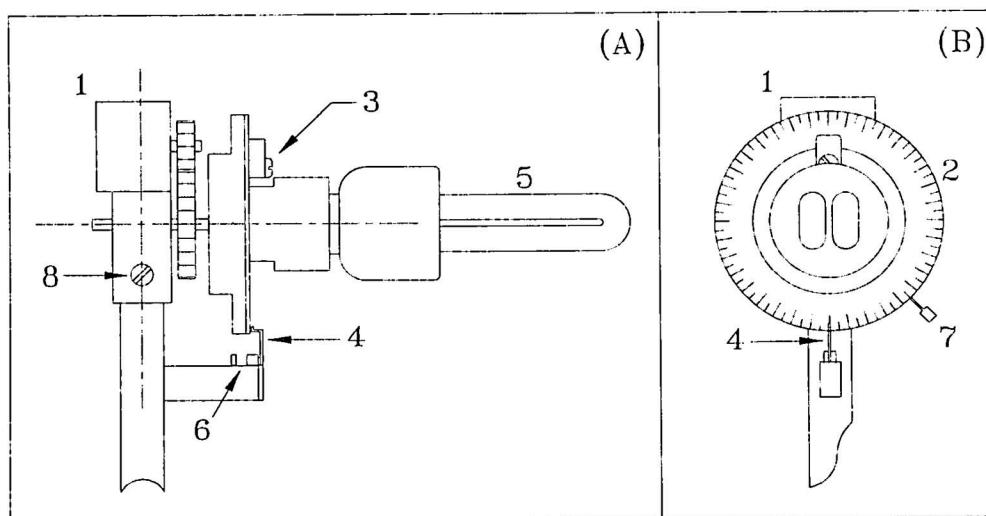


Figura 5. Diseño del goniómetro N°1 para la medición del ángulo C . El recuadro (A) es una vista lateral y el recuadro (B) es la vista de frente que muestran los componentes principales enumerados: El motor (1), la regla (2), el fijador de la regla (3), la aguja (4) que indica el ángulo, la lámpara (5), la fotopuerta (6), el pin (7) que cruza la fotopuerta y el tornillo (8) que alinea la lámpara.

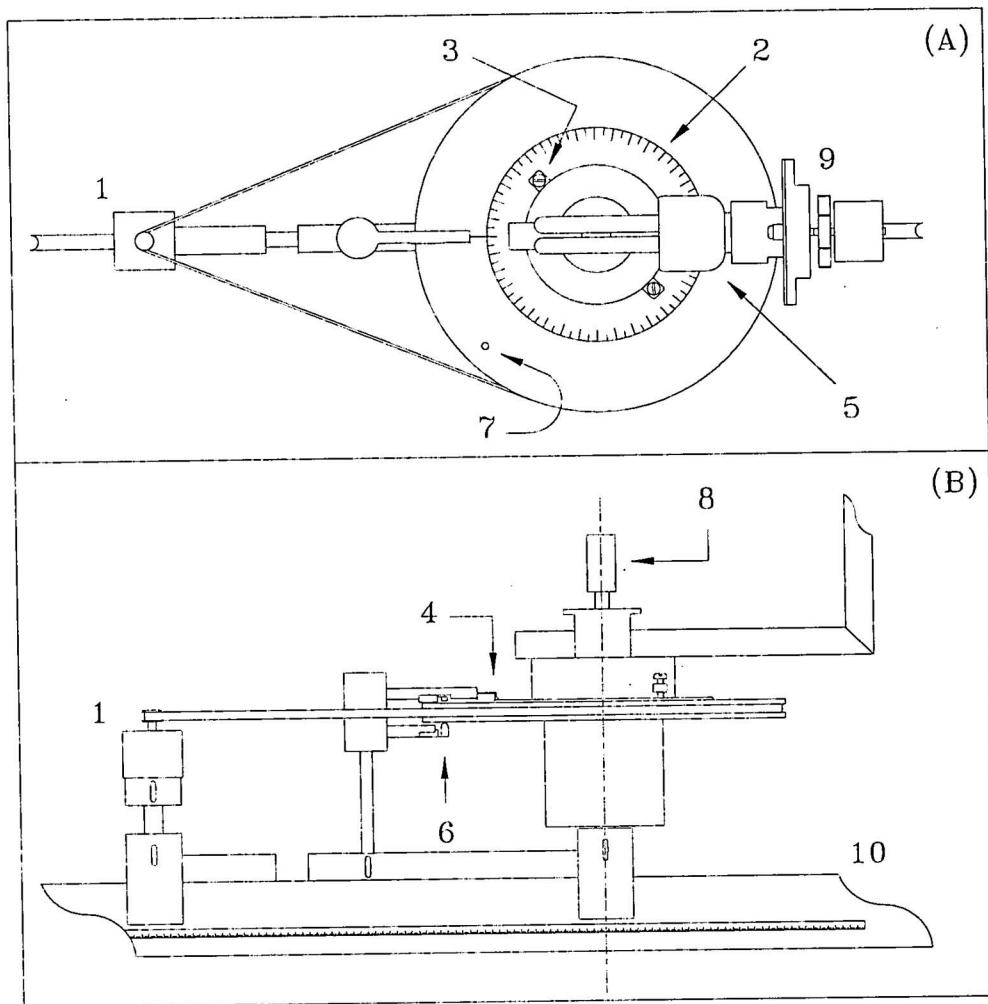


Figura 6. Diseño del goniómetro N°2 para la medición del ángulo γ . El recuadro (A) es una vista de planta y el recuadro (B) es la vista lateral que muestran los componentes principales enumerados: El motor (1), la regla (2), el fijador de la regla (3), la aguja (4) que indica el ángulo, la lámpara (5), la fotopuerta (6), el agujero (7) que cruza la fotopuerta, el tornillo (8) que alinea la lámpara, el goniómetro N°1 (9) que se apoya sobre el goniómetro N°2 y el riel (10) sobre el que se monta todo lo anterior.

El goniómetro N°2 está diseñado para medir el ángulo γ y se muestra en la figura 6. Su diseño y funcionamiento es muy similar al goniómetro N°1.

A continuación se describen los componentes numerados mostrados en las figuras 5 y 6 que permiten automatizar la medición de los ángulos C y γ :

1. Posición del motor de pasos que provoca el giro de la lámpara. La elección de un motor de pasos permite controlar, desde la computadora, el ángulo que debe girar la lámpara. La transmisión del torque, hacia la lámpara, se hace por medio de un engranaje o faja.
2. Posición de la regla circular que permite medir los ángulos de rotación con una resolución de un grado o medio grado según corresponda. Esta regla puede ser rotada sobre su posición para que la lectura «cero grados» pueda coincidir con alguna característica geométrica de la lámpara.
3. Posición del seguro o fijador de regla, impide que

la regla se mueva cuando se ajusta el tornillo que lo sostiene.

4. Posición de la aguja que indica el plano C o ángulo γ de la dirección en que se está midiendo la iluminación.
5. Posición de la lámpara que se está caracterizando.
6. Fotopuerta o detector utilizado para detectar una posición de referencia del goniómetro. Este detector está compuesto por un par de diodos, un emisor y un receptor de radiación IR.
7. Posición del pin (fig. 5) o agujero (fig. 6) que cruza la fotopuerta, cuya función es señalar la posición de referencia del goniómetro.
8. Este tornillo tiene dos funciones:

En la figura 5, la primera función es fijar el goniómetro N°1 al poste que lo soporta. La segunda es permitir alinear el centro fotométrico con el eje de rotación del goniómetro N°2. Esto se debe a que

todo el goniómetro N°1 puede girar alrededor de la línea vertical (mostrada en la figura 5) punteada que pasa por este tornillo.

En la figura 6, la primera función es permitir desplazar radialmente a la lámpara para alinear el centro fotométrico con el eje de rotación del goniómetro N°2, que se muestra en línea punteada en el recuadro (B). La segunda función es servir de base para hallar experimentalmente el eje de rotación del goniómetro N°2.

Los ejes de rotación de los dos goniómetros se muestran en la figura 4.

9. Posición del goniómetro N°1.
10. Riel que sirve de base para montar los dos goniómetros descritos.

En el recuadro (A) de la figura 5 también se ha trazado una linea horizontal punteada, esta linea representa el eje de rotación del goniómetro N°1 que, en principio, debería coincidir con el primer eje de la lámpara.

El sistema está diseñado para realizar giros de 22,5° para pasar de un semiplano C al siguiente y para variar el ángulo γ en 5° por cada giro y luego medir la iluminación en esa dirección. La lectura de los goniómetros nos indicará si realmente la lámpara giró el ángulo predicho. Los goniómetros serán la herramienta necesaria para diseñar una nueva rutina o corregir la existente.

La rutina que gobierna el orden en que giran los motores está escrita en el archivo «orden_2.txt». Este le indica al programa principal «Fotometria.vi» que el motor 1 (en el goniómetro N°1) debe mantener un ángulo C fijo, mientras el motor 2 (en el goniómetro N°2) varía el ángulo γ de 0° a 180° midiendo la iluminación cada 5°. Luego el motor 1 gira 22,5° y se repite el proceso hasta que el motor 2 haga un barrido de 360°. El archivo «orden_2.txt» consta de 33 788 líneas y en cada línea hay una secuencia de 3 números del tipo «-1 0 0». Los dos primeros números corresponden a los motores 1 y 2 respectivamente y solo pueden tomar tres valores «±1» ó «0». El «±1» significa un giro horario o antihorario de aproximadamente 0,78° para el goniómetro N°1 y de aproximadamente 0,094° para el goniómetro N°2. El «0» significa que el motor no gira. El tercer número de la fila corresponde al fotómetro y solo pueden tomar dos valores «1» ó «0». El «1» significa que se debe registrar el valor de iluminación actual y «0» significa lo opuesto. El archivo, generado por el programa principal, donde se registran los valores de iluminación y dirección correspondiente se llama «Fotometria.txt». Puede ser necesario, a criterio del experimentador, recalibrar la rutina del sistema para lo cual se debe generar un nuevo archivo «orden_2.txt»; pero se debe respetar el nombre y la ubicación de ese archivo para que el programa principal

no tenga conflictos.

El ángulo mínimo que puede girar el goniómetro corresponde a un paso del motor que a su vez corresponde a una orden «±1» en la rutina de control. Los motores de pasos utilizados son de cuatro fases. Esto significa que tienen cuatro bobinas que se activan en secuencia para que el motor gire de acuerdo a la rutina de control. Por lo tanto cada motor consta de 6 terminales. Dos de ellos se conectan al potencial de +5V y los otros cuatro se aterrizan secuencialmente.

El puerto paralelo de la computadora tiene capacidades que se pueden utilizar para aplicaciones de control, pues permite manejar la información en el bus de 8 bits de salida. En base a esta propiedad se construyó una interfase para manejar las señales del puerto y se le añadió un circuito de potencia para el control de dos motores de pasos.

Alineación

El sistema de alineación tiene el propósito de agrupar apropiadamente todos los elementos que componen el goniómetro. La idea general consiste en una línea horizontal imaginaria, que se usa para alinear el cabezal del fotómetro, el tubo con diafragmas y la lámpara.

Ahora consideremos el cabezal del fotómetro, que se muestra en la figura 4, es el fotodiodo lo que se debe alinear. Se debe procurar que el ángulo, que forma la línea normal a la superficie del fotodiodo y la línea horizontal, sea pequeño. El tubo posee un eje simétrico que pasa por el centro de los diafragmas. Es este eje el que se debe alinear. Finalmente consideremos la lámpara, es el centro fotométrico el punto que debe alinearse.

Se define la posición inicial de la lámpara como aquella donde el primer eje coincide con la línea horizontal imaginaria descrita anteriormente, y además el tercer eje coincide con una línea vertical.

La línea que se necesita como referencia, para orientar los elementos mencionados, está representada por un haz laser. Bastará con un laser semiconductor que posea ángulo de divergencia reducido, alta intensidad y dimensiones pequeñas. La posición del puntero laser se indica en la figura 4 con en el número 1. Allí se muestra como se debe utilizar para alinear los elementos ópticos.

Software de control

Como ya se mencionó, se ha escrito un programa⁶ principal llamado «Fotometria.vi». Este programa tiene la tarea de leer la rutina de control, ejecutar la rutina, mostrar las mediciones de iluminación en tiempo real y finalmente generar el archivo de registro. Todo esto se puede hacer desde el panel de control del programa principal, que se muestra en la figura 7.

⁶Todos los programas han sido escritos en el lenguaje «Labview 6i» distribuido por «National Instruments».

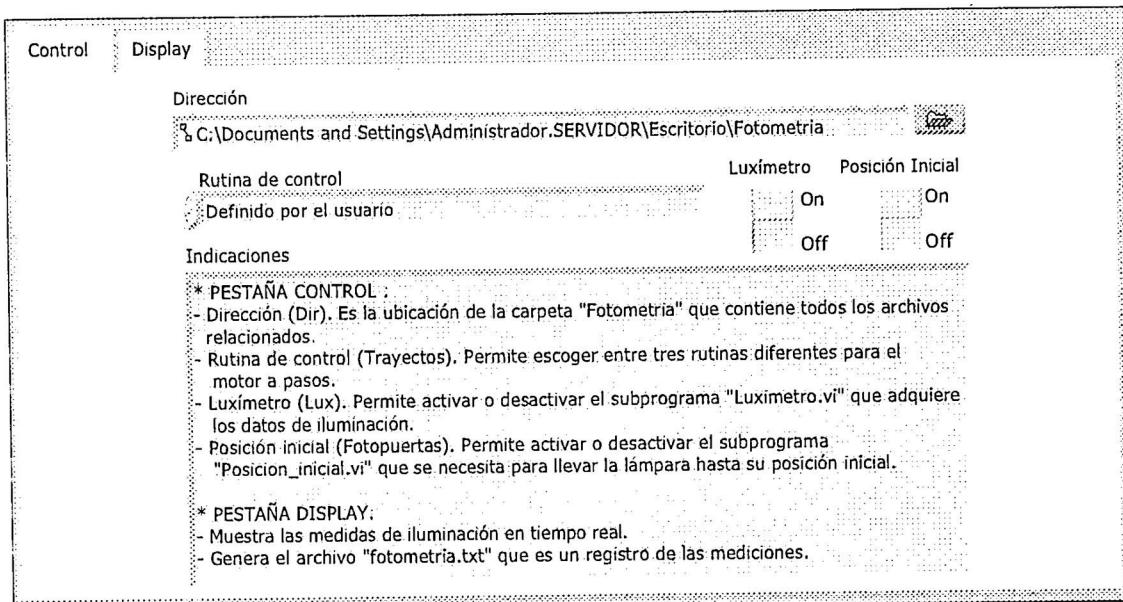


Figura 7. Panel de control del programa principal «Fotometria.vi». La pestaña «Control» contiene los 4 parámetros que se deben fijar para empezar el proceso de toma de datos. La pestaña «Display» muestra las mediciones de iluminación en tiempo real.

Ahora explicamos los parámetros de entrada del panel de control:

El primer parámetro se llama «posición inicial» y le indica al programa si deberá llevar la lámpara hasta su posición inicial o lo hará manualmente el experimentador.

El segundo parámetro se llama «Rutina de control» y permite escoger entre tres rutinas diferentes. Luego el programa lee el archivo que contiene la rutina seleccionada y se ejecuta, línea por línea, cada orden contenida.

El tercer parámetro se llama «Luxímetro» y puede activar o desactivar completamente el proceso de toma de datos.

El cuarto parámetro se llama «Dirección», allí se debe indicar la ubicación de la carpeta «Fotometria» que contiene todos los programas y archivos relacionados. Es importante indicar correctamente dicha ubicación, de lo contrario el programa no sabrá donde encontrar el archivo que contiene la rutina de control, ni donde guardar el archivo de registro.

El archivo de registro (llamado **Fotometria.txt**) contiene tres columnas. Las dos primeras indican los ángulos C y γ , la tercera columna contiene la medición de iluminación correspondiente.

Resultados

Los datos presentados a continuación se midieron el 19 de julio de 2006. La distancia d mínima para realizar aproximaciones del inverso al cuadrado es de $d_m = 0,37m$. En la figura 8 se presentan las mediciones del par (d, E) que se realizan con el fin de determinar

el mejor valor de d_0 . Las mediciones se realizaron en la dirección del semiplano $C = 45^\circ$ y $\gamma = 90^\circ$. Para cada distancia d medida, se hizo 23 medidas de la iluminación E_V . Luego se registró el valor promedio y la desviación⁷ estándar σ . Anotamos que estas mediciones de iluminación están en unidades relativas. Durante estas mediciones la temperatura ambiente registrada dentro del tubo con diafragmas fue de $20,9^\circ C$ al inicio y de $21,5^\circ C$ al final. El voltaje de alimentación de la lámpara fue de $12,9VDC$ y la corriente fue de $0,89A$, al inicio y de $0,90A$ al final.

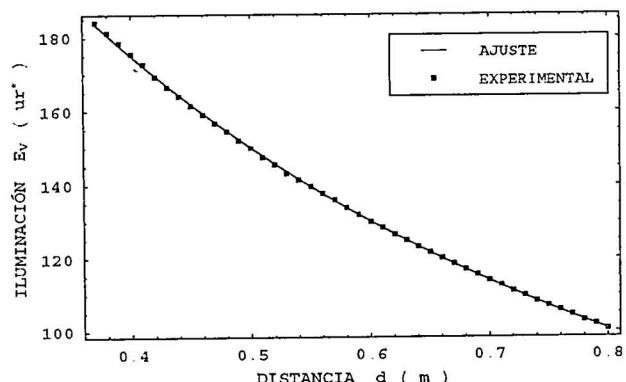


Figura 8. Curva experimental de la aproximación del inverso al cuadrado. Se muestran los datos experimentales y el ajuste correspondiente de la ecuación (5). * Unidades relativas

En la tabla 2 se presenta la distribución de iluminación de la lámpara a una distancia $d = 0,37m$. Como se puede observar la malla usada es de $22,5^\circ$ entre los semiplanos C y de 5° entre valores de γ adyacentes.

⁷Esta es la desviación considerando solamente la componente estadística de la varianza $\sigma^2(E)$.

Tabla 2. Distribución de iluminación E_V medida en lux a una distancia $d = 0,37m$

Ángulo γ	Ángulo C												360°			
	0°	22.5°	45°	67.5°	90°	112.5°	135°	157.5°	180°	202.5°	225°	247.5°	270°	292.5°	315°	337.5°
0°	11	11	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	11	11	11	10
5°	12	13	13	12	13	14	14	13	13	13	12	12	12	12	12	12
10°	15	15	16	16	15	15	16	16	15	15	16	15	14	14	15	14
15°	16	17	19	18	17	18	20	19	17	18	18	18	16	17	17	16
20°	18	20	21	21	18	22	23	22	20	22	20	17	19	20	19	20
25°	20	23	25	24	21	24	26	24	22	24	24	23	19	21	23	20
30°	23	26	28	27	23	27	29	28	24	26	28	21	24	27	25	23
35°	24	29	30	29	25	30	32	30	26	29	28	23	26	28	24	24
40°	26	31	34	32	27	33	34	33	27	32	33	30	24	29	32	30
45°	27	34	36	35	29	35	38	35	29	34	35	33	25	31	33	28
50°	29	35	38	36	29	36	40	37	30	36	37	34	27	33	36	35
55°	30	37	40	38	31	39	41	38	31	37	39	36	27	35	38	36
60°	30	39	42	40	32	40	43	40	32	38	41	37	28	36	39	36
65°	31	39	43	41	33	41	44	41	31	40	41	38	29	37	41	38
70°	32	40	44	41	34	43	46	41	32	41	43	39	29	39	41	40
75°	31	41	44	42	34	42	46	42	32	41	43	39	29	38	43	39
80°	31	41	45	42	33	43	47	41	32	41	43	40	29	39	42	40
85°	31	41	45	42	33	43	47	42	31	41	43	39	29	39	42	40
90°	31	40	44	41	33	42	45	41	31	41	42	39	29	38	42	39
95°	30	40	43	40	32	41	44	41	30	39	42	37	27	37	41	39
100°	29	39	42	40	31	40	44	39	30	39	40	36	27	37	40	38
105°	29	37	41	38	30	38	42	38	29	37	38	35	26	35	38	36
110°	27	36	38	35	28	36	39	36	28	35	37	32	24	33	36	34
115°	26	34	36	34	26	34	37	33	26	33	34	31	23	32	34	32
120°	25	31	34	31	24	31	34	31	25	30	32	28	21	29	32	30
125°	22	28	30	27	22	28	30	28	22	28	26	19	26	29	27	23
130°	20	25	27	24	19	25	27	25	20	25	26	23	17	24	26	25
135°	18	22	23	21	16	21	23	22	18	21	22	19	15	20	22	19
140°	16	19	20	18	14	17	19	18	15	18	16	13	17	19	18	16
145°	12	15	15	13	11	14	15	14	12	14	14	13	10	13	15	13
150°	10	11	11	10	8	10	10	10	10	10	10	9	8	10	11	11
155°	8	7	6	5	7	6	5	7	6	7	6	5	6	7	8	7
160°	4	4	3	3	3	3	3	4	3	3	2	2	3	3	4	4
165°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
170°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
175°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
180°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Las mediciones de iluminación están en lux. Durante estas mediciones la temperatura ambiente registrada dentro del tubo con diafragmas fue de $21,4^{\circ}\text{C}$. El proceso de toma de datos duró aproximadamente 22 minutos. El voltaje de alimentación de la lámpara fue de 12.9VDC y la corriente fue de 0.89A, al inicio del proceso de toma de datos, y de 0.90A al final de este.

4. Cálculos

Cálculo de d_0

Utilizando las mediciones de los pares (d, E_V) y la ecuación (5), se aplica el método de mínimos cuadrados para determinar el valor más probable de d_0 e I_V . Luego los valores numéricos son,

$$d_0 = 0,855 \text{ m} \quad (11)$$

$$I_V = 275,7 \text{ ur.} \quad (12)$$

En la figura 8 se muestran los datos experimentales y la curva, $E_V = \frac{I_V}{(d+d_0)^2}$, teórica de la iluminación. Se aprecia un buen acuerdo entre los datos experimentales y la aproximación del inverso al cuadrado. Anotamos que el valor de d_0 es una constante geométrica del arreglo experimental mientras que el valor calculado de I_V es constante solo en la dirección, $C = 45^{\circ}$ y $\gamma = 90^{\circ}$, en que se hizo la medición.

Cálculo de la intensidad luminosa I_V

Ahora que se conoce la constante, $d_0 = 0,855\text{m}$, se aplica la ecuación (5) a los datos de la tabla 2 para calcular I_V . De esta manera se obtiene la distribución de intensidad de la lámpara en cuestión. El resultado de este cálculo se muestra en las figuras 9 y 10, la intensidad está expresada en candelas. Anotamos que estas gráficas caracterizan, a la lámpara en cuestión, en las direcciones indicadas y es independiente de la distancia d .

La figura 9 muestra la gráfica polar de la intensidad luminosa en los semiplanos $C = 45^{\circ}$ y $C = 225^{\circ}$ que pertenecen al mismo plano. Se debe notar que el centro fotométrico de la lámpara está ubicado en origen de coordenadas.

En la figura 10, recuadro (A) se muestra la superposición de los semiplanos $C = 0^{\circ}$, $C = 45^{\circ}$ y $C = 90^{\circ}$. En esta figura se puede comparar como varía la intensidad cuando γ varía de 0° a 180° en tres semiplanos simétricos de la lámpara en cuestión.

En la figura 10, recuadro (A) se puede observar que la curva de intensidad no es suave. Este problema es una consecuencia de la baja resolución del sensor de iluminación y se puede comprobar que para mediciones hechas a una distancia mayor a d_m , el problema se incrementa. Este inconveniente se puede resolver si se repite el experimento un gran número de veces y se calcula la distribución de intensidad promedio \bar{I}_V .

El resultado del cálculo de la distribución de intensidad promedio para doce repeticiones del experimento se muestra en la figura 10, recuadro (B). Si comparamos las

figuras 10A y 10B se observa que las curvas de intensidad promedio son más suaves⁸ y para mejorar el resultado basta con realizar más repeticiones del experimento.

Cálculo del flujo luminoso Φ_V

Ahora que se conoce la distribución de intensidad promedio, \bar{I}_V , se usa la ecuación (3) para calcular el flujo luminoso Φ_V .

Integramos la ecuación (3),

$$\Phi_V = \int I_V d\Omega, \quad (13)$$

donde la integral se evalúa en todas las direcciones definidas por C y γ .

La ecuación (13) se expresa como,

$$\Phi_V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_V \sin\gamma dC d\gamma, \quad (14)$$

Para evaluar la integral de la ecuación (14) se utiliza la regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple. De acuerdo con la tabla 2, los ángulos C y γ están discretizados y se pueden expresar (en radianes) de la siguiente manera,

$$\gamma_i = (i - 1) \frac{\pi}{36}, \quad (15)$$

$$C_j = (j - 1) \frac{\pi}{8}, \quad (16)$$

donde $i = \{1, 2, \dots, 37\}$ y $j = \{1, 2, \dots, 17\}$. Como C y γ determinan el valor de la intensidad I_V ; entonces se denota a la intensidad como,

$$I_V = \bar{I}_V^{i,j}, \quad (17)$$

que es la intensidad promedio en la dirección definida por γ_i y C_j . Por lo tanto la ecuación (14) se expresa como,

$$\Phi_V \approx \frac{\pi}{36} \frac{\pi}{8} \sum_{i=1}^{37} \sum_{j=1}^{17} a_{i,j} \bar{I}_V^{i,j} \sin\gamma_i, \quad (18)$$

donde $a_{i,j} = \mu_i \nu_j$ y μ_i, ν_j son los coeficientes de Simpson definidos por:

$$\mu_i = \begin{cases} 1/3 & \text{si } i \text{ es 1 ó 37} \\ 4/3 & \text{si } i \text{ es par} \\ 2/3 & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\nu_j = \begin{cases} 1/3 & \text{si } j \text{ es 1 ó 17} \\ 4/3 & \text{si } j \text{ es par} \\ 2/3 & \text{si } j \text{ es impar} \end{cases}$$

El resultado de este cálculo es,

$$\Phi_V \approx 570,5 \text{ lumen.} \quad (19)$$

Ahora se puede calcular la eficacia, η , lumínica de la lámpara. Con el goniofotómetro se midió un flujo lumínoso de 570.5 lumen y un consumo de potencia eléctrica de 11.55 watt. Por lo tanto la eficacia es,

$$\eta = 49,4 \text{ lumen/watt.} \quad (20)$$

⁸Con este término se quiere decir que la curva es suave por trozos.

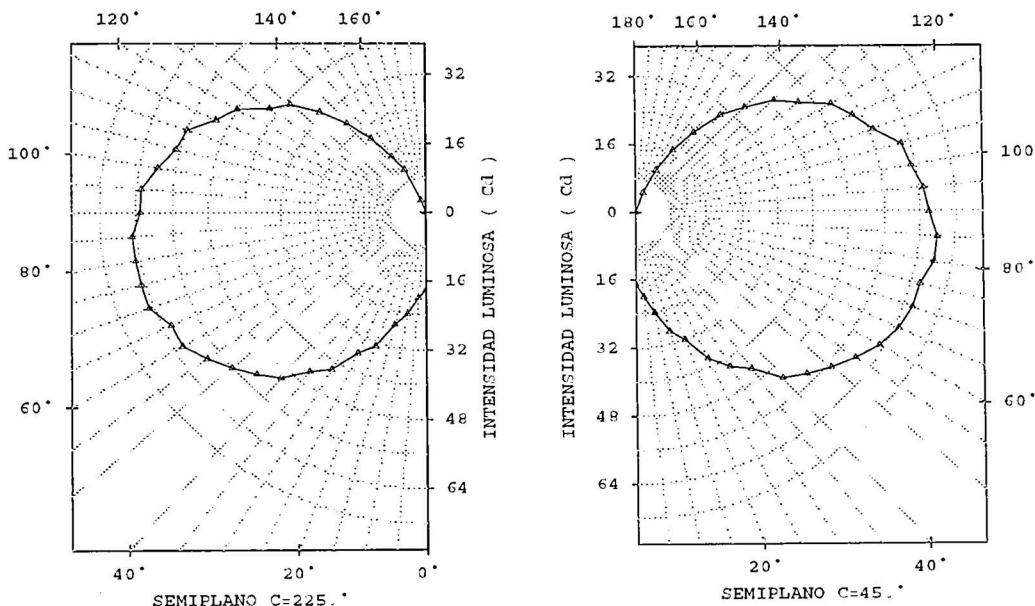


Figura 9. Curva experimental de la intensidad luminosa I_V . A la izquierda se muestra el semiplano $C = 225^\circ$, a la derecha se muestra el semiplano $C = 45^\circ$.

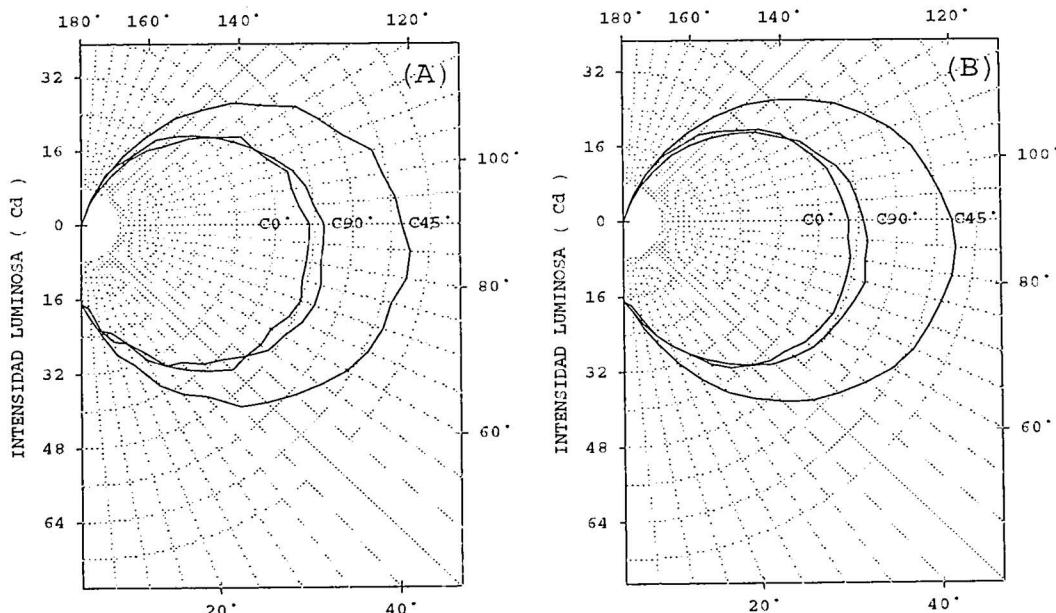


Figura 10. Curva experimental de la intensidad luminosa. Se muestra la superposición de los semiplanos $C = 0^\circ$, $C = 45^\circ$ y $C = 90^\circ$. El recuadro (A) es la intensidad luminosa I_V y el recuadro (B) es la intensidad luminosa promedio \bar{I}_V .

Incertidumbres

Ahora se realiza el análisis de incertidumbre en las mediciones. Para el cálculo del flujo luminoso se utilizó la ecuación (18) y se evaluó usando los valores de la intensidad promedio. Por lo tanto, siendo los elementos $\bar{I}_V^{i,j}$ los parámetros de entrada, la incertidumbre⁹ de la estimación del flujo luminoso se denota por $\sigma(\Phi)$,

$$\sigma(\Phi) = \sum_{i=1}^{37} \sum_{j=1}^{17} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{I}_V^{i,j}} \right) \sigma(\bar{I}_V^{i,j}). \quad (21)$$

Se deriva la ecuación (18) y se reemplaza en la ecuación (21),

$$\sigma(\Phi) = \frac{\pi}{36} \frac{\pi}{8} \sum_{i=1}^{37} \sum_{j=1}^{17} (a_{i,j} \operatorname{sen} \gamma_i) \sigma(\bar{I}_V^{i,j}), \quad (22)$$

donde $\sigma(\bar{I}_V^{i,j})$ es la incertidumbre asociada con la estimación de la intensidad. La incertidumbre $\sigma(\bar{I}_V^{i,j})$ tiene varias componentes que contribuyen en diferentes proporciones y se debe analizar cada componente por

⁹ Esta incertidumbre debe ser interpretada como la desviación máxima observable.

separado. A continuación se señalan las más importantes.

Tal como lo indica la aproximación del inverso al cuadrado, para una dirección determinada (γ_i, C_j) la intensidad es una constante. Por lo tanto los parámetros de entrada para determinar la intensidad son γ y C . Entonces la componente de $\sigma(\bar{I}_V^{i,j})$ asociada con la estimación de los ángulos se denota por $\sigma_\gamma(\bar{I}_V^{i,j})$ y $\sigma_C(\bar{I}_V^{i,j})$.

Además se conoce la incertidumbre asociada con el sensor de iluminación (véase la tabla 1 de especificaciones del instrumento). Entonces la componente de $\sigma(\bar{I}_V^{i,j})$ asociada con el sensor de iluminación se denota por $\sigma_{SI}(\bar{I}_V^{i,j})$.

Por otro lado, cuando se habló de intensidad promedio se hizo referencia al número de veces que se repitió el experimento de medición. Efectivamente a partir de una serie de doce mediciones se calculó la intensidad promedio. Apartir de estos datos se calculó la desviación estándar. Luego, la incertidumbre expandida de la componente de $\sigma(\bar{I}_V^{i,j})$ asociada con la repetición del experimento que se denota por $\sigma_{Rep}(\bar{I}_V^{i,j})$.

Finalmente se agrupan las componentes de $\sigma^2(\bar{I}_V^{i,j})$,

$$\begin{aligned}\sigma^2(\bar{I}_V^{i,j}) = & \left(\sigma_\gamma(\bar{I}_V^{i,j}) + \sigma_C(\bar{I}_V^{i,j}) \right)^2 + \\ & + \sigma_{SI}^2(\bar{I}_V^{i,j}) + \sigma_{Rep}^2(\bar{I}_V^{i,j}).\end{aligned}\quad (23)$$

Tomando la raíz cuadrada a la ecuación (23) se obtiene la incertidumbre de medición de la intensidad luminosa. Si bien aquí no se da el detalle del cálculo de incertidumbres, si mostramos el resultado numérico y la contribución promedio de las componentes principales:

- 4 % de $\sigma^2(\bar{I}_V)$ corresponde a la incertidumbre de las mediciones angulares de γ y C .
- 94 % de $\sigma^2(\bar{I}_V)$ corresponde a la incertidumbre del sensor de iluminación.
- 2 % de $\sigma^2(\bar{I}_V)$ corresponde a la presición de las medidas de intensidad luminosa.

En la tabla 3 se muestra el cálculo numérico de la intensidad luminosa promedio y la incertidumbre respectiva. Estos datos corresponden a la gráfica polar de la figura 10, recuadro B.

Una vez conocido $\sigma(\bar{I}_V^{i,j})$ se calcula la incertidumbre asociada con la medición del flujo luminoso usando la ecuación (22),

$$\sigma(\Phi) = 63 \text{ lumen.} \quad (24)$$

Por lo tanto la expresión completa de la medición del flujo luminoso es,

$$\Phi_V = 570 \pm 63 \text{ lm.} \quad (25)$$

Tabla 3. Distribución de intensidad luminosa \bar{I}_V medida en Candelas.

Ángulo γ	Ángulo C		
	0°	45°	90°
0°	50±2.4	52±2.4	52±2.4
5°	52±2.6	53±2.5	53±2.7
10°	53±2.4	55±2.3	55±2.6
15°	53±2.7	56±2.5	56±2.6
20°	53±2.5	58±2.6	57±2.6
25°	54±2.9	59±2.5	59±2.6
30°	55±3.	59±2.6	59±2.9
35°	54±2.8	59±2.6	57±2.9
40°	55±2.3	58±2.7	53±2.5
45°	53±2.5	54±2.5	50±2.4
50°	52±2.5	52±2.5	47±2
55°	50±2.4	49±2.4	47±2.3
60°	48±2.4	48±2.5	47±2.1
65°	46±2.4	46±2.6	47±2.2
70°	41±2.	41±2.4	43±2.5
75°	36±2.	36±2.1	39±2
80°	35±1.9	35±1.9	38±2.1
85°	33±1.8	33±1.9	35±2
90°	31±1.8	31±1.7	34±1.7
95°	30±1.8	30±1.4	33±2
100°	29±1.6	30±1.6	32±1.8
105°	31±1.5	32±1.7	31±1.8
110°	31±1.7	33±2.	32±1.8
115°	30±1.9	32±1.8	30±1.8
120°	28±1.6	29±2.	26±2.1
125°	26±1.6	25±1.5	21±1.6
130°	24±1.5	22±1.6	19±1.4
135°	20±1.5	22±1.6	19±1.3
140°	17±1.4	22±1.6	20±1.4
145°	14±1.1	18±1.8	17±1.6
150°	9±1.8	9±1.7	9±1.9
155°	2±0.9	2±1.2	3±1.3
160°	1±0.8	1±0.7	1±0.8
165°	1±0.5	1±0.7	1±0.8
170°	1±0.8	1±0.8	1±0.7
175°	1±0.7	1±0.8	1±0.8
180°	0±0.7	1±0.7	1±0.8

5. Conclusiones

A través de este trabajo se ha demostrado la capacidad actual del Laboratorio de Fotometría para evaluar las fluorescentes compactas. En particular reportamos la medición del flujo lumínoso y la distribución de la intensidad luminosa de una lámpara fluorescente compacta, marca «phocos», modelo «CL1211W/C» a 12.9 VDC, 0.89A y 21.4°C.

