Estabilidad de los sistemas lineales homogéneos con saltos markovianos de segundo orden en tiempo discreto

Jorge Enrique Mayta Guillermo†, Jesús Cernades Gómez‡ y William Carlos Echegaray Castillo♭
Escuela Profesional de Matemática. Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
†*jorge.maytag@pucp.pe*†*jmaytag@uni.edu.pe* ‡*cernadesgomez@hotmail.com,*
♭*williamechegaray@yahoo.com.br*

Recibido el 5 de Agosto del 2015; aceptado el 19 de Agosto del 2015

En este trabajo analizaremos la estabilidad de los sistemas lineales homogéneos de segundo orden gobernados por una cadena de Markov la cual denotaremos por las siglas SLHSMS. Este tipo de sistema es similar a la familia de sistemas lineales con saltos markovianos el cual es conocida por sus siglas en inglés MJLS como se denota en [1]. Los sistemas lineales gobernados por una cadena de Markov son sistemas dinámicos que presentan cambios abruptos. Presentamos algunas definiciones de estabilidad para el sistema SLHSMS, donde estos tipos de estabilidad son equivalentes siempre y cuando el espacio de estados de la cadena de Markov es finito. Este estudio es un aporte a la literatura.

Palabras Claves: sistemas lineales con saltos markovianos, estabilidad, cadenas de Markov.

In this paper we analyze the stability of the homogeneous linear systems second order governed by a Markov chain which is denoted by the acronym SLHSMS. This type of system is similar to the family of linear systems with Markovian jumps which is known by its acronym in english MJLS as denoted in [1]. The governed by a Markov chain linear systems are dynamic systems with abrupt changes. We present some definitions of stability for the SLHSMS system where these types of stability are equivalent as long as the state space Markov chain is finite. This study is a contribution to literature.

Keywords: Linear systems with Markovian jumps, stability, Markov chains.

1 Introducción

Los sistemas lineales con saltos markovianos se han venido utilizando desde la década de los 70 en diversas áreas de investigación por ejemplo, este tipo de sistemas lo podemos encontrar en sistemas de control aéreo [2], sistemas eléctricos [3], etc. La cadena de Markov asociada a un sistema cambia de estado aleatoriamente a medida que transcurre el tiempo. Cada estado de la cadena representa un modo distinto que opera en el sistema. Así, en lugar de un único sistema dinámico se tienen, en realidad, varios sistemas cambiando aleatoriamente y modelando todos ellos un mismo fenómeno. El modelo matemático resultante es un sistema dinámico estocástico conocido en la literatura como sistemas lineales con saltos markovianos o, por sus siglas en inglés, MJLS (ver p.ej. [1]).

El trabajo está organizado de la siguiente forma; en la segunda sección se da las notaciones básicas que se usarán en el artículo. En la tercera sección se presentará los sistemas lineales homogéneos con saltos markovianos de segundo orden, el cual se impondrá ciertas condiciones para el análisis de estabilidad. En la cuarta sección se presentará una matriz la cual guarda la información probabilística de la cadena de Markov y los valores de las matrices asociadas al sistema. En la quinta sección se dará a conocer algunas definiciones de estabilidad para este sistema. En la sexta sección se analiza la estabilidad en media cuadrática mediante el radio espectral de la matriz definida en la sección cuatro. En la séptima sección se presentará las equivalencias entre los tipos de estabilidad definidos en la sección cinco. Finalmente daremos algunos comentarios y culminaremos con las conclusiones.

2 Notaciones Básicas

En esta sección daremos las notaciones generales que se utilizan en el artículo. El espacio euclidiano de los números reales de n dimensiones se denota por $\mathbb{R}^n$, el conjunto de números enteros no negativos, por $\mathbb{Z}_+$. El espacio vectorial de las matrices de orden $m \times n$ definida en $\mathbb{R}$ se representa por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y, para abreviar, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ denota el espacio de las matrices cuadradas de orden $n \times n$. La norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ se denota por $\|\cdot\|$. La transpuesta y la traza de la matriz A se denotan por A^T y $tr(A)$, respectivamente.