El flujo lumínoso calculado, $\Phi_V = 570 \pm 63$ lm, posee una incertidumbre del 11 %. Sin embargo mas del 90 % de este valor se debe al sensor de iluminación utilizado. Luego, con un sensor de mayor resolución se mejoraría significativamente la medición.

El cálculo de la distribución de intensidad se muestra en la tabla 3 y en la figura 10B.

medición (2001).

3. M. Ruiz, *Diseño y construcción de un goniosofotómetro* (FC-UNI, Tesis, 2007).

1. Commission Internationale de l'Éclairage, *The photometry and goniophotometry of luminaires* (1996).
2. Indecopi, *Guía para la expresión de la incertidumbre en la*

Coerciveness: from Optimization to Equilibrium Problems¹

Wilfredo Sosa

*Instituto de Matemática y Ciencias Afines - Universidad Nacional de Ingeniería
E-mail: sosa@uni.edu.pe*

Recibido el 03 diciembre del 2007; aceptado el 15 de diciembre del 2007

The main goal of this work is to introduce the notion of coerciveness for Equilibrium Problems, using a classical technical result introduced by Ky Fan in 1961, as an extension of coerciveness ideas from Minimization Problems. By the way, we comment the importance of related conditions to this new coerciveness notion in order to obtain existence results of solutions for the Equilibrium Problems without using monotonicity or generalized monotonicity assumptions.

Keywords: Equilibrium Problems, Recession techniques, Minimization Problems.

El objetivo principal de este trabajo es introducir el concepto de coercividad para problemas de equilibrio, usando un resultado técnico muy clásico introducido por Ky Fan en 1961, como una extensión de las ideas de coercividad para problemas de optimización. Desde luego comentaremos algunas condiciones relacionadas a este nuevo concepto que nos permiten obtener resultados de existencia para el problema de equilibrio sin condiciones de convexidad generalizada ni monotonidad generalizada.

Keywords: Problemas de equilibrio, Técnicas de recesión, Problemas de Minimización.

1. Introduction

In this work, we consider the Minimization and the Equilibrium Problems. The first one is defined by a function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and consists of

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} h(x), \quad (1)$$

and the second one is defined by a nonempty subset K of \mathbb{R}^n and a function $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ and consists of

$$\text{find } \bar{x} \in K \text{ such that } f(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ for all } y \in K. \quad (2)$$

Note that the solution sets of both problems can be represented as the intersection of a set family. Indeed, the solution set of the Minimization Problem is equal to $\bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} L_h(h(y))$ and the solution set of the Equilibrium Problem is equal to $\bigcap_{y \in K} L_{f^y}(0)$ where the function

$f^y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, for each $y \in K$, is defined by $f^y(x) = \begin{cases} -f(x, y) & \text{if } x \in K, \\ +\infty & \text{if } x \notin K. \end{cases}$

In 1961 (see Lemma 1 in [10]) Ky Fan introduced in a technical Lemma two sufficient conditions in order to guarantee that the intersection of a closed set family is nonempty. The first condition is known as KKM condition and it establishes that for all finite subset $\{x^1, \dots, x^m\}$ of the index set for the set family, its convex hull $\text{co}\{x^1, \dots, x^m\}$ is a subset of the union of the corresponding sets indexed by $\{x^1, \dots, x^m\}$. The other one establishes the existence of at least one compact set in the family.

With respect to regarding the Minimization Problem, it is easy to verify that the set family of all the nonempty level sets of a function h satisfies the KKM condition. So

under the assumptions of lsc of h and the existence of at least one level set to be compact, we have that the Minimization Problems have solutions. In order to deal with noncompact sets, recession techniques were introduced. In this sense several conditions appear in the literature as coerciveness conditions. We observe that these coerciveness conditions for a lsc function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ are based on the fact that all the level sets of the function h are compact. It can be verified, without using Ky Fan's Lemma, that the solution set of the minimization problem is exactly the intersection of all nonempty level set of the function h , and since the level sets are compact, then the intersection is nonempty.

Respect to the Equilibrium Problem, Ky Fan used his technical Lemma in order to prove his famous Minimax Theorem (see [9]). This Minimax Theorem was considered as a first result which guarantees existence result for the Equilibrium Problem, here the set K is compact. In order to deal with noncompact sets, some conditions using recession techniques were introduced in the literature in order to obtain existence results of solutions for the Equilibrium Problem, but all of them require generalized monotonicity assumptions, see for example ([4, 5, 8] and the reference there in). The subject of this paper is to introduce the notion of coerciveness for the Equilibrium Problem as an extension of the classical coerciveness ideas for the Minimization Problem. In this way we use the Ky Fan's Lemma, but we replace the compactness assumption in the second sufficient condition by other one related to the new coerciveness notion using recession techniques in order to guarantee the nonemptiness of the solution set of the Equilibrium Problem without using generalized monotonicity assumptions.

In the section three we introduce the coerciveness for Minimization Problems based on fact that at least one

¹The author thanks the hospitality from CUST and ISIMA during his visit at Blaise Pascal University in Clermont Ferrand, France

level set is bounded and it is related to other existence conditions appear in the literature. Some interesting results are commented and an application to quadratic functions is considered in order to recuperate the famous Frank Wolf Theorem. In section four we introduce the coerciveness for Equilibrium Problems as an extension of the coerciveness notion treated in section three. Also, some existences results are introduced and an application to saddle points for quadratic Lagrangian is considered. Of course, we translate the problem of find a saddle point of a Lagrangian function in an Equilibrium Problem in order to apply our results and so guarantee the existence of saddle points of a quadratic Lagrangian function over polyhedral sets.

Denote by $\overline{\mathbb{R}}$ the whole extended real line $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Given a function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, the effective domain of h is $\text{dom}(h) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) < +\infty\}$. The function h is proper if $\text{dom}(h) \neq \emptyset$ and $h(x) > -\infty \forall x \in \mathbb{R}^n$. For each $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, the λ -level set of h is defined by $L_h(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq \lambda\}$, the epigraph of h is defined by $\text{epi}(h) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : h(x) \leq \lambda\}$, h is said convex if $\text{epi}(h)$ is convex in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, h is quasi convex if $L_h(\lambda)$ is convex for all $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, h is lower semi-continuous (lsc in short) if $L_h(\lambda)$ is closed for all $\lambda \in \mathbb{R}$, h is upper semi-continuous (usc in short) if $-h$ is lsc, h is upper hemi-continuous if h is usc in segments lines in $\text{dom}(h)$.

1.1. Some Recession tools

The key for recession techniques is the concept of recession sets (see Definition 2.1.1 [2]). Given a set $K \subset \mathbb{R}^n$, the recession set of K is defined by:

$$K^\infty = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists t_n \downarrow 0, \exists x_n \in K, t_n x_n \rightarrow x \right\}, \quad (3)$$

where \downarrow means that the sequence converges to zero and $t_n > 0 \forall n$.

By convention, the recession set of the empty set is the singleton $\{0\}$ (i.e. $(\emptyset)^\infty = \{0\}$). Thus, we have the following key property (see Proposition 2.1.2 in [2]):

$$A \text{ is bounded if and only if } A^\infty = \{0\}. \quad (4)$$

In case K is also a nonempty closed convex subset of \mathbb{R}^n , it is known that for any $x_0 \in K$

$$K^\infty = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_0 + tx \in K \forall t > 0 \right\}. \quad (5)$$

Note that definition (3) considers only the vectorial structure where as definition (5) considers vectorial and topological structures.

Now, we enumerate some basic results on recession sets that will be useful in the sequel. It follows:

Let K, K_1 and K_2 be subsets in \mathbb{R}^n .

- (a) $K_1 \subset K_2$ implies $K_1^\infty \subset K_2^\infty$;
- (b) $(K + x)^\infty = K^\infty$ for all $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) Let $(K_i), i \in I$, be any family of nonempty sets in \mathbb{R}^n , then

$$\left(\bigcap_{i \in I} K_i \right)^\infty \subset \bigcap_{i \in I} (K_i)^\infty.$$

If, in addition, each set is convex and closed and $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$, then we obtain an equality in the previous inclusion.

Other properties of the recession set C^∞ of a set C are the following (see Proposition 2.1.1 [2]):

1. C^∞ is nonempty closed cone.

2. $(\overline{C})^\infty = C^\infty$.

3. If C is a cone, then $C^\infty = \overline{C}$

If C is a nonempty polyhedral set, Auslender proved that if $\{x^k\} \subset C$ is a sequence such that $\|x^k\| \rightarrow +\infty$ and $\frac{x^k}{\|x^k\|} \rightarrow d$ when $k \rightarrow +\infty$, then for any $t > 0$, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $x^k - td \in C$ (Proposition 2.3 in [1]). It is easy to see that, for each $t > 0$, there exists $k \in \mathbb{N}$, such that $x^k - td \in C$ as well as $\|x^k - td\| < \|x^k\|$ (for more details see [1, 2, 7]). This facts will be used later when we consider quadratic functions over polyhedral sets.

Remark 1.1. Note that the definition of K^∞ is related to the theory of set convergence of Painleve-Kuratowski. Indeed, for a family $\{K_t\}_{t>0}$ of subsets of \mathbb{R}^n , the outer limit is the set

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} K_t := \{x : \liminf_{t \rightarrow +\infty} d(x, K_t) = 0\}. \quad (6)$$

It can then be verified that

$$K^\infty = \limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} K. \quad (7)$$

Given $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, the recession function of h denoted by h^∞ is defined as the function whose epigraph is the recession set of the epigraph of h , i.e., $\text{epi}(h^\infty) = (\text{epi}(h))^\infty$.

It is well known that

$$h^\infty(d) = \liminf_{t \rightarrow +\infty, d' \rightarrow d} \frac{h(td')}{t}, \quad (8)$$

or equivalently

$$h^\infty(d) = \inf \left\{ \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{h(t_k d_k)}{t_k} : t_k \rightarrow +\infty, d_k \rightarrow d \right\}. \quad (9)$$

The relation between the level set of h^∞ for $\lambda = 0$ and any level set of h is as follows (see Proposition 2.5.3 in [2]): for any proper function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and any $\lambda \in \mathbb{R}$, we have

$$(L_h(\lambda))^\infty \subset L_{h^\infty}(0), \quad (10)$$

where the equality holds if h is proper, convex and lsc.

Note that if $L_{h^\infty}(0) = \{0\}$, then from the previous inclusion (see 10) we have that all level sets of the function h are bounded. Moreover if h is lsc, then all the level sets are compact.

1.2. Classical Coerciveness ideas in Optimization theory

Here we collect the main ideas about coerciveness in optimization theory. Of course all of them can be found in Optimization books as for example ([2, 14]).

Definition 1.2. *The function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is strong coercive if*

$$h^\infty(d) > 0 \text{ for all } d \neq 0. \quad (11)$$

It is evident that if h is strong coercive and lsc, then for each $\lambda \in \mathbb{R}$, $L_h(\lambda)$ is compact. The converse is not true, for example consider $h(x) := \sqrt{|x|}$.

Definition 1.3. *The function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is Inf-compact if $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $L_h(\lambda)$ is compact.*

It follows directly that, h is Inf-compact if and only if h is lsc and all level sets are bounded.

Definition 1.4. *The function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is level bounded if $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $L_h(\lambda)$ is bounded.*

Note that if h is level bounded but it is not lsc, then h is not Inf-compact.

Definition 1.5. *The function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, is zero-coercive if*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \quad (12)$$

It is well known that zero-coercive and level bounded notions are equivalent. Moreover, if h is lsc, then Inf-compact, zero-coercive and level bounded notions are equivalent.

2. Coerciveness for Minimization Problems

Note that all these coerciveness ideas considered in the previous section, imply that all the level sets are bounded. Before exploiting the condition that at least one of the level set is bounded, we need to consider some simple ideas using recession techniques.

From now on, for any function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ we denote by $S(h) := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq h(y) \forall y \in \mathbb{R}^n\}$. Note that $S(h) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^n} L_h(h(x))$, moreover, if $\lambda = \inf\{h(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$, then $S(h) = L_h(\lambda)$.

Lemma 2.1. *Let $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be any function.*

$$(S(h))^\infty \subset \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty.$$

Proof: Since $S(h) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^n} L_h(h(x)) \subset L_h(h(x)) \forall x \in \mathbb{R}^n$, we have that $(S(h))^\infty \subset (L_h(h(x)))^\infty \forall x \in \mathbb{R}^n$, and so $(S(h))^\infty \subset \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty$. \square

Lemma 2.2. *Let $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a function and let $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence such that $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda := \inf\{h(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. If $L_h(\lambda) = \emptyset$ and $L_h(\lambda_k) \neq \emptyset \forall k \in \mathbb{N}$, then $\bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (L_h(\lambda_k))^\infty$.*

Proof: We only need to show that $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (L_h(\lambda_k))^\infty \subset \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty$. Indeed, take $u \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (L_h(\lambda_k))^\infty$, thus $u \in (L_h(\lambda_k))^\infty \forall k \in \mathbb{N}$. For each $x \in \mathbb{R}^n$ (arbitrarily fixed), we have that $\lambda < h(x)$, because $L_h(\lambda) = \emptyset$. Since $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = \lambda$ and $L_h(\lambda_k) \neq \emptyset \forall k \in \mathbb{N}$, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\lambda_m \leq h(x)$. So, $L_h(\lambda_m) \subset L_h(h(x))$, which implies that $(L_h(\lambda_m))^\infty \subset (L_h(h(x)))^\infty$, and so $u \in (L_h(h(x)))^\infty$. The statement follows. \square

Theorem 2.3. *Let $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be lsc. $S(h) \neq \emptyset$ if and only if $(S(h))^\infty = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty$*

Proof: Consider $\lambda := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x)$. If $S(h) \neq \emptyset$ then $L_h(\lambda) = S(h) \neq \emptyset$. So, we have that $\bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty \subset (L_h(\lambda))^\infty = (S(h))^\infty$, and the statement follows. Conversely, if $S(h) = \emptyset$, then $(S(h))^\infty = \{0\}$ and so $L_h(h(y))$ are unbounded $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Now, take $u^k \in (L_h(\lambda_k))^\infty$ with $\|u^k\| = 1 \forall k \in \mathbb{N}$, where $\lambda_k \rightarrow \lambda$ with $\lambda_k \geq \lambda_{k+1} > \lambda$ and $\lambda = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$. Since $\lambda_i \leq \lambda_k \forall k \in \mathbb{N}$ and $\forall i \geq k$, we have that $(L_h(\lambda_i))^\infty \subset (L_h(\lambda_k))^\infty$ and $\{u^i\}_{i \geq k} \subset (L_h(\lambda_k))^\infty \forall k \in \mathbb{N}$ and so any cluster point of $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ belongs to $(L_h(\lambda_k))^\infty \forall k \in \mathbb{N}$. From Lemma 2.2, we have that any cluster point of $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ belongs to $\bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty$, and so, the statement follows. \square

The following theorem states necessary and sufficient conditions for the existence of at least one nonempty bounded level set. Here \overline{co} means the closed convex hull.

Theorem 2.4. *Given $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, the following statements are equivalent:*

- (a) $\bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty = \{0\}$.
- (b) There exists $y \in \mathbb{R}^n$ such that $L_h(h(y))$ is bounded.
- (c) There exists $y \in \mathbb{R}^n$ such that $\overline{co}L_h(h(y))$ is bounded.

Proof: We need to prove only (a) implies (b), because the other ones follow from the classical convex analysis. Indeed, note that from Lemma 2.1, we have that $\{0\} \subset (S(h))^\infty \subset \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\infty = \{0\}$ and from

Theorem 2.3 we have that $S(h) \neq \emptyset$. Finally, the statement follows from the fact that $S(h) = L_h(\lambda)$, where $\lambda = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x)$. \square

Now, we introduce the following definition:

Definition 2.5. We say that $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a coercive function if there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $L_h(\lambda)$ is nonempty and bounded. From Theorem 2.4 this is equivalent to say that

$$R(h) := \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} (L_h(h(y)))^\circ = \{0\} \quad (13)$$

Remark 2.6. We notice that, level boundedness implies coerciveness, but the converse is not true, consider for example the function $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $h(x) = -\exp(-x^2)$.

Corollary 2.7. If $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a coercive and lsc function, then h reaches its minimum value over \mathbb{R}^n . Moreover, $S(h)$ is nonempty and compact.

In the convex case, all the previous ideas about coerciveness are equivalent under the lsc assumption for the function. That we can verify it in the following Proposition:

Proposition 2.8. If $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a proper convex and lsc function, then the following statements are equivalent:

1. h is a strong coercive function.
2. h is a Inf-compact function.
3. h is a level bounded function.
4. h is a zero-coercive function.
5. h is a coercive function.
6. $S(h)$ is nonempty, convex and compact.

Proof: The equivalence between (2) and (3) is evident from the lsc assumption. The equivalence between (3) and (5) follows from the fact that if a convex function has a nonempty bounded level set, then all the level sets are bounded. The statement follows from Proposition 3.1.3 in [2]. \square

Now, given $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, we consider the following assumptions:

(H1) $\forall \{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(h)$ with $\lim \|x^k\| = +\infty$ and $\lim \frac{x^k}{\|x^k\|} = u \in R(h)$, $\exists m \in \mathbb{N}$ large enough such that $L_h(h(x^m)) \cap B(0, \|x^m\|) \neq \emptyset$.

(H2) $\forall \{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ with $\lim \|x^k\| = +\infty$, $\exists m \in \mathbb{N}$ large enough such that $L_h(h(x^m)) \cap B(0, \|x^m\|) \neq \emptyset$.

Remark 2.9. Conditions related to assumptions H1 or H2 can be found, for instance, in [1, 4, 6, 7, 13] and references therein.

The following result is given without proof because it is evident.

Lemma 2.10. Given $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. If h is coercive, then H1 holds.

Theorem 2.11. If $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is proper and lsc, then H1 holds if and only if $S(h) \neq \emptyset$.

Proof: If H1 holds, for each $k \in \mathbb{N}$, consider $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by $h_k(x) = \begin{cases} h(x) & \text{if } \|x\| \leq k, \\ +\infty & \text{if } \|x\| > k. \end{cases}$

Without loss of generality, consider h_k proper $\forall k \in \mathbb{N}$. So, from Corollary 2.7, $S(h_k)$ is nonempty and compact $\forall k$. Now, take $x^k \in \text{argmin}\{\|x\| : x \in S(h_k)\} \subset \text{dom}(h)$. Suppose that the sequence is unbounded, without loss of generality we can consider $\|x^k\| \rightarrow \infty$ when $k \rightarrow \infty$ and $\frac{x^k}{\|x^k\|} \rightarrow u$. We see that $u \in R(h)$. Indeed, take $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrarily fixed, then for all $m \geq \|x\|$, we have that $x^m \in L_h(h(x))$ and making $t_m = \frac{1}{\|x^m\|}$, we have that $t_m x^m \rightarrow u$ when $m \rightarrow \infty$ and so $u \in (L_h(h(x)))^\circ$. Since x is arbitrary, then $u \in R(h)$. From H1, $\exists m \in \mathbb{N}$ large enough such that $L_h(h(x^m)) \cap B(0, \|x^m\|) \neq \emptyset$. Now, taking $y \in L_h(h(x^m)) \cap B(0, \|x^m\|)$, then $h(y) \leq h(x^m)$ and $\|y\| < \|x^m\|$, and so $y \in S(h_m)$, which is a contradiction. Then the sequence $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded. If $\{x^k\}$ is bounded, the statement follows, because any cluster point of $\{x^k\}$ is a minimizer of h .

If $S(h) \neq \emptyset$, take $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{dom}(h)$ with $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k\| = +\infty$ and $\lim \frac{x^k}{\|x^k\|} = u \in R(h)$. The statement follows taking $\bar{x} \in S(h)$ and $k \in \mathbb{N}$ such that $\|x^k\| > \|\bar{x}\|$. \square

Theorem 2.12. If $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a proper and lsc function, then H1 is equivalent to H2.

Proof: We need to prove only that H1 implies H2. Indeed, take $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ with $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^k\| = +\infty$. Since H1 holds and h is lsc, then from Theorem 2.11 we have that $S(h) \neq \emptyset$. The statement follows taking $\bar{x} \in S(h)$ and $k \in \mathbb{N}$ such that $\|x^k\| > \|\bar{x}\|$. \square

Remark 2.13. Since H1 and H2 are equivalent when h is lsc, from now on, we referred to its as H whenever h to be lsc.

2.1. An application to quadratic function over polyhedral sets

We finish this section, considering quadratic functions over nonempty polyhedral sets. It is, given $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^T A x + a^T x + \alpha & \text{if } x \in C, \\ +\infty & \text{if } x \notin C, \end{cases} \quad (14)$$

where $C := \{y : By \leq b\}$, A is a $n \times n$ matrix, B is a $p \times n$ matrix, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^p$ and $\alpha \in \mathbb{R}$.

Note that in (14), $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is proper and lsc on \mathbb{R}^n .

The following result will be used in the sequel.

Lemma 2.14. If $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) = \beta > -\infty$, then for each $x \in C$ and each $u \in R(h)$ fixed, the application $l : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ defined by $l(t) = h(x + tu)$ is linear and $l(t) \geq l(0)$ for all $t \in [0, +\infty[$.

Proof: Take $d \in R(h)$ arbitrarily fixed, then $d \in (L_h(h(x)))^\infty \forall x \in \mathbb{R}^n$. Take $x \in C$ arbitrarily fixed, then $\exists \{y^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L_h(h(x))$, $\exists \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \downarrow 0$ such that $t_k y^k \rightarrow u$ when $k \rightarrow +\infty$. So, $u \in C^\infty$ and $-\infty < \beta \leq h(y^k) = \frac{1}{2}(y^k)^T A y^k + a^T y^k + \alpha \leq h(x) < +\infty \forall k \in \mathbb{N}$, implying $u^T A u = 0$. Since $(x + tu) \in C \forall t > 0$, then $l(t) = h(x + tu) = h(x) + t[\frac{1}{2}x^T A u + \frac{1}{2}u^T A x + a^T u] \forall t > 0$. So, the application l is linear on $[0, +\infty[$. Here, $l(t) \geq l(0) \forall t \geq 0$, because $l(t) = h(x + tu) \geq \beta > -\infty \forall t \geq 0$. \square

Theorem 2.15. *Given a quadratic function h over a nonempty polyhedral set. Then $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) = \beta > -\infty$ if and only if the assumption H holds.*

Proof: If $\text{dom}(h)$ is bounded, then H holds. If not, take $\{x^m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C$ such that $\|x^m\| \rightarrow +\infty$ and $\frac{x^m}{\|x^m\|} \rightarrow u \in R(h)$ when $m \rightarrow +\infty$. So, from Lemma 2.14, we have that $h(x) \leq h(x + tu) \forall t \geq 0$. From Proposition 2.3 in [1], we have that for any $t > 0$, there exists $k \in \mathbb{N}$ large enough such that $(x^k - tu) \in C$. Taking $y = x^k - tu$, we have that $h(y) \leq h(y + tu) = h(x^k)$. Note that, for k large enough we have that $\|y\| = \|x^k - tu\| < \|x^k\|$, and so A(h) holds.

Conversely, the statement follows from the lsc of h , H and Theorem 2.11. \square

Finally, we state that the well known Theorem of Frank-Wolf is a consequence of Theorems 2.11 and 2.15.

Corollary 2.16. *(Theorem Frank-Wolf) If the function h is bounded below, then $S(h) \neq \emptyset$.*

3. The Equilibrium Problem

The Equilibrium Problem appears for the first time with this name in 1994 in the paper of Blum and Oettli (see [5]) and it is a very important problem, because has as particular cases (for more details see [5, 4, 13] and references therein), for instance, the following problems:

- a) The minimization problem.
- b) The fixed point problem.
- c) The saddle point problem.
- d) The complementarity problem.
- e) The Nash equilibria problem in non cooperative games.
- f) The variational inequality problem.
- g) The vector minimization problem.

The Equilibrium Problem, abbreviated EP(f,K), as we comment in the introduction, is defined by a set K and a function $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ and consists of

$$\text{EP}(f, K): \text{Find } x \in K : f(x, y) \geq 0 \text{ for all } y \in K. \quad (15)$$

Remark 3.1. We commented in the introduction, that the solution set of EP(f,K) can be written as an intersection of a set family, where the index set is the set K and for each $y \in K$ the respective set is the 0-level set of the function $f^y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by

$$f^y(x) = \begin{cases} -f(x, y) & \text{if } x \in K, \\ +\infty & \text{if } x \notin K. \end{cases} \quad (16)$$

In other words, \bar{x} is a solution of EP(f,K) if and only if $\bar{x} \in \bigcap_{y \in K} L_{f^y}(0)$.

Now, we consider the Ky Fan's Lemma mentioned in the introduction.

Lemma 3.2. *(Lemma 1 in [10], Ky Fan's Lemma) Given $Y \neq \emptyset$ and for each $y \in Y$ consider $C(y)$ as a closed set. If the following two conditions hold:*

(C1) *For any finite subset $\{x^1, \dots, x^q\} \subset Y$: $\text{co}\{x^1, \dots, x^q\} \subset \bigcup_{i=1}^q C(x^i)$,*

(C2) *$C(x)$ is compact for at least some $x \in Y$,*

then $\bigcap_{y \in Y} C(y) \neq \emptyset$.

The following assumptions for the function f will be used in the sequel.

(f0) f^y is lsc $\forall y \in K$,

(f1) *For any finite set $\{x^1, \dots, x^q\} \subset K$ and for any $x \in \text{co}\{x^1, \dots, x^q\}$: $\max_{i=1, \dots, q} f(x, x^i) \geq 0$.*

Remark 3.3. We point out that assumptions f0 and f1 are related to the Ky Fan's Lemma. Indeed, taking $Y = K$ and $C(y) = L_{f^y}(0)$ for each $y \in Y$

1. Assumption (f1) is equivalent to condition (C1).

2. Assumption (f0) implies that $C(y)$ is a closed for each $y \in Y$.

3. If K is a convex set and for each $x \in K$ $f(x, x) \geq 0$ and the function $f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by

$$f_x(y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{if } y \in K, \\ +\infty & \text{if } y \notin K, \end{cases} \quad (17)$$

is quasi-convex, then f1 holds and so (C1) too.

4. Coerciveness for Equilibrium Problems

Given the equilibrium problem EP(f,K), we introduce the coerciveness, using the notation of the previous section, as follow:

Definition 4.1. We say that EP(f,K) is:

- 1. Strong coercive if there exist $y \in K$ such that f^y is strong coercive.
- 2. Inf-compact if there exist $y \in K$ such that f^y is Inf-compact.
- 3. Level bounded if there exist $y \in K$ such that f^y is level bounded.

4. *Coercive if there exist $y \in K$ such that $L_{f^y}(0)$ is bounded.*

Remark 4.2. We can find in the literature some extensions of the classical coerciveness notions, using recession techniques, of function $h : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ to operators $T : K \subset X \rightarrow X^*$ (here X^* denote the dual topological space of X), for instance we cited the following

1. in [11] Harker and Pang consider the following condition for some $\bar{y} \in K$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in K} \frac{\langle T(x), x - \bar{y} \rangle}{\|x\|} = +\infty. \quad (18)$$

2. in [12] Guo and Yao consider another one condition for some $\bar{y} \in K$

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in K} \langle T(x), x - \bar{y} \rangle > 0. \quad (19)$$

Of course the previous conditions were introduced in the setting of the Variational Inequality Problem (VIP in short). In this case, the VIP is defined by the set K and the operator T and consists of

$$\text{VIP}(T, K): \text{Find } x \in K : \langle T(x), y - x \rangle \geq 0 \forall y \in K. \quad (20)$$

The following Lemma is given without proof because is evident.

Lemma 4.3. Given $\text{VIP}(T, K)$ and equations (18) and (19) (see the previous Remark). Taking $f(x, y) = \langle T(x), y - x \rangle$.

1. Equation (18) implies that $\text{EP}(f, K)$ is strong coercive.
2. Equation (19) implies that $\text{EP}(f, K)$ is level bounded.

Remark 4.4. The history of the existence results for EP, began in 1972 with the famous Minimax Theorem of Ky Fan (see [9]), here K is compact.

In the same year (1972) Brezis, Nirenberg and Stampacchia extend the famous Minimax Theorem of Ky Fan to noncompact sets (see [3]), using the following assumption:

Assumption BNS: The function $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the assumption BNS, if there exists a nonempty compact subset L of \mathbb{R}^N and $\bar{y} \in L \cap K$ such that, for every $x \in K \setminus L$ $f(x, \bar{y}) < 0$.

Lemma 4.5. Given $\text{EP}(f, K)$.

1. If K is compact, then $\text{EP}(f, K)$ is strong coercive.
2. If Assumption BNS holds, then $\text{EP}(f, K)$ is coercive.

Since $R(h)$ was an upper bound to the recession cone of the solution set for the corresponding minimization problem and the intersection for all $y \in K$ of $L_{f^y}(0)$ is the solution set of $\text{EP}(f, K)$ then, imitating the introduction of $R(h)$, we define

$$RE(f) = \bigcap_{y \in K} (L_{f^y}(0))^\infty. \quad (21)$$

The following Lemma is given for completeness.

Lemma 4.6. Given $\text{EP}(f, K)$. If f0 is satisfies, then the following statements hold.

1. If $\text{EP}(f, K)$ is strong coercive, then $\text{EP}(f, K)$ is Inf-compact.
2. If $\text{EP}(f, K)$ is Inf-compact, then $\text{EP}(f, K)$ is level bounded.
3. If $\text{EP}(f, K)$ is level bounded, then $\text{EP}(f, K)$ is coercive.
4. If $\text{EP}(f, K)$ is coercive, then $RE(f) = \{0\}$.

Theorem 4.7. Given the Equilibrium Problem $\text{EP}(f, K)$, consider K closed nonempty and assumptions f0, f1. If $RE(f) = \{0\}$, then the solution set of $\text{EP}(f, K)$, denoted by $S(\text{EP})$, is compact and nonempty.

Proof: Since $S(\text{EP}) = \bigcap_{y \in K} L_{f^y}(0)$, $(\bigcap_{y \in K} L_{f^y}(0))^\infty \subset R = \{0\}$ and f0 hold, we have that $S(\text{EP})$ is closed and bounded and so it is compact. In order to prove that $S(\text{EP})$ is nonempty, we define for each $i \in \mathbb{N}$, $K_i = \{x \in K : \|x\| \leq i\}$. Without loss of generality, we can consider $K_i \neq \emptyset$ for all $i \in \mathbb{N}$. The compactness of K_i , f0 and f1 imply that $\text{EP}(f, K_i)$ satisfies C1 and C2 of Ky Fan's Lemma and so we can take $x^i \in S(\text{EP}(f, K_i))$. Suppose that the sequence $\{x^i\}$ is unbounded, without loss of generality, consider that $\|x^i\| \rightarrow +\infty$ and $\frac{x^i}{\|x^i\|} \rightarrow u$ when $i \rightarrow +\infty$. Now take $y \in K$ arbitrarily fixed, then $f(x^i, y) \geq 0 \forall i \geq \|y\|$, and so $\{x^i\}_{i \geq \|y\|} \subset L_{f^y}(0)$. It implies that $u \in (L_{f^y}(0))^\infty$. Since $y \in K$ was arbitrary, then $0 \neq u \in R$. This contradiction implies that the sequence $\{x^i\}$ is bounded. Finally, any cluster point of $\{x^i\}$ is a solution of $\text{EP}(f, K)$. \square

Before extending the assumption H to setting of the Equilibrium problem, we present the following result. Consider function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, defined by $h(x) = \sup_{y \in K} f^y(x)$. Note that $-h(x) = \inf_{y \in K} f(x, y)$ and $-\inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) = \sup_{x \in K} \inf_{y \in K} f(x, y)$.

Proposition 4.8. Given the Equilibrium Problem $\text{EP}(f, K)$. If K is compact and f satisfies f0, then $\text{EP}(f, K)$ has solution if and only if $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) \leq 0$.

Proof: Let \bar{x} be a solution of $\text{EP}(f, K)$, then we have that $f(\bar{x}, y) \geq 0$. Thus, $\inf_{y \in K} f(\bar{x}, y) \geq 0$ and so $-\inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) = \sup_{x \in K} \inf_{y \in K} f(x, y) \geq 0$.

Conversely, from f0 the application h is lsc. On the other hand, K compact implies that exists \bar{x} such that $0 \leq -\inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) = -h(\bar{x}) = \inf_{y \in K} f(\bar{x}, y)$ and so \bar{x} is solution of $\text{EP}(f, K)$. \square

If we replace the compactness of K by the assumption H for the function h , we have the following result which is given without proof, since it is a direct consequence of Proposition 4.8.

Theorem 4.9. Given the Equilibrium Problem $\text{EP}(f, K)$. If f satisfies f0 and h satisfies H, then $\text{EP}(f, K)$ has solution if and only if $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} h(x) \leq 0$

Given $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$, we consider for each $x \in K$ the following sets, called Lower Diagonal level sets of the function f .

$$LD_f(x) := \{y \in K : f(x, y) \leq 0\}$$

Note that, if $x \notin L_{f^y}(0)$, then $y \in LD_f(x)$.

Now, we extend the assumptions H, to the setting of Equilibrium problem, it is, given $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$, we consider the following assumptions

(F1) $\forall \{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ with $\lim \|x^k\| = +\infty$ and $\lim \frac{x^k}{\|x^k\|} = u \in RE(f)$, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $LD_f(x^m) \cap B(0, \|x^m\|) \neq \emptyset$.

(F2) $\forall \{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ with $\lim \|x^k\| = +\infty$, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $LD_f(x^m) \cap B(0, \|x^m\|) \neq \emptyset$.

Theorem 4.10. *Given a nonempty set K and $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$. The assumptions F1 and F2 are equivalent.*

Proof: We need only to show that F1 implies F2. Indeed, take $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ with $\lim \|x^k\| = +\infty$. Without loss of generality, we can consider that $\lim \frac{x^k}{\|x^k\|} = u$. If $u \in RE(f)$, then the statement follows from F1. In other case, $u \notin RE(f)$, so, there exists $y \in K$ such that $u \notin (L_{f^y}(0))^\infty$. It implies that there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\forall k \geq N$, $x^k \notin L_{f^y}(0)$. Finally, we can take k large enough such that $\|y\| < \|x^k\|$ and $y \in DL_f(x^k)$. \square

Since F1 and F2 are equivalent, then from now on we denote them by F.

The notion of pseudo-convexity for functions in the setting of real vectorial spaces (without topological structure) appears in [13] as follows, given a function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, we say that f is pseudo-convex if for all $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ and all $t \in]0, 1[$: $h(tx + (1-t)y) \geq f(x)$ implies $h(tx + (1-t)y) \leq f(y)$. So, now we consider the following assumption for f .

(f1') For all $x \in K$ f_x is pseudo-convex and $f(x, x) \geq 0$.

It is easy to see that convexity implies pseudo-convexity and pseudo-convexity implies quasi-convexity. But, the converses are not true.

Theorem 4.11. *Given f satisfying f0, f1' and let K be a nonempty closed convex set. If F holds then EP(f,K) has solutions.*

Proof: From f0, f1' and the compactness of $K_i := \{x \in K : \|x\| \leq i\}$ we have from Ky Fan's Lemma that the Equilibrium Problem defined by f and K_i (EP(f, K_i) in short) has solutions for all $i \in \mathbb{N}$ (without loss of generality we can consider that $K_i \neq \emptyset$). Take a solution x^i of EP(f, K_i).

If the sequence $\{x^i\}$ is unbounded, without loss of generality we can consider $\|x^i\| \rightarrow +\infty$ when $i \rightarrow +\infty$. So from assumption F there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $LD_f(x^m) \cap B(0, \|x^m\|) \neq \emptyset$. Take $y \in LD_f(x^m) \cap B(0, \|x^m\|)$, then $f(x^m, y) \leq 0$ and $\|y\| <$

$\|x^m\|$. Now taking $w \in K$ arbitrary fixed, there exists $t \in]0, 1[$ such that $w_t = tw + (1-t)y \in K_m$. Then, $f(x^m, w_t) \geq 0 \geq f(x^m, y)$, from f1' we have $0 \leq f(x^m, w_t) \leq f(x^m, w)$. Since $w \in K$ was arbitrary, we have that x^m is a solution of EP(f, K).

If $\{x^i\}$ is bounded, from f0, we have that any cluster point of $\{x^i\}$ is solution of EP(f, K). \square

Finally consider the following problem:

Let $U \subset \mathbb{R}^m$ and $V \subset \mathbb{R}^n$ be two nonempty convex polyhedral sets; let $L : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ be the Lagrangian defined by

$$L(x, y) = \frac{1}{2}\langle x, Px \rangle - \frac{1}{2}\langle y, Qy \rangle - \langle y, Sx \rangle, \quad (22)$$

where S is a real matrix of order (n, m) , and P (resp. Q) is a real symmetric matrix of order (m, m) (resp. (n, n)). We are interested in the Saddle Point Problem formulated as follows:

$$(SPP(L, U, V)) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (\bar{x}, \bar{y}) \in U \times V \text{ such that} \\ L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(x, \bar{y}) \\ \text{for all } (x, y) \in U \times V. \end{array} \right. \quad (23)$$

SPP(L, U, V) is a particular case of the Equilibrium Problem. Indeed, let us consider $K = U \times V$, $u = (x, y)$ and $v = (w, z)$, and let us define the function $f : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$f(u, v) = L(w, y) - L(x, z).$$

We now consider the problem

$$(EP(f, K)) : \text{Find } \bar{u} \in K : f(\bar{u}, v) \geq 0 \text{ for all } v \in K. \quad (24)$$

Proposition 4.12. *(\bar{x}, \bar{y}) is a solution of (23) if, and only if, $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y})$ is a solution of (24).*

Take

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & S^t \\ -S & 0 \end{pmatrix}$$

We notice that A is a symmetric matrix and $B^t = -B$. One can verify that K is a polyhedral set and

$$f(u, v) = \frac{1}{2}\langle v, Av \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au \rangle + \langle u, Bv \rangle. \quad (25)$$

Lemma 4.13. *Given L defined by 22 and f defined by 25. If $U \subset \mathbb{R}^n$ and $V \subset \mathbb{R}^m$ are nonempty convex polyhedral sets and $K = U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$, then the following statements are equivalent.*

1. $\inf_{x \in U} \sup_{y \in V} L(x, y) = \sup_{y \in V} \inf_{x \in U} L(x, y) \in \mathbb{R}$.
2. $\inf_{v \in K} \sup_{u \in K} f(u, v) = 0 = \sup_{u \in K} \inf_{v \in K} f(u, v)$.
3. $\sup_{u \in K} \inf_{v \in K} f(u, v) = 0$.
4. $\inf_{v \in K} \sup_{u \in K} f(u, v) = 0$

Theorem 4.14. *Given EP(f, K) as defined in 24. $\sup_{u \in K} \inf_{v \in K} f(u, v) = 0$ if and only if EP(f, K) has solutions.*

Proof: We need only to prove $\sup_{u \in K} \inf_{v \in K} f(u, v) = 0$ then EP(f, K) has solutions. Indeed, take $h : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ defined by $h(u) = \sup_{v \in K} f^v(u)$. Note that $\inf_{u \in \mathbb{R}^{n+m}} h(u) = -\sup_{u \in K} \inf_{v \in K} f(u, v) = 0$. The statement follows from Theorem 4.9, if we prove that A(h) holds. By contradiction, there exists $\{u^k\} \subset \text{dom}(h)$ with $\|u^k\| \rightarrow +\infty$ and $\frac{u^k}{\|u^k\|} \rightarrow d \in R(h)$, such that for all k we have that $L_h(h(u^k)) \cap B(0, \|u^k\|) = \emptyset$, i.e., for each k we have that $h(u) > h(u^k)$ for all $\|u\| < \|u^k\|$. From Proposition 2.3 in [1], take $t > 0$ such that for k large enough $\|u^k - td\| < \|u^k\|$, $u^k - td \in K$, then $h(u^k - td) > h(u^k)$. Since $h(v) = \sup_{u \in K} f(u, v)$, then from the continuity of f , there exists $\bar{v} \in \text{dom}(h)$ such that $h(u^k - td) \geq f(\bar{v}, u^k - td) > h(u^k) \geq f(\bar{v}, u^k)$. Ta-

king $u = u^k - td$, we have that $f(\bar{v}, u) > f(\bar{v}, u + td)$, but this is a contradiction to Lemma 2.14. \square

Corollary 4.15. *The Lagrangian L defined in 22 has saddle points on a polyhedral set $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ if and only if $\inf_{x \in U} \sup_{y \in V} L(x, y) = \sup_{y \in V} \inf_{x \in U} L(x, y) \in \mathbb{R}$.*

Acknowledgments

This research was partially supported by CUST and ISIMA during the visit of the author at Blaise Pascal University.

1. A. Auslender, Noncoercive optimization problems, Mathematics of Operation Research 21 (1996) 769-782.
2. A. Auslender and M. Teboulle, Asymptotic cones and functions in Optimization and Variational Inequalities. Springer Monographs in Mathematics (2003).
3. H. Brézis, L. Nirenberg, G. Stampacchia, A remark on Ky Fan's minimax principle, Bollettino della Unione Matematica Italiana 6 (1972) 293-300.
4. A.N. Iusem, W. Sosa, New existence results for equilibrium problems, Nonlinear Analysis 52 (2003) 621-635.
5. E. Blum, W. Oettli, From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, The Mathematics Student 63 (1994) 123-145.
6. S. Adler, D. Goeleven, M. Théra, Recession mappings and noncoercive variational inequalities, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 26 (1996) 1573-1603.
7. C. Baiocchi, G. Buttazzo, F. Gastaldi, F. Tomarelli, General existence theorem for unilateral problems in continuum mechanics, Archive for Rational Mechanics and Analysis 100 (1988) 149-189.
8. M. Bianchi, R. Pini, Coercivity conditions for equilibrium problems, Journal of Optimization Theory and Applications (in press).
9. K. Fan, A minimax inequality and applications, in O. Shisha (Ed.), Inequality III, Academic Press, New York, 1972, pp. 103-113.
10. K. Fan, A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, Mathematische Annalen 142 (1961) 305-310.
11. P.T. Harker and J.S. Pang, Finite dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications, Mathematical Programming, 48 (1990), pp. 161-220.
12. J.S. Guo and J.C. Yao, Variational inequalities with monotone operators, Journal of Optimization Theory and Applications, 80 (1994) pp. 63-74.
13. A.N. Iusem, G. Kassay and W. Sosa, On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems, To appear in Journal of Mathematical Programming, serie B.
14. R.T. Rockafellar and R.J.B. Wets, Variational Analysis, Springer Verlag, New York, 1998.

Clasificación Topológica Global de Sistemas Cuadráticos Estructuralmente Estables sin Ciclos Límites

Elva Flor Reyes Muñoz, Félix Escalante del Águila
Universidad Nacional de Ingeniería
E-mail: elvafrm@yahoo.com

Recibido el 15 Abril 2007; aceptado el 10 de Mayo del 2007

Dado un sistema de ecuaciones de primer orden lineal, podemos hallar su respectivo diagrama de fase, conociendo los coeficientes de la ecuación [1], puesto que un sistema de este tipo pero cuadrático involucra muchos coeficientes, conviene hacerlo utilizando sus características, es decir analizando su aspecto cualitativo. Para ello, indicaremos todas las propiedades que pueda tener un sistema de este tipo, con esto encontraremos todas las posibles diagramas de fase, luego debemos verificar que efectivamente corresponde a un sistema cuadrático, en caso contrario eliminar; esta verificación se hace hallando un sistema cuadrático que corresponda con el diagrama de fase hallado.

Palabras claves: Sistemas Dinámicos, Sistemas Cuadráticos, Teoría del índice, Linealización.

Given a linear system of first order differential equations, it can be analyzed finding its phase portrait, if the equation coefficients are known [1]. Since a similar quadratic includes many more coefficients, it should be analyzed by its qualitative characteristics. We indicate all possible properties that a quadratic system of this kind can have. We will find all possible phase portraits. Then we will verify if a specific phase portrait found corresponds to a quadratic system. We will try to classify all possible quadratic systems.

Keywords: Dynamical Systems, Quadratic Systems, Index Theory, Linearization.

1. Introducción

El sistema a estudiar es de la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 \\ \frac{dy}{dt} = b_0 + b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 \end{cases} \quad (1)$$

el cual vamos a suponer que es estructuralmente estable y no tiene ciclos límites; para la configuración de las trayectorias incluiremos los puntos singulares en el infinito.

Para estudiar la clasificación topológica de este tipo de sistemas, primero tenemos que estudiar todas las posibles combinaciones de sus puntos singulares finitos (los cuales son puntos del espacio euclídeo, equivalente al interior de la superficie semiesférica cerrada \bar{H}) y puntos singulares en el infinito (los cuales se encuentran en el Ecuador E de la superficie esférica).

En lo sucesivo adoptaremos las siguientes notaciones:
 s : punto silla en el interior de \bar{H} .
 p : punto no silla en el interior de \bar{H} (punto hiperbólico de índice +1).
 S : punto silla en E .
 F : fuente en E .
 P : sumidero en E .
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ϵ elementos de Σ_2 .

2. Propiedades del Sistema

Los puntos singulares de este sistema poseen ciertas características a los cuales clasificaremos

Por ser estructuralmente estable.

Por ser cuadrático.

Por su estructura topológica.

2.1. Por ser estructuralmente estable

El sistema sólo tiene puntos singulares hiperbólicos.

En el interior de \bar{H} sólo existe un número finito de trayectorias cerradas. El ecuador E , se puede considerar como trayectoria cerrada si no contiene ningún punto singular.

No hay trayectorias que conectan dos puntos sillas excepto sobre E .

2.2. Por ser cuadrático

El sistema tiene a lo más cuatro puntos singulares (finitos) en el interior de \bar{H} .

El sistema tiene a lo más tres puntos singulares (en el infinito) sobre E .

La suma de índices de los puntos singulares sobre \bar{H} es 1.

El sistema no puede tener tres puntos singulares tipo silla sobre E .

El sistema solamente admite 0, 2 ó 4 puntos singulares finitos.

Si un punto singular en el infinito es sumidero entonces su respectivo antípoda es fuente y viceversa.

2.3. Por su estructura topológica

En el ecuador sólo puede haber 1 ó 3 puntos singulares hiperbólicos.

Sobre E no puede haber 3 sumideros ni 3 fuentes.

Si sobre E tenemos 3 puntos singulares, cuando uno de ellos es silla los otros dos no pueden ser únicamente sumideros o únicamente fuentes.

Tomando en cuenta las propiedades dadas enunciaremos el siguiente teorema:

Teorema 1. Si α pertenece a Σ_2 (conjunto de sistemas cuadráticos estructuralmente estables), entonces las combinaciones de los puntos singulares de α sobre \bar{H} debe ser uno de los siguientes doce casos:

tipo a : (1) F ; (2) psF ; (3) $p_1p_2s_1s_2F$.

tipo b : (1) p_1p_2S ; (2) $p_1p_2p_3sS$.

tipo c : (1) $s_1s_2F_1PF_2$; (2) $ps_1s_2s_3F_1PF_2$.

tipo d : (1) SPF ; (2) $psSPF$; (3) $p_1p_2s_1s_2SPF$.

tipo e : (1) $p_1p_2S_1S_2F$; (2) $p_1p_2p_3sS_1S_2F$.

Prueba

Suponiendo que α tiene un único punto singular P_1 sobre E , el cual puede sólo ser fuente ($P_1 = F$), sumidero ($P_1 = P$) o silla ($P_1 = S$).

En el caso que P_1 sea fuente (si fuera sumidero el diagrama de fase es el mismo que cuando es fuente sólo que invierte su orientación), puesto que el índice de P_1 es 1, puede suceder que α no tenga puntos singulares en el interior de \bar{H} (tipo a (1)), o si los tiene la suma de índices debe ser cero y el número de puntos singulares en el interior de \bar{H} deben ser dos (tipo a (2)) o cuatro (tipo a (3)).

En el caso que P_1 sea silla, puesto que el índice de P_1 es -1, debe suceder que α tenga al menos dos puntos singulares en el interior de \bar{H} de tipo no silla (tipo b (1)); más aún es posible agregar un par de puntos singulares en el interior de \bar{H} cuya suma de índices sea cero (tipo b (2)).

Suponiendo que α tiene tres puntos singulares P_1, P_2 y P_3 sobre E , tenemos tres casos:

1. Ninguno de los P_1, P_2 y P_3 , es un punto silla.

También sucede que los tres P_i ($i = 1, 2, 3$) no pueden ser todos sumideros o fuentes a la vez (topológicamente es imposible); por lo tanto al menos un P_i es sumidero, luego tenemos dos fuentes y un sumidero (en el caso de tener dos sumideros y una fuente el diagrama de fase es el mismo que cuando tenemos dos fuentes y un sumidero pero de orientación invertida). Por otro lado tenemos que la suma de índices de estos puntos singulares es tres, si α tiene dos puntos singulares finitos éstos deben ser tipo silla (tipo c (1)); si α tiene cuatro puntos singulares finitos éstos deben ser tres de tipo silla y uno de tipo nodal (tipo c(2)).

2. Uno de los P_i ($i = 1, 2, 3$) es un punto silla.

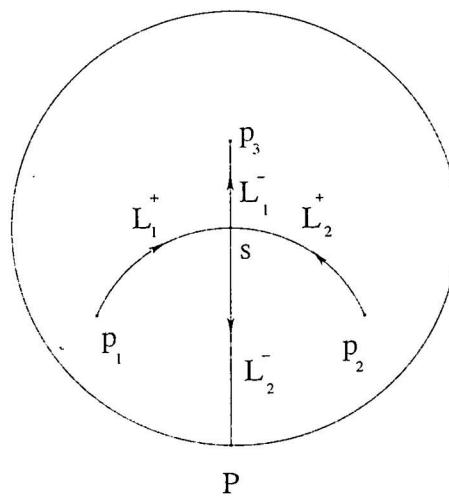
Si ocurre esto los otros puntos pueden ser sumideros (lo cual es topológicamente es imposible), fuentes (topológicamente es imposible) ó sumidero y fuente. La suma de índices de estos tres puntos es 1; puede suceder que α no tenga puntos singulares finitos (tipo d (1)); ó que α tenga 2 puntos singulares finitos, los cuales deberán ser uno punto silla y el otro punto nodal (tipo d (2)); por último que α tenga 4 puntos singulares finitos, los cuales deberán ser dos puntos sillas y dos puntos nodales (tipo d (3)).

3. Dos de los P_i ($i = 1, 2, 3$) es un punto silla.

Si esto ocurre el otro punto singular puede ser una fuente o un sumidero (en este caso el diagrama de fase es el mismo que cuando es fuente, sólo que la orientación es invertida). La suma de índices de estos tres puntos singulares es -1, por lo tanto la suma de índices de los puntos singulares finitos de α debe ser 2, por lo tanto α necesariamente debe tener puntos singulares finitos. Si α tiene dos puntos singulares finitos, éstos deben ser de tipo nodal (tipo e (1)); si α tiene cuatro puntos singulares finitos, éstos deben ser tres de tipo nodal y uno de tipo silla (tipo e (2)).♦

En lo sucesivo, por conveniencia de presentación, adoptaremos la notación $s(p_1, p_2, p_3, P)$ para representar cuatro separatrices ($L_1^+, L_2^+, L_1^-, L_2^-$) de un punto silla s conectando los puntos singulares p_1, p_2, p_3 y P respectivamente, en el cual las dos separatrices empiezan de los dos primeros puntos p_1 y p_2 entran a s , y las otras dos separatrices empiezan de s y entran a p_3 y P respectivamente (Fig. 1(a)) y usamos la notación $S(F, p)$ para un punto silla sobre E usando separatrices l^+ y l^- no a lo largo del ecuador para conectar los puntos singulares F y p respectivamente (Fig. 1(b)). La otra notación tiene similar significado.

(a)



(b)

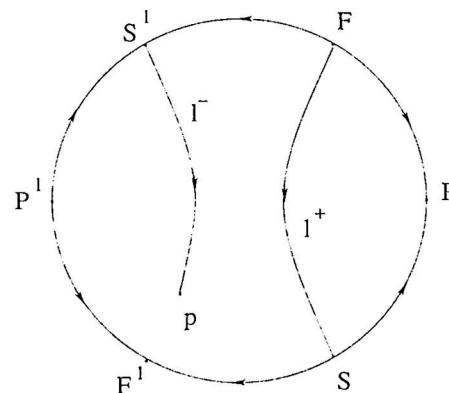


Figura 1 (a) Sistema $s(p_1, p_2, p_3, P)$. (b) Sistema $S(F, p)$.

3. Clasificación Topológica

Puesto que el sistema en discusión no tiene ciclos límites y no es posible usar una separatriz para conectar dos puntos sillas, de conectar las separatrices de puntos sillas y los puntos singulares cuyos índices son +1, podemos determinar la estructura topológica de los correspondientes diagramas de fase. Llevamos a cabo nuestra discusión de acuerdo a los cinco tipos y veinte formas dados en el teorema 1.

3.1. Tipo a(1). Forma F

Sólo hay una estructura topológica como muestra la Fig. 2. El ejemplo realizable es:

$$\alpha_1 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2xy \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 + \epsilon \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

Este sistema no tiene puntos singulares finitos puesto que $x^2 + y^2 + \epsilon > 0$; tiene como punto singular en el infinito a $F(0, 1, 0)$ el cual es una fuente.

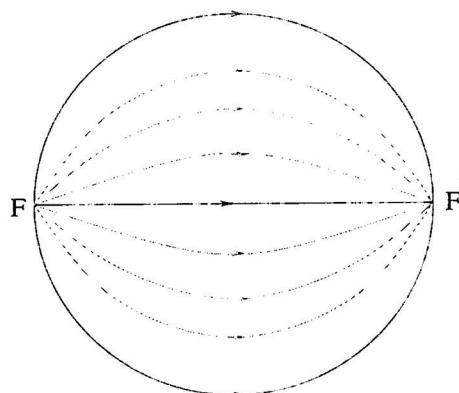


Figura 2. Sistema F.

Lema.- Sea $X = (P, Q) \in \mathbf{X}$ y $X^\theta = (P - \theta Q, Q + \theta P)$, $0 < \theta < \epsilon$, con ϵ pequeño.

- a) Si p es un centro para X entonces p es una singularidad hiperbólica para X^θ .
- b) Dentro de las regiones donde los centros de X son definidos, X^θ no tiene ciclos límites.

Prueba

- a) Si hacemos una traslación del origen de \mathbb{R}^2 a p , entonces podemos escribir $X = (\alpha y + h_1(x, y), -\alpha x + h_2(x, y))$, donde h_1 y h_2 son polinomios homogéneos de segundo grado tales que

$$h_i(0, 0) = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0, 0) = 0, \quad i, j = 1, 2$$

luego

$$X^\theta = (\alpha\theta x + \alpha y + h_1(x, y) - \theta h_2(x, y), -\alpha x + \alpha\theta y + h_2(x, y) + \theta h_1(x, y))$$

entonces la matriz de linealización para X^θ en $(0, 0)$ es

$$\begin{bmatrix} \alpha\theta & \alpha \\ -\alpha & \alpha\theta \end{bmatrix}$$

el cual implica que el origen $(0, 0)$ es una singularidad hiperbólica para X^θ .

- b) Las órbitas de X y X^θ son transversales.

3.2. Tipo a(2). Forma psF

Este caso tiene una única forma, la cual se muestra en la Fig. 3. El ejemplo realizable es

$$\alpha_2 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P - \theta Q \\ \frac{dy}{dt} = Q + \theta P \end{cases}$$

el cual es obtenido rotando un ángulo θ ($0 < \theta \ll 1$) de

$$\alpha : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P \equiv -y(\nu + 2x) \\ \frac{dy}{dt} = Q \equiv (x + \frac{\mu}{2})^2 + y^2 - \frac{\mu^2}{4} \end{cases} \quad (\mu < 0 < \nu)$$

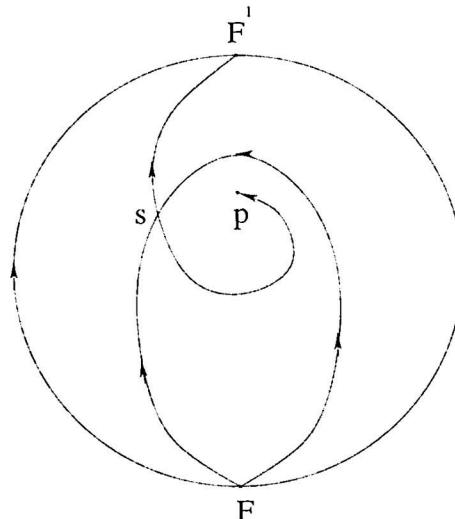


Figura 3. Sistema $s(F, F', p, F'')$.

En efecto el sistema α tiene como puntos singulares finitos a $p_1(0, 0)$, el cual es un punto silla y a $p_2(-\mu, 0)$, cuya raíz característica tiene parte real cero. Puesto que existe una primera integral

$$\varphi(x, y) = x(\frac{x^2}{3} + y^2) + \frac{\mu x^2}{2} + \frac{\nu y^2}{2}$$

donde p_2 es un centro; los puntos singulares del sistema α pertenecen a la forma psF . Despues de rotar un ángulo θ , el centro viene a ser un foco; aqui α_2 no tiene un ciclo límite y todavía pertenece a la forma psF .

3.3. Tipo a(3). Forma $p_1 p_2 s_1 s_2 F$

Para este tipo tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2. Los sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin ciclos límites de la forma $p_1 p_2 s_1 s_2 F$ tienen cinco y sólo cinco tipos diferentes de estructuras topológicas, cuyas características son:

- $\alpha_3 : s_1(F, F, p_1, p_2), s_2(F, F, p_2, F'),$
- $\alpha_4 : s_1(F, F, p_1, F'), s_2(F, p_2, F', F'),$
- $\alpha_5 : s_1(F, F, p_1, F'), s_2(F, F, p_2, F'),$
- $\alpha_6 : s_1(F, p_2, p_1, F'), s_2(F, p_2, p_1, F'),$
- $\alpha_7 : s_1(F, p_2, p_1, p_1), s_2(F, F, p_2, F').$

Prueba

Primero probaremos que hay a lo más cinco tipos diferentes de topologías.

Supongamos que p_1 y p_2 son sumideros (fuentes) entonces las direcciones de las separatrices de un punto sierra s_1 puede sólo tener las siguientes tres posibilidades (si es una fuente, entonces intercambiamos los dos primeros elementos y los dos últimos elementos en el siguiente):

$$s_1(F, F, p_1, p_2), \quad s_1(F, F, p_1, F'), \quad s_1(F, F, p_2, F')$$

Obtenemos las mismas posibilidades para s_2 . Después combinando s_1 y s_2 , es claro que podemos tener sólo dos diferentes de estructuras topológicas, α_3 y α_5 .

Supongamos que uno de los p_1 y p_2 es un sumidero y el otro es una fuente entonces las direcciones de las separatrices de s_1 puede sólo ser de los siguientes cinco tipos:

$$s_1(F, F, p_1, F'), \quad s_1(F, p_2, p_1, p_1), \quad s_1(F, p_2, p_1, F'),$$

$$s_1(F, p_2, F', F'), \quad s_1(p_2, p_2, p_1, F')$$

Son las mismas cinco posibilidades para s_2 .

Después de combinar todas las posibilidades para s_1 y s_2 , obtenemos que sólo tres tipos estructuras topológicas distintas α_4 , α_6 y α_7 son posibles.

Un ejemplo realizable para $s_1(F, F, p_1, p_2)$, $s_2(F, F, p_2, F')$ es

$$\alpha_3 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(\lambda + 2y) + \epsilon x \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + (y + \frac{\lambda}{2})^2 - \frac{\lambda^2}{4} \end{cases} \quad (\epsilon > 0, \quad \lambda < 0)$$

cuyo diagrama de fase se muestra en la Fig. 4.

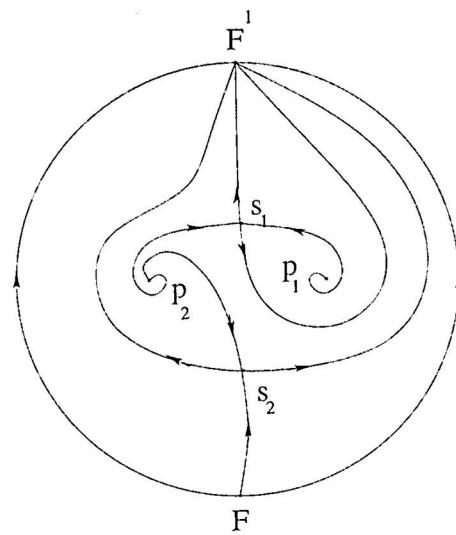


Figura 4. Sistema $s_1(F', F', p_1, p_2), s_2(F', F', p_2, F)$.

3.4. Tipo b(1). Forma $p_1 p_2 S$

Este caso tiene sólo una estructura topológica, cuya característica es $S(p_1, p_2)$, como se muestra en la Fig. 5.

Un ejemplo realizable es $\beta_1 = \beta_\epsilon^\theta$ ($0 < \theta \ll 1$). donde

$$\beta_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^2 + \epsilon \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

En efecto, los puntos singulares finitos de β_ϵ son $p_1(-\sqrt{\epsilon}, 0)$ y $p_2(\sqrt{\epsilon}, 0)$, ambos son centros; $x = 0$ es una línea integral; el único punto singular en el infinito de β_ϵ es $P(0, 1, 0)$ y es de tipo silla; por lo tanto β_ϵ pertenece a la forma $p_1 p_2 S$. Después de una rotación de ángulo θ obtenemos β_1 , los centros vienen a ser focos, y no tiene ciclos límites ni ninguna curva conectando dos puntos sillas; β_1 aún pertenece a la forma $p_1 p_2 S$. Su diagrama de fase se muestra en la Fig. 5.

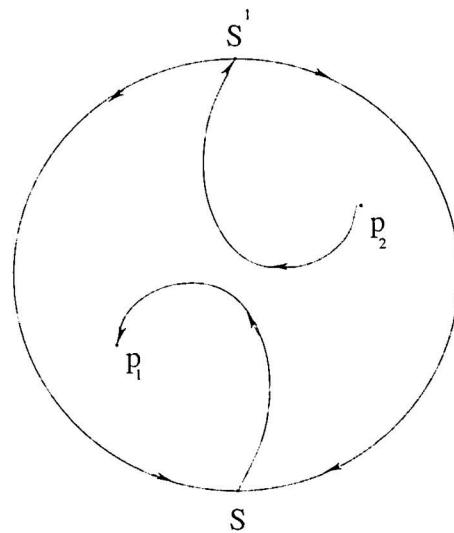


Figura 5. Sistema $S(p_1, p_2)$.

3.5. Tipo b(2). Forma $p_1p_2p_3sS$

Este tipo tiene sólo una estructura topológica, cuyas características son $s(p_1, p_2, p_3, p_3)$ y $S(p_1, p_3)$, como muestra la Fig. 7.

Un ejemplo realizable es $\beta_2 = \beta_\lambda^\theta$ ($0 < \theta \ll 1$), donde

$$\beta_\lambda : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y + y^2 - x^2 \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

En efecto, β_λ tiene cuatro puntos singulares finitos $p_1(0, 0)$, $p_2(0, -\lambda)$, $p_3(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$ y $p_4(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2})$; p_1 es una silla, p_2 es un nodo, p_3 y p_4 son centros; $x = 0$ es una línea integral; el único punto singular en el infinito es $S(0, 1, 0)$, el cual es una silla; por lo tanto el sistema β_λ pertenece a la forma $p_1p_2p_3sS$, cuyo valor de divergencia es $4y$; pero $x = 0$ es una línea sin contacto (excepto el origen) y así β_λ no tiene un ciclo límite. Después una rotación del ángulo θ ($0 < \theta \ll 1$) se obtiene β_2 , el cual aún tiene cuatro puntos singulares: donde p_1 sigue siendo una silla, p_2 sigue siendo un nodo atractador, p_3 y p_4 ahora son focos. β_2 aún tiene la forma $p_1p_2p_3sS$ y no tiene ciclos límites como muestra la Fig. 6.

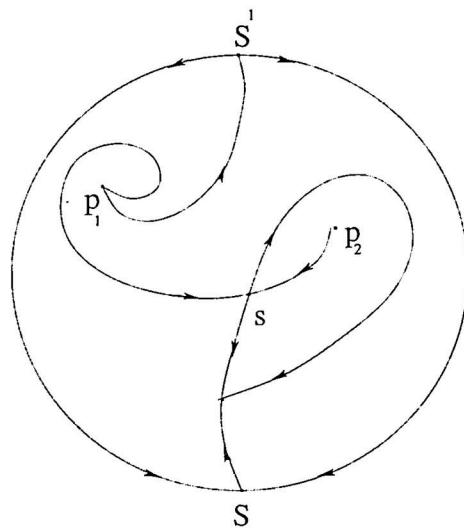


Figura 6. Sistema $s(p_1, p_2, p_3, p_3)S(p_1, p_3)$.

3.6. Tipo c(1). Forma $s_1s_2F_1PF_2$

Este caso tiene sólo una estructura topológica, cuyas características son $s_1(F_1, F_2, P, F'_1)$ y $s_2(F_1, P', F'_2, F'_1)$, y su retrato de fase es como muestra la Fig. 7. Un ejemplo realizable es

$$\gamma_1 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = -2xy - y^2 - \epsilon \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

En efecto γ_1 tiene dos puntos singulares finitos: $p_1(-2\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \sqrt{\frac{\epsilon}{3}})$ y $p_2(2\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, -\sqrt{\frac{\epsilon}{3}})$, los cuales son puntos sillas; $x = 0$ es una línea integral; tiene tres puntos singulares en el infinito: $P_1(1, 0, 0)$, el cual es un sumidero, $F_1(1, -1, 0)$ y $F_2(0, 1, 0)$ los cuales son fuentes. El diagrama de fase se muestra en la Fig. 7.

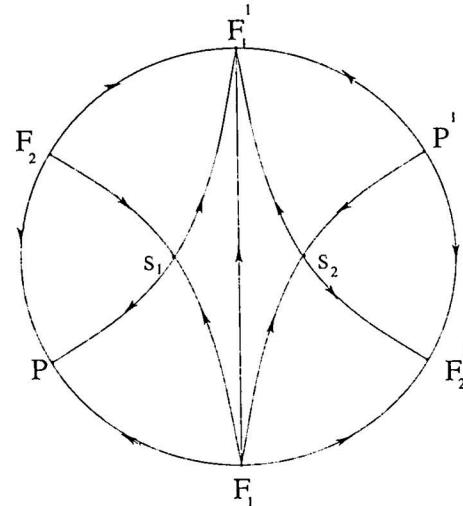


Figura 7. Sistema $s_1(F_1, F_2, P, F'_1)s_2(F_1, P', F'_2, F'_1)$.

Antes de continuar con el siguiente caso debemos hacer una definición.

Definición. Un punto $p \in \mathbb{R}^2$ es un punto de contacto entre $X \in X$ y la línea recta L si, $X(p)$ es tangente a L .

Consideremos el siguiente lema.

Lema.- Cualquier línea recta puede tener a lo más dos puntos de contacto con la trayectoria de un sistema cuadrático (el cual puede incluir el punto singular) a menos que la línea misma sea una trayectoria del sistema.

Prueba

Supongamos un sistema diferencial cuadrático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned}$$

y que la línea dada es $ax + by + c = 0$. Entonces las coordenadas del punto de contacto deben satisfacer

$$ax + by + c = 0, \quad \frac{-a}{b} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

El sistema en general tiene dos soluciones (x_i, y_i) ($i = 1, 2$) a menos que la primera ecuación sea parte de la segunda ecuación, en cuyo caso $ax + by + c = 0$ es una trayectoria. En particular, si

$$Q(x_i, y_i) = P(x_i, y_i) = 0, \quad ax_i + by_i + c = 0 \quad i = 1, 2$$

entonces (x_i, y_i) , $i = 1, 2$ son puntos singulares de la línea $ax + by + c = 0$. •

3.7. Tipo c(2). Forma $ps_1s_2s_3F_1PF_2$

Para este tipo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3. Los sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin ciclos límites de la forma $ps_1s_2s_3F_1PF_2$ tienen cuatro y sólo cuatro diferentes estructuras topológicas, cuyas características son:

- $\gamma_2 : s_1(F_1, p, P, F'_2), s_2(P', p, F'_1, F'_2), s_3(F_2, p, P, F'_1),$
- $\gamma_3 : s_1(F_1, p, P, P), s_2(F_1, P', P, F'_2), s_3(F_2, P', P, F'_1),$
- $\gamma_4 : s_1(F_1, F_2, P, F'_2), s_2(P', p, F'_1, F'_2), s_3(F_2, p, F'_1, F'_2),$
- $\gamma_5 : s_1(F_1, F_2, P, F'_2), s_2(F_2, P', F'_1, F'_2), s_3(F_2, p, P, P).$

Prueba

Por lo expuesto en el lema los siguientes dos casos no pueden ser realizados por sistemas cuadráticos:

- (1) $s_1(F_1, p, F'_2, F'_2), s_2(F_1, P', P, F'_2), s_3(F_2, P', P, F'_1)$, como muestra la Fig. 8(a) y
- (2) $s_1(P', p, P, P), s_2(F_1, P', P, F'_2), s_3(F_2, P', P, F'_1)$, como muestra la Fig. 8(b).

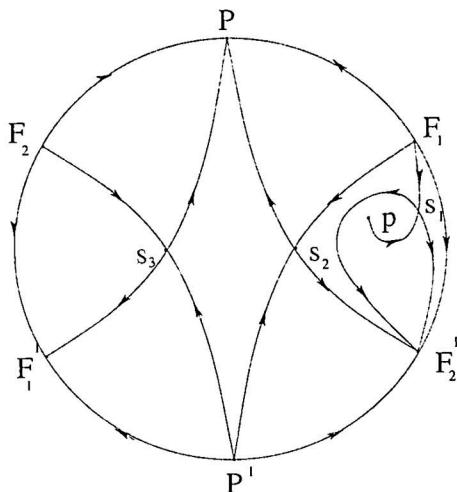


Figura 8(a) Sistema $s_1(F_1, p, F'_2, F'_2), s_2(F_1, P', P, F'_2), s_3(F_2, P', P, F'_1)$.

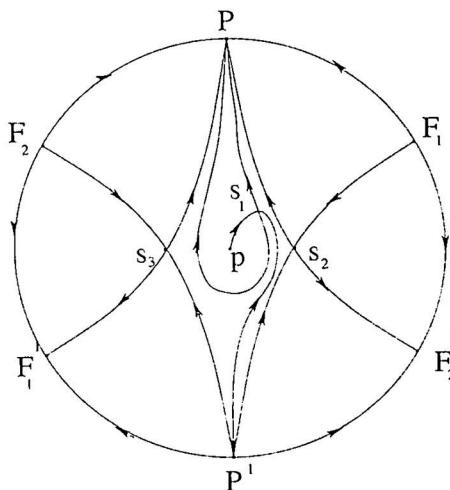


Figura 8(b) Sistema $s_1(P', p, P, P), s_2(F_1, P', P, F'_2), s_3(F_2, P', P, F'_1)$.

De una discusión similar al teorema 1, sabemos que en el presente caso sólo hay cuatro diferentes estructuras topológicas $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ y γ_5 posibles.

Podemos probar que ellos pueden ser realizados por sistemas cuadráticos [4].

Un ejemplo realizable es: $\gamma_2 = \gamma_\epsilon^\theta$ ($0 < \theta \ll 1$). donde

$$\gamma_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\delta x + x^2 + 2xy + \epsilon xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta y - 2xy - y^2 \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

Su diagrama de fase global se muestran en la figura 9.

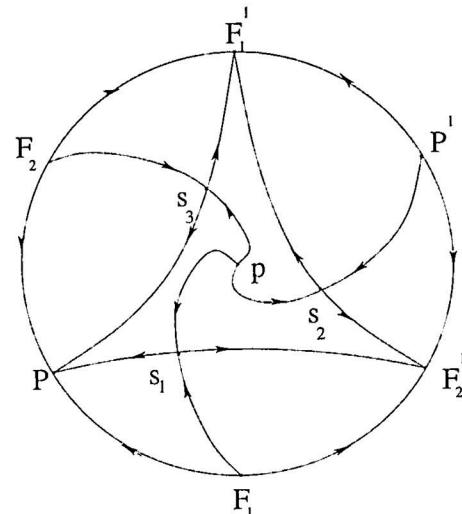


Figura 9. Sistema $s_1(p, F_1, P, F'_2), s_2(p, P', F'_1, F'_2), s_3(p, F_2, P, F'_1)$.

3.8. Tipo d(1). Forma SPF

Este tipo tiene sólo una estructura topológica $S(F, F')$.

Un ejemplo realizable es $\delta_1 = \delta_\epsilon^\theta$ ($0 < \theta \ll 1$), donde

$$\delta_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 + \epsilon \\ \frac{dy}{dt} = 2xy \end{cases} \quad (\epsilon > 0)$$

Su diagrama de fase global se muestran en la figura 10. otra figura

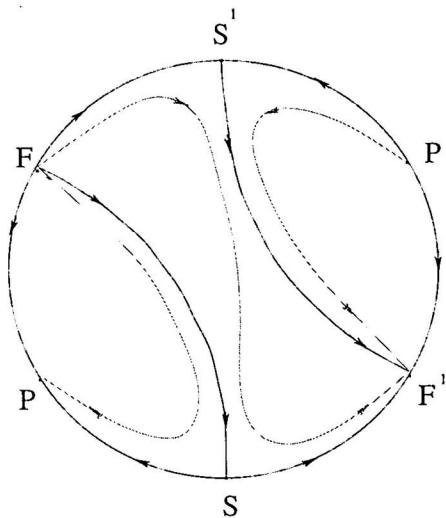


Figura 10. Sistema $S(F, F')$.

3.9. Tipo d(2). Forma psSPF

Este caso puede tener tres diferentes estructuras topológicas, cuyas características son:

$\delta_2 : s(F, P', p, P), S(P', p)$,

$\delta_3 : s(F, F, p, P), S(P', P)$,

$\delta_4 : s(F, F, p, P), S(F, F')$.