En vista que el fenómeno bajo estudio se torna aleatorio comenzamos el análisis introduciendo un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, donde Ω es el espacio muestral, $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra y Pr es la medida de probabilidad. El valor esperado es denotado por $E\{\cdot\}$. La función indicador con respecto al evento $A \in \mathcal{F}$, es denota por 1_A. El producto de Kronecker se denota con el símbolo $\otimes$ y el operador *vec* que transforma una matriz a un vector columna. La cadena de Markov se considera homogénea y que toma valores con espacio de estado de la forma siguiente

$$\mathcal{L} = \{1, 2, \cdots, L\}.$$

El vector de distribución de probabilidad inicial está denotado por π, donde $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_L)$, $\pi_i = \Pr(\theta(0) = i)$. La matriz de transición de probabilidad es denotada por $\Pi = (p_{ij})$, donde $p_{ij} = \Pr(\theta(k+1) = j|\theta(k) = i)$. Por último la matriz identidad es denotado por I_n, donde n es el orden de la matriz.

3 Sistemas Lineales homogéneos con saltos markovianos de segundo orden

Consideremos el sistema

$$x(k+2) = A_{\theta(k+1)}x(k+1) + B_{\theta(k)}x(k), \qquad (1)$$

donde para todo $i, j \in \mathcal{L}$, $A_i, B_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$. Asumiremos que las condiciones iniciales $\{x(0), x(1)\}$ y $\{\theta(0), \theta(1)\}$ son independientes, además $x(0), x(1)$ son de segundo momento finito, es decir, $E\{\|x(0)\|^2\} < \infty$ y $E\{\|x(1)\|^2\} < \infty$.

A continuación presentamos la definición de solución del sistema (1).

Definición 3.1. *El proceso estocástico $x(k) = \{x(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ es solución de (1) si para toda realización ω de $\theta(k)$ y para cualquier $x(0)$ y $x(1)$, la ecuación (1) se satisface puntualmente, es decir,*

$$\begin{aligned} x(k+2, \omega; x(0), x(1)) &= A_{\theta(k+1,\omega)}x(k+1, \omega; x(0), x(1)) \\ &\quad + B_{\theta(k,\omega)}x(k, \omega; x(0), x(1)), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

La solución $x(k)$ del sistema (1) es también llamada trayectoria solución.

Haciendo el cambio de variable

$$z(k) = \left[\begin{array}{c} x(k) \\ x(k+1) \end{array} \right]$$

luego al sistema (1) se expresa de la siguiente manera

$$z(k+1) = C_{\hat{\theta}(k)}z(k), \qquad (2)$$

donde $z(k) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\hat{\theta}(k) = (\theta(k), \theta(k+1))$ y

$$C_{\hat{\theta}(k)} = \left[\begin{array}{cc} 0 & I_n \\ B_{\theta(k)} & A_{\theta(k+1)} \end{array} \right]$$

.

Lema 3.1. *Si $\theta(k)$ es una cadena de Markov con espacio de estado $\mathcal{L}$. Entonces el proceso estocástico $\hat{\theta}(k)$ definida por*

$$\hat{\theta}(k) = (\theta(k), \theta(k+1))$$

es una cadena de Markov con espacio de estado

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} = \{(i, j); i, j \in \mathcal{L}\}$$

y la probabilidad de transición es dada de la siguiente manera:

$$\Pr(\hat{\theta}(k+1) = (s, r)|\hat{\theta}(k) = (i, j)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , si\ j \neq s \\ p_{jr} & , si\ j = s \end{array} \right.$$