Entonces todos pueden ser realizados [4].

Un ejemplo realizable es $\delta_2 = \delta_\epsilon^\theta$ ($0 < \theta \ll 1$), donde

$$\delta_\epsilon : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - \epsilon \\ \frac{dy}{dt} = 2(x + \alpha)y \end{cases} \quad (\epsilon > 0, \quad \alpha + \epsilon < 0)$$

Su diagrama de fase global se muestran en la figura 11.

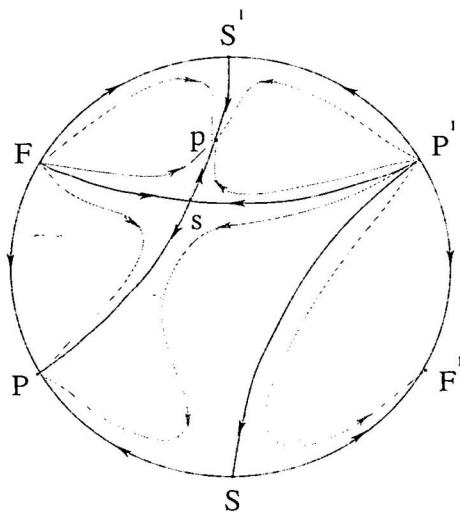


Figura 11. Sistema $s(F, P', p, P), S(P', p)$.

3.10. Tipo d(3). Forma p_1, p_2, s_1, s_2, SPF

Para este puede haber sólo a lo más 30 diferentes estructuras topológicas de los cuales hay 8 tipos los cuales han sido realizados. Los 22 tipos restantes aún están por realizarse o eliminarse [4].

3.11. Tipo e(1). Forma $p_1p_2S_1S_2F$

Este caso tiene sólo tres diferentes estructuras topológicas, cuyos características son:

$$\epsilon_1 : S_1(p_1, p_2), S_2(F, F')$$

$$\epsilon_2 : S_1(p_1, F'), S_2(p_2, F')$$

$$\epsilon_3 : S_1(p_1, p_2), S_2(p_1, p_2)$$

Todos ellos tienen ejemplos realizables [4].

3.12. Tipo e(2). Forma $p_1, p_2, p_3, s, S_1, S_2, F$

Para esto hay a lo más 9 diferentes tipos de estructuras topológicas. Hay cuatro tipos los cuales han sido realizados, y los cinco restantes aún están por realizarse o eliminarse [4].

Un ejemplo realizable es $\epsilon_1 = \epsilon_\lambda^\theta$ ($0 < \theta \ll 1$), donde

$$\epsilon_\lambda : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\lambda + x + 2y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-\lambda + 2x + y) \end{cases} \quad (\lambda > 0.)$$

Su diagrama de fase global se muestra en la figura 12.

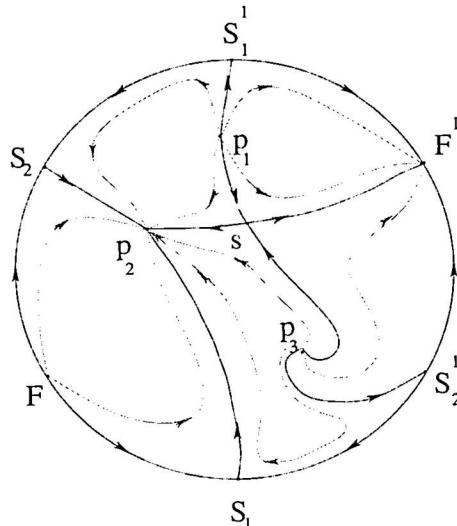


Figura 12. Sistema $s(p_1, p_3, p_2, F'), S_1(p_1, p_2), S_2(p_3, p_2)$.

4. Conclusiones

El análisis realizado en este trabajo se puede resumir en el siguiente teorema:

Teorema 4. *Los sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin ciclos límites pueden tener a lo más 60 diferentes tipos de estructuras topológicas, de las cuales al menos 33 pueden ser realizables.*

Recientemente D. M. Zhu ha probado que el número de estructuras topológicas diferentes posibles es menos de 60, pero al menos 36 pueden ser realizados [4].

1. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon y A. G. Maier; *Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems*. Israel Program for Scientific Translations Ltda. 1973.
2. L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Second Edition, Springer-Verlag New York, Inc. 1996
3. G. Sansone and R. Conti. The Macmillan Company . New York. 1964.
4. Ye Yan-Qian. *Theory of Limit Cycles*. Translations of Mathematical Monographs. Volumen 66. American Mathematical Society. 1986.

Modelos Matemáticos para curvas de distribución de especies

Christian Valqui[†], Thomas Valqui[‡]

[†]IMCA-PUCP, [‡]CORBIDI

E-mail: cvalqui@pucp.edu.pe, tvalqui1@lsu.edu

Recibido el 02 de diciembre del 2007; aceptado el 16 de diciembre del 2007

Se describe distintos modelos para medir la biodiversidad a través de las distribuciones de abundancia de especies, luego se discute el m'todo de las listas fijas para recolección de datos y los cálculos necesarios para obtener de los datos recolectados las distribuciones relativas de las especies.

Palabras claves: Abundancia de especies, Modelo de Hubbell, Listas fijas de aves.

We describe different models that measure the biodiversity using the Species abundance distribution. Then we discuss the method of fixed lists for data recollection and the necessary computations to transform the recollected data in relative species abundance distributions.

Keywords: Species abundance, Hubbell's model, Fixed bird lists.

1. Introducción

Uno de los problemas que se plantea en el estudio de los ecosistemas es la manera de medir el impacto de la actividad humana (o de otros factores) sobre estos. Si bien en algunos casos el impacto es obvio, por ejemplo en el caso de la deforestación, es necesario tener una medida más fina para poder prevenir los cambios irreversibles.

Un posible parámetro de medición de la biodiversidad es la cantidad de especies presentes en una comunidad (de plantas, animales, aves, etc.) Este número tiene varias ventajas:

1. Se puede medir cuantitativamente a partir de las observaciones.
2. Todos están de acuerdo en que mide la biodiversidad.
3. Por lo anterior, es fácil de explicar a los entes políticos y administrativos que toman decisiones sobre proteger áreas, otorgar licencias de extracción, etc.

Pero el trabajo necesario para establecerlo es bastante grande, y además requiere un conocimiento experto para identificar las distintas especies. En el caso de plantas de hecho se hace y resulta útil, aunque también allá es un trabajo enorme.

Las aves forman un ecosistema bastante sensible a las pequeños alteraciones de los ecosistemas, y por lo tanto resultan útiles para determinar cambios, incluso pequeños, en el ecosistema. Sin embargo el trabajo de determinar la cantidad de especies presentes en un área es bastante difícil, y de hecho solamente se ha conseguido en pocos lugares, y para estar más o menos seguros del resultado se debe tomar muestras grandes. Hay modelos matemáticos para estimar la cantidad total a partir de las curvas de acumulación.

Hay otro problema con este parámetro. Veamos los siguientes gráficos correspondientes ambos a distribuciones de abundancias de 2000 especies y 2000 000 de individuos:

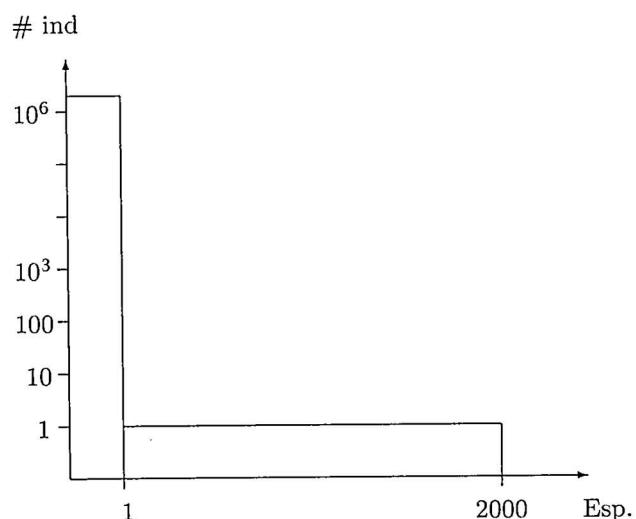


Figura 1. Una especie dominante.

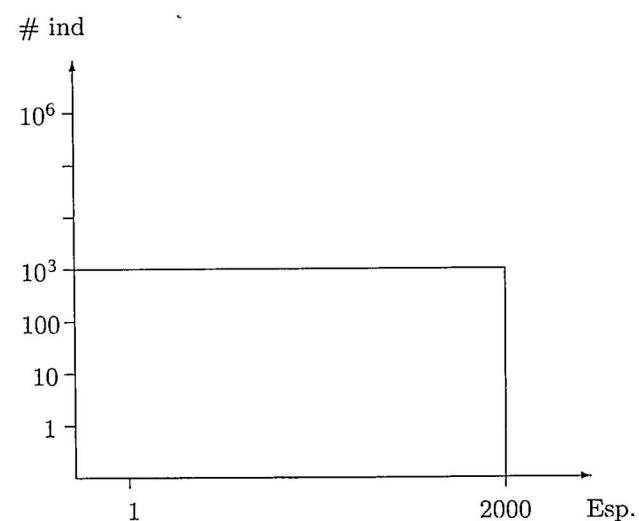


Figura 2. Todas las especies tienen 1000 individuos.

El primer gráfico muestra la distribución correspondiente a 1998001 gorriones y un individuo de cada una de las otras 1999 especies. En el segundo gráfico se con-

sidera una población de 1000 individuos por cada una de las 2000 especies. Es obvio que la segunda distribución representa una comunidad con mayor biodiversidad, a pesar de tener ambas comunidades la misma cantidad de especies y de individuos.

Un parámetro común para medir la biodiversidad diferenciando estos dos casos, es la probabilidad P_{bd} de que al extraer dos individuos, estos sean de especies distintas. En el primer caso la probabilidad es cercana a 1/500, es decir, casi nunca escogemos distintas especies, mientras que en el segundo caso obtenemos casi siempre (con probabilidad aprox. 1-1/2000) dos especies diferentes.

También vemos en este ejemplo la manera de representar las curvas de abundancia, una escala logarítmica para el número de individuos y en el eje X las especies, ordenadas desde la más abundante a la menos abundante. De hecho estos son los casos extremos, y en la realidad se dan curvas de abundancia de especies como estas:

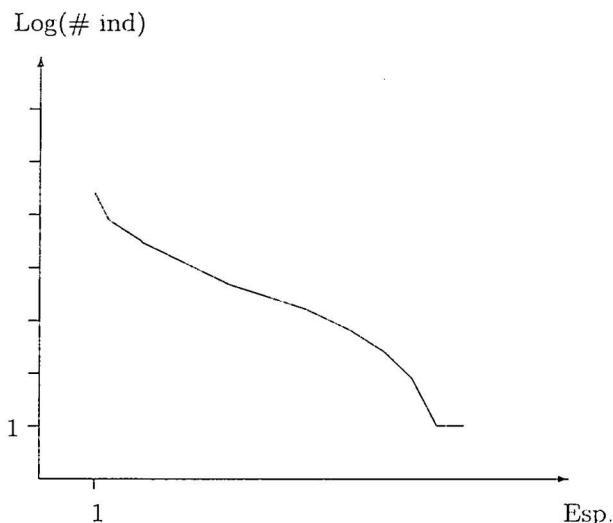


Figura 3. Una curva típica de distribución.

Las curvas de abundancia de especies son un parámetro más fino para medir la biodiversidad, y de hecho al conocer las abundancias relativas $\{P_i\}$ podemos determinar

$$P_{bd} = \sum_i P_i(1 - P_i).$$

2. Modelos matemáticos para aproximar curvas de abundancia

Primero veamos los distintos intentos que hubo a lo largo de la historia para aproximar las curvas de abundancia por medio de curvas generadas por pocos parámetros, para poder estimar la biodiversidad de las comunidades reales. El primer intento corresponde a la serie logarítmica de Fisher [2]. Tiene dos parámetros α y x , la cantidad de especies que tienen n individuos es igual a $\alpha x^n/n$. En un gráfico semilogarítmico este modelo produce una recta:

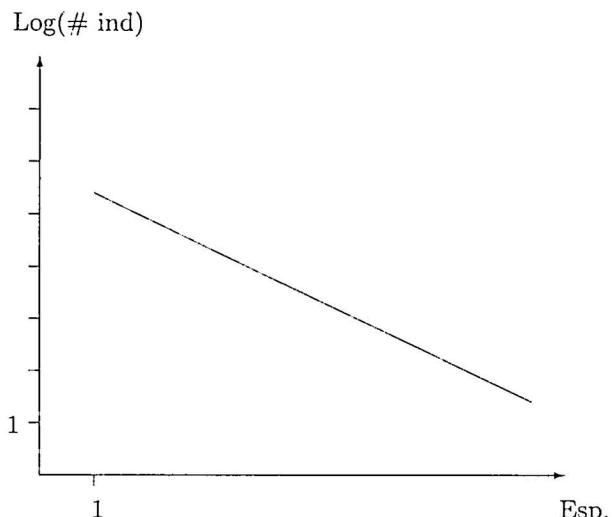


Figura 4. La serie logarítmica de Fisher.

Fisher simplemente buscó una curva que mejor approxime a sus datos, el conjunto de datos mejor estudiado (por Fisher y muchos otros) es el correspondiente a 8000 especies de mariposas nocturnas (polillas) atrapadas durante un largo lapso de tiempo en una trampa de luz.

Otro biólogo, Preston, que trabajaba mayormente con aves, no lograba acomodar bien sus datos a las curvas propuestas por Fisher y propuso otro conjunto de curvas para aproximar los datos reales, la serie lognormal de Preston [3]. Estas curvas se construyen de la siguiente manera: Luego de aplicar el logaritmo al eje del número de individuos por especie, se supone un distribución normal de las especies que se encuentran en cada intervalo:

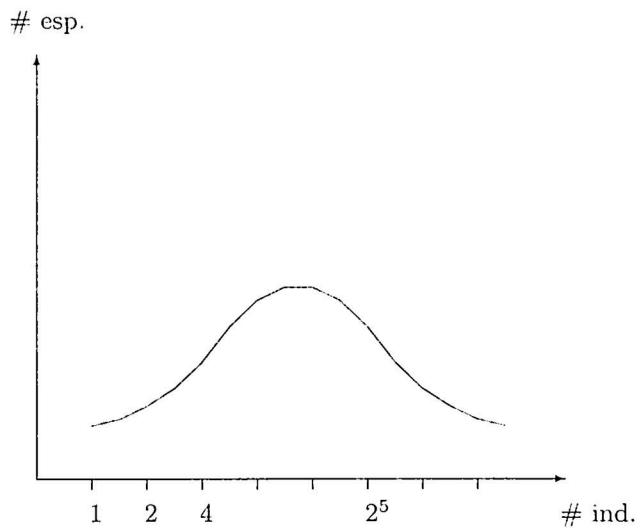


Figura 5. El plot de Preston.

Para obtener las curvas de distribución como antes se ordenan las especies de mayor abundancia a menor abundancia y se obtiene una curva parecida a la de la figura 3. La teoría de Preston está asociada a una teoría de repartición de recursos, llamada la del palo roto, ("broken stick" en inglés) del modo siguiente: Se ordenan las especies por jerarquía o dominancia, y cada especie en su

turna toma una fracción fija k ($0 < k < 1$) de los recursos, es decir, parte el palo que representa los recursos en dos porciones que guardan siempre la misma proporción y se adueña de una de ellas. Esto es, la primera especie obtiene kT recursos, si el total es T . La segunda especie obtiene la fracción k de lo que queda, es decir $(1 - k)kT$. La tercera obtiene $(1 - k)^2kT$, etc.

Este modelo de repartición da una curva de abundancia muy parecida a la de Preston y a la curva de la figura 3.

Más adelante se notó que las curvas de Fisher se pueden obtener también con un modelo de repartición de recursos, pero en este caso la fracción k que recibe cada especie en su turno es una variable aleatoria con distribución uniforme.

Aquí hay un problema que valdría la pena investigar: ¿Para cada distribución de datos reales es posible determinar la distribución de la fracción k para que un modelo de repartición nos aproxime bien la curva de abundancia?

3. Modelo de Hubbell

Las preferencias de los biólogos por uno u otro modelo se explican por el tipo de comunidades que estaban analizando: Fisher trabajó con una metacomunidad (8000 especies de mariposas), mientras que Preston trabajaba con aves y con comunidades locales (alrededor de 200 especies), y el modelo de Fisher no aproximaba bien a sus datos. El modelo que vamos a describir, debido a Hubbell [1], se basa en una dinámica poblacional y predice que en las comunidades locales se obtiene curvas del tipo log-normal, mientras que en el límite cuando el tamaño de la comunidad tiende al infinito, se obtiene la curva de Fisher.

Vamos a explicar el modelo de Hubbell en tres versiones que van implementando progresivamente más parámetros. El primer modelo es bastante simple y se basa en las siguientes propiedades:

PRIMER MODELO:

1. La comunidad consiste de un número fijo de individuos.
2. Los individuos de las distintas especies son equivalentes, es decir, tienen la misma probabilidad de procrear, la misma expectativa de vida, independientemente de cuál especie provenga.
3. Inicialmente se da una distribución $\{P_i\}$ de las especies. Cada cierto tiempo muere un individuo (Todos los individuos tienen la misma probabilidad) y es reemplazado por un recién nacido de otra especie, donde P_i es la probabilidad de que sea de la especie i .

Este modelo alcanza un estado final de equilibrio con una sola especie presente, pues es claro que si el que tiene más individuos también tiene más probabilidad de reemplazar a los otros (aunque también tiene más occisos), y cuando una especie se extingue, no puede regresar. Además al alcanzar la monodominancia esta es un estado estable. Podría ser que la humanidad este en

camino a este estado, al ser la especie que más recursos naturales está consumiendo en la actualidad.

SEGUNDO MODELO:

Este segundo modelo de las comunidades locales tiene las mismas propiedades que el anterior, adicionalmente al determinar la especie del recién nacido, se considera una probabilidad m de que el nuevo miembro de la comunidad provenga de una metacomunidad. Típicamente este caso se da cuando una isla obtiene así miembros de la metacomunidad del continente. Si $\{PM_i\}$ es la distribución de las especies en la metacomunidad, el valor esperado a lo largo del tiempo de cada abundancia relativa P_i en la comunidad local es obviamente igual a PM_i , sin embargo la curva de distribución esperada no va a ser igual. Imaginemos que la migración sea muy baja, de modo que nuestra comunidad local, una isla por ejemplo, siempre este al borde de la monodominancia. Lo que no se sabe es quien va a ser esa especie que este dominando, y cada especie tiene la posibilidad de ser ella la que en algún momento domine, aunque en promedio sigue teniendo una abundancia determinada por PM_i . Solamente si $m=1$ las distribuciones coinciden plenamente. Si suponemos que la metacomunidad tiene la distribución de Fisher, los distintos valores de m generan curvas que coinciden en el primer tramo, pero según el valor de m cortan una parte de la cola de la curva, para parecerse a una de las curvas obtenidas con el método de Preston.

Log(# ind)

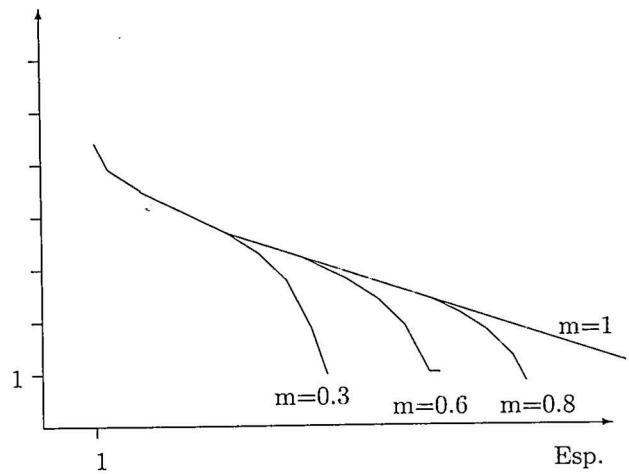


Figura 6. La forma de la curva depende del índice de migración m .

TERCER MODELO:

El modelo final de Hubbell que nos provee de la curva de la metacomunidad tiene como base toda la estructura anterior, pero modifica adicionalmente la dinámica con un parámetro de mutación ν , que determina la probabilidad de que un recién nacido sea de una especie totalmente nueva, es decir, un mutante.

El "número fundamental de biodiversidad" propuesto por Hubbell es $\theta = 2J_M\nu$. En el límite cuando el tamaño

de la metacomunidad J_M tiende al infinito este número corresponde al α de Fisher y la distribución es la serie logarítmica.

VENTAJAS DEL MODELO DE HUBBELL:

1. Se basa en un modelo dinámico.
2. Se obtienen los enfoques anteriores como casos particulares.
3. Buena aproximación a los datos reales.
4. Ofrece un número real θ para poder dialogar con entes administrativos de toma de decisiones.

CRÍTICAS:

1. Ignora la competencia que se sabe existe proponiendo la equivalencia entre especies (se dice que su efecto se elimina en comunidades suficientemente grandes).
2. En datos reales predice una tasa de especiación (mutación) de hasta 30.
3. El proceso de especiación real es más bien a través de separación de comunidades y no puntual.
4. La cantidad de parámetros libres podría permitir aproximar cualquier curva que se parezca lejanamente a lo que se quiere, sin necesidad de tanto cálculo.

En el caso de aves se hizo la aproximación con el propio Hubbell, y se pudo aproximar bien los datos a una curva, pero cuando se planteó la abundancia de cada especie no por cantidad de individuos sino por peso total de cada especie, también se obtuvo una buena aproximación.

Sin embargo este modelo, tal vez mejorado o adaptado, puede dar algunas medidas útiles para el problema planteado inicialmente, evaluar el impacto de la actividad humana.

4. Listas de Aves

Las aves son utilizadas con mucha mayor frecuencia que otros grupos de organismos como objetos de estudios en desarrollo de teorías de poblaciones, de ecología y de impacto ambiental. Las principales razones para esta preferencia son su actividad generalmente diurna, su notoriedad al estar generalmente expuestos al observador, y su manejable, pero significante diversidad (Generalmente una comunidad tiene entre 10 y 400 especies).

La tarea de describir la comunidad de aves, como un dato comparable en el tiempo y el espacio, ha sido una actividad frecuente, pero poco exitosa. Los conteos de aves en los que se quiere estimar o describir cierta característica de la comunidad de aves para relacionarla al hábitat o para estudiar la comunidad de aves en si misma, han tenido una serie de protocolos que no son uniformes y por lo tanto no son realmente comparables.

En el caso de metodologías detalladas, el método más usado y aceptado es el de mapeo de territorios. Esto

se consigue apuntando el sitio donde se ubica un ave, tratando de individualizar al ave. Con suficientes réplicas y ayudados con comportamientos como "peleas" en bordes territoriales, se deduce que la agregación de puntos de ubicación representan un territorio y se trazan las fronteras territoriales. Si esto se hace para todas las especies y en áreas donde quepan varios territorios, se puede llegar a un estimado bastante bueno del número de aves por especie que ocurren en una cierta área. Sin embargo para esto se requieren de varias decenas de días de esfuerzo.

Habiendo tantos sitios no estudiados en el Perú y en los estudios de impacto ambiental donde se requiere evaluar grandes áreas y/o muchas de estas, es necesario realizar evaluaciones rápidas. En el caso de estas evaluaciones las dos principales metodologías utilizadas son las de los conteos por puntos y los conteos en transectos.

En ambos casos la unidad de muestreo son el espacio (distancia) y/o el tiempo. Por un lado el tamaño de la unidad es subjetivo y diferente en las distintas evaluaciones y por otro lado los factores como variabilidad climática, variabilidad de esfuerzo por área, diferencias de hábitat entre áreas, y variabilidad debido al efecto del observador causan graves problemas analíticos puesto que influyen directamente el tamaño de la muestra sin haber forma de medir tal influencia. Por ejemplo, si una mañana tiene condiciones adversas para la actividad de las aves, el tiempo o la distancia siguen avanzando y queda a nuestro criterio detener la evaluación o continuar. Se sabe de antemano que la comparación de dos sitios con evaluaciones hechas en dos días con condiciones climáticas distintas es poco confiable. Saber que estamos comparando dos sitios evaluados por 15 horas/hombre no nos da ninguna garantía de igualdad de condiciones para comparar las especies presentes.

El método que analizaremos aquí es el de las "listas fijas como unidades de conteo en evaluaciones rápidas de aves". En este método es muy poco utilizado por tener un marco teórico poco claro y carecer hasta ahora de un marco estadístico. En este método las unidades de muestra son listas de N especies, en las cuales se registran las N primeras especies encontradas, sin repetición de especie. Después de esto se inicia una nueva lista de N especies, independientemente de las especies observadas en la lista anterior, y así consecutivamente. Se evita en todo momento el repetir individuos salvo en repetición de recorridos. La unidad de muestra que es bastante más independiente de la variabilidad causada por diversos factores no controlables que afectan métodos tradicionales. En este método cualquier factor que dificulte la detección de especies, automáticamente disminuirá la rapidez con la que se completa una lista, frenando la adición de unidades muestrales. Es decir, tiene una suerte de regulador intrínseco para comparar dos sitios. En un día lluvioso no haremos tantas listas, como en el soleado por lo que sabemos que debemos añadir esfuerzo en el sitio en el que las condiciones eran adversas. Al comparar los sitios lo que buscamos es que todos tengan igual número de listas. De todas maneras se debe tratar de mantener distancia y condiciones climáticas similares.

Para cada censo se toma los siguientes datos: día,

hora de inicio, hora final, observador. En el censo mismo, se registran todas las especies de aves encontradas en forma visual o auditiva anotando los siguientes datos: especie, número de individuos vistos, hábitat en el que se vio. De esta manera se tiene al final de una evaluación un número de listas por sitio, con los que se puede hacer los siguientes análisis:

- a. Curvas de acumulación de especies.
- a1. Estimado de lo adecuado del esfuerzo de muestreo. Estimador: pendiente de la curva de acumulación.
- a2. Estimado del número total de especies en la comunidad evaluada. Estimador: asíntota de la curva.
- b. Estimado de las abundancias relativas de las especies.
- b1. Curva de abundancias relativas como descripción de la estructura de la comunidad de aves. Estimador: theta de la ecuación de Hubbell.
- b2. Estimado de la abundancia relativa de especies de interés especial (por ejemplo amenazadas) Estimador: frecuencia de la especie en el número total de listas.

Para estimar la abundancia relativa a partir de los datos obtenidos hay que tener en cuenta que la frecuencia relativa con la que una especie i aparece en una lista es un estimador de la probabilidad Q_i de esta especie de aparecer en una lista, que es distinta a la abundancia relativa P_i , que en un modelo de urna ideal es la probabilidad de extraer un individuo de la especie i . Usando métodos básicos de probabilidad se obtiene para una lista de longitud $N+1$:

$$Q_i = P_i \left(1 + \sum_{j_1 \neq i} \frac{P_{j_1}}{1 - P_{j_1}} \left(1 + \dots \left(1 + \sum_{j_N \notin I_N} \frac{P_{j_N}}{1 - \sum_{s=1}^N P_{j_s}} \right) \dots \right) \right). \quad (1)$$

donde $I_k = \{i, j_1, \dots, j_{k-1}\}$.

Esta fórmula sirve para transformar los datos en bruto (en forma de listas de N especies) en distribuciones $\{P_i\}$, con los cuales se pueden estimar los parámetros de los modelos anteriormente expuestos. Los ornitólogos encargados de recolectar datos típicamente elaboran listas de 5, 10 o 20 especies, dependiendo de la cantidad de especies presentes en la comunidad.

Si bien la fórmula (1) nos da una correspondencia exacta entre los P_i 's y los Q_i 's, cuando se trabaja con los datos reales el tiempo de cálculo crece exponencialmente con el tamaño N de las listas y con el número de especies m . Como además necesitamos varios pasos para implementar el algoritmo de Newton explicado más adelante, los tiempos de cálculo son apenas realizable para listas de 5 especies, con listas de 6 serían calculables en principio con computadoras más potentes, pero listas de 10 ya exceden el tiempo razonable y listas de 20 están totalmente fuera del alcance. Algunos tiempos

de cálculo los vemos en la tabla 1, son necesarios varios pasos de aproximación para calcular el inverso de la función dada por la fórmula (1). En lo que sigue vamos a deducir primeramente la fórmula (1) que define una función $\phi : \{P_i\} \rightarrow \{Q_i\}$. Luego describimos el método de Newton aproximado que usamos para calcular la inversa de ϕ . En la última sección describimos cuatro métodos para aproximar al inverso de ϕ con un tiempo de cálculo mucho menor, que también será adecuado para listas de 20 especies.

Tabla 1. Cuadro comparativo de los tiempos de cálculo para distintas longitudes N de listas y distintas cantidades m de especies.

N	No. esp. (*)	Tmpo. paso	Tmpo.tot.
2	< 40	-	inmediato
3	< 40	-	inmediato
4	20 a 30		2 a 3 segundos
5	15	20 seg.	3 min.
5	17	1 min.	20-25 min.
5	19	2 min.	40 minutos
5	42	2½ horas	> 25 h.
6	16	40 min.	> 20 h. (**)
6	38	60 horas.	> 1200 h. (**)

(*) Para el cálculo se considera sólo el número de frecuencias absolutas distintas.

(**) Solamente es un tiempo estimado.

5. La construcción de la función Φ

Suponemos un modelo de urna donde las m distintas especies están representadas por las etiquetas $i = 1, \dots, m$. P_i es la frecuencia relativa de cada especie. Se plantea una serie infinita de experimentos aleatorios independientes que consiste en extraer una bola de la urna, y llamar B_n la etiqueta de la n -ésima bola extraída. Asimismo llamamos L_k a la k -ésima bola distinta. Es decir, $L_1 = B_1$, y L_2 es la etiqueta de la primera bola que sale distinta de B_1 . El experimento concluye una vez que salieron N bolas distintas. Queremos calcular Q_i^N , la probabilidad de que uno de los L_k sea igual a i . Esto corresponde a la probabilidad de la especie i de salir en una lista de longitud N . El objetivo es hallar una fórmula explícita para Q_i^N como función de los P_i . Para aclarar el método supongamos que queremos elaborar listas de 5 especies y que para una cierta lista se tuvo que realizar 9 observaciones:

- 1.Obs: Especie 1
- 2.Obs: Especie 8
- 3.Obs: Especie 4
- 4.Obs: Especie 1
- 5.Obs: Especie 8
- 6.Obs: Especie 2
- 7.Obs: Especie 1
- 8.Obs: Especie 1
- 9.Obs: Especie 5

En este ejemplo tenemos:

$$\begin{aligned} L_1 &= B_1 = 1, \\ L_2 &= B_2 = 8, \\ L_3 &= B_3 = 4, \\ L_4 &= B_4 = 2, \\ L_5 &= B_5 = 5. \end{aligned}$$

Para deducir la fórmula (1) analizaremos los casos de $N = 1, 2, 3$, y luego daremos la fórmula general.

Para el caso $N = 1$ se tiene $Q_i^1 = P_i$. Para $N = 2$ calculemos la probabilidad de la especie i de aparecer en una lista dada:

$$Q_i^2 = P(L_1 = i) + P(L_2 = i)$$

Tenemos que $P(L_1 = i) = P_i$. También tenemos que $P(L_2 = i) = \sum_{j \neq i} P(L_1 = j)P(L_2 = i | L_1 = j)$. Para que pueda ser $L_2 = i$ cuando el primero fue de la especie j ($L_1 = j$), todos los individuos observados entre el primero y el último deben haber sido igual a j , de modo que

$$\begin{aligned} P(L_2 = i | L_1 = j) &= \sum_{n=2}^{\infty} P(B_k = j, 2 \leq k < n)P(B_n = i) \\ &= \frac{P_i}{(1 - P_j)} \end{aligned}$$

pues $P(B_n = i) = P_i$ y $\sum_{n=2}^{\infty} P(B_k = j, 2 \leq k \leq n-1) = \sum_{n=2}^{\infty} P_j^{n-2} = \frac{1}{(1-P_j)}$. Así obtenemos

$$P(L_2 = i) = \sum_{i \neq j} \frac{P_i P_j}{(1 - P_j)}$$

y finalmente

$$Q_i^2 = P_i \left(1 + \sum_{i \neq j} \frac{P_j}{(1 - P_j)} \right) \quad (2)$$

Este resultado también se hubiera podido obtener usando el siguiente lema:

Lema 1. Sean A, B, C tres eventos mutuamente excluyentes cuya probabilidad es respectivamente a, b y c . Además suponemos que $a + b + c = 1$. Si se realiza una serie infinita de experimentos con estos posibles resultados, entonces la probabilidad de que el evento A ocurra antes que el evento C es igual a $\frac{a}{1-b}$.

Demostración: Sean X_i las variables aleatorias independientes relacionadas al experimento. La probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} P &= P(X_1 \in A) + P(X_2 \in A)P(X_1 \in B) \\ &\quad + P(X_3 \in A)P(X_k \in B, k < 3) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \in A)P(X_k \in B, k < n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ab^{n-1} \\ &= \frac{a}{1-b} \end{aligned}$$

□

Usando el lema con
 $A = \{\text{se extrae la especie } i\}$,
 $B = \{\text{se extrae la especie } j\}$ y
 $C = \{\text{se extrae una especie } k \text{ distinta a } i, j\}$
se ve que

$$\begin{aligned} P(L_2 = i) &= \sum_{j \neq i} P(L_1 = j)P(A \text{ antes que } C) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{P_j P_i}{1 - P_j} \end{aligned}$$

De aquí se deduce la fórmula (2).

Caso $L = 3$. Tenemos

$$Q_i^3 = P(L_1 = i) + P(L_2 = i) + P(L_3 = i)$$

y además

$$\begin{aligned} P(L_3 = i) &= \sum_{j \neq i} P(L_1 = j) \sum_{k \neq i, j} P(L_2 = k | L_1 = j) \\ &\quad \cdot P(i \text{ antes de } l, \text{ si } l \neq j, k) \\ &= \sum_{j \neq i} P_j \sum_{k \neq i, j} \frac{P_k}{1 - P_j} \frac{P_i}{(1 - P_j - P_k)} \\ &= \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{P_j P_k P_i}{(1 - P_j)(1 - P_j - P_k)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Q_i^3 = P_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{P_j}{1 - P_j} \left(1 + \sum_{k \neq i, j} \frac{P_k}{(1 - P_j - P_k)} \right) \right)$$

En el caso general tenemos:

$$P(L_{r+1} = i) = \sum_{\substack{j_k \notin I_k \\ k=1, \dots, r}} \frac{P_i \prod_{k=1}^r P_{j_k}}{\prod_{k=1}^r (1 - \sum_{s=1}^k P_{j_s})}$$

con $I_k = \{i, j_1, \dots, j_{k-1}\}$, de lo cual se deduce la fórmula (1).

6. El método de Newton

En esta sección establecemos un método efectivo de calcular Φ^{-1} por aproximaciones sucesivas. En general para una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ se tiene que $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + Df(x_0)h$ donde Df es la matriz de derivadas parciales $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$. Si asumimos además que $f(x_0 + h) = 0$ podemos despejar h y obtenemos $h \approx -Df(x_0)^{-1}(f(x_0))$. Por lo tanto si x_0 está cerca del cero de la función f , podemos hallar un valor más cercano al cero: $x_1 = x_0 + h = x_0 - Df(x_0)^{-1}(f(x_0))$. Esto inicia un proceso recursivo poniendo

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1}(f(x_n))$$

con $\lim_n x_n = z$ donde z es una raíz de f . Este método es conocido como el método de Newton.

Notemos además que la función Φ está dada por la matriz

$$\Phi(P) = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_{m-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{m-1} \\ P_m \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{Q_i}{P_i} = 1 + \sum_{j_1 \neq i} \frac{P_{j_1}}{1 - P_{j_1}} (1 + \dots \\ &\quad \dots \left(1 + \sum_{j_{N-1} \neq i, j_1, \dots, j_{N-2}} \frac{P_{j_{N-1}}}{(1 - \sum_{s=1}^{N-1} P_{j_s})} \right) \dots \right) \end{aligned}$$

Ponemos $f(P) = \Phi(P) - \hat{Q}$, donde $\hat{Q} = (\hat{Q}_i)$ es el vector de las observaciones, que es la frecuencia relativa con la que cada especie i aparece en una lista y por lo tanto el estimador de máxima verosimilitud para Q_i^N . Finalmente aproximamos

$$\frac{\partial Q_j}{\partial P_i} \approx \delta_{ij} K_j \quad (3)$$

La aproximación por el método de Newton nos da la fórmula recursiva:

$$\begin{aligned} P_i^{(n+1)} &= P_i^{(n)} - [D\Phi(P^{(n)})^{-1}(f(P^{(n)}))]_i \\ &= P_i^{(n)} - \sum_{j=1}^m \delta_{ij} K_j^{-1} [\Phi(P^{(n)}) - \hat{Q}]_j \\ &= P_i^{(n)} - \sum_{j=1}^m \delta_{ij} (K_j^{-1} K_j P_j^{(n)} - K_j^{-1} \hat{Q}_j) \\ &= P_i^{(n)} - P_i^{(n)} + K_i^{-1} \hat{Q}_i \\ &= K_i^{-1} \hat{Q}_i \\ &= \frac{P_i^{(n)}}{Q_i^{(n)}} \hat{Q}_i. \end{aligned}$$

El valor inicial canónico es $P^{(0)} = \hat{Q}/N$. Luego se calcula $Q^{(0)} = \Phi(P^{(0)})$, y recursivamente $P_i^{(k+1)} = \frac{P_i^{(k)}}{Q_i^{(k)}} \hat{Q}_i$ con $Q^{(k)} = \Phi(P^{(k)})$. El límite de este proceso nos da una familia $\{P_i\}$ con $\phi(\{P_i\}) = \{\hat{Q}_i\}$, pero no necesariamente se trata de probabilidades. Si en cada paso se corrige todos los P_i a la vez, multiplicándolos por algún factor común de modo que la suma sea igual a 1, el límite es la familia de probabilidades buscada. Este proceso es bastante manejable y da buenos resultados. El tiempo necesario para alcanzar una exactitud de 0.00001 se encuentran en la tabla 1. A mayor cantidad de especies, la cantidad de pasos necesarios aumenta.

7. Métodos alternativos

Como se dijo anteriormente y se ilustró con la tabla de los tiempos requeridos, un programa que calcule la fórmula exacta de $\Phi(P)$ para $N = 10$ o $N = 20$ demandaría por lo menos 100^{20} pasos de cálculo tomando en cuenta que se trata de 100 o más especies. Aún en el caso de tener una computadora mucho más potente, el cálculo exigiría mucho tiempo de cómputo. Se probaron cuatro métodos distintos para aproximar Φ en el caso $N = 5$, y se comparó con el valor exacto.

PRIMER METODO: Aproximación lineal: Se nota que los valores $Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}, Q_i^{(3)}, Q_i^{(4)}$ y $Q_i^{(5)}$ forman aproximadamente una recta. Por lo tanto se calcula $Q_i^{(1)}$ y $Q_i^{(2)}$ y se approxima $Q_i^{(5)} \approx Q_i^{(1)} + 4\Delta$ donde $\Delta = Q_i^{(2)} - Q_i^{(1)}$. En el caso de listas grandes de 10 y de 20 especies respectivamente, se calcularían los valores de $Q_i^{(1)}$ a $Q_i^{(5)}$, se tomaría la recta más cercana a estos valores y se approximaría $Q_i^{(10)}$ y $Q_i^{(20)}$. El tiempo de cómputo es mínimo, pero la aproximación no es muy buena.

SEGUNDO METODO: Aproximación cuadrática y polinomial: Se asume que los valores $Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}, Q_i^{(3)}, Q_i^{(4)}$ y $Q_i^{(5)}$ están sobre una parábola. Por lo tanto se calcula $Q_i^{(1)}, Q_i^{(2)}$ y $Q_i^{(3)}$ y se approxima $Q_i^{(5)}$ con el valor del polinomio de segundo grado que pase por estos tres primeros puntos. En el caso de listas largas se calcularían los valores de $Q_i^{(1)}$ a $Q_i^{(5)}$, se tomaría el polinomio de grado 2 (o 3 o 4) que pase por estos puntos y se approximaría $Q_i^{(10)}$ y $Q_i^{(20)}$.

El tiempo de cómputo es un poco mayor, la calidad de la aproximación parece ser buena, pero hay que tener en cuenta que para aproximar $Q_i^{(5)}$ se calculó hasta $Q_i^{(3)}$. Hay que hacer pruebas acercándose lo más posible a los valores exactos (para $N=10$ y $N=20$) por simulación, ya que no se pueden hallar con la fórmula exacta.

TERCER METODO: Estimación de la cantidad de observaciones que se tuvo que hacer antes de que se complete la lista. El cálculo de probabilidades elemental nos dice que la probabilidad de que la i -ésima especie aparezca en una lista después de u observaciones es de

$$P(i \in L) = 1 - (1 - P_i)^u$$

Si ponemos $\hat{Q}_i = 1 - (1 - P_i)^u$, aplicando el método de Newton podemos hallar un u tal que $\sum_{i=1}^m \hat{Q}_i = N$. Notemos que las probabilidades de aparecer en una lista suman N y no 1 como podría pensarse. Este método tiene un sesgo sistemático de estimar demasiado alto el Q_i ; si este ya es alto de por sí, pero el error total es comparable al del segundo método.

CUARTO METODO: Mixto.

Este cuarto método calcula primero las probabilidades hasta Q_i^2 , para luego estimar la cantidad de intentos que faltan para completar la lista y seguir como en el tercer método. En particular se calcula

$$\hat{Q}_i^{(5)} = P_i + \sum_{j \neq i} P_j \left(1 - \left(\frac{1 - P_j - P_i}{1 - P_j} \right)^u \right)$$

aplicando el método de Newton podemos hallar un u tal que $\sum_{i=1}^m \hat{Q}_i^{(5)} = 5$. Este es el método con el menor error de todos, aunque sigue teniendo el mismo error sistemático que el tercer método. En el caso de listas de 10 o de 20 se calcularía hasta $Q_i^{(4)}$ o $Q_i^{(5)}$ dependiendo de la capacidad de cómputo, de la cantidad de especies y de la exactitud requerida.

Se tienen que hacer pruebas en el futuro para confirmar la idoneidad de este método. Asimismo se debe encontrar alguna manera de contrarrestar el sesgo sistemático hallado.

8. Conclusiones

El modelo de Hubbell, tal vez mejorado o adaptado, puede dar algunas medidas útiles para evaluar el impacto de la actividad humana en comunidades ecológicas. Se encontró una manera de transformar los datos recogidos por el método de las listas de tamaño fijo en abundancias relativas. Se deben desarrollar métodos para lograr esta transformación en la práctica, especialmente para listas grandes, de 10 o 20 especies.

Agradecimientos

Los autores agradecen a todos los participantes del coloquio CORBIDI-IMCA por las fructíferas discusiones. El presente trabajo se realizó con apoyo del CONCYTEC a través del proyecto CS-160-2006-OAJ.

1. Hubbell, S.P., The Unified Neutral Theory of Biodiversity and Biogeography (Princeton University Press 2001)
2. Fisher R. A., Corbet, A.S., Williams, C.B. The relation between the number of species and the number of individuals

in a random sample of an animal population. Journal of animal ecology 12 p.42-58 (1943)

3. Preston, F.W. The commonness and rarity of species. Pitman, London. (1948)

Operadores Integrales Singulares de Calderón - Zygmund

Alejandro Ortiz Fernández
Sección Matemática. PUCP
E-mail: jortiz@pucp.edu.pe

Recibido el 10 noviembre del 2007; aceptado el 10 de diciembre del 2007

Damos una breve visión de la teoría de Calderón-Zygmund sobre operadores integrales singulares desde un punto de vista histórico. También damos algunas aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales.

Palabras claves: Transformada de Hilbert, integral singular; operadores de Calderón-Zygmund, operador diferencial.

We give a brief vision on Calderon-Zygmund theory on singular integral operators since a historical point of view. Also we give some application to partial differential equations.

Keywords: Hilbert transform,singular integral, Calderon-Zygmund operators, differential operators.

1. Introducción

En esta oportunidad pretendemos dar una breve visión de la teoría clásica sobre los operadores integrales singulares de Calderón - Zygmund; con tal objetivo mencionamos algunos problemas planteados a inicios del siglo pasado y que condujeron a ciertas integrales singulares como la transformada de Hilbert la que tratamos en forma particular en la sección 4; ella corresponde a la teoría - \mathbb{R}^1 y fue extendida al caso \mathbb{R}^n por Calderón - Zygmund en 1952 (ver [1]). Este escrito fue elaborado con motivo del XXV Coloquio de Matemática que organiza la Sociedad Matemática Peruana (octubre, 2007); nuestro objetivo fue presentar un tema de análisis que pudiera estimular su estudio por parte de nuevas generaciones de estudiantes de matemáticas.

Debo confesar que el tema de las integrales singulares lo estoy retomando después de muchos años; en particular, le dedicamos un buen tiempo de estudio cuando éramos profesor en la Universidad Nacional de Trujillo. Sin embargo, en nuestro subconsciente siempre estaban presente la ceñera figura de Don Alberto Calderón y la del Maestro Antoni Zygmund, cultores del llamado “análisis fino”, el que no es bien conocido en nuestro país. La matemática creada por Calderón y Zygmund, y por Calderón, ha demostrado ser central en la evolución del análisis real - armónico en la segunda mitad del siglo XX, en particular por su profunda relación con los operadores diferenciales parciales; los teoremas de existencia y unicidad de Calderón fueron reconocidos como muy potentes tanto por su belleza matemática como por las aplicaciones obtenidas.

2. Motivación

Veamos brevemente algunos aspectos históricos sobre la evolución del análisis que condujo al surgimiento de ciertas integrales singulares a inicios del siglo XX y que motivó el desarrollo de nuevas ideas durante todo este siglo y que continúa en el presente. Como sabemos, en el siglo XVII se crea el cálculo infinitesimal por obra de Newton y Leibniz lo que produjo cambios fundamentales

en el pensamiento matemático; las ideas de derivada e integral evolucionaron hacia el surgimiento de las ecuaciones diferenciales estimuladas por las aplicaciones del cálculo a la física. La rigorización del cálculo se produjo en el siglo XIX, época en que las ecuaciones diferenciales habían logrado cierto progreso lo que continuó hasta fines de este siglo y sobre todo en el siglo XX. La evolución del análisis condujo a la introducción de ciertos espacios de funciones y de espacios abstractos (espacios de Hilbert y de Banach); así mismo se estudian operadores actuando sobre estos espacios y con valores en el mismo u otro espacio. El estudio de los operadores y de las ecuaciones en derivadas parciales ocupó el interés de notables matemáticos como Poincaré, Hilbert, F. y M. Riesz, entre otros.

En general las leyes de la física se formulan vía ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) en donde las incógnitas son las funciones que describen los efectos de las causas que son dadas. Es sabido que la derivada es una idea de carácter local y así también lo será un operador diferencial (combinación de derivadas); luego, al aplicar un tal operador a una función solo dependerá de los valores de ésta en una vecindad arbitrariamente pequeña del punto en consideración. Por otro lado, los operadores diferenciales son también inestables y discontinuos, es decir, pequeñas perturbaciones de la función pueden generar grandes cambios cuando se le aplica el operador diferencial. Esta inestabilidad es una de las causas del estudio de estos operadores. Por otro lado, los operadores diferenciales lineales constituyen una clase de gran importancia pues ellos aparecen en el estudio de fenómenos en donde vale el principio de superposición: “a la suma de causas corresponde la suma de efectos”. Otra clase importante son los operadores integrales, los que se obtienen por integración de expresiones que contienen a la función sobre la cual operan; en particular se tiene a los operadores integrales lineales que aparecen cuando vale el principio de superposición; estos operadores surgen en la física (por ejemplo, en la teoría del potencial gravitatorio). Los operadores integrales (lineales) son continuos y estables respecto a cambios de las funciones en su dominio pero no tienen, en general, un sencillo cálculo funcional. Dentro de este panorama

tenemos a los operadores integrales singulares los que pueden ser considerados como operadores intermedios entre los diferenciales y los integrales lineales. Tales operadores singulares dan lugar a integrales divergentes cuando se las aplica a expresiones a integrar y por tanto deben ser definidas como límite de integrales ordinarias (“valor principal”); además, son semi-locales en el sentido de que la acción sobre un punto es dominada por la acción sobre puntos muy próximos a aquel. Esta clase de operadores posee un cálculo funcional sencillo; así, a cada operador le está asociado una función, llamada símbolo del operador, que depende de un punto y de una dirección, y tal que a la suma de operadores corresponde suma de símbolos y a la aplicación sucesiva de operadores corresponde el producto de símbolos.

El símbolo contiene las características esenciales del operador; aquél determina al operador a menos de otro operador con buenas propiedades; además, una función de punto y dirección, suficientemente regular, es el símbolo de un operador. Este “juego” hace a los operadores integrales singulares una clase flexible y de manejo relativamente sencillo. Otra importante propiedad de estos operadores es que todo operador diferencial lineal se puede obtener como composición de dos operadores siendo uno de ellos una potencia de un único operador diferencial (el laplaciano), y el otro un operador integral singular cuyo símbolo está dado por el polinomio característico del operador diferencial evaluado en el punto de la esfera unitaria que determina una dirección.

3. Primeras fuentes donde surgen integrales singulares

Sea Ω un recinto acotado del plano complejo simplemente conexo cuya frontera Γ es una curva regular, Ω_c es el recinto complemento, entonces:

- (a). Hilbert (1904). Encontrar una función analítica $F(z) = u + iv$ en Ω tal que $ua + vb = f$ en Γ donde a, b y f son funciones reales sobre Γ .
- (b). Hilbert (1905). Encontrar F y G analíticas en Ω y Ω_c respectivamente tal que $F = fG$ en Γ donde f es una función de valores complejos en Γ .
- (c). Plemelj (1908). Encontrar F y G como en (b) y con $G \rightarrow 0$ en el infinito tal que $F - G = f$ en Γ donde ahora f es una función de valores complejos dada.
- (d). Poincaré (1910). Encontrar una función u armónica en Ω tal que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = f$ en Γ donde ν es un campo de vectores dado Γ transversal a Γ y f es también una función en Γ (**problema de la derivada oblicua**).

Plemelj al resolver (c) ilustra como intervienen integrales singulares. Se considera la integral sobre Γ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(s)}{s-z} ds ,$$

ϕ es función sobre Γ , $z \in \Omega$ (ó Ω_c), que da la función analítica F en Ω y otra G en Ω_c que tiende a cero en el infinito.

Si $\phi \in \Lambda_{\alpha}$ (clase de Hölder - funciones), entonces ϕ tiene límites en Γ y están dadas por:

$$F(t) = \frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{\phi(s)}{s-t} ds ,$$

$$G(t) = -\frac{1}{2} \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{\phi(s)}{s-t} ds .$$

Esto resuelve (c) tomando $\phi(s) = f(x)$.

Si Ω es un semiplano, el operador

$$(H\phi)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{\phi(s)}{s-t} ds .$$

es llamado transformada de Hilbert.

Se tiene $H^2 = I$.

¿ En que clase de funciones está bien definido el operador H ? ... en la clase de Hölder Λ_{α} en donde actúa continuamente ... Privaloff (1916).

En 1928, M. Riesz prueba: H es bien definido en L^p .

A. Besicovitch (1926) y E. C. Titchmarsh (1929) introducen métodos de variable real en el estudio de H .

F. G. Tricomi en 1925 y 1928 hace el primer intento de generalización a varias variables del operador H ; considera operadores de la forma

$$Tf = \text{v.p.} \int h(x-y) f(y) dy$$

sobre funciones de dos variables en el plano; $h(x)$ es homogénea de grado - 2; da un método para construir S del mismo tipo tal que $ST = I$.

G. Giraud estudia el problema: generalizar el método de las integrales en el estudio del problema (d) en el caso dimensión > 2 . En 1934 estudia operadores integrales singulares sobre variedades y su continuidad sobre espacios de Hölder Λ_{α} . Giraud logra reducir ecuaciones singulares a ecuaciones de tipo Fredholm pero no logra establecer una “condición” simple que permitiera tal reducción. Tal condición fue encontrada por S. G. Mihlin en 1936 quien asoció al operador $Tf = \text{v.p.} \int h(x-y) f(y) dy$ (considerado por Tricomi) la función

$$\sum a_n \gamma_n e^{in\theta}$$

siendo γ_n ciertas constantes y $\sum a_n e^{in\theta}$ es la serie de Fourier de $h(e^{i\theta})$; Mihlin llamó a tal función "símbolo" estableciendo que el símbolo de la composición de dos operadores del tipo T es el producto de los símbolos de los operadores. Observemos que T es un operador tipo convolución. Con sus recursos Mihlin resolvió el problema de la inversión de estos operadores así como el de la reducción de ecuaciones integrales singulares a ecuaciones de tipo Fredholm; además, extiende su trabajo al caso n -dimensional utilizando la técnica de las series de armónicos esféricos.

Llegamos al año 1952; los profesores Zygmund y Calderón publican un trabajo que fue considerado como el que más influyó en el desarrollo del análisis en la segunda mitad del siglo XX; nos referimos al trabajo [1] en donde los autores buscan una motivación en dos clásicos problemas de la teoría del potencial. Ellos consideran operadores del tipo

$$Tf(x) = cf(x) + \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$$

donde el núcleo $k(x)$ es una función homogénea de grado $-n$ tal que

$$\int_{|x|=1} k(x)dx = 0.$$

Calderón - Zygmund clarifican la noción del símbolo asociado al operador; verifican que $T : L^p \rightarrow L^p$ es continuo para $1 < p < \infty$.

A partir del trabajo - 1952 se produjo un gran interés por la teoría de los operadores integrales singulares; ver la bibliografía para otros trabajos de Calderón - Zygmund en el campo de las integrales singulares, así como de otros analistas.

4. La Transformada de Hilbert

Motivación. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$; $f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t-z} dt$, $z = x + iy$, definida sobre $y = \text{Im}(z) \geq 0$.

$f(z)$ es bien definida (Hölder) y $\frac{1}{t-z} \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y es analítica sobre $y \geq 0$.

Tenemos:

$$\frac{1}{t-z} = \frac{iy}{(t-x)^2 + y^2} - \frac{x-t}{(t-x)^2 + y^2},$$

ó

$$\frac{1}{\pi i(t-z)} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} + i \frac{1}{\pi} \frac{x-t}{(t-x)^2 + y^2}.$$

$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$ es llamado el **núcleo de Poisson** y

$\tilde{P}_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$ el **núcleo conjugado de Poisson**.

Por lo tanto

$$\frac{1}{\pi i(t-z)} = P_y(x-t) + i\tilde{P}_y(x-t)$$

y

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x-t)u(t)dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_y(x-t)u(t)dt \\ &\equiv U(x,t) + iV(x,t). \end{aligned}$$

$U(x,t)$ es llamado la **integral de Poisson de u** y

$V(x,t)$ la **integral conjugada de Poisson de u** .

(u es de valor real); U y V son armónicas sobre $y \geq 0$. Además, ($u \in L^p$, $1 < p < \infty$), se tiene

$$U(x,t) = (P_y * u)(x) \rightarrow u(x) \quad \text{a.e. si } y \rightarrow 0^+.$$

Por lo tanto $U(x,t)$ es la solución del **problema de Dirichlet** en el semi-espacio superior, con dato de contorno $u(x)$ sobre $y = 0$. También

$$V(x,t) = (\tilde{P}_y * u)(x) = (P_y * \tilde{u})(x) \rightarrow \tilde{u}(x) \quad \text{a.e. si } y \rightarrow 0^+,$$

donde $\tilde{u}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\epsilon} \frac{u(t)}{x-t} dt$... transformada de Hilbert de u .

La teoría de las integrales singulares comienza con la transformada de Hilbert de f :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t|>\epsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

La tarea fue estudiar la existencia de \tilde{f} y sus relaciones con f .

Si $f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, ó por definición de Λ_α , $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$ si $|x-y| < \delta$, $\exists \tilde{f}$.

Teoría L^2 .

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$, $0 < \epsilon < \delta < \infty$,

$$\tilde{f}_{\epsilon,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon < |x-t| < \delta} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Entonces, $\exists C > 0$ tal que $\|\tilde{f}_{\epsilon,\delta}\|_2 \leq C \|f\|_2$.

En efecto, sea la transformada de Fourier:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

y

$$K_{\varepsilon,\delta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \dots \quad \varepsilon < |x| < \delta \\ 0 & \dots \quad \text{complemento.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\hat{f}_{\varepsilon,\delta}(x) = (K_{\varepsilon,\delta} * f)^{\wedge}(x) = \hat{K}_{\varepsilon,\delta}(x) \hat{f}(x) \text{ a.e.}$$

Entonces, $\left| \hat{K}_{\varepsilon,\delta}(x) \right| \leq C$. Por lo tanto

$$\left\| \hat{f}_{\varepsilon,\delta} \right\|_2 \leq C \left\| \hat{f} \right\|_2 = C \|f\|_2 \quad \text{ó} \quad \left\| \hat{f}_{\varepsilon,\delta} \right\|_2 \leq C \|f\|_2 . \blacksquare$$

Se observa que $\hat{K}_{\varepsilon,\delta}(x) \rightarrow -i \operatorname{sgn} x$ si $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. Por lo tanto $\hat{f}_{\varepsilon,\delta}(x) \rightarrow (-i \operatorname{sgn} x) \hat{f}$ en L^2 -norma.

Antitrasformando, $\tilde{f}_{\varepsilon,\delta} \rightarrow \tilde{f}$ en L^2 para $\tilde{f} \in L^2$ tal que

$$\hat{\tilde{f}}(x) = (-i \operatorname{sgn} x) \hat{f}(x).$$

Si $Hf \equiv \tilde{f}$, $\sigma_H(x) = -i \operatorname{sgn} x$, entonces $[Hf]^{\wedge}(x) = \sigma_H(x) \hat{f}(x)$ ó $H = F^{-1} \sigma_H F$.

$\sigma_H(x)$ es el símbolo de la transformada de Hilbert H .

Teorema. M. Riesz (1928). Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, y

$$H_\varepsilon f(x) \equiv \tilde{f}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Entonces:

$$(a). \quad \left\| \tilde{f}_\varepsilon \right\| \leq C \|f\|_p;$$

$$(b). \quad \exists \tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^1) \text{ tal que } \left\| \tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f} \right\|_p \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$

$$(c). \quad \left\| \tilde{f} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Nota. El lector interesado en tener una visión más amplia sobre la transformada de Hilbert ($n = 1$ y $n > 1$) puede consultar, por ejemplo, [12, 17, 20]. La fuente original para el caso n -dimensional es [1].

Remarcamos que por definición, el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, es la clase

$$\left\{ f \text{ medible sobre } \mathbb{R}^n / \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty \right\};$$

además, $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$; $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es la clase de las funciones acotadas.

5. Integrales Singulares en \mathbb{R}^n

La década de los años 1950's fue fructífera en el desarrollo de la teoría de las integrales singulares. En 1952 aparece el fundamental trabajo de Calderón y Zygmund ([1]) el cual fue el inicio de una gran teoría con proyecciones hasta nuestros días.

La naturaleza del símbolo fue clarificado para operadores de tipo convolución; consideran operadores del tipo

$$Tf(x) = cf(x) + \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y) dy ,$$

donde

$$\left| \begin{array}{l} k(x) \text{ es homogénea de grado } -n \text{ tal que} \\ \int_{|x|=1} k(x) d\sigma = 0. \\ \text{Calderón - Zygmund prueban que} \\ \sigma_T(x) = c + \hat{k}(x), \quad c \text{ constante.} \end{array} \right.$$

Respecto al operador

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y) dy,$$

cuando $k(x)$ es homogéneo de grado $-n$ se tiene:

$$k(x) = |x|^{-n} k\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^{-n} k(x') \equiv |x|^{-n} \Omega(x)$$

donde $\Omega(x)$ es una función homogénea de grado cero. Por lo tanto

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(x-y) f(y) dy , \end{aligned}$$

$$\text{donde } k_\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k(x) & \dots \quad |x| > \varepsilon \\ 0 & \dots \quad |x| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

¿Cuando existe Tf ? ... Asumamos que:

$$(a) \quad \Omega \in L^1(\Sigma);$$

$$(b) \quad \int_{\Sigma} \Omega(x') d\sigma = 0.$$

Si $f \in L^p \cap \Lambda_\alpha$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, y Ω satisface (a) y (b) entonces existe

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f(x) \quad \text{a.e.}$$

Si, además, $\Omega \in L^\infty$, entonces el límite existe en todas partes.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, Ω satisface (b) y $\Omega \in L^q(\Sigma)$, $q > 1$ (algún), entonces T es un operador de tipo fuerte (p,p) , ó

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

Si $p = 1$, entonces T es un operador de tipo débil $(1,1)$ ó

$$|\{x / |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1,$$

donde $|\{x / \dots\}|$ significa la medida de Lebesgue del conjunto $\{\dots\}$.

Nota. Para la teoría clásica de las integrales singulares el interesado puede consultar [11] y [21] obteniéndose un enfoque venido de los autores de tal teoría. También se sugiere los libros [12,13, 14, 5, 16, 17, 18]; para una visión general ver [19]. Un libro con mucho material en análisis armónico es [20]. Un lector interesado en investigar la génesis de las integrales singular puede consultar [2, 3, 4], así como el ya mencionado [1].

6. Operadores de Calderón - Zygmund

La teoría de Calderón - Zygmund fue extendida a operadores los cuales no son de tipo convolución, como:

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y) f(y) dy.$$

Los profesores R. Coifman y Y. Meyer desarrollaron un Programa para elaborar lo que ellos llamaron los **nuevos operadores operadores de Calderón - Zygmund**; ello fue realizado en un proyecto que demandó muchos años de trabajo conjunto en el cual participaron alumnos de los distinguidos analistas.

Usando el lenguaje de las distribuciones un **operador integral** es definido sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vía:

$$T\varphi(x) = \int k(x,y) \varphi(y) dy, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

donde k satisface ciertas condiciones para garantizar existencia de la integral.

Por ejemplo, si $k(x)$ es un núcleo singular de la forma

$$k(x,y) = \Omega \left(\frac{x-y}{|x-y|} \right) \frac{1}{|x-y|^n},$$

con $\Omega \in L^1(\Sigma)$ y $\int_{\Sigma} \Omega = 0$, entonces $\exists T\varphi$. Entonces en el sentido de las distribuciones, T es definido considerando k como una distribución sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

El operador $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ es definido vía

$$\langle T\varphi, \phi \rangle = \langle k, \phi \otimes \varphi \rangle, \quad \phi, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$(\phi \otimes \varphi)(x,y) = \phi(x)\varphi(y).$$

Cuestión. ¿ Cuándo el operador lineal T es acotado sobre el espacio de Lebesgue L^p , $1 \leq p < \infty$?

Condiciones

1. En el complemento de la diagonal $x = y$, $k(x,y) \in L_{loc}^{\infty}$ y $\exists C > 0$ tal que

$$|k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}.$$

2. $\exists C > 0$ tal que

$$\int_{|x-y| \geq 2|x-x'|} |k(x,y) - k(x',y)| dy \leq C,$$

$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n$. (Condición de Hörmander).

Núcleos “Standard”. (Δ_c complemento de la diagonal $x = y$).

K es llamado un **núcleo “standard”** si $K : \Delta_c \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua y $\exists C > 0$ tal que $\forall (x,y) \in \Delta_c$ se tiene:

$$1) |K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n},$$

$$2) |\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}},$$

(gradiente sentido distribuciones).

Definición. $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ es llamado un **operador de Calderón - Zygmund (OCZ)** si:

(i) T es extendido a $L^2(\mathbb{R}^n)$ como un operador lineal acotado;

(ii) existe un núcleo “standard” K tal que $\forall f \in L_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) dy \quad \text{c.t.p. sobre } (\text{sopp}f)_c.$$

Teorema. Si T es un OCZ, entonces $T : L^p \rightarrow L^p$, $1 < p < \infty$, es un operador lineal acotado.

Para los casos límites $p = 1$ y $p = \infty$ se tienen los resultados: si T es un operador de Calderón - Zygmund entonces:

$$T : H^1 \rightarrow L^1 \quad \text{y} \quad T : L_0^{\infty} \rightarrow \text{BMO}$$

son operadores acotados, donde H^1 es un espacio de Hardy y BMO es el espacio de las funciones de oscilación media acotadas; estos espacios fueron de mucha utilidad

en el desarrollo del análisis armónico. L_0^∞ es el espacio de las funciones acotadas con soporte acotado.

Una extensión de la transformada de Hilbert H ($\equiv T_0$) lo constituye el operador

$$T_K f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[A(x) - A(y)]^K}{(x-y)^{K+1}} f(y) dy$$

donde $A \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Estos operadores T_k 's surgen en el difícil problema de estudiar operadores, tipo "transformadas de Hilbert" definidas sobre curvas - C^1 en el plano complejo. Así, si T es un operador integral definido sobre funciones sobre \mathbb{R}^1 vía

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(x-y) + i(A(x) - A(y))} dy$$

con $A \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Vía expansión en series se obtiene $\sum_{k=0}^{\infty} T_k$. En 1965 Calderón prueba que $T_1 : L^2 \rightarrow L^2$ es un operador acotado y en 1974 Coifman - Meyer probaron que $T_2 : L^2 \rightarrow L^2$ es acotado. Un difícil reto fue probar que T_k , $k > 2$ y T fueran acotados sobre L^2 . En esta dirección, en los años 1980's un problema abierto fue establecer condiciones necesarias y suficientes para que un operador $T : L^2 \rightarrow L^2$ sea acotado bajo adecuadas condiciones. El problema fue resuelto por G. David - J. L. Journé en el fundamental trabajo: "Une caractérisation des opérateurs intégraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ ". C.R.A.S. 296. 1983.

El teorema de David - Journé es el famoso resultado conocido como el "teorema $T(1)$ ", donde $T(1)$ es definido vía:

$$\langle T(1), f \rangle = \langle T^* f, 1 \rangle,$$

donde $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\int f(x) dx = 0$ y T^* es el operador adjunto de T . Entonces, el teorema dice:

"Un operador $T : L^2 \rightarrow L^2$ asociado a un núcleo estandarizado es acotado si y sólo si

- (i) $T(1) \in \text{BMO}$,
- (ii) $T^*(1) \in \text{BMO}$ y
- (iii) T es un operador de orden cero en el sentido débil "

El vol II del excelente libro de Y. Meyer, [22], está dedicado a los nuevos operadores de Calderón - Zygmund; la novedad es, además, que muchos de sus argumentos son tratados con la metodología de las ondículas ("wavelets"); los temas que son considerados son de cierta actualidad y el estilo es respetando el carácter "fino" del análisis de Calderón. Otras referencias en esta dirección son los libros: [23] (obra que puede ser usada como texto en un curso sobre análisis armónico; trata al teorema $T(1)$), [24] (considera operadores de Calderón - Zygmund y teoremas de caracterización de operadores acotados sobre L^2); [25] (aparente para ser usado en un seminario para estudiantes de post-graduación; contiene a la integral - Cauchy de Calderón); [26] (contiene temas investigados en los últimos años).

7. Aplicación a Ecuaciones Diferenciales Parciales

Sea $Tf = cf + k * f$ un operador integral singular generalizado donde $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ es un C - Z núcleo.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pongamos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ y

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f \equiv D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} f.$$

Al polinomio, de orden $\leq m$, $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) x^\alpha$ le asociamos el operador diferencial parcial

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha.$$

Si $f \in S$ es una distribución rápidamente decreciente, sabemos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f \right]^\wedge(x) = 2\pi i x_j \hat{f}(x).$$

Más generalmente $[P(D)f]^\wedge(x) = P(2\pi i x) \hat{f}(x)$.

Ejemplo: Si $P(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = |x|^2$ entonces:

$$P(D)f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2},$$

luego $[\Delta f]^\wedge(x) = -4\pi^2 |x|^2 \hat{f}(x)$. Note que $P(D) \equiv \Delta$ Laplaciano.

Ahora consideraremos al operador Λ definido vía:

$$[\Lambda f]^\wedge(x) = 2\pi |x| \hat{f}(x) \quad (1)$$

Entonces tenemos

$$\Lambda f(x) = i \sum_{j=1}^n R_j \frac{\partial}{\partial x_j} f$$

donde R_j es la transformada M. Riesz, definida por

$$(R_j f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_n \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{x_j - t_j}{|x-t|^{n+1}} f(t) dt.$$

Notemos que R_j es una natural extensión a \mathbb{R}^n de la transformada de Hilbert

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

También, nosotros tenemos la relación

$$R_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}},$$

la cual fue usada por Calderón en su estudio de la unicidad de la solución del problema de Cauchy.

De (1) obtenemos $[\Lambda^m f]^\wedge(x) = (2\pi|x|)^m \hat{f}(x)$. En particular

$$[\Lambda^2 f]^\wedge(x) = (2\pi|x|)^2 \hat{f}(x) = 4\pi^2|x|^2 \hat{f}(x) = -[\Delta f]^\wedge(x);$$

luego $\Lambda^2 = -\Delta$ ó $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. Similarmente

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f \right]^\wedge(x) &= (2\pi i x)^\alpha \hat{f}(x) \\ &= \left(\frac{x}{|x|} \right)^\alpha i^{|\alpha|} (2\pi|x|)^\alpha \hat{f}(x) \\ &= i^{|\alpha|} (x')^\alpha [\Lambda^{|\alpha|} f]^\wedge(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Desde que $(x')^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$, homogénea de grado cero, sabemos que existe un operador integral singular generalizado T_α tal que $(x')^\alpha = \sigma_{T_\alpha}$, donde el símbolo σ_T de T satisface $\sigma_T(x) = C + \hat{k}(x)$, luego,

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f \right]^\wedge(x) = i^{|\alpha|} \left(C + \hat{k}(x) \right) [\Lambda^{|\alpha|} f]^\wedge(x).$$

Entonces, de (2) (transformada inversa), obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f = i^{|\alpha|} T_\alpha \Lambda^{|\alpha|} f,$$

donde $T_\alpha f(x) = a(x) f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x, x-y) f(y) dy$. Luego,

$$P(D)f = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f = \sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} a_\alpha T_\alpha \Lambda^{|\alpha|} f.$$

Para $|\alpha| = m$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f &= i^m \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) T_\alpha \right) \Lambda^m f \\ &\equiv i^m T \Lambda^m f \end{aligned}$$

donde $T = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) T_\alpha$.

Conclusión: $P_m(D)f = i^m T \Lambda^m f$.

Ahora, sea la ecuación diferencial $\Delta u - \lambda u = f$, con $\lambda < 0$. Tomando transformada de Fourier: $|y|^2 \hat{u}(y) - \lambda \hat{u}(y) = \hat{f}(y)$; entonces

$$\hat{u}(y) = \frac{\hat{f}(y)}{|y|^2 - \lambda}, \quad \text{con } \lambda \neq |y|^2.$$

Vía transformada inversa,

$$u(x) = \int e^{2\pi i x \cdot y} \frac{1}{|y|^2 - \lambda} \hat{f}(y) dy.$$

Esto sugiere que si nosotros tuviéramos la ecuación de Poisson $\Delta u = f$, obtendríamos formalmente la solución

$$u(x) = \int e^{2\pi i x \cdot y} |y|^{-2} \hat{f}(y) dy.$$

Ahora regularizamos el factor $|y|^{-2}$ "parchando" con la función $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta(y) = 0$ en una vecindad del origen y $\theta(y) = 1$ en el infinito. Así, obtendríamos una solución regularizada

$$\tilde{u}(x) = \int e^{2\pi i x \cdot y} \theta(y) |y|^{-2} \hat{f}(y) dy.$$

Mas generalmente, consideremos aún al operador diferencial $P(D)$. Tenemos

$$\begin{aligned} P(D)f(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \int e^{-2\pi i x \cdot z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\alpha f \right]^\wedge(z) dz \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \int e^{-2\pi i x \cdot z} (2\pi i z)^\alpha \hat{f}(z) dz \\ &= \int e^{-2\pi i x \cdot z} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (2\pi i z)^\alpha \right] \hat{f}(z) dz. \end{aligned}$$

Así, obtendremos:

$$P(D)f(x) = \int e^{-2\pi i x \cdot z} p(x, z) \hat{f}(z) dz \quad (3)$$

$$\text{donde } p(x, z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (2\pi i z)^\alpha.$$

Nota. También tenemos,

$$\begin{aligned} P(D)f(x) &= \\ &\int e^{-2\pi i x \cdot z} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} a_\alpha(x) (z')^\alpha \right] (\Lambda^{|\alpha|} f)^\wedge(z) dz. \end{aligned}$$

Miremos (3). Consideraremos la parte homogénea de grado k en $p(x, z)$. Así,

$$\begin{aligned} p_k(x, z) &= \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) (2\pi i z)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{a_\alpha(x) (iz)^\alpha}{|z|^k} (2\pi)^k |z|^k \\ &= (2\pi)^k |z|^k h_k(x, z), \end{aligned}$$

donde $h_k(x, z) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{a_\alpha(x)(iz)^\alpha}{|z|^k}$. Entonces, desde que

$$p(x, z) = \sum_{|\alpha|=k=0}^m p_k(x, z),$$

obtendremos la representación

$$\begin{aligned} P(D)f(x) &= \sum_{k=0}^m \int e^{-2\pi ix.z} p_k(x, z) \hat{f}(z) dz \\ &= \sum_{k=0}^m \int e^{-2\pi ix.z} h_k(x, z) (2\pi)^k |z|^k \hat{f}(z) dz \\ &\quad (\text{tenemos } [\Lambda^k f]^\wedge(z) = (2\pi)^k |z|^k \hat{f}(z)) \\ &= \sum_{k=0}^m \int e^{-2\pi ix.z} h_k(x, z) [\Lambda^k f]^\wedge(z) dz. \end{aligned}$$

Entonces, si H_k es el operador

$$H_k g(x) = \int e^{-2\pi ix.z} h_k(x, z) \hat{g}(z) dz,$$

con $\hat{g} \in L^1$, tendremos la representación:

$$P(D)f(x) = \sum_{k=0}^m H_k(\Lambda^k f)(x).$$

8. Conclusiones

En esas ideas está la génesis de la Teoría de los Operadores Pseudo-Diferenciales la que se desarrolló a partir de los años 1960's y tuvo importantes aplicaciones.