Prueba. Claramente el espacio de estados de $\hat{\theta}(k)$ es $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$. Enseguida probaremos que $\hat{\theta}(k)$ es una cadena de Markov. Para esto tomemos $\hat{i}_0, \hat{i}_1 \ldots \hat{i}_{k+1}$ arbitrariamente en $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$. de la definición de $\hat{\theta}(k)$ se sigue:

$$\begin{aligned} &\Pr\left(\hat{\theta}(k+1) = \hat{i}_{k+1}|\hat{\theta}(k) = \hat{i}_k \ldots \hat{\theta}(0) = \hat{i}_0\right) \\ &= \frac{\Pr\left(\theta(k+2) = r, \theta(k+1) = s, \theta(k+1) = j, \ldots, \theta(0) = i_0\right)}{\Pr\left(\theta(k+1) = j, \ldots \theta(0) = i_0\right)} \end{aligned}$$

Si $j \neq s$ entonces

$$\Pr(\hat{\theta}(k+1) = \hat{i}_{k+1}|\hat{\theta}(k) = \hat{i}_k \ldots \hat{\theta}(0) = \hat{i}_0) = 0$$

Por otro lado

$$\Pr(\hat{\theta}(k+1) = \hat{i}_{k+1}|\hat{\theta}(k) = \hat{i}_k) = 0.$$

Caso contrario, es decir, $j = s$

$$\begin{aligned} &\Pr\left(\hat{\theta}(k+1) = \hat{i}_{k+1}|\hat{\theta}(k) = \hat{i}_k \ldots \hat{\theta}(0) = \hat{i}_0\right) \\ &= \frac{\Pr\left(\theta(k+2) = r, \theta(k+1) = j, \theta(k+1) = j, \ldots \theta(0) = i_0\right)}{\Pr\left(\theta(k+1) = j, \ldots \theta(0) = i_0\right)} \\ &= p_{jr}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} &\Pr(\hat{\theta}(k+1) = \hat{i}_{k+1}|\hat{\theta}(k) = \hat{i}_k) \\ &= \frac{\Pr\left(\theta(k+2) = r, \theta(k+1) = j, \theta(k) = i\right)}{\Pr\left(\theta(k+1) = j, \theta(k) = i\right)} \\ &= p_{jr}. \end{aligned}$$

Esto prueba la propiedad Markoviana de $\hat{\theta}(k)$. □

Muchos resultados que se obtendrá en este artículo están basados en el estudio del sistema (2), llamados en la literatura sistema homógeneo. Ver [8].

Lema 3.2. *Sea $z(k)$ la trayectoria solución de (2) con $z(0) = z_0$. Entonces*

$$E\{1_{\{\hat{\theta}(k+1)=\hat{j}\}}|z(k) = z_k, \hat{\theta}(k) = \hat{i}\} = p_{\hat{i}\hat{j}}$$

Prueba. Ver [8]. □

4 La matriz $\mathcal{A}$

En esta sección presentamos la matriz $\mathcal{A}$, que será de gran utilidad para analizar la estabilidad de (1). Por consiguiente, es de esperar que la estabilidad del sistema (1) pueda ser analizada a través del radio espectral de esta matriz. Para poder introducir esta matriz necesitamos previamente definir algunas matrices que están dadas en términos de la trayectoria solución del sistema. Estas matrices, que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, son consistentes con aquellas definidas en la literatura (ver p.ej. [1]). Para cada $k \in \mathbb{Z}_+, (i,j) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, consideremos

$$\hat{Q}(k) = E\{z(k)z^T(k)\} \tag{3}$$

$$\hat{Q}_{i,j}(k) = E\{z(k)z^T(k)1_{\{\hat{\theta}(k)=(i,j)\}}\} \tag{4}$$

$$\hat{q}_{i,j}(k) = vec(\hat{Q}_{i,j}(k)) \tag{5}$$

$$\hat{q}(k) = \begin{pmatrix} \hat{q}_{1,1}(k) \\ \vdots \\ \hat{q}_{1,L}(k) \\ \vdots \\ \hat{q}_{L,1}(k) \\ \vdots \\ \hat{q}_{L,L}(k) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \hat{Q}(k) &= E\left\{\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(i,j)=(L,L)} z(k)z^T(k)1_{\{\hat{\theta}(k)=(i,j)\}}\right\} \\ &= \sum_{(i,j)}^{(L,L)} \hat{Q}_{i,j}(k) \end{aligned} \tag{7}$$