El trabajo [5] es pionero en la relación entre los operadores integrales singulares con los operadores diferenciales; en este trabajo se introduce una nueva y profunda metodología matemática. En [7], Calderón pone a prueba su gran potencial creativo para tratar la unicidad de la solución del problema de Cauchy vía novedosas y profundas ideas. Estos esfuerzos se consolidan en [8] con resultados sobre existencia y unicidad de soluciones, un bello trabajo en opinión de los especialistas; [6] está también en esta dirección. El lector interesado en problemas hiperbólicos puede consultar [11]. Algunos aspectos sobre aplicaciones de los métodos del análisis real a ecuaciones en derivadas parciales pueden ser encontrados en [17].

1. Calderón, A. P. - Zygmund, A: On the Existence of Certain Singular Integrals. *Acta Mathematica*, 88. 1952.
2. Calderón, A. P. - Zygmund, A: Singular integrals and periodic functions . *Studia Math.* 14. 1954.
3. Calderón, A. P. - Zygmund, A: On Singular Integrals. *Amer. Journal of Math.* Vol. LXXVIII. N.2. 1956.
4. Calderón, A. P. - Zygmund, A: Algebras of Certain Singular Operators . *American Journal of Math.* Vol. LXXVIII. N.2. 1956.
5. Calderón, A. P. - Zygmund, A: Singular Integral Operators and Differential Equations . *Amer. J. Math.* 79. 1957.
6. : Local properties of solutions of elliptic partial differential equations . *Studia Math.* T. XX. 1961.
7. Calderón, Alberto. P.: Uniqueness in the Cauchy Problem for Partial Differential Equations. *Amer. J. Math.* 80. 1958.
8. Calderón, Alberto. P.: Existence and Uniqueness Theorems for Systems of Partial Differential Equations . Inst. for Fluid Dynamics. Univ. of Maryland. Md. 1961.
9. Calderón, Alberto. P.: Estimates for Singular Integral Operators .
10. Calderón, Alberto. P.: Algebras of Singular Integral Operators. *Proc. Symp. Pure Math.* Vol. 10. AMS. 1967.
11. Calderón, Alberto. P.: Integrales Singulares y sus Aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas . Cursos y Sem. de Matem. Fasc. 3. U. de Bs. As. 1960.
12. Neri, Umberto: "Singular Integrals". Springer - Verlag. 200. 1971.
13. Stein, Elías: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions . Princeton U. Press. 1970.
14. Sadosky, Cora: *Interpolation of Operators and Singular Integrals*. Marcel Dekker. 1979.
15. de Guzmán, Miguel: *Real Variable Methods in Fourier Analysis*. Math. Studies 46. Amsterdam. 1981.
16. Torchinsky, Alberto: *Real - Variable Methods in Harmonic Analysis*. Academic Press, INC. 1986.
17. Ortiz, Alejandro: *Operadores Integrales Singulares*. Univ. Nac. de Trujillo. Perú. 1972.
18. Ortiz, Alejandro: *Tópicos sobre Análisis Armónico*. Univ. Nac. de Trujillo. Perú. 1988.
19. Ortiz, Alejandro: *Integrales Singulares y Temas Afines*. Pro Mathematica. Vol. V. 9-10. PUCP. 1991.
20. García - Cueva, J. - Rubio de Francia, J.: *Weighted Norm Inequalities and Related Topics* . North - Holland. 1985.
21. Zygmund, Antoni: *Intégrales Singulières*. Semin. Math. D'Orsay. 1965.
22. Meyer, Yves: *Ondelettes et Opérateurs II. Opérateurs de Calderón - Zygmund*. Actual. Mathem. Hermann. 1990.
23. Duoandikoetxea, Javier: *Análisis de Fourier* . Addison - Wesley. Univ. Aut.de Madrid. 1995.
24. Bourdaud, Gérard: *Analyse Fonctionnelle dans ℓ^p Espace Euclidien* . Public. Math. Université Paris VII.
25. Journé, Jean - Lin: "Calderón - Zygmund Operators, Pseudo - Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón" . Lecture Notes in Math. Springer - Verlag. 1983.
26. Auscher, Pascal: On Necessary and Sufficient Conditions for L^p -Estimates of Riesz Transforms Associated to Elliptic Operators on \mathbb{R}^n and Related Estimates". *Memoirs of the AMS*. 871. Vol. 186. 2007.

El Método de Máximo Descenso para Funciones Cuasi-convexas en Variedades Riemannianas

E. Marisa Quispe Cárdenas[†], Erik A. Papa Quiroz[†], P. Roberto Oliveira[‡],

[†]Universidad Nacional del Callao-FCNM, Escuela de Matemática,

[‡]Universidad Federal de Rio de Janeiro-PESC/COPPE, Engenharia de Sistemas

E-mail: juanuni05@gmail.com, erik@cos.ufrj.br, poliveir@cos.ufrj.br

Recibido el 03 de diciembre del 2007; aceptado el 15 de diciembre del 2007

Probamos la convergencia global del método del máximo descenso con busca generalizada de Armijo para resolver problemas de minimización con funciones objetivo cuasi-convexas definidas en una variedad riemanniana completa con curvatura seccional no negativa. Resultados de convergencia obtenidos en espacios euclidianos, llegan a ser casos particulares de este desarrollo. Además, introducimos una clase de métricas diagonales en la variedad \mathbb{R}_{++}^n y estudiamos sus propiedades geométricas, como son: geodésicas, curvatura, distancias riemannianas, etc.

Palabras claves: Método del gradiente, variedades riemannianas, funciones cuasi-convexas, convergencia global.

We proof the full convergence of the steepest descent method with a generalized Armijo search to solve minimization problems with quasiconvex objective functions defined on complete riemannian manifolds with nonnegative sectional curvature. Previous convergence results obtained in euclidian spaces are particular case of our approach. Moreover, we introduce a class of diagonal metrics on \mathbb{R}_{++}^n and study its geometrical properties as: geodesics, sectional curvature, riemannian distances.

Keywords: Riemannian manifolds, steepest descent method, quasiconvex functions, full convergence.

1. Introducción

Desarrollamos una extensión de la convergencia del método del gradiente para minimizar funciones cuasi-convexas definidas en una variedad riemanniana. Ideas afines fueron inicialmente estudiados por Luenberger 7, Rapcsák 9, Udriste 11, Smith 10, entre otros. Este trabajo fué motivado por los resultados obtenidos por Kiwi y Murty 5 quienes demuestran la convergencia del método de máximo descenso para funciones cuasi-convexas en espacios euclidianos y la generalización de esta versión en Papa et. al. 8.

2. Elementos de geometría riemanniana

En esta sección resumimos algunas definiciones, propiedades y resultados fundamentales sobre variedades riemannianas. El lector interesado en profundizar estos aspectos lea por ejemplo do Carmo 3.

Definición 1. (*Variedad diferenciable*). Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones inyectivas $\mathcal{X}_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, $\alpha \in I$ (Conjunto de parámetros), definidos en abiertos U_α de \mathbb{R}^n en M tales que se cumplen las siguientes condiciones:

1) $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{X}_\alpha(U_\alpha)$.

2) Sea \mathcal{X}_α , \mathcal{X}_β con $\mathcal{X}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathcal{X}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $\mathcal{X}_\alpha^{-1}(W)$ y $\mathcal{X}_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y las aplicaciones

$$\mathcal{X}_\beta^{-1} \circ \mathcal{X}_\alpha : \mathcal{X}_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \mathcal{X}_\beta^{-1}(W)$$

son diferenciables.

El par $(U_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ con $p \in \mathcal{X}_\alpha(U_\alpha)$ es llamado una parametrización o sistema de coordenadas locales

de M en p . Una familia $\{(U_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)\}$ satisfaciendo 1) y 2) es llamada **estructura diferenciable** de M . Así, la variedad es un conjunto M con una estructura diferenciable.

Una estructura diferenciable en una variedad diferenciable M induce de forma natural una topología en M definido por:

$A \subset M$ es abierto en M si para todo $\alpha \in I$, $\mathcal{X}_\alpha^{-1}(A \cap \mathcal{X}_\alpha(U_\alpha))$ es abierto en \mathbb{R}^n .

Observemos que la topología es definida de tal modo que los conjuntos $\mathcal{X}_\alpha(U_\alpha)$ son abiertos y las aplicaciones \mathcal{X}_α son continuas.

Proposición 1. Toda superficie regular de \mathbb{R}^n de dimensión k es una variedad diferenciable de la misma dimensión.

Definición 2. Sea $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un subconjunto abierto de la variedad diferenciable M . Decimos que f es diferenciable en $p \in U$, si para alguna parametrización $\mathcal{X}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, con $p \in \mathcal{X}_\alpha(U_\alpha) \subset U$, la función compuesta $f \circ \mathcal{X}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathcal{X}_\alpha^{-1}(p)$. Se dice que f es diferenciable en U si es diferenciable en todo punto de U .

Definición 3. (*Espacio tangente a una variedad diferenciable*). El espacio tangente a una variedad M en un punto p representado por $T_p M$, es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p . Así, $T_p M = \{v \in \mathbb{R}^n / v$ es un vector tangente en $p\}$. La unión de espacios tangentes

$$\bigcup_{p \in M} T_p M$$

es llamado **Fibrado Tangente**.

Proposición 2. El espacio tangente de una variedad diferenciable que es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n es el propio \mathbb{R}^n .

Como consecuencia de esta proposición se tiene que:

- a). $T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, $T_p \mathbb{R}_{++}^n = \mathbb{R}^n$.
- b). Si $M = \{(\lambda, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : s > 0\}$, entonces $T_p M = \mathbb{R}^{m+n}$.
- c). Si $M = \{(x, \lambda, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (x, s) > 0\}$, entonces $T_p M = \mathbb{R}^{2n+m}$.

Métricas riemannianas

Definición 4. Sea M una variedad diferenciable. Una métrica riemanniana es una aplicación que asocia a cada $p \in M$ un funcional $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es bilineal, simétrica y definida positiva para cada $p \in M$ (o sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ es un producto interno).
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ varía diferenciablemente en el siguiente sentido:

Si $\mathcal{X} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es um sistema de coordenadas en torno de p , con $\mathcal{X}(x_i) = q \in \mathcal{X}(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathcal{X}_q(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)$ entonces la función:

$$g_{ij}(x) = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

es una función diferenciable en U .

Las funciones $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ son llamadas expresiones de la métrica riemanniana en el sistema coordenado \mathcal{X} y la matriz $G = (g_{ij})$ es la representación de la métrica riemanniana.

Definición 5. (Variedad riemanniana). Una variedad diferenciable para la cual se define una métrica riemanniana se denomina una variedad riemanniana.

Ejemplo 1. Sea $M = \mathbb{R}^n$, defina la parametrización $\mathcal{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{X}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Observe que $T_p M = \mathbb{R}^n$.

Definamos la métrica usual:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por } \langle x, y \rangle_p = x^T y.$$

Sea $q \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathcal{X}_q e_i = e_i$$

y así: $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right\rangle_x = e_i^T e_j = \delta_{ij}$$

son diferenciables en \mathbb{R}^n .

Luego \mathbb{R}^n con expresión de la métrica riemanniana $G = Id$, es una variedad riemanniana, esto es, el espacio euclíadiano es un ejemplo particular de variedad riemanniana.

Ejemplo 2. Sea M la variedad definida por el siguiente conjunto:

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

usamos la parametrización identidad, además $T_p M = \mathbb{R}^2$, con $p = (p_1, p_2) \in M$.

Definimos la aplicación:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_p = \frac{1}{p_2} (x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

Sea $q = (q_1, q_2) \in M$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathcal{X}_q e_i = e_i, \text{ para todo } i = 1, 2.$$

Luego $g_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2} \langle e_i, e_j \rangle = \frac{1}{x_2} \delta_{ij}$$

son diferenciables en M . Por tanto M es una variedad riemanniana con la métrica

$$G(p) = \frac{1}{p_2} (Id)_{2 \times 2}.$$

Esta métrica es conocida como la métrica de Lobatchevsky o Poincaré.

Ejemplo 3. Si $M = \mathbb{R}_{++}^n$, y el funcional

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p \mathbb{R}_{++}^n \times T_p \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\langle u, v \rangle_p = u^T G(p) v$$

donde

$$G(p) = \text{diag}(1/(h_i(p_i))^2)$$

y $h_i : \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, entonces

$$g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{(h_i(x_i))^2}$$

son diferenciables en \mathbb{R}_{++}^n . Luego M es una variedad riemanniana con la métrica $G(p)$. Esta métrica generaliza la métrica de Dikin $P^{-2} = \text{diag}(1/p_1^2, 1/p_2^2, \dots, 1/p_n^2)$, usada en métodos de puntos interiores.

Ejemplo 4. Sea la variedad riemanniana $(\mathbb{R}^2, G(p))$, con $\langle u, v \rangle_p = u^T G(p) v$, donde

$$G(p) = \begin{bmatrix} 4p_1^2 + 1 & -2p_1 \\ -2p_1 & 1 \end{bmatrix}$$

es la métrica dada por Udriste, 11.

Geodésicas

Definición 6. Una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica si el campo tangente $\frac{d\alpha}{dt}$ verifica

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = 0.$$

Los siguientes resultados, son aplicaciones para encontrar geodésicas, distancia riemanniana, curvatura del ejemplo 3.

- **Ecuación de la geodésica:** Sea el par $(\mathbb{R}_{++}^n, G(x))$ donde $G(x) = \text{diag}(1/(h_i(x_i))^2)$, entonces la ecuación de la geodésica en el punto $p \in \mathbb{R}_{++}^n$, con dirección $v \in T_p \mathbb{R}_{++}^n = \mathbb{R}^n$ es la curva $x(t)$ que resuelve:

$$\int \frac{1}{h_i(x_i)} dx_i = a_i t + b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde a_i y b_i son constantes reales tales que:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= p_i, \quad i = 1, \dots, n. \\ x'_i(0) &= v_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- **Distancia riemanniana** Sea γ la curva geodésica que une los puntos $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$

$$d^2(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(\left(\int \frac{dx_i}{h_i(\gamma_i)} \right) |_{t=1} - \left(\int \frac{dx_i}{h_i(\gamma_i)} \right) |_{t=0} \right)^2.$$

- La curvatura riemanniana es cero.

- **Gradiente y Hessiano.**

Sea f una función suficientemente regular, entonces

$$\text{grad } f(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x_i)^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$H_x^f = f''(x) + G(x)^{\frac{1}{2}} (G(x)^{\frac{-1}{2}})' \mathcal{F}'(x)$$

donde:

$$\mathcal{F}'(x) = \text{diag} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

$$f''(x) = \text{diag} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \right).$$

En particular, si $h_i(x_i) = x_i^{\frac{r}{2}}$, $r \in \mathbb{R}$ entonces:

$$\nabla_{\mathbb{R}_{++}^n} f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^r \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = X^r f'(x)$$

$$H_x^f = f''(x) + \frac{r}{2} X^{-1} \mathcal{F}'(x).$$

3. El problema de optimización en variedades riemannianas

El problema de interés será resolver el siguiente modelo:

$$\min_{x \in M} f(x) \tag{1}$$

donde M es una variedad riemanniana y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función real definida en M y el término $\min f(x)$ significa encontrar mínimos local o global.

Definición 7. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada semicontinua inferior en $\bar{x} \in M$, si para toda sucesión $\{x^k\}$ de M convergente en \bar{x} se tiene que:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(\bar{x}).$$

Si f es semicontinua inferior para todo $x \in M$, entonces decimos que f es semicontinua inferior en M .

Teorema 1. (Weierstrass) Considera el problema (1), si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontínua inferior y M es compacto, entonces existe un punto de mínimo global.

Establecemos las condiciones de optimalidad para el problema (1).

Teorema 2. (Condición necesaria de primer orden) Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Si x^* es un punto de mínimo local, entonces $\text{grad } f(x^*) = 0$.

Demostración. Tomemos $v \in T_{x^*} M$, una curva geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ con condiciones $\gamma(0) = x^*$, $\gamma'(0) = v$. Sea además una aplicación $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f(\gamma(t))$. Como x^* es punto de mínimo local para f , entonces existe un $\delta > 0$ tal que $h(0) = f(x^*) \leq f(\gamma(t)) = h(t)$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$ lo que implica que en $t = 0$ tenemos punto de mínimo local de h . Por la condición necesaria de primer orden en \mathbb{R} se tiene

$$h'(0) = f(\gamma(0))' = \langle \text{grad } f(x^*), v \rangle = 0.$$

Tomando en particular $v = \text{grad } f(x^*)$ tenemos que $\text{grad } f(x^*) = 0$.

Usando similares argumentos de la demostración anterior podemos probar los siguientes resultados.

Teorema 3. (Condición necesaria de segundo orden). Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Si x^* es punto de mínimo local, entonces $\langle v, H_{x^*}^f v \rangle \geq 0$, $\forall v \in T_{x^*} M$.

Teorema 4. (Condición suficiente de segundo orden). Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Si $x^* \in M$ satisface:

$$i) \text{ grad } f(x^*) = 0.$$

$$ii) H_{x^*}^f \text{ definida positiva.}$$

entonces x^* es punto de mínimo local estricto de f .

Convexidad, Cuasi-convexidad y Pseudoconvexidad

Definición 8. Sea M una variedad riemanniana completa, se dice que $A \subset M$ es totalmente convexo, si para cualquier par de puntos p y q de A (no necesariamente distintos), las geodésicas que unen dichos puntos, están integramente contenidos en A . M será convexa en caso de tener una geodésica minimal tal que una dichos puntos.

Definición 9. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función convexa si su restricción a cualquier geodésica de M es una función convexa en \mathbb{R} , es decir si, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ es geodésica entonces:

$$f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

es convexa.

Teorema 5. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solamente si para todo $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ segmento de geodésica y para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ se verifica

$$f(\gamma((1-\lambda)a + \lambda b)) \leq (1-\lambda)f(\gamma(a)) + \lambda f(\gamma(b)).$$

Teorema 6. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , f es convexa si, y solamente si, para todo $p \in M$ la Hesiana de f en p

$$H_p^f : T_p M \rightarrow T_p M$$

es semidefnida positiva.

Demostración. Sea $v \in T_p M$ y $p \in M$ y la geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

Definiendo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f(\gamma(t))$ sabemos que h es convexa y de clase C^2 . Del análisis convexo clásico tenemos que lo anterior es equivalente a $h'' \geq 0$. Como

$$h'(t) = \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle,$$

se tiene que

$$h''(0) = \langle v, H_p^f v \rangle \geq 0.$$

Recíprocamente, si

$$\langle v, H_p^f v \rangle \geq 0$$

entonces f es convexo, esto es, definiendo $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, entonces se tiene $h = f \circ \gamma$ es convexa.

Definición 10. Sea M una variedad riemanniana y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función real. f es llamada cuasi-convexa en M si para todo $x, y \in M$, $t \in [0, 1]$, se cumple

$$f(\gamma(t)) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

para toda curva geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Teorema 7. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y cuasi-convexa en una variedad riemanniana completa M y sea $x, y \in M$. Si $f(x) \leq f(y)$ entonces

$$\langle \text{grad } f(y), \gamma'(0) \rangle \leq 0,$$

donde $\text{grad } f$ es el gradiente de f y γ es la curva geodésica tal que $\gamma(0) = y$ y $\gamma(1) = x$.

Demostración. Sea la geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = y$ y $\gamma(1) = x$. Definimos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(t) = f \circ \gamma(t)$, usando la aproximación de Taylor de primer orden de h en $t = 0$ tenemos

$$h(t) = h(0) + t h'(0) + \theta(t)$$

con $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta(t)}{t}$. Entonces tenemos

$$f(\gamma(t)) = f(\gamma(0)) + t \langle \text{grad } f(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle + \theta(|t|)$$

como f es cuasi-convexa entonces tenemos el resultado.

Definición 11. Una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es pseudoconvexa si, para todo par de puntos distintos $x, y \in M$ y toda curva geodésica que une x a y ($\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$) tenemos

$$\langle \text{grad } f(x), \gamma'(0) \rangle \geq 0, \text{ entonces } f(y) \geq f(x).$$

Teorema 8. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y pseudoconvexa. Entonces, x^* es un mínimo global de f si, solamente si, $\text{grad } f(x^*) = 0$.

Demostración. Si x^* es mínimo global, entonces es mínimo local, luego por el Teorema 2 se tiene que $\text{grad } f(x^*) = 0$. El recíproco es inmediato basta usar la definición de f ser pseudoconvexa.

4. Método del máximo descenso

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en una variedad riemanniana M . El método de máximo descenso genera una sucesión $\{x^k\}$ dada por

$$x^0 \in M,$$

$$x^{k+1} = \exp_{x^k}(-t_k \text{grad } f(x^k))$$

donde $\exp_{x^k} : T_{x^k} M \rightarrow M$ es la aplicación exponencial y t_k es un parámetro positivo. En el caso particular cuando $M = \mathbb{R}^n$ (el espacio euclíadiano) tenemos que las iteraciones son

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k).$$

Así el método de máximo descenso en variedades riemannianas generaliza el método clásico de máximo descenso en \mathbb{R}^n .

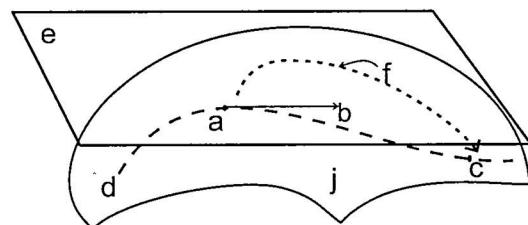


Figura 2. En el gráfico se muestra el procedimiento iterativo del método del máximo descenso sobre una superficie, en \mathbb{R}^3 .

Existen diferentes maneras de escoger el parámetro t_k generando consecuentemente diversos métodos como:

Método A: Gradiente con búsqueda exacta

1. Dado x^k , calcule el $\text{grad } f(x^k)$ en el plano tangente $T_x^k M$;
2. Determine la geodésica $\gamma(t)$, $t \geq 0$ de M que verifique $\gamma(0) = x^k$ y $\gamma'(0) = -\text{grad } f(x^k)$;
3. Minimize $f(\gamma(t))$, $t \geq 0$, obteniendo t_k y hacer:

$$x^{k+1} = \gamma(t_k).$$

Método B: Gradiente con Regla de Armijo

1. Dado x^k , calcule el $\text{grad } f(x^k)$ en el plano tangente $T_x^k M$;
2. Determine la geodésica $\gamma(t)$, $t \geq 0$ de M que verifique $\gamma(0) = x^k$ y $\gamma'(0) = -\text{grad } f(x^k)$;

3. Hacer:

$$t_k := 2^{-i_k},$$

donde i_k es el menor entero positivo tal que:

$$f(\gamma(t)) \leq f(x^k) - \alpha t_k \|\text{grad } f(x^k)\|^2$$

$$\text{y } \alpha \in (0, \frac{1}{2}).$$

El objetivo es mostrar que la sucesión generada por el método del máximo descenso converja cuando f es cuasi-convexa.

- Resultados débiles para f arbitraria. (UDRISTE, 1994; RAPCSÁK, 1997; SMITH 1993).
- Si la Variedad M tiene curvatura no negativa y f es convexa entonces $\{x^k\}$ converge a una solución óptima. (da CRUZ NETO, LIMA, OLIVEIRA, 1998).

Definición 12. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Una sucesión $\{y^k\}$, $k \geq 0$, de X , es cuasi-Fejér convergente al conjunto $U \subset X$, si para cada $u \in U$ existe una sucesión $\{\epsilon_k\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\epsilon_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon_k < +\infty$ y

$$d^2(y^{k+1}, u) \leq d^2(y^k, u) + \epsilon_k.$$

Teorema 9. En un espacio métrico completo (X, d) , si $\{y^k\}$ es cuasi-Fejér convergente para un conjunto $U \subseteq X$, entonces $\{y^k\}$ es limitado. Si además, un punto de acumulación \bar{y} de $\{y^k\}$ pertenece a U , entonces $\{y^k\}$ converge y $\lim_{k \rightarrow +\infty} y^k = \bar{y}$.

Hipótesis 1: $X^* \neq \emptyset$, donde X^* es el conjunto de soluciones óptimas del problema (1).

Definamos

$$U := \{x \in M : f(x) \leq \inf_k f(x^k)\}.$$

En lo que resta, asumiremos que la variedad riemanniana es completa, conexa, finita dimensional y de curvatura seccional no negativa.

Lema 1. Para todo $x \in U$ y todo $t_k > 0$,

$$d^2(x^{k+1}, x) \leq d^2(x^k, x) + t_k^2 \|\text{grad } f(x^k)\|^2.$$

Demostración. Sea $x \in U$ arbitrario. Sea también $\gamma_1 : [0, l_1] \rightarrow M$ la geodésica minimal que une x^k y x con $\gamma(0) = x^k$, $\|\gamma'(0)\| = 1$ y $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica que une x^k y x^{k+1} , esto es $\gamma_2(0) = x^k$, $\gamma_2(1) = x^{k+1}$ con $\gamma'_2(0) = -t_k \text{grad } f(x^k)$, por propiedad de homogeneidad de las geodésicas, γ_2 es reparametrizada, tal que ahora tenemos $\gamma_2 : [0, t_k \|\text{grad } f(x^k)\|] \rightarrow M$, tal que $\gamma_2(t_k \|\text{grad } f(x^k)\|) = x^{k+1}$ y ahora tenemos $\|\gamma'_2(0)\| = 1$. Por el Teorema de la ley de cosenos para variedades riemannianas tenemos:

$$\begin{aligned} d^2(x^{k+1}, x) &\leq d^2(x^k, x) + t_k^2 \|\text{grad } f(x^k)\|^2 + \\ &+ 2t_k d(x^k, x) \langle \text{grad } f(x^k), \gamma'_1(0) \rangle. \end{aligned}$$

Como f es cuasi-convexa y $f(x) \leq f(x^k)$, del Teorema 7 obtenemos que

$$\langle \text{grad } f(x^k), \gamma'_1(0) \rangle \leq 0.$$

Usando este resultado en la desigualdad anterior obtenemos el resultado deseado.

Método con búsqueda de Armijo generalizado

El método de máxima descenso con busca de Armijo genera una sucesión de puntos $\{x^k\}$ dados por

$$x^0 \in M,$$

$$x^{k+1} = \exp_{x^k}(-t_k \text{grad } f(x^k))$$

donde se satisface las siguientes hipótesis:

Hipótesis A2: Existe una función $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

A2.1 Existe $\alpha \in (0, 1)$, $\tau_\alpha > 0$; $t \in (0, \tau_\alpha]$: $\phi(t) \leq \alpha t$.

A2.2 Existe $\beta > 0$, $\tau_\beta \in (0, +\infty]$; para todo $t \in (0, \tau_\beta) \cap \mathbb{R}$: $\phi(t) \geq \beta t^2$.

A2.3 Para todo k , $f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \phi(t_k) \|\text{grad } f(x^k)\|^2$ y $0 < t_k \leq \tau_\beta$.

A2.4 Existe $\gamma > 1$, $\tau_\gamma > 0$; para todo k : $t_k \geq \tau_\gamma$ o existe $\bar{t}_k \in [t_k, \gamma t_k]$: $f(\gamma(\bar{t}_k)) \geq f(x^k) - \phi(\bar{t}_k) \|\text{grad } f(x^k)\|^2$.

Observemos que la hipótesis A2 es satisfecha por la regla de Armijo para $\phi(t) = \alpha t$, $\beta = \alpha$, $\gamma = 2$, $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau_\gamma = 1$.

Proposición 3. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y cuasi-convexa. Suponga que las hipótesis A1 y A2 son satisfechas. Entonces:

$$d^2(x^{k+1}, x) \leq d^2(x^k, x) + t_k^2 \|\text{grad } f(x^k)\|^2,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_k^2 \|\text{grad } f(x^k)\|^2 < +\infty$$

Demostración. De las hipótesis A2.2 y A2.3 tenemos

$$\beta t_k^2 \|\text{grad } f(x^k)\|^2 \leq f(x^k) - f(x^{k+1}) \quad (2)$$

Esto implica que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_k^2 \|\text{grad } f(x^k)\|^2 \leq \frac{f(x^0) - f^*}{\beta} < +\infty.$$

Del Lema 1 y la Definición 12 tenemos el resultado.

Teorema 10. Con las hipótesis de la Proposición anterior, la sucesión $\{x^k\}$ converge para un punto \bar{x} tal que

$$\text{grad } f(\bar{x}) = 0.$$

Demostración. De la Proposición anterior $\{x^k\}$ es quasi-Fejér convergente en U , así $\{x^k\}$ es limitado. Entonces existen \bar{x} y una subsucesión $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ que converge para \bar{x} . De la continuidad de f obtenemos

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} f(x^{k_j}) = f(\bar{x}).$$

Debido a que $\{f(x^k)\}$ es una sucesión no creciente, con una subsucesión que converge para $f(\bar{x})$, toda la sucesión converge para $f(\bar{x})$ y así

$$f(\bar{x}) \leq f(x^k), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que $\bar{x} \in U$. Ahora, del Teorema 9 concluimos que $\{x^k\}$ converge para \bar{x} .

Finalmente, probaremos que $\text{grad } f(\bar{x}) = 0$. Por contradicción, supongamos que $\text{grad } f(\bar{x}) \neq 0$.

Claramente, tenemos que $\text{grad } f(x^k) \rightarrow \text{grad } f(\bar{x}) \neq 0$ y $f(x^k) \rightarrow f(\bar{x})$. Se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = 0. \quad (3)$$

de la Proposición 3. Por otro lado, usando A2.4 y A2.1, tenemos, para k suficientemente grande,

$$f(\exp_{x^k}(-t_k \text{grad } f(x^k))) - f(x^k) \geq -\alpha t_k \|\text{grad } f(x^k)\|^2.$$

Además, del teorema del valor medio, para cada k , existe $t_k^* \in [0, t_k]$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f(\exp_{x^k}(-t_k^* \text{grad } f(x^k))), P_{\gamma_k, 0, t_k^*} \text{grad } f(x^k) \rangle &\geq \\ &\geq \alpha \|\text{grad } f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

donde $P_{\gamma_k, 0, t_k^*}$ es el transporte paralelo a lo largo de la geodésica γ_k tal que $\gamma_k(0) = x^k$ y $\gamma'_k(0) = -\text{grad } f(x^k)$. Ahora, (3) y A2.4 implican que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k^* = 0$. Haciendo $k \rightarrow +\infty$ en la desigualdad anterior y tomando en cuenta la continuidad de $\text{grad } f$, el transporte paralelo, tenemos que $1 \leq \alpha$, lo que contradice A2.1. Por tanto, $\text{grad } f(\bar{x}) = 0$.

Como consecuencia del Teorema 8 y 9 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y pseudoconvexa. Entonces, con las hipótesis A1 y A2, la sucesión $\{x^k\}$ converge para un punto de mínimo global del problema (2).*

Ejemplo 5. *Sea la función $f(x_1, x_2) = (\ln x_1)^2 + (\ln x_2)^2$. cuya simulación se ve en las figuras 2 y 3.*

Esta función f es claramente no convexa en \mathbb{R}^2 con la métrica usual, sin embargo al hacer uso de la métrica $G(p) = \text{diag}(1/(h_i(p_i))^2)$ con $i = 1, 2$, la función en cuestión se transforma en convexa en la variedad \mathbb{R}_{++}^2 , dado que su Hessiano es semidefinida positiva, a saber,

$$H_x^f = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{x_2} \end{bmatrix}.$$

Su ecuación geodésica es

$$\gamma(t) = p_i \exp^{\frac{v_i}{n_i} t}, \quad i = 1, 2$$

y las iteraciones del método de máximo descenso son:

$$x_i^{k+1} = x_i^k \exp\left(t_k x_i^k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, 2.$$

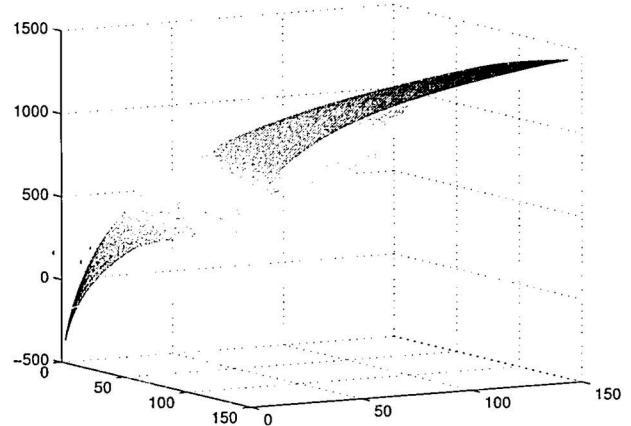


Figura 2. Gráfico de la función f .

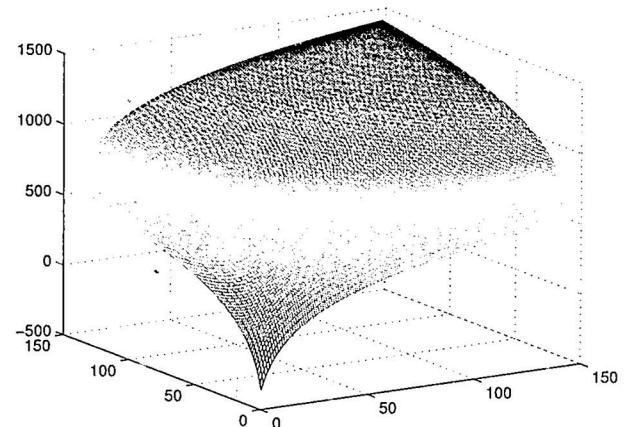


Figura 3. Gráfico de la función f después de una rotación.

5. Conclusiones

La teoría de convergencia global del método de máximo descenso es generalizada para la clase de funciones cuasi-convexas.

Así extendemos el campo de aplicación del método para diversos problemas de optimización donde sus restricciones pueden ser visto como una variedad riemanniana completa de curvatura seccional no negativa.

1. R.S. Burachik, L.M. Grana Drumond, A.N. Iusem and B.F. Svaiter, Full convergence of the steepest descent method with inexact line searches Optimization - 32, 137-145 (1995).
2. J.X da Cruz Neto, L.L. de Lima and P.R. Oliveira, (Geodesic algorithms in riemannian geometry, Balkan Journal of Geometry and its Applications, 3(2), 89-100 1998).
3. M.P. do Carmo, Geometría riemanniana (Brasil, RJ, IMPA, 1992).
4. A.N. Iusem, On the convergence properties of the projected gradient method for convex optimization. Comp. Appl. Math., (22(1), 37-52, 2003)
5. K. Kiwiel and K. Murty, Convergence of the steepest descent method for minimization quasiconvex functions, (JOTA Journal of Optimization Theory and Applications, 89(1), 221-226, 1996).
6. E. Lages Lima, Introdução as variedades diferenciáveis, Universidade do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Porto Alegre, EMMA, 1960.
7. D.G. Luenberger, The gradient projection method along geodesics. (Management Science, 18(11), 620-631, 1972).
8. E.A. Papa Quiroz, E.M. Quispe, P.R. Oliveira, Steepest descent method with a generalized Armijo search for quasiconvex functions on riemannian manifolds, to appear.
9. T. Rapcsák, T.T. Thang, A Class of Polynomial Variable Metric Algorithms for Linear Optimization, (Mathematical Programming, v. 74, pp. 319-331, 1996).
10. S.T. Smith, Optimization techniques on riemannian manifolds. Fields Institute Communications, AMS, Providence, RI, 3, 113-146, 1994).
11. C. Udriste, Convex function and optimization methods on riemannian manifolds. Kluwer Academic Publishers, (1994).

Filters as introductory concepts to topological spaces

Sergio Camiz

Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo

Sapienza Università di Roma

E-mail: sergio.camiz@uniroma1.it

Recibido el 7 de diciembre del 2007; aceptado el 14 de diciembre del 2007

The introduction of topological spaces is proposed through the filters. Indeed, in this way both topology and limits theory are grounded on the same structure with an evident reduction of basic concepts. In the paper, the classical axiomatic systems for the topological spaces are first introduced, with the main concepts of topology, then the definitions of limits are introduced, including the Moore-Smith convergence. Then the proposed pathway is introduced, starting from pre-orders, directed sets, and filters. Eventually, the most important concepts of topological spaces and limits theory are introduced on this basis.

Keywords: Directed sets, filters, limits, pre-orders, topological spaces, topology.

La introducción de los espacios topológicos se propone empleando los filtros como conceptos claves. En realidad, de este modo la topología y la teoría de los límites están basadas en la misma estructura con una reducción evidente de conceptos básicos. En este artículo, los sistemas axiomáticos clásicos para los espacios topológicos se introducen primero, con los conceptos principales de topología, luego se presentan las definiciones de límites, incluyendo la convergencia de Moore-Smith. Luego proponemos el camino a seguir, empezando con pre-órdenes, conjuntos dirigidos, y filtros. Al final, sobre esta base se presentan los conceptos más importantes de topología y de límites.

Palabras claves: Conjuntos dirigidos, Espacios topológicos, filtros, límites, pre-órdenes, topología.

1. Introduction

The introduction of elements of topology is very limited in university studies: it finds some space only in the courses for mathematics careers, where the axioms of open sets are introduced as a basis for the simplest and most parsimonious development of the theory. Unlike the classical presentation of the limits, in which the definition is repeated for every particular case, in this framework, the theory of limits may be introduced through two equivalent general approaches: the *nests* (also known as Moore-Smith convergence, see Moore and Smith [9,1], Kelley [7]) and the *filters* (Cartan [3], Bourbaki [2], Willard [10]), and it must be pointed out that no limits can be defined out of topological spaces. So, it is our opinion that an integrated approach would be advisable.

Indeed, in all applications of mathematics, where the real analysis takes its place, the limits are necessary, so that it would be advisable to introduce explicitly some elements of topology and of limits theory in nearly all disciplines where mathematics are involved. It is our opinion that elements of topology may be easily introduced in all these cases, for a good explanation of all properties of the real numbers and for the theory of limits, provided that it is done in a very simple way. A special comment deserve the studies of mathematics in Architecture, due to the particular *form of mind* (Gardner [5]) of these students, that are supposed to be more susceptible to spacial than to numeric concepts, maybe more than those in other disciplines. For them, some topological concepts, such as connection, classification of pathways on a surface, etc. may take significant meanings in the organization of the space of a construction.

For this reason, I considered the opportunity to introduce in my lectures for the studies of Architecture some

basic concepts of topology. In order to minimize the new concepts to introduce, I decided to start dealing with filters, as structures deriving from the directed sets. In this way, I could develop the concept of convergence from the concept of order, something that seemed easier to be understood, because the directed order is a special case of order or pre-order, resulting in the introduction of filters. Then, I found it straightforward to introduce the topological spaces as spaces with a filter associated to each point, the filter of its neighborhoods. In this way the topology assumes the intuitive meaning of the definition of the proximities of points, again an easy concept.

With this framework, the concepts of convergence and of limit are easily introduced, based on the comparison between filters. In addition, the classical concepts introduced in topology, interior and closure of a set, open and closed sets, compactness, and uniformity may be as well defined, thus providing all the necessary for further studies.

In this paper, I shortly revise the classical introductions to both topological spaces and limits, I introduce filters and filter bases, convergence, and topological spaces through the filters of neighborhoods, and outline how the approach based on the filters can be proposed.

2. Topological spaces

As a foundation of topological spaces it is present common practice (see, e.g., Dixmier [4], Kelley [7], Willard [10]) to introduce first the axioms of the open sets as follows:

Definition: A topological space E is a couple (X, \mathcal{T}) , formed by a set X and a topology \mathcal{T} , that is a family of open subsets of X such that:

O1) $X \in \mathcal{T}$ and $\emptyset \in \mathcal{T}$;

- O2) $T_1, T_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow T_1 \cap T_2 \in \mathcal{T}$;
O3) $\{T_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{T}$.

After these axioms, it is customary to introduce the closed sets as the complement of the open ones:

Definition: A closed set C is the complement to X of an open set. The family of the closed sets is defined as: $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists T \in \mathcal{T} \text{ and } C = X - T$.

By using the properties of the complement and the De Morgan's formulae, it is easy to prove the properties of the closed sets. Viceversa these properties can be used as axioms to define a topological space:

Definition: A topological space E is a couple (X, \mathcal{C}) , formed by a set X and a family \mathcal{C} of closed subsets of X such that:

- C1) $X \in \mathcal{C}$ and $\emptyset \in \mathcal{C}$;
C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$;
C3) $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}$.

The equivalence between O1...O3 and C1...C3 is straightforward. Then, neighborhoods of points are introduced as follows:

Definition: A neighborhood of a point is a set that contains an open set that contains the point.

As a direct consequence of this definition, it follows that:

- an open set is a neighborhood of each point it contains,
- each neighborhood contains an open neighborhood, that is an open subset that is a neighborhood of each point it contains.

This leads to the properties of the neighborhoods. Indeed, these properties may be taken as axioms for the topological spaces, as did Hausdorff [6]), but nowadays abandoned in favor of O1...O3:

Definition: A topological space E is a couple $(X, \{\mathcal{I}_x\}_{x \in X})$ where, for each x , a family \mathcal{I}_x of subsets of X is given, such that the following properties hold:

- N1) $(\forall I)((I \in \mathcal{I}_x) \Rightarrow (x \in I))$;
N2) $(\forall I)((\exists I_x)(I_x \in \mathcal{I}_x) \text{ and } (I_x \subseteq I) \Rightarrow (I \in \mathcal{I}_x))$;
N3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_x \Rightarrow I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}_x$;
N4) $(I \in \mathcal{I}_x) \Rightarrow (\exists J \in \mathcal{I}_x) \text{ such that } (y \in J \Rightarrow J \in \mathcal{I}_y)$.

The definition of neighborhood of a point (and of a set) helps in characterizing the points of the space, in respect to a subset.

Definition: Given a subset S of X , a point x is said to be

- *internal* of S , if there is a neighborhood of x all contained in S . The set of all internal points of a subset S is called the *interior* of S , $I(S)$.
- *adjacent* of S , if for every neighborhood I_x of x , $I_x \cap S \neq \emptyset$, that is in every neighborhood of x there is at least one point of S . The set of all the adjacent points of a subset S is called the *closure* of S , S^C .
- *isolated* of S , if there are neighborhoods I_x of x , $I_x \cap S = \{x\}$, that is neighborhoods of x in which the only point of S is x itself.
- *accumulation point* for S , if for every neighborhood I_x of x , in $I_x \cap S$ there is at least one point of S different from x . The set of all the accumulation points of a subset S is called the *derivate* of S , $D(S)$.
- *boundary point* of both S and $C_X S$, if it adjacent of both sets. The set of all such points is called the *boundary* of S and of $C_X S$, $B(S) = B(C_X S)$.
- *external* of S , if it is internal of the complement of S , $C_X(S)$. The interior of $C_X S$, $I(C_X S)$ is called the *exterior* of S , $E(S)$.

As a consequence, given a subset S , the space X is partitioned into three sets: $X = I(S) \cup B(S) \cup E(S)$.

It is easy to see that the interior of a set S , $I(S)$ is an open set. Indeed, if for every $x \in I(S)$ there is a neighborhood I_x of x all contained in S , there is also an open neighborhood O_x of x all contained in S . So, $I(S) = \bigcup_{x \in I(S)} O_x$ is an open set and so is the external of S , $E(S)$. As a consequence, the closure of S , $S^C = I(S) \cup B(S)$ is closed, as complement of the external $E(S)$.

From these definitions, it follows that an open set is composed by only internal points; on the opposite, as complement of an open set, a closed set is composed by all adjacent points.

Based on these considerations, two operators can be defined in a topological space E : an interior operator and a closure operator, that associate to each subset S either its interior or its closure. Since they are respectively open and closed, it is evident that, whereas the former is the largest open subset of S , the latter is the smallest closed superset of S .

Four properties result for both operators. In particular, Kuratowski ([8], see also Kelley [7]) proposed to adopt the closure operator properties as axioms of the topological spaces as follows:

Definition: A topological space E is a couple (X, C) , formed by a set X and a closure operator $C : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ such that $\forall A, B \in \wp(X)$:

- K1) $\emptyset^C = \emptyset$
K2) $A \subseteq A^C$
K3) $A^{CC} = A^C$
K4) $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$.

If one defines a closed set as a set A such that $A = A^C$, it can be demonstrated the equivalence between the two sets of axioms K1...K4 and C1...C3. Equivalently, by considering the interior operator one can define a topological space as follows:

Definition: A topological space E is a couple (X, I) , formed by a set X and an *interior operator* $I : \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ such that $\forall A, B \in \wp(X)$:

- I1) $X^I = X$
- I2) $A^I \subseteq A$
- I3) $A^{II} = A^I$
- I4) $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I.$

If one defines an open set as a set A such that $A = A^I = A^I$, it can be demonstrated the equivalence between the two sets of axioms I1...I4 and T1...T3.

Albeit the axioms currently adopted for the topological spaces may be preferred for simplicity, it seems that the concept of neighborhood may be more easily understood by a non-experienced user. Indeed, the neighborhood is a true key concept in topology, considering that it plays an important role in the comprehension of both open and closed sets, considered as coincident with their interior and their closure respectively. As well, it plays a key role in the definition of the concept of limit of a function in a topological space and, consequently, of local continuity of a function.

It is for this reason that the introduction of topological spaces via the neighborhoods may be more easily understood. Indeed, one can roughly describe the family of neighborhoods of a point x as a non-empty family of subsets all containing x such that each subset containing a subset in the family and the intersection of two sets in the family belong to the family. This structure, associated to each point can be explained as a generalization of the description of the proximity, in the sense that any pathway that leads from a larger neighborhood to a smaller one of the same point, in the sense that it is contained in the other, leads inevitably towards the point itself. A special mention deserves the fourth axiom N4, since a set that is a neighborhood for each of its points plays the role of homogenizing the definition of the neighborhood families, that otherwise could be different for different points in the space.

3. Introduction to limits theory

Historically, to explain the concept of limit of a function, one starts from the limit of a succession (x_n) , in this way:

Definition: A succession (x_n) of real numbers has limit l :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$$

if, once fixed $\varepsilon > 0$, an integer n_ε may be found such that for every $n > n_\varepsilon$ it results $|y - x_n| < \varepsilon$. For this definition it is necessary to use the ordering of

the natural numbers and the metrics of the real numbers. In order to define the limit of a real function, one has to refer again to the metric properties of the real numbers:

Definition: A real function $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is said to have limit l as x approaches x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

if, once fixed $\varepsilon > 0$, a $\delta_\varepsilon > 0$ can be found such that, for every x with $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ it results $|f(x) - l| < \varepsilon$. Indeed, if either x_0 or l or both are infinite, the definition must be modified accordingly:

- x infinite, l finite: for $x > \delta_\varepsilon$ it results $|f(x) - l| < \varepsilon$
- x finite, l infinite: for $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ it results $f(x) > \varepsilon$
- x infinite, l infinite: for $x > \delta_\varepsilon$ it results $|f(x) - l| < \varepsilon$,
- if infinite is negative, the signs must be changed accordingly.

A multi-dimensional generalization is possible for a function $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, by referencing to the metric of both spaces:

Definition: A real function $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to have limit l as x approaches x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

if, once fixed $\varepsilon > 0$ a $\delta_\varepsilon > 0$ can be found such that, for every x with $\sqrt{\sum_i (x_i - x_{0i})^2} < \delta_\varepsilon$ it results $\sqrt{\sum_i (f(x)_i - l_i)^2} < \varepsilon$.

Some of these definitions can be easily seen as special cases of a more general concept of limit of a function between topological spaces:

Definition: A function between two topological spaces $f : X \rightarrow Y$ has limit $l \in Y$ as x approaches $x_0 \in X$ if for every neighborhood of $I_l \in \mathcal{I}_l$ there is a neighborhood $I_{x_0} \in \mathcal{I}_{x_0}$ such that $f(I_{x_0}) \subseteq I_l$. Indeed, the limits to infinite can be seen in this same way only if one introduces the infinite as an extra point added to the straight line.

To give a geometrical interpretation of the derivative of a function in a point, the concept of secant straight to a curve must be introduced, together with its limit. Now, given a point P_0 on a curve C , we consider a second point P moving along the curve and we define as secant straight P_0P to the curve the straight joining these two points. If the point P approaches P_0 , the secant approaches a limit position, when P reaches P_0 . If this exists, we call it the tangent to C in P_0 .

To define a *Riemann Integral* of a function on an interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^1$, one must consider the set P of the partitions of interval, ordered as such: «a partition δ_1 is equal of finer than δ_2 if the cutting points of δ_1 include those of δ_2 ». Such an ordering gives P the structure of a directed set.

The Riemann integral is then defined as the limit of a function on this directed set.

So, there are many different structures where a limit may be defined. Indeed, a specific structure can be introduced to define the concept of limit, structure that can be applied in every case, since all may be traced back to the limit of a function on a directed set. The Moore-Smith convergence unifies all limits in this way.

Definition: A *nest* in a space X is a function $\{x_a\}_{a \in A}$ where A is an upward directed set.

Definition: If X is a topological space, the nest $\{x_a\}_{a \in A}$ converges to the limit x if for every open neighborhood I_x of x there is an $a_I \in A$ such that $x_a \in I_x$ for every $a \geq a_I$.

Such a definition, that extends the definition of limit of a succession, can be applied to any kind of limit. So, the limit of a function can be defined if the function is defined between an upward directed set and a topological space.

An upward directed set is thus an interesting structure for the introduction of the theory of limits. Indeed, the upward directed set is the weakest structure where, given some elements, one can safely find an element following all the given ones. In the following, we shall see how this property can be formalized differently and used to define a topological space.

4. Directed sets and filter bases

Definition: An *upward directed set* is a set with a *pre-order* (that is, with a reflexive and transitive relation) such that for every two elements a, b there is a common *upper bound*, that is an element c such that $a \leq c$ and $b \leq c$.

Unlike common pre-ordered and ordered sets, an upward directed set has a special property: starting from any two elements and following the given pre-order, one can be sure to reach, sooner or later, the same elements. So, it has a kind of funneling capacity, that may be adopted to describe some spatial organization of the proximities. Indeed, if X is a directed set, we can consider the family \mathcal{B} of subsets

$$B_x = \{y | (y \in X) \wedge (x \leq y)\}$$

such that

- \mathcal{B} is non-empty and every B_x is non-empty;
- every B_x contains all the elements equal or following x ;
- since X is upward directed, given x, y there is a z such that $B_z \subseteq B_x \cap B_y$.

Definition: Given a set X , a *filter base* on X is a family \mathcal{B} of subsets of X such that:

- B1) \mathcal{B} is non-empty and the empty set is not in \mathcal{B} .
- B2) The intersection of two subsets in \mathcal{B} contains a subset in \mathcal{B} ;

So, given an upward directed set X , the family of all B_x is a base filter associated to it.

Viceversa, if in X a filter base \mathcal{B} is defined, given three elements x, y, z we can say that $x \leq_{\mathcal{B}} z$ and $y \leq_{\mathcal{B}} z$ if there exist three subsets $B_x, B_y, B_z \in \mathcal{B}$ with $x \in B_x, y \in B_y$, and $z \in B_z$ and such that $B_z \subseteq B_x \cap B_y$. It is easy to prove that $\leq_{\mathcal{B}}$ is an upward directed pre-order and with it, X becomes an upward directed set.

We can give the filter bases on a same set a pre-order:

Definition: Given two filter bases \mathcal{B} and \mathcal{B}' , we say that \mathcal{B} is *subordinate* of \mathcal{B}' and we write $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}'$ if

$$\forall B_i \in \mathcal{B} \exists B'_j \in \mathcal{B}' \text{ such that } B_i \subseteq B'_j$$

It is evident that \preceq is a pre-order and not an order. Indeed, the antisymmetric property does not hold: as an example, consider in \mathbb{R}^2 a point x and the two filter bases composed respectively by all open circles and all open squares, both centered in x . It is evident that either filter basis is subordinate to the other, although they are not equal. Since we know that both filter bases have the same capacity of funneling toward x , we would prefer to consider equivalent two filter bases if they generate in some way the same structure. This may be done, given a filter base \mathcal{B} on a set X , by considering the family $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ of all subsets of X that contain at least an element of \mathcal{B} . $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ is called the *filter spanned* by \mathcal{B} . It is easy to check that both filter bases in the example span the same filter.

5. Filters

Definition: A *filter* is a family \mathcal{F} of sets such that:

- F1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ and $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- F2) If $F \in \mathcal{F}$ and $G \supseteq F$, then $G \in \mathcal{F}$
- F3) If $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ then $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

A filter \mathcal{F} of subsets of a set X defines the structure of *filtered set* and the set is called the set filtered by \mathcal{F} .

Examples:

- The filter generated by a filter base satisfies these conditions.
- The set composed only by $\{X\}$ is a filter on X .
- The set composed by all subsets of X that contain the element x is a filter.
- If X is infinite, the complements of finite subsets of X form a filter, called *Fréchet filter*.
- In \mathbb{N} the family \mathcal{B} of the encapsulated sets $(1(2(3(4.....(n.....$ that is $I_n = \{i | i \geq n\}$ is a filter base that generates the Fréchet filter in \mathbb{N} .

Consequences:

- A filter is a filter base.
- Every filter base spans a filter.

- A filter may be spanned by more than one (equivalent) filter base: consider in \mathbb{R}^2 the filter bases of circles and squares centered in x . Both span the same filter, composed by all sets containing either a circle or a square centered on x , since every square contains a circle and may be embedded in a circle.

The property F3 can be stated by saying that a filter is closed in respect to the finite intersection. On the opposite, a filter may not be closed in respect to the infinite intersection. In particular, the intersection of all elements of a filter may be empty or not.

Definition: We call *heart* of the filter \mathcal{F} , the set $H(\mathcal{F}) = \cap_{F \in \mathcal{F}} F$.

Based on the heart, we propose the following classification for the filters:

Definition: A filter \mathcal{F} is

- *free* if $H(\mathcal{F}) = \emptyset$.
- *floating* if $H(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ and $H(\mathcal{F}) \notin \mathcal{F}$.
- *fixed* if $H(\mathcal{F}) \in \mathcal{F}$.

Examples: the Fréchet filter on \mathbb{N} is free. The heart of the filter spanned on \mathbb{R}^2 by the open circles with center in a point x and radius $rho > 0$ is $\{x\}$ itself, so, it is floating; the filter of all subsets containing or equal to a given subset is fixed.

Definition: Given two filters \mathcal{F} and \mathcal{F}' on the same set X , we say that $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$, \mathcal{F}' is *finer* than \mathcal{F} , and that \mathcal{F} is *coarser* than \mathcal{F}' , if $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

The set of all filters on X is partially ordered by this relation. Since X is contained in all filters and is itself a filter, it is coarser than any other filter on X , so that the set of all filters on X is a downward directed set.

Example: Given two disjoint sets A and B and a common superset C , the fixed filter of $\mathcal{F}_C = \{S | S \supseteq C\}$ is coarser of both fixed filters $\mathcal{F}_A = \{S | S \supseteq A\}$ and $\mathcal{F}_B = \{S | S \supseteq B\}$. Instead, \mathcal{F}_A and \mathcal{F}_B are not comparable.

Definition: An *ultrafilter* is a filter strictly finer than all other comparable with it. It is a maximal element of the set of all filters on X .

Indeed, the filter of all subsets containing the same element $x \in X$ is an ultrafilter. It can be shown that, given a filter, there is always an ultrafilter finer than it, but if a set X has more than one element, there are more than one ultrafilter, clearly not comparable. Thus, the set of all filters on a set X is not upward directed.

If we consider the onward order associated to either a filter or a filter base, a relation between elements of X can be interpreted as follows: if $x \leq_{\mathcal{F}} y$, then y is closer to the heart of the filter \mathcal{F} than x .

If we consider an oriented graph $G(X, E_{\mathcal{F}})$ on the set X , associated to this filtering order, so that $(x, y) \in E_{\mathcal{F}} \iff x \leq_{\mathcal{F}} y$, we can see that the function of all

oriented paths is to funnel towards the heart of \mathcal{F} . As well, a rough estimation of a i ; $\frac{1}{2}$ distance i ; $\frac{1}{2}$ of an element $x \in X$ from $H(\mathcal{F})$ may be obtained by considering the elements following it or by comparing it with other elements distance.

6. Filter bases, filters, and functions

Proposition: If $f : X \rightarrow Y$ is a function, \mathcal{B} is a filter base on X and \mathcal{F} a filter on X , then both $f(\mathcal{B})$ and $f(\mathcal{F})$ are filter bases on Y .

Indeed, $\forall A, B \subseteq X, f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

So, ordinary functions are morphisms for the structure of filter base, whereas they are not morphisms for the structure of filter.

A morphism for the structure of filter should be a function such that $\forall A, B \subseteq X, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. This would mean that no element in the symmetric difference $A \Delta B$ would have image in $f(A \cap B)$.

Clearly, the bijections are isomorphisms for both structures.

7. Filters and topological spaces

Definition: A topological space is a triple $(X, \{\mathcal{F}_x\}, f)$ composed by a set X , a family of filters $\{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ and a function $f : X \rightarrow \mathcal{F}_x$ that associates to each point $x \in X$ a filter \mathcal{F}_x , called *filter of the neighborhoods of x*, such that:

FT1) $\forall x, x \in H(\mathcal{F}_x)$;

FT2) $\forall V \in \mathcal{F}_x$ there exists $W \subseteq V$, such that for every $y \in W, W \in \mathcal{F}_y$.

The filters of neighborhoods are thus either floating or fixed, the structure of filter of the neighborhoods corresponds to the axioms N2...N3 and the axiom FT2 corresponds to N4. Consequently, this definition is equivalent to all other definitions given in section 2.

With such a definition of topological space, it is better put in evidence the meaning of the neighborhood filters, as a structure that funnels towards the elements in the heart of the filter. As well, the function of the axiom FT2 is to uniform the way in which the filters are chosen as neighborhood systems for each point. Indeed, without FT2 two different neighborhood filters may be totally different. Instead, FT2 stresses the importance of the open sets in the definition of a topological space, so that one can eventually understand why they are commonly chosen as the main structures in the topological spaces. It is straightforward to define an open set O of X as a set that is a neighborhood for each of its points, that is such that

$$(\forall x)(x \in O \Rightarrow O \in \mathcal{F}_x)$$

Based on this definition, we can say that the set W is an open set, since it is a neighborhood for all its points. In this way, the role of open sets in the definition of the topology may be put in evidence. Indeed, we can postpone this definition, once that we have characterized the points of a set S , based on the topology defined through the filters:

Definition: Given a subset S of a topological space, a point x is said to be:

- *internal* of S , if $S \in \mathcal{F}_x$, that is there is a neighborhood of x all contained in S . The set of all internal points of a subset S is called the *interior* of S , $I(S)$.
- *adjacent* of S , if for every neighborhood $F_x \in \mathcal{F}_x$, $F_x \cap S \neq \emptyset$, that is in every neighborhood of x there is at least one point of S . The set of all the adjacent points of a subset S is called the *closure* of S , S^C .
- *isolated* of S , if there are neighborhoods $F_x \in \mathcal{F}_x$, $F_x \cap S = \{x\}$, that is neighborhoods of x in which the only point of S is x itself.
- *accumulation point* for S , if for every neighborhood $F_x \in \mathcal{F}_x$, in $F_x \cap S$ there is at least one point of S different from x . The set of all the accumulation points of a subset S is called the *derivate* of S , $D(S)$.
- *boundary point* of S and of $C_X S$, if it adjacent of both sets. The set of all such points is called the *boundary* of S and of $C_X S$, $B(S) = B(C_X S)$.
- *external* of S , if it is internal of the complement of S , $C_X(S)$. The interior of $C_X S$, $I(C_X S)$ is called the *exterior* of S , $E(S)$.

Definition: In a topological space, a subset is said to be:

- *open* if it is coincident with its interior, that is it is composed by only internal points;
- *closed* if it is coincident with its closure, that is it contains all its adjacent points.

Proposition: Given a subset S of a topological space X , it results:

- 1) $X = I(S) \cup B(S) \cup E(S)$;
- 2) both $I(S)$ and $E(S)$ are open;
- 3) both $I(S) \cup B(S) = S^C$ and $B(S) \cup E(S) = (C_X S)^C$ are closed;
- 4) the complement of an open set is a closed set and viceversa;
- 5) $B(S) = S^C \cap (C_X S)^C$ is closed.

From the axioms FT1...FT2 and this proposition, all the main characters of topological spaces are easily given, with a special attention to the main characteristics of both open and closed sets. As a consequence, the axiom set O1...O3 may be easily proved. Indeed, one can as well define a topological space starting from a filter base, as usually we start with a local base for the neighborhoods. Thus, the topology of a straight line may be introduced by the open intervals, a plane topology may be introduced by the circles, the squares, etc... Nevertheless it must be remarked that in a topological space filters may be defined that are not neighborhoods.

Consider, in particular, the image of a succession of rational numbers on the straight line \mathbb{R}^1 , $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$. To it, a filter is associated, spanned by the filter base $\{I_n\}$ composed by the sets $I_n = \{1/m | m \geq n\}$, but this is not a neighborhood filter. Indeed, it is on the relation among filters and neighborhood filters that we can ground the limit theory.

8. Theory of limits

We remarked that a limit theory can be developed if we have both a filter and a topological space.

Definition: in a topological space X we say that a point a is *adherent to the filter or the filter base \mathcal{F}* if for every $F \in \mathcal{F}$ and every neighborhood $I \in \mathcal{F}_a$, $F \cap I \neq \emptyset$.

Definition: in a topological space X we say that a filter \mathcal{F} converges to l if \mathcal{F} is finer than \mathcal{F}_l , the neighborhoods filter of l .

Definition: a filter base \mathcal{B} converges to l if it is subordinate to the neighborhoods filter \mathcal{F}_l , or equivalently, if the filter it spans is finer than the neighborhoods filter \mathcal{F}_l .

It is easy to see that the latter two definitions are equivalent, considering a filter base and its generated filter.

Examples: In a topological space X , any non-free filter \mathcal{F} , that is such that $H(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ converges to every point $x \in H(\mathcal{F})$.

Indeed, the convergence to a unique point of a non-free filter does not depend on the filter but on the topology of X .

Definition: A *Hausdorff* or *T2* space is a topological space where, for each two points x, y there exist two neighborhoods I_x and I_y such that $I_x \cap I_y = \emptyset$.

It is easy to show that:

Proposition: A topological space is Hausdorff if and only if every convergent filter converges to only one point.

Whereas non-free filters certainly converge to at least one point, it is not necessarily so for free-filters. Nevertheless, it is customary, in the case of a *divergent* filter, such as the Fréchet filter on \mathbb{N} , to put ∞ into its heart. As a consequence, the Fréchet filter becomes the filter of the neighborhoods of ∞ , so that one can say that it converges to ∞ . The same can be done on the set of real numbers \mathbb{R} , with the inclusion of both $-\infty$ and $+\infty$.

It is interesting to remark that the concept of adherence and convergence of filters and filter bases are independent on functions. In this way, all what strictly concerns convergence may be discussed prior the introduction of the concept of limit. This is by no means an advantage of filters in respect to nests, where the two concepts are confused.

Definition: Let f a function from a set X^f filtered by the filter \mathcal{F} to a topological space Y . We say that a is *adherent to f according to \mathcal{F}* if it is adherent to the filter base $f(\mathcal{F})$. We say that l is the *limit of f according to \mathcal{F}* if the filter base $f(\mathcal{F})$ converges to l .

Indeed, l is the limit of f according to \mathcal{F} if and only if the filter generated by $f(\mathcal{F})$ converges to l . Clearly, the limit is unique if Y is Hausdorff.

It is very easily proven that all definitions of limit introduced in the section 3 can be restated in terms of either filter or filter bases.

9. Conclusiones

In this paper, the introduction of topological spaces based on the previously introduced concepts of pre-order, directed sets, and filters is proposed, in order to economize concepts and to better explain the meaning of topology.

Indeed, by proposing the concept of filter, a generalization of the idea of proximity to a point is given, based on the funneling derived by the directed order associated to the filter. In addition, the definition of topological spaces based on the filters of neighborhoods of points gets simpler the comprehension of the difference between topologies based on the different definition of the proximities. Proceeding in this way, both definitions of open and closed sets, as coincident respectively with their interior or their closure, become more intuitive and understand-

able. In addition, the presentation of the open sets as special neighborhoods, can be a good explanation of their role in the topological spaces and of their importance.

By using the filters, the topological spaces, the convergence, and the limits, can be introduced on the same basis, with an important economy in term of number of used concepts. In addition, in this way it is more clear the meaning of the topological spaces and the meaning of limit.

As a last remark, we can say that the separation between convergence and limits allows the use of filters and of their convergence as bases even for other important concepts in topology, like compactness, Cauchy sequences and filters, and uniform spaces, something that could be illustrated in a further paper.

Acknowledgements

This paper was developed on the basis of the conference held in Lima, October 2007, in occasion of the "XXV Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana" and granted by the Universidad Nacionál de Ingenieria de Lima, in the framework of the bilateral agreement with Sapienza Università di Roma.

1. G. Birkhoff, Moore-Smith Convergence in General Topology. *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., 38(1), 39-56 (1937).
2. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques: Topologie Générale* (Hermann, Paris, 1965).
3. H. Cartan, Théorie des filtres. *CR Acad. Paris*, 205, 595-598 (1937).
4. J. Dixmier, *Topologie Générale* (Presses Universitaires de France, Paris, 1981).
5. H. Gardner, *Frames of Mind - The Theory of Multiple Intelligences* (Basic Books, New York, 1982).
6. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (von Veit, Leipzig, 1914).
7. J.L. Kelley, *General Topology* (Van Nostrand, New York, 1965).
8. C. Kuratowski, *Topologie I* (Monografje Matematyczne, Warszawa-Lwow, 1933).
9. E.H. Moore and H.L. Smith, A general theory of limits. *American Journal of Mathematics*, 44, 102-121 (1922).
10. S. Willard, *General Topology* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970).
11. www.planetmath.org, several voices.
12. www.wikipedia.org, several voices.

Mathematical Entanglement

Holger G. Valqui
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería

Recibido el 03 julio del 2007; aceptado el 24 de julio del 2007

The tensor product of the states of two twin particles can be written in an entangled form, which is what was done in the EPR paper. In the following paper I show that it is always possible to write a common state function for two totally independent physical systems in an entangled form. But such entanglement is only a mathematical one, which does not imply a physical entanglement. This fact invalidates the claim[3] which states that because the state of a pair of particles is expressed in a mathematical entangled form, then a physical entanglement should follow. Finally I show that the (correct) mathematical reduction of the two-subscript-coefficients to one-subscript-coefficients does not produce a physical entanglement.

Keywords: Entanglement, twin particles, tensor product.

El producto tensorial de los estados de dos partículas gemelas puede ser escrito en forma enlazada (entangled), que es lo que se hizo en el artículo EPR. En el presente artículo muestro que, para dos sistemas físicos totalmente independientes, siempre es posible escribir, el estado común a dichos sistemas, como estados enlazados. Pero tal enlazamiento es puramente matemático, y - por supuesto - no implica un enlazamiento físico. Este resultado invalida la afirmación (ver, por ejemplo [3]) según la cual un estado compuesto expresado en forma matemáticamente enlazada, implica también un enlazamiento físico de los sistemas considerados. También muestro que la reducción matemática del coeficiente con dos subíndices, de un sistema compuesto, a un coeficiente con un único índice no produce un enlazamiento físico de los sistemas.

Palabras claves: Entanglement, partículas gemelas, producto tensorial.

1. Introduction

According to the quantum model, if at instant t you measure an observable property of a physical system and get the (real) value ε , then the state of the system, Ψ_t , changes suddenly to a state ϕ , which is a proper state of the operator Ω representing the measured property, where ε is the corresponding proper value, i.e. $\Omega\Psi = \varepsilon\Psi$.

On the other hand, if we have two physical systems, PS_1 and PS_2 , which do not interact with each other, we can *mathematically* handle them as one composite system utilizing the tensor product of the base states of PS_1 and PS_2 of such systems. If $\{u_j\}$ is some set of base states of PS_1 , and $\{v_k\}$ is some set of base states of PS_2 then the general state of the composite system can be written as

$$\Phi(t, \vec{x}_1, \vec{x}_2) = \sum_{jk} \beta_{jk}(t) u_j(\vec{x}_1) \otimes v_k(\vec{x}_2)$$

or

$$\Phi_t = \sum_{jk} \beta_{jk}(t) u_j \otimes v_k$$

where β_{jk} are complex numbers which characterize the compound state. But here we have to take in account that any pair of base states of PS_1 and PS_2 can be used to represent the compound state Φ_t , and for each case there is a set of appropriate numerical coefficients.

If we now measure an observable property of PS_1 , represented by operator Ω , and get the numerical value ε_1 , then the state of PS_1 will suddenly change to ϕ_1 , such that $\Omega\phi_1 = \varepsilon_1\phi_1$. Since both physical systems are independent of each other, we are confident that the measurement will not modify the state of PS_2 . To see that, we consider as base states the proper states of operator Ω in each system, $\{\phi_m\}$ and $\{\varphi_n\}$, that is

$$\Phi_t = \sum_{mn} \alpha_{mn}(t) \phi_m \otimes \varphi_n.$$

Now if the measurement gives the result ε_p , that is, the state function of PS_1 has changed to ϕ_p , we can write

$$\Phi_t = \sum_{mn} \alpha_{mn}(t) \phi_m \otimes \varphi_n \rightarrow \sum_n \alpha_{pn}(t) \phi_p \otimes \varphi_n,$$

that is

$$\Phi_t \rightarrow \phi_p \otimes \sum_n \alpha_{pn}(t) \varphi_n$$

where the state of PS_2 is a general linear combination of the corresponding base states, φ_n , as it should be.

It is convenient to mention that the expression

$$\Phi_t = \sum_{mn} \alpha_{mn}(t) \phi_m \otimes \varphi_n$$

where ϕ_m and φ_n are the proper states of operator Ω only has an explanatory reason, and has nothing to do with the result of the measurement.

2. Equivalence between two independent physical system and one compound physical system

Let us consider two particles (or two physical systems), $P1$ and $P2$, very far apart and independent of each other, each one subjected to a particular potential. Let $\Psi_1(\vec{x}_1, t)$ and $\Psi_2(\vec{x}_2, t)$ be the state functions satisfying the corresponding Schrödinger equations

$$H_1 \Psi_1 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = 0 \quad H_2 \Psi_2 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

where

$$H_j = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_j^2 + V_j(\vec{x}_j)$$

operates on $\Psi_j(\vec{x}_j, t)$, $j = 1, 2$.

As we know, the general solution for each particle has the form:

$$\Psi_j(\vec{x}_j, t) = \sum_k A_{jk} \varphi_{jk}(\vec{x}_j) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{jk} t\right)$$

where A_{jk} are two sets of arbitrary constants, and

$$H_j \varphi_{jk} = E_{jk} \varphi_{jk}, \quad j = 1, 2.$$

Now we construct the function

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = & \\ & \sum_{pq} B_{pq} \varphi_{1p}(\vec{x}_1) \varphi_{2q}(\vec{x}_2) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_{1p} + E_{2q}) t\right) \end{aligned}$$

and one can directly verify that it satisfies both equations (1):

$$H_1 \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad H_2 \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

where the H_j operates only on the corresponding function so that, for example,

$$H_1 \varphi_{1p} \varphi_{2q} = E_{1p} \varphi_{1p} \varphi_{2q}, \quad H_2 \varphi_{1p} \varphi_{2q} = E_{2q} \varphi_{1p} \varphi_{2q}$$

We consequently might consider that $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ is the joint function state of particle P1 and particle P2.

Furthermore, if we define the sum-operator $H = H_1 + H_2$, we can verify that

$$H \varphi_{1p} \varphi_{2q} = (E_{1p} + E_{2q}) \varphi_{1p} \varphi_{2q}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_{1p} + E_{2q}) t\right) = & \\ -\frac{i}{\hbar} (E_{1p} + E_{2q}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_{1p} + E_{2q}) t\right) \end{aligned} \quad (2)$$

which means that the function $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ satisfies the Schrödinger equation:

$$H \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

So we can conclude that:

$$\begin{aligned} H_1 \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad \text{and} \quad H_2 \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \\ \Rightarrow H \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

But we can proceed *in the opposite way* as well:

Let be

$$H \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

where $H = H_1 + H_2$, $V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = V_1(\vec{x}_1) + V_2(\vec{x}_2)$ and $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ is the general state function for the two particles.