El lema 4.1 establece una ecuación recursiva para la matriz $\hat{Q}_{i,j}(k)$, definida en (4). Esta ecuación es muy útil para la obtención de los resultados importantes presentados en este trabajo (ver p.ej. Lema 4.2)

Lema 4.1. *Dado el sistema* (2) *con trayectoria solución* $z(k)$, *entonces la matriz* $\widehat{Q}_{i,j}(k)$ *definida en* (4) *satisface la siguiente ecuación recursiva:*

$$\widehat{Q}_{j,r}(k+1) = \sum_{i=1}^{L} p_{jr} C_{i,j} \widehat{Q}_{i,j}(k) C_{i,j}^T. \tag{8}$$

Prueba. Para la demostración de este resultado utilizamos la recursividad del sistema.

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{j,r}(k+1) &= E\left\{z(k+1)z^T(k+1)1_{\{\hat{\theta}(k+1)=(j,r)\}}\right\} \\ &= E\left\{C_{\hat{\theta}(k)} z(k)z^T(k)C_{\hat{\theta}(k)}^T 1_{\{\hat{\theta}(k+1)=(j,r)\}}\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^{L} C_{i,j} z(k)z^T(k)C_{i,j}^T 1_{\{\theta(k)=i,\hat{\theta}(k+1)=(j,r)\}}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{L} C_{i,j} E\left\{z(k)z^T(k)1_{\{\theta(k)=i,\hat{\theta}(k+1)=(j,r)\}}\right\} C_{i,j}^T \\ &= \sum_{i=1}^{L} C_{i,j} E\left\{E\{z(k)z^T(k)1_{\{\theta(k)=i,\hat{\theta}(k+1)=(j,r)\}} | z(k), \hat{\theta}(k)\}\right\} C_{i,j}^T. \end{aligned}$$

Debido a que $z(k)z^T(k)1_{\{\hat{\theta}(k)=(i,j)\}}$ es medible con respecto a $\{z(k), \hat{\theta}(k)\}$ se tiene que

$$\widehat{Q}_{j,r}(k+1) = \sum_{i=1}^{L} C_{i,j} E\left\{z(k)z^T(k)1_{\{\hat{\theta}(k)=(i,j)\}} E\{1_{\{\theta(k+2)=r\}} | z(k), \hat{\theta}(k)\}\right\} C_{i,j}^T$$

y por el lema 3.2 tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{j,r}(k+1) &= \sum_{i=1}^{L} C_{i,j} E\{z(k)z^T(k)1_{\{\hat{\theta}(k)=(i,j)\}} p_{jr}\} C_{i,j}^T \\ &= \sum_{i=1}^{L} p_{jr} C_{i,j} \widehat{Q}_{i,j}(k) C_{i,j}^T. \end{aligned}$$

□

A continuación se introduce la matriz $\mathcal{A}$ que será de fundamental importancia para establecer diferentes resultados relacionados con la estabilidad de los sistemas (1) y (2).

$$\mathcal{A} = (\bar{\Pi}^T \otimes I_{4n^2}) diag[C_{i,j} \otimes C_{i,j}], \tag{9}$$

donde la matriz $diag[C_{i,j} \otimes C_{i,j}]$ es una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque es de la forma $C_{i,j} \otimes C_{i,j}$. Analizemos un caso particular para $L = 2$ se tiene