Note that because particles P1 and P2 are independent of each other there does not exist an interaction-potential function which connects both particles. This allows us to express state $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ as a product of two functions, each corresponding to one of the particles:

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \phi_1(\vec{x}_1, t) \phi_2(\vec{x}_2, t)$$

Inserting this product into the given equation we get:

$$\phi_1 H_2 \phi_2 + \phi_2 H_1 \phi_1 + \frac{\hbar}{i} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) = 0$$

or

$$\frac{1}{\phi_2} \left(H_2 \phi_2 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) + \frac{1}{\phi_1} \left(H_1 \phi_1 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) = 0,$$

but, because of the form of the potential functions, the first summand of the above sum does not depend on \vec{x}_2 and the second summand does not depend on \vec{x}_1 ; consequently both summands can be only dependent on a function of the time variable, which we can choose to be a constant, E^0 (we can make this choice because we are considering potential functions which are time independent), that is

$$H_1 \phi_1 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = E^0 \phi_1 \quad H_2 \phi_2 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -E^0 \phi_2.$$

Multiplying the first equation by $g(t) = \exp(-iE^0 t/\hbar)$, the second by $g^*(t) = \exp(iE^0 t/\hbar)$, and taking in account that

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E^0 g(t); \quad \frac{dg^*(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} E^0 g^*(t)$$

we have

$$H_1 g \phi_1 + \frac{\hbar}{i} g \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - E^0 g \phi_1 = 0$$

$$H_2 g^* \phi_2 + \frac{\hbar}{i} g^* \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + E^0 g^* \phi_2 = 0.$$

or

$$H_1(g \phi_1) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}(g \phi_1) = 0$$

$$H_2(g^* \phi_2) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}(g^* \phi_2) = 0.$$

but $|g \phi_1| = |\phi_1|$, $|g^* \phi_2| = |\phi_2|$, so physically $g \phi_1$ and $g^* \phi_2$ have the same meaning as ϕ_1 and ϕ_2 , respectively. Furthermore, with

$$\Psi_1 \equiv g \phi_1, \quad \Psi_2 \equiv g^* \phi_2,$$

we have

$$\Psi_1 \Psi_2 = \phi_1 \phi_2;$$

this time we can write,

$$H \Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$H_1\Psi_1 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = 0 \quad \text{and} \quad H_2\Psi_2 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Consequently from (4) and (5), we are allowed to write the logical equivalence:

$$H\Psi + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$H_1\Psi_1 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = 0 \quad H_2\Psi_2 + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

with

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(\vec{x}_1, t) &= \sum_k A_{1k} \varphi_{1k}(\vec{x}_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{1k} t\right), \\ \Psi_2(\vec{x}_2, t) &= \sum_k A_{2k} \varphi_{2k}(\vec{x}_2) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_{2k} t\right), \\ \Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) &= \sum_{pq} B_{pq} \varphi_{1p}(\vec{x}_1) \varphi_{2q}(\vec{x}_2) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (E_{1p} + E_{2q}) t\right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. Mathematical entanglement by assumption

Now suppose that at instant t we are going to measure the energy of particle $P1$. According to the theory of QM, by each singular measurement on $P1$ we get one of the proper values of the energy, E_{1n} , and the state of the particle $P1$ has (suddenly) changed to the proper state ϕ_{1n} . Does this measurement on particle $P1$ have some effect on the state of particle $P2$? The answer to this question from a physical point of view is clearly negative. But we could try to get a different, mathematical answer. With that purpose we use the tensor representation (6) where we choose coefficients of the form $B_{pq} = C_p \delta_{pq}$ (In their EPR paper, the authors have chosen $B_{qp} = 1$). So we can write,

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \sum_k C_k \varphi_{1k}(\vec{x}_1) \varphi_{2k}(\vec{x}_2) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_{1k} + E_{2k}) t\right)$$

Now as a consequence of the measurement of the energy of particle $P1$ the state function collapses:

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \longrightarrow C_n \varphi_{1n}(\vec{x}_1) \varphi_{2n}(\vec{x}_2) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (E_{1n} + E_{2n}) t\right)$$

This time we apparently get the extraordinary result that particle $P2$ has, too, changed its state, to φ_{2n} . But

this result has no physical significance. Then we have assumed without proper justification (like the authors of the EPR paper) that the coefficients of the general combination should have a particular form. In a physical problem the form of the coefficients should be determined by the initial conditions.

4. Mathematical entanglement by diagonalization¹

On the other hand, it is always possible to reduce the two-subscript-coefficients of the tensor product's linear combination to another linear combination with one-subscript-coefficients[3, 4].

Here one has to consider the following:

The two-subscript-coefficients, B_{pq} , in (7), are coefficients of a tensor product of two sets of proper states corresponding to two energy operators, one for each physical system. But in the case of the (resulting) one-subscript-coefficients, the two new states of the tensor products are no more directly referred to such (energy) observables, and so, when a measurement is made, neither of such states appears after the state's collapse. This can be deduced from:

Theorem[4]: Let A be a $m \times n$ -matrix, then there exist three matrices: an orthogonal $m \times m$ -matrix V , a diagonal $m \times n$ -matrix M and an orthogonal $n \times n$ -matrix U such that

$$A = V M U^+ \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} &= \sum_{rs} v_{jr} m_{rs} u_{ks}^* = \\ &\sum_r \mu_r v_{jr} \delta_{rs} u_{ks}^* = \sum_r \mu_r v_{jr} u_{kr}^*. \end{aligned}$$

Thus, for the compound state we can write:

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{jk} \alpha_{jk} \varphi_j \otimes \phi_k = \\ &\sum_r \mu_r \left(\sum_j v_{jr} \varphi_j \right) \otimes \left(\sum_k u_{kr}^* \phi_k \right) = \\ &\sum_r \mu_r \varphi_r^0 \otimes \phi_r^0 \end{aligned}$$

Now, if by the measurement on particle $P1$ we get the observable value ε_p , corresponding to the state φ_p , this means that

$$\Psi \rightarrow \sum_r \mu_r (v_{pr} \varphi_p) \otimes \phi_r = \varphi_p \sum_r \mu_r v_{pr} \phi_r^0$$

That is

$$\Psi \rightarrow \varphi_p \sum_r \mu_r v_{pr} (u_{kr}^* \phi_k) = \varphi_p \otimes \left(\sum_k \alpha_{pk} \phi_k \right)$$

as it should be.

¹Let A and B be two operators for two physical observables of a physical system, and let χ_j , η_k be the corresponding proper states, that is, $A\chi_j = \alpha_j \chi_j$, $B\eta_k = \beta_k \eta_k$. Now suppose that at instant t the state of the system can be written as $\Psi(t) = \sum_j a_j(t) \chi_j$, and in that same instant you measure the observable represented by B , getting the result β_m . To which state has collapsed the previous state $\Psi(t)$ of the system? As you can see, it has no significance that the previous state was expressed as a linear combination of the A 's states; the result is simply $\Psi \rightarrow \beta_m \eta_m$.

5. Conclusiones

The general linear combination of the (tensor) products of the proper states corresponding to some particular operator (for example, the energy operator) is not entangled; its coefficients have two indexes.

This general linear combination can (without justification, as in the EPR case) be written in an entangled

form, but this entanglement is only a mathematical one.

We can choose to mathematically transform the two-subscript-coefficients of the tensor products to coefficients with only one subscript, but this implies a change of the factor-states, which will no longer be proper states of the observable in consideration. So this one-subscript linear combination does not mean - like the previous cases - a physical entangled state.

-
- 1. Einstein, Podolsky, Rosen, Phy. Rev. 47, 777 (1935)
 - 2. H.G. Valqui , El error inicial, Revciuni 7, 1, Febrero 2003.
 - 3. Artur Ekert, Peter Knight, Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition, Am.J.Phys 63(5) May 1995.
 - 4. H.G. Valqui, Descomposición de una matriz rectangular, to be published.

Cinco Proyectos de Rayos Cósmicos para el Perú

D. Wahl^{†‡†}, J. Bellido[§], J. Chirinos[§]

[†]*Radio Observatorio de Jicamarca, Instituto Geofísico del Perú*

[‡]*Instituto de Física, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú*

[§]*Department of Physics, Pennsylvania State University, EE UU*

[§]*Department of Physics, Michigan Technological University, EE.UU*

Recibido el 03 diciembre del 2007; aceptado el 17 de diciembre del 2007

El estudio de los rayos cósmicos es una de las más exitosas aventuras científicas del último siglo. Es un tópico que trasciende las barreras disciplinarias tradicionales teniendo repercusiones para astrofísica, física de partículas, geofísica, comunicaciones para mencionar solo los mayores. Históricamente el Perú, y en particular el Instituto Geofísico a través del observatorio de Huancayo tenía una participación activa en el campo, aunque en las últimas décadas esta actividad desapareció. Sin embargo, la perspectiva para esta área en el Perú es buena, la diversidad de terrenos, su posición en el hemisferio sur y cerca del Ecuador y su historia hacen que sea un lugar natural para la investigación en este campo. Este artículo presenta ideas de proyectos en rayos cósmicos que se podrían desarrollar en el Perú, basado en los últimos reportes de la conferencia internacional de rayos cósmicos (30th ICRC, Mérida, México). Está destinado a investigadores de universidades peruanas buscando aprovechar las nuevas oportunidades que se están presentando para la investigación en el país.

Palabras claves: rayos cósmicos, Perú, Física experimental, astrofísica.

The study of cosmic rays is one of the most successful scientific adventures of the last century. It is a discipline that transcends traditional barriers, with implications for astrophysics, particle physics, geophysics and communications, to name only the largest. Historically Peru, and in particular the Peruvian Institute for Geophysics through the Huancayo observatory has had an active participation in the area, but this activity disappeared. The outlook however is good; high altitudes, its position in the southern hemisphere and near the equator and its history make it a natural place for research in this field. This article presents ideas for five projects in cosmic rays that could be developed in Peru, based on recent reports of the international conference of cosmic rays (30th ICRC, Merida, Mexico). It is intended for researchers from Peruvian universities seeking to take advantage of new opportunities that are being presented for research in the country.

Keywords: cosmic rays, Perú, experimental Physics, Astrophysics.

1. Introducción

Se denominan rayos cósmicos a las partículas producidas por mecanismos astronómicos como por ejemplo en núcleos activos de galaxias, explosiones de supernovas, en el sol etc. Algunas de estas partículas viajan hasta llegar a nuestro planeta y nos brindan información sobre procesos fundamentales de la física y del universo. Los rayos cósmicos fueron descubiertos en 1913 por Victor Hess, cuando subió en un aerostato con un detector de partículas y notó que el flujo de partículas que medía aumentaba con la altura, confirmando el origen extraterrestre de esta radiación. Desde esta época, el estudio de los rayos cósmicos llevó a numerosos descubrimientos como por ejemplo la antimateria, el muón, el mesón pi entre otros y ha sido reconocido a su vez con la obtención de numerosos premios Nobel. El campo se distingue también por la prioridad histórica que se da a sus experimentos, el primer experimento llevado al espacio fue un experimento de rayos cósmicos en Soyuz II, y los más grandes experimentos del mundo en tamaño son de rayos cósmicos (el observatorio Icecube en Antártica que mide 1 km³ y el observatorio Pierre Auger en Argentina que mide 3000 km²).

Durante los casi cien años de estudios sobre los rayos cósmicos, se ha medido el flujo de los rayos cósmicos que llegan a la tierra con respecto a su energía, este resultado es mostrado en la Fig.1. La energía de estos rayos está

ligada con su origen. Según su origen los rayos cósmicos pueden ser: solares, galácticos y extra-galácticos.

Rayos cósmicos solares: Como lo indica su nombre, los rayos cósmicos solares provienen del sol. Los rayos cósmicos solares son generalmente de bajas energías ($E < 100\text{KeV}$) aunque ocasionalmente, eventos esporádicos pueden producir partículas del orden de GeV. El flujo promedio de los rayos cósmicos solares varía con la actividad del sol, entre otros, y esta anti-correlacionado con el número de manchas solares. En su mayoría, los rayos cósmicos solares son átomos con una composición similar a la del sol.

Rayos cósmicos galácticos: Se consideran como rayos cósmicos galácticos a todas las partículas aceleradas dentro de nuestra galaxia y que no provienen del sol. Dependiendo de la carga del rayo cósmico, este puede ser acelerado hasta energías de 10^{15} eV si se trata de protones (p) o núcleos atómicos livianos y hasta 10^{17} eV si se trata de núcleos atómicos más pesados (Fe). Este límite en energía proviene de que se estima que esta es la energía con la cual los rayos cósmicos pueden escapar al campo magnético de la galaxia y este límite depende de la carga del rayo cósmico. Generalmente, se considera que los rayos cósmicos galácticos provienen de explosiones de supernovas.

Rayos cósmicos extra-galácticos: Se denominan rayos cósmicos extra-galácticos a aquellos que fueron aceler-

¹Contacto: cosmicrays@jro.igp.edu.pe

ados fuera de nuestra galaxia. Todavía se desconoce el origen y el rango de energía exacto. Tradicionalmente se cree que los rayos cósmicos ultra energéticos ($E > 10^{18}$ eV) son de origen extra-galáctico. El mecanismo estándar de aceleración de rayos cósmicos (aceleración Fermi) tiene dificultades para explicar la aceleración de los rayos cósmicos ultra energéticos. También, la composición de estos rayos (protónes, hierro) es tema de muchos estudios por las implicaciones que tiene sobre su origen. Finalmente, el rango de energías de estos rayos representa un interés para la física de partículas, porque a través de ellos se puede estudiar energías que no se pueden alcanzar con aceleradores ($E < 10^{15}$ eV). Por estas razones, los experimentos portabanderas en rayos cósmicos se dedican a explorar el rango de ultra altas energías. Como podemos apreciar en la Fig. 1, el flujo de estos rayos disminuye con su energía, por lo que se requiere experimentos cada vez más grandes, costosos e involucrando grandes colaboraciones internacionales.

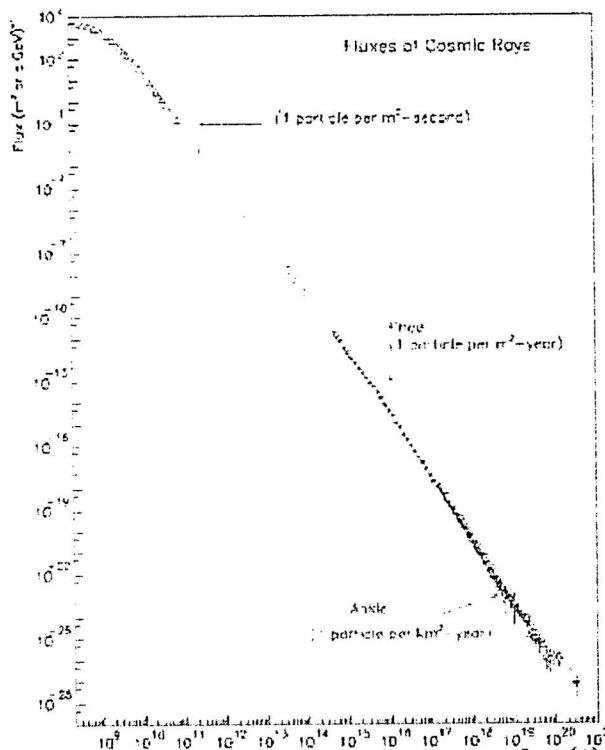


Figura 1. Flujo total de rayos cósmicos vs. Energía [1].

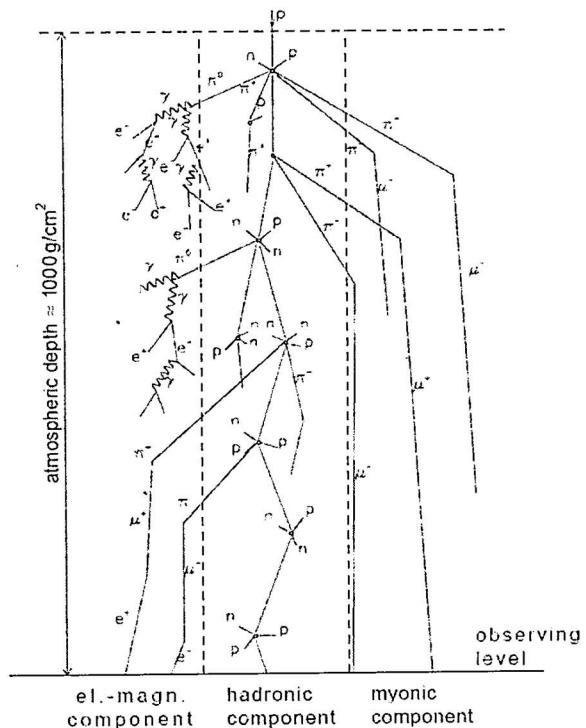
Este artículo propone cinco experimentos en rayos cósmicos para el Perú. Incluye proyectos de las varias áreas relacionadas a los rayos cósmicos, de física de altas energías a física solar pasando por astronomía de rayos gamma. Se presenta primero una breve introducción a la detección de rayos cósmicos como base para entender los cinco experimentos propuestos.

Bases de la detección de rayos cósmicos

La detección de rayos cósmicos aprovecha las tecnologías utilizadas en física de partículas. Generalmente los métodos de detección dependerán de la energía y el tipo de los rayos que se quieren detectar. Pero para simplificar, en este artículo se limitará la descripción a dos

casos genéricos: la detección directa y la detección indirecta a través de interacciones con el atmósfera.

Detección directa: La mayor parte de los rayos cósmicos son partículas que interactúan mediante la fuerza electromagnética, es decir, tienen una interacción relativamente fuerte con la materia. Las partículas cargadas (protónes, muones, etc) son partículas ionizantes que se pueden detectar individualmente con tubos Geiger-Müller o centelladores. En el caso de partículas neutras (neutrinos, fotones), la detección pasa primero a través de una interacción con la materia de detector que producen partículas cargadas, que después se detectan con las técnicas anteriormente mencionadas. Otra técnica comúnmente usada es mediante la detección de la luz Chérenkov. Una partícula energética que viaja más rápido que la luz en un medio emite una onda de choque de luz, llamada luz Chérenkov. Un ejemplo de un medio puede ser agua, que tiene la ventaja de ser económica y transparente, permitiendo así la detección de esta luz y indirectamente de partículas de altas energías. Para una revisión completa de técnicas de detección, el lector está referido a la revista de física de partículas [2].



este motivo, los experimentos que buscan detectar rayos cósmicos de muy altas energías usan arreglos de detectores esparzos, que hacen un muestreo de las partículas secundarias, como en el caso del experimento Kascade [4] o del observatorio Pierre Auger [5]. Usando este muestreo, se puede recabar indirectamente la información principal sobre la partícula primaria que provocó la CAE, es decir, su energía y dirección.

Otro método consiste en la detección de la luz de fluorescencia emitida cuando las partículas electromagnéticas secundarias interaccionan en la atmósfera. Este método es también utilizado por ejemplo en el observatorio Pierre Auger.

2. Cinco experimentos en rayos cósmicos para el Perú

2.1. Búsquedas de CAE al Radio Observatorio de Jicamarca

Otra técnica postulada para el estudio de las CAE de rayos cósmicos es la de usar radares [6], como por ejemplo el del Radio Observatorio de Jicamarca (ROJ) [7]. Cuando se desarrolla una CAE en la atmósfera, ioniza las moléculas del aire. Esta ionización se podría detectar con un radar. Gracias a su alta potencia, el radar principal del ROJ es una herramienta ideal para intentar de detectar este fenómeno. Desde Abril del 2007, se han comenzado estudios de datos en el ROJ con el objetivo de buscar señales de CAE en datos del observatorio.

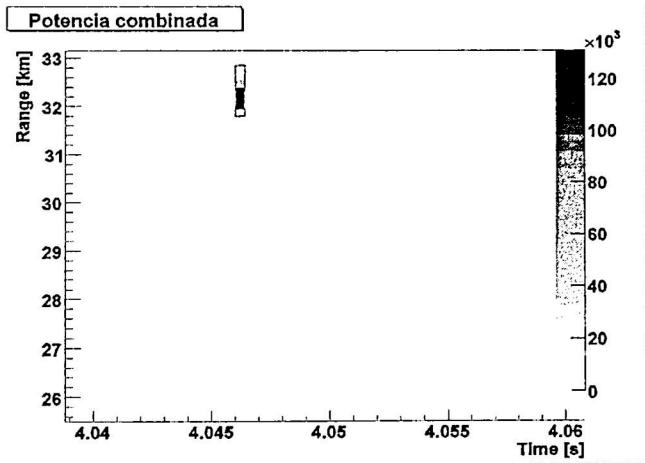


Figura 3. Señal anómala que podra ser un evento candidato para rayo cósmico en datos de radar del ROJ [8].

En las primeras búsquedas se identificaron señales anómalas (ver Fig. 3) en los datos, similares en ciertas formas a lo que se podría esperar por rayos cósmicos [8]. El análisis de los datos continua para entender el origen (CAE u otro) de estas señales. En el caso que no sean de origen cósmicos, el próximo paso es entender el fenómeno que produce esta señal, para poder identificarlo como ruido, eliminarlo y buscar de nuevo señales de CAE. En el caso de que sean de origen cósmicos, el próximo paso será el diseño de experimentos que podrán

revelar información sobre la energía y la dirección de estos rayos cósmicos. En ambos casos, este experimento está abierto a mayor participación de universidades peruanas.

2.2. Participación en el proyecto LAGO

El proyecto LAGO (Large Apertura Gamma Ray Burst Observatory) apunta a la detección de la componente de alta energía de los destellos gamma [9, 10]. La teoría del origen de los destellos gamma es que provienen de hipernovas (supernova originando de una estrella super-masiva) o de la combinación de dos objetos compactos (estrella de neutron, agujero negro) en un sistema binario. Cuando ocurre un destello gamma, la atmósfera está irradiada por una multitud de gammas de altas energías. Estos numerosos fotones provocan cascadas de partículas, demasiadas pequeñas para ser detectadas individualmente pero que juntas, pueden ser detectadas como un aumento en el flujo instantáneo de un detector. Para detectar el mayor número de partículas, la clave es posicionar el detector lo más alto posible.

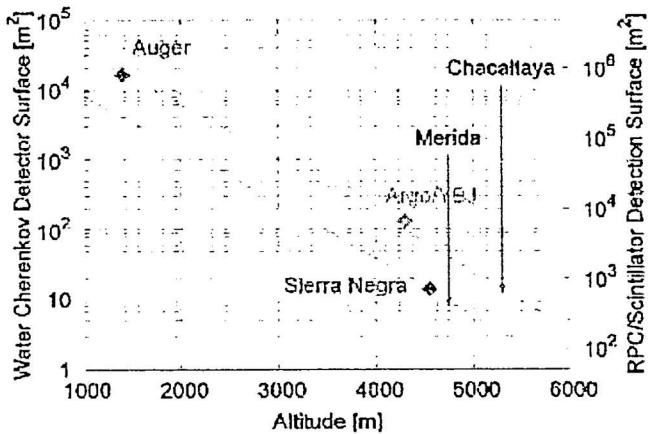


Figura 4. Curvas de iso-sensitividad para varios experimentos de rayos cósmicos [11].

La Fig. 4 muestra las curvas de iso-sensitividad de grandes experimentos para diferentes alturas y superficies. Como se puede observar ubicando detectores a >5000m se puede llegar a tener la misma sensitividad a destellos gammas que el observatorio Pierre Auger, usando una superficie de detección mil veces menor. Esta observación es la base del proyecto LAGO que propone instalar una red de detectores a grandes alturas. Los detectores son de tipo tanque Chérenkov (iguales a los del Pierre Auger) que tienen la ventaja de poder detectar protones, electrones y fotones. La posibilidad de detectar fotones es importante porque son una componente importante de las cascadas electromagnéticas provocadas por los gammas energéticos. Ya existen detectores Chérenkov LAGO instalados en altura en Argentina, México y Venezuela y el Perú es un candidato natural para participar en un futuro próximo en este experimento.

2.3. Detectores de neutrones de altas energías (el futuro de Huancayo)

Monitores de neutrones de altas energías son una herramienta clave para estudiar la relación entre la actividad solar, la heliosfera, el clima terrestre y rayos cósmicos [12, 13]. En particular, se utilizan presentemente neutrones energéticos para estudiar erupciones solares, y incrementos de la radiación terrestre (ground level enhancement) asociada [14], así que la actividad solar (por ejemplo incrementos de Forbusch), y el clima terrestre [13]. En el pasado, el observatorio de Huancayo participaba en estos estudios, antes de su destrucción y sus datos fueron usados por científicos de todo el mundo incluyendo el mismo Forbusch [15]. Reconstruir el observatorio de Huancayo en su forma pasada tendría solo un interés menor debido a la evolución del campo en los últimos años. Sin embargo, la posición geográfica del Perú, combinada con la altura de su terreno hace que sea un lugar ideal para estudiar neutrones solares [12].

Una propiedad clave de los monitores de neutrones es que puedan medir la energía de los neutrones, porque conociendo su energía se puede estimar el tiempo desde que los neutrones fueron producidos en el sol. También es clave poder caracterizar la atmósfera del sitio del detector. Finalmente, la capacidad de medir la multiplicidad (número de partículas en coincidencia en un detector) de cada evento es una propiedad importante [16].

2.4. Determinación del origen de rayos

Hasta hora, no existe un mecanismo comúnmente aceptado para describir el fenómeno que provoca la iniciación de los rayos. En particular, se ha notado que el campo eléctrico en las nubes es hasta 10 veces menor de lo necesario para permitir la creación de rayos. En 1992, A. Gurevich propuso el mecanismo de avería fugitiva (runaway breakdown) que describe interacciones de rayos cósmicos como posibles fuentes de electrones para los rayos [17].

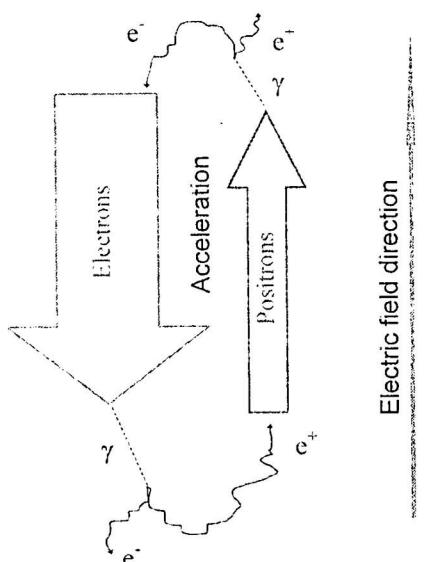


Figura 5. Mecanismo de producción e aceleración de electrones en presencia de un campo eléctrico [18].

Rayos cósmicos de altas energías crean en la nube pares de electrones y positrones relativísticos que están acelerados por el campo eléctrico. Los positrones, están acelerados hacia arriba, e interactúan con las moléculas para aniquilarse y producir gammas. Los electrones están acelerados hacia abajo, y después de un tiempo interactúan con la materia, provocando la creación de gammas, que a su vez realimentan el flujo de positrones. La clave es que los electrones relativísticos así creados necesitan un campo eléctrico menos fuerte para provocar la ionización del aire y así el comienzo del rayo. En este caso, se debería poder medir un aumento del flujo de electrones proveniente de nubes antes de un rayo, correlación que ya se observó [19]. Sin embargo, quedan cuestiones en este modelo que podrían ser resueltas al tener un observatorio de rayos cósmicos suaves (electrones) en altura, es decir más cerca de la nubes.

2.5. Exploración de sitios arqueológicos por tomografía de muones

En los años 1960, el físico premio Nóbel Luis Álvarez desarrolló un experimento para explorar las partes escondidas de las pirámides de Giza en Egipto, usando rayos cósmicos [20]. Cuando muones atraviesan la materia, pierden energía por ionización [21] hasta ser absorbidos:

$$\frac{dE}{dx} \approx 2.3 \text{ MeV/gm/cm}^3 \approx 0.6 \text{ GeV/m} \quad (1)$$

Es entonces posible, midiendo el flujo y el espectro de muones en una dirección, estimar el espesor de la roca, y buscar antros, que aparecerían como un exceso relativo del flujo de muones. Es posible estimar el número (N) de muones requeridos para llegar a una sensibilidad (ξ) suficiente [22]:

$$N \approx \left[\frac{\xi L}{(n-1)X} \right]^2 \quad (2)$$

donde n es un factor que depende de la energía del muón, y X es la dimensión típica del antro. Basándose en estos cálculos, Álvarez pudo tomar el equivalente de una imagen de rayos-X de las pirámides ubicando un detector de muones en ellas (telescopio de muón). Recientemente, progresos en la tecnología de física de partículas han fomentado un renacimiento en el interés por esta técnica, con la posibilidad de aplicarla en Teotihuacán en México [22]. Al mismo tiempo, se han desarrollado técnicas parecidas que no necesitan estar en la pirámide (tomógrafo de muón), técnicas ya aplicadas por físicos/arqueólogos italianos [23, 24] y en camino de ser aplicada en Belice en templos Mayas [21]. La extensión a la arqueología peruana parece natural, con una variedad de estructuras como huacas limeñas (Huallamarca, Pullana), templos antiguos (Chavín de Huantar), o estructuras Incas (Sacsayhuamán, Machu Picchu).

Además, esta técnica tendría otras aplicaciones de interés por la sociedad peruana. Recientemente, se usó el flujo de muones de altas energías para medir la actividad de un volcán [25].

3. Conclusiones

Sea por su historia (Huancayo), por las herramientas ya presente (Jicamarca), por su ubicación geográfica (Andes, volcanes, cercanía al ecuador) o por su cultura (pirámides pre-hispánicas), el potencial del Perú para implementar experimentos de rayos cósmicos es grande. El presente artículo presentó cinco ideas de experimentos individuales, aunque complementarios. En el caso de LAGO, del estudio de rayos y del monitor de neutrones, los requisitos del observatorio son muchas veces muy parecidos (altura), lo que sugiere la posibilidad de construir un solo observatorio, versátil y con múltiples experimentos corriendo en paralelo. El agrupamiento de experimentos contribuiría a formar una masa crítica de investigadores y alumnos que permitirían acumular la experiencia necesaria para un desarrollo de este campo en el país. En particular, teniendo esta masa crítica de investigadores en el área, grupos peruanos podrán es-

perar participar activamente en los grandes experimentos en rayos cósmicos como el HAWC [26] (observatorio en construcción en México) y el Pierre Auger (observatorio construido en Argentina).

Agradecimientos

Los autores quieren expresar sus agradecimientos a los doctores X. Bertou (Centro Atómico Bariloche, Instituto Balseiro. Argentina), J. Valdés-Galicia (Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México), A.S. Lidvansky (Instituto de Ciencia Nuclear, Academia de ciencias de Rusia), y A. Menchaca-Rocha (Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México) por sus conversaciones y sus proyectos que inspiraron este texto. Agradecen también la contribución del Dr. C.J. Solano en la revisión del texto. D. Wahl agradece al IGP su apoyo financiero y científico que ha permitido la realización de este artículo.

1. S. Swordy et al., Int. J. Mod. Phys. A, 2000. 15: p. 2181-2224.
2. W.M. Yao et al., The review of particle physics. Journal of Physics G, 2006. 33(1).
3. O.C. Alkhofer, 1975. Introduction to cosmic radiation, Munich: Verlag Carl Thiemeig.
4. T. Antoni et al. (Kascade Collaboration), The cosmic-ray experiment KASCADE. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2003. 513: p. 490-510.
5. J. Abraham et al. (Pierre Auger Collaboration), Properties and performance of the prototype instrument for the Pierre Auger Observatory. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2004. 523: p. 50-95.
6. P. Gorham, On the possibility of radar echo detection of ultra-high energy cosmic ray- and neutrino-induced extensive air showers. arXiv:hep-ex0001041, 2000.
7. T. Vinogradova et al. Proposed experiment to detect air showers with the Jicamarca radar system. in 1st International Workshop on Radio Detection of High Energy Particles. 2000. University of California.
8. D. Wahl, J. Chau, and J. Bellido. Searching for vertical EAS signals at the Jicamarca Radio Observatory. in 30th International Cosmic Ray Conference. 2007. Merida, Mexico.
9. X. Bertou and D. Allard, Detection of GRB with water Cherenkov detectors. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2005. 553: p. 299-303.
10. D. Allard et al. (LAGO collaboration). Looking for the high energy component of GRBs at the Large Aperture GRB Observatory. in 30th International Cosmic Ray Conference. 2007. Merida, Mexico.
11. X. Bertou, Private communication. 2007.
12. J. Simpson, The cosmic rays nucleonic component: the invention and scientific uses of the neutron monitor. Space Science Reviews, 2000. 93: p. 11-32.
13. R.G. Harrison and D.B. Stephenson, Empirical evidence for a nonlinear effect of galactic cosmic rays on clouds. Proc. R. Soc. A., 2006. 462: p. 1221-1233.
14. J.A. Lockwood and H. Debrunner, Solar flare particle measurements with neutron monitors. Space Science Reviews, 1999. 88: p. 483-500.
15. S. Forbusch, Solar influences on cosmic rays. Geophysics, 1957. 43: p. 28-41.
16. J.M. Clem and L.I. Dorman, Neutron monitor response functions. Space Science Reviews, 2000. 93: p. 335-359.
17. A.V. Gurevich, G.M. Milikh, and R. Roussel-Dupre, Runaway electron mechanism of air breakdown and preconditioning during a thunderstorm. Physics Letters A, 1992. 165: p. 463-468.
18. A.S. Lidvansky, Private communication. 2007.
19. N.S. Khaerdinov, A.S. Lidvansky, and V.B. Petkov, Electric Field of Thunderclouds and Cosmic Rays: Evidence for Acceleration of Particles (Runaway Electrons). Atmospheric Research, 2005. 76: p. 346-354.
20. L.W. Alvarez et al., Search for Hidden Chambers in the Pyramids. Science, 1970. 167: p. 832-839.
21. R. Schwitters. The UT Maya Muon Project. in FNAL Colloquia. 2007.
22. R. Alfaro et al. Searching for possible hidden chambers in the Pyramid of the Sun. in 30th International Cosmic Ray Conference. 2007. Merida, Mexico.
23. M. Basset et al., MGR: An innovative, low-cost and compact cosmic-ray detector. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2006. 567: p. 298-301.
24. M. Menichelli et al., A scintillating fibres tracker detector for archaeological applications. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2007. 572: p. 262-265.
25. H. Tanaka et al., Development of a two-fold segmented detection system for near horizontally cosmic-ray muons to probe the internal structure of a volcano. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A, 2003. 507: p. 657-669.
26. A. Carraminana et al. HAWC & Mexico. in 30th International Cosmic Ray Conference. 2007.

Reglas para la presentación de artículos para la revista de la Facultad de las Ciencias de la UNI, REVCIUNI

En la revista de la Facultad de Ciencias de la UNI (REVCIUNI), se publican artículos de investigación actual y divulgación científica en las áreas de física, matemática y química. Los artículos se reciben en el Instituto de Investigación y Post Grado de la Facultad de Ciencias de la UNI. Los artículos serán presentados en formato Portable Document Format (PDF) al e-mail: investiga_fc@uni.edu.pe.

Los artículos deben de ser originales, inéditos y que no hayan sido sometidos para publicación en otra revista.

Los artículos serán recibidos por el Comité Científico el cual lo enviará a uno o más árbitros para su revisión. El Comité Científico comunicará al autor que sometió el artículo la decisión de publicación así, como las observaciones de los árbitros.

Para la publicación del trabajo, la redacción y el formato del artículo deben seguir las siguientes indicaciones:

- El tipo de letra es normal Roman o equivalentes.
- Los márgenes son: de los lados derecho e izquierdo 1,5cm y de arriba y abajo 2cm.
- El título debe de estar centrado y escrito con letra normal de tamaño 14pt y negritas.
- Debajo del título deben de ir los nombres completos de los autores con letra normal tamaño 10pt. Después del nombre de cada autor, debe indicarse el lugar de trabajo y el correo electrónico con letra cursiva y tamaño 10pt.
- El resumen debe escribirse en inglés y español, con letra normal tamaño 9pt con un ancho del texto de 16,2cm, debe contener entre 50 y 150 palabras e indicar al final las palabras claves. Primero va el resumen en el idioma en que se redactó el artículo.
- El texto se escribe con letra normal tamaño 10pt en dos columnas separados en 0,7cm. Y debe ser dividido en secciones numeradas con números arábigos. El nombre de las secciones deben de ser escritas en

negritas tamaño 12pt y centradas. Las subsecciones con letras negritas y centradas. Se recomienda que los artículos contengan las siguientes secciones: **Introducción, Conclusiones y Agradecimientos** (esta última no se numera).

- Al último va la sección sin numerar designada como **Apéndice: Nombre del apéndice**, en caso de haber varios apéndices van en secciones designadas como **Apéndice A, Apéndice B, etc.**
 - Las fórmulas deben ser numeradas con números arábigos entre paréntesis en la margen derecha. La referencia de las fórmulas en el texto debe de hacerse colocando entre paréntesis su número correspondiente.
 - Toda letra latina que se utiliza en las fórmulas debe estar escrita en cursiva.
 - Las funciones seno, coseno, logaritmo natural, y otras en esta categoría, se escriben sen, cos, ln, etc.
 - Las tablas y figuras se numeran con números arábigos. En la parte superior de la tabla e inferior de la figura, se colocará: Tabla y Figura correspondientemente después el número, punto con letra negrita y la leyenda con letra cursiva, todo en tamaño 10pt.
 - Las citaciones en el texto se hacen colocando el número correspondiente de la lista de referencias entre corchetes.
 - La lista de referencias que se citan en el artículo es con números arábigos, en el orden de citación y va al final del artículo debajo de una línea horizontal, en dos columnas, separadas en 0,7cm. El tamaño de las letras es de 9pt. Por ejemplo:
1. S. Frittelli, C. Kozameh, and E.T. Newman, *J Math. Phys.* **36** (1995) 4975.
 2. V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Berlin, 1980).

CONTENIDO

- *Caracterización fisicoquímica de quitosano para su aplicación como biosorbente de metales* 1 - 5
Ily Maza Mejía y Christian Jacinto Hernández
- *Estudio de la adsorción de especies cianuradas sobre electrodos Cu y Pt/Cu_xCo_{3-x}O₄/CuO mediante técnicas electroquímicas y Raman-Potenciómetro acoplados* 6 - 10
Adolfo La Rosa Toro Gómez
- *Diseño y construcción de un goniofotómetro* 11 - 22
Myke Ruiz y Abel Gutarra
- *Coerciveness: from optimization to equilibrium problems* 23 - 30
Wilfredo Sosa
- *Clasificación topológica global de sistemas cuadráticos estructuralmente estables sin ciclos límites* 31 - 37
Elva Flor Reyes Muñoz y Félix Escalante del Águila
38 - 44
- *Modelos matemáticos para curvas de distribución de especies* 45 - 52
Christian Valqui y Thomas Valqui
- *Operadores integrales singulares de Calderón - Zygmund* 53 - 59
Alejandro Ortiz Fernández
- *El método de máximo descenso para funciones quasi-convexas en variedades riemannianas* 59 - 66
E. Marisa Quispe Cárdenas, Erik A. Papa Quiroz y P. Roberto Oliveira
- *Filters as introductory concepts to topological spaces* 67 - 70
Sergio Camiz
- *Mathematical entanglement* 71 - 75
Holger G. Valqui
- *Cinco proyectos de rayos cósmicos para el Perú* 76 - 80
D. Wahl, J. Bellido y J. Chirinos