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} \otimes C_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{1,2} \otimes C_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{2,1} \otimes C_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2,2} \otimes C_{2,2} \end{bmatrix}$$

y $\bar{\Pi}$ es la matriz de transición de probabilidad de la cadena de Markov $\hat{\theta}(k)$, el cual es de la forma siguiente:

$$\bar{\Pi} = D \cdot diag(\Pi, L)$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 & \dots & D_L \end{bmatrix}$$

y

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{L\times L} \quad \rightarrow \text{i-fila}$$

$$\uparrow \text{i-columna}$$

además $diag(\Pi, L)$ es una matriz diagonal por L bloques de la forma siguiente:

$$diag(\Pi, L) = \begin{bmatrix} \Pi & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Pi & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \Pi \end{bmatrix}$$

Note que estas matrices recogen la información de todos los parámetros del sistema y además guardan la información probabilística de la cadena de Markov. Enseguida se muestra que el sistema (2) puede ser transformado en una ecuación del tipo clásico mediante la matriz $\mathcal{A}$ definida en (9).

Lema 4.2 ([1],[5]). *Dado el sistema* (2)*, el vector columna* $\hat{q}(k)$ *definido en* (6) *es una solución del sistema*

$$y(k+1) = \mathcal{A}y(k),\ y(0) = \hat{q}(0) \in \mathbb{R}^{4n^2} \tag{10}$$

Prueba. Vectorizando ambos lados de (8) se obtiene

$$\hat{q}_{j,r}(k+1) = \sum_{i=1}^{L} p_{j,r} C_{i,j} \otimes C_{i,j} \hat{q}_{i,j}(k)$$

lo que puede escribirse matricialmente como:

$$\hat{q}(k+1) = \mathcal{A}\hat{q}(k) \tag{11}$$

y por inducción se tiene

$$\hat{q}(k) = \mathcal{A}^k \hat{q}(0) \tag{12}$$

□

5 Estabilidad

A continuación presentamos algunas definiciones de estabilidad para el sistema (1) dadas en [6], [7].

Definición 5.1. *Se dice que el sistema* (1) *es*

a) Estable en media cuadrática (EMC) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y para cualquier* $\theta(0)$ *se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} E\{x(k)x^T(k)\} = 0.$$

b) Estocásticamente estable (EE) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y para cualquier* $\theta(0)$ *se tiene*

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|^2\right\} < \infty$$

c) Exponencialmente estable (EXE) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y para cualquier* $\theta(0)$ *existen constantes* $0 < \alpha < 1 \leq \beta$ *tal que para todo* $k \in \mathbb{Z}_+$ *se tiene*

$$E\left\{\|x(k)\|^2\right\} \leq \beta\alpha^k E\left\{\|x(0)\|^2\right\},$$

donde α *y* β *son independientes de* $x(0)$ *y* $\theta(0)$ *.*

d) Segundo momento estable (SME) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0)$ *se tiene*

$$\lim_{k\to+\infty} E\left\{\|x(k)\|^2\right\} = 0$$

e) Casi seguramente estable (CSE) si para cualquier $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *y cualquier* $\theta(0)$ *se tiene*

$$\Pr\left\{\lim_{k\to\infty} \|x(k)\| = 0\right\} = 1$$

6 Estabilidad EMC y la matriz $\mathcal{A}$

En esta sección analizamos la estabilidad de (1) en términos del radio espectral de la matriz $\mathcal{A}$.

El lema 4.2 da una caracterización de la estabilidad EMC en términos de el vector $q(k)$ definido en (6).

Lema 6.1. *El* $\lim_{k\to\infty} E\{z(k)z^T(k)\} = 0$ *si y solo si para cualquier* $x(0), x(1) \in \mathbb{R}^n$ *y para cualquier* $\theta(0), \theta(1)$ *se cumple*

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{q}(k) = 0. \tag{13}$$

Prueba. Asumamos que $\lim_{k\to\infty} E\{z(k)z^T(k)\} = 0$. De la desigualdad

$$\begin{aligned} \|\widehat{Q}_{i,j}(k)\| &= \left\|E\{z(k)z^T(k)1_{\{\theta(k)=i,\theta(k+1)=j\}}\}\right\| \\ &\leq \left\|E\{z(k)z^T(k)\}\right\| \end{aligned}$$

se sigue que $\lim_{k\to+\infty} \widehat{Q}_{i,j}(k) = 0$ y como el operador *vec* es continuo entonces $\lim_{k\to+\infty} \hat{q}_{i,j}(k) = 0$. De aquí se concluye inmediatamente (13).

Si $\lim_{k\to+\infty} \hat{q}(k) = 0$ entonces $\lim_{k\to+\infty} \hat{q}_{i,j}(k) = 0$ lo que es equivalente a decir que $\lim_{k\to+\infty} \widehat{Q}_{i,j}(k) = 0$. De (7) se concluye que $\lim_{k\to\infty} E\{z(k)z^T(k)\} = 0$. □

Se presenta la norma matricial, sea $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Lema 6.2. *Sea $z(k)$ la solución del sistema (2). Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$ se cumplen las siguientes desigualdades*

$$\frac{E(\|z(k)\|^2)}{n} \leq \|\widehat{Q}(k)\|_1 \tag{14}$$

$$\|\widehat{Q}(k)\|_1 \leq nE(\|z(k)\|^2), \tag{15}$$

Prueba. Primero probemos la desigualdad (14)

$$\begin{aligned}
E(\|z(k)\|^2) &= E\left(\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} \|z(k)\|^2 1_{\{\hat\theta(k)=(i,j)\}}\right)\\
&= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} E(\|z(k)\|^2 1_{\{\hat\theta(k)=(i,j)\}})\\
&= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} E(tr(z(k)z(k)^T 1_{\{\hat\theta(k)=(i,j)\}}))\\
&= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} tr(E(z(k)z(k)^T 1_{\{\hat\theta(k)=(i,j)\}}))\\
&= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} tr(\widehat{Q}_{i,j}(k))\\
&= tr\left(\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} \widehat{Q}_{i,j}(k)\right)\\
&\leq n\left\|\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} \widehat{Q}_{i,j}(k)\right\|_1\\
&\leq n\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} \|\widehat{Q}_{i,j}(k)\|_1\\
&= n\|\widehat{Q}(k)\|_1
\end{aligned}$$

Ahora probemos la desigualdad (15), por la desigualdad de Jensen se sigue

$$\begin{aligned}
\|\widehat{Q}(k)\|_1 &= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} \|\widehat{Q}_{i,j}(k)\|_1\\
&= \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} \|E(z(k)z^T(k)1_{\{\hat\theta(k)=(i,j)\}})\|_1\\
&\leq \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} E(\|z(k)z^T(k)\|_1 1_{\{\hat\theta(k)=(i,j)\}})\\
&\leq n\sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L,L)} E\left(\|z(k)\|_2^2 1_{\{\hat\theta(k)=(i,j)\}}\right)\\
&= nE\left(\|z(k)\|^2\right)
\end{aligned}$$

□

Lema 6.3. *Sea $x(k)$ la solución del sistema (1) y $z(k)$ la solución del sistema (2). Se cumple lo siguiente:*

$$\lim_{k\to\infty} E\{\|x(k)\|^2\} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} E\{\|z(k)\|^2\} = 0$$

Prueba. Si $\lim_{k\to\infty} E\{\|x(k)\|^2\} = 0$ y de la siguiente igualdad

$$\|z(k)\|^2 = \|x(k)\|^2 + \|x(k+1)\|^2$$

se obtiene $\lim_{k\to\infty} E\{\|z(k)\|^2\} = 0$.
Como $\lim_{k\to\infty} E\{\|z(k)\|^2\} = 0$ y de la siguiente desigualdad

$$\|x(k)\|^2 \leq \|z(k)\|^2$$

se obtiene $\lim_{k\to\infty} E\{\|x(k)\|^2\} = 0$. □

El teorema 6.1 provee una herramienta de fácil implementación computacional para analizar si el sistema (2) es EMC mediante el radio espectral de la matriz $\mathcal{A}$.

Teorema 6.1. *El sistema (1) es EMC si y solo si $\rho(\mathcal{A}) < 1$.*

Prueba. Si el sistema es EMC, entonces por el lema 6.2 se tiene $\lim_{k\to+\infty} E\{\|x(k)\|^2\} = 0$ y por el lema 6.3 se tiene que $\lim_{k\to+\infty} E\{\|z(k)\|^2\} = 0$ por último por el lema 6.2 se tiene $\lim_{k\to+\infty} E\{z(k)z^T(k)\} = 0$ y por el lema 6.1 se concluye que $\lim_{k\to+\infty} \hat{q}(k) = 0$. Ahora como $x(0), x(1)$ y $\theta(0), \theta(1)$ son arbitrarios y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_{i,j}(0) &= E\left\{z(0)z^T(0)\right\} E\left\{1_{\{\theta(0)=i\}}1_{\{\theta(1)=j\}}\right\}\\
&= E\left\{z(0)z^T(0)\right\} p_{ij}\pi_i,
\end{aligned}$$

entonces se ve que siempre es posible obtener $\hat{q}(0)$ con componentes no nulas. Entonces por la descomposición de Jordan de $\mathcal{A}$ y por (12) se deduce que $\rho(\mathcal{A}) < 1$.

Si $\rho(\mathcal{A}) < 1$ entonces tomando límite a ambos lados de (12) esto implica que $\lim_{k\to+\infty} \hat{q}(k) = 0$. De aquí, por los lemas 6.1, 6.2 y 6.3 se concluye que el sistema es EMC. □

6.1 Ejemplos

En esta sección se proporcionan diferentes ejemplos que ilustran los resultados presentados en las secciones previas. En particular se analiza la estabilidad del sistema estocástico en relación con la estabilidad de los subsistemas que lo conforman.

Ejemplo 6.1. *En este ejemplo se muestra un sistema que no es EMC.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix},\ \Pi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \ y \ \ B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notamos que $\rho(\mathcal{A}) = 2.9404 > 1$, el sistema no es EMC.

Ejemplo 6.2. *En este ejemplo se muestra un sistema que es EMC.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},\ \Pi = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \quad y \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Como $\rho(\mathcal{A}) = 0,8122 < 1$ *el sistema es EMC.*

7 Equivalencia entre las diferentes nociones de estabilidad

Ahora establecemos la relaciones entre los diferentes tipos de estabilidad introducidos en la sección 5. Se prueba que bajo la condición de que $\mathcal{L}$ es un espacio de estado finito, las nociones de estabilidad (a)-(d) son equivalentes y todas estas implican la estabilidad (e). Comencemos por el lema siguiente:

Teorema 7.1. *El sistema* (2) *es EMC si y solo si es EE.*

Prueba. Ver [8]. □

El siguiente resultado se basa fundamentalmente en las desigualdades (14) y (15).

Teorema 7.2. *El sistema* (2) *es EE si y solo si es SME.*

Prueba. Ver [8]. □

Para establecer la equivalencia entre la EMC y EXE, teorema 7.3, será de utilidad la desigualdad (16).

Lema 7.1. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Si* $\rho(A) < 1$ *entonces existen* $\beta \geq 1$ *y* $0 < \gamma < 1$ *tal que*

$$\|A^k\|_1 \leq \beta\gamma^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{16}$$

Prueba. Aplicamos el teorema de la forma canónica de Jordan para A entonces existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ no singular, tal que $A = PJP^{-1}$ y esto implica $A^k = PJ^kP^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Sea $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ los autovalores de A, entonces la matriz J^k es de la siguiente forma:

$$J^k = \begin{bmatrix} J^k_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J^k_{m_2}(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J^k_{m_{s-1}}(\lambda_{s-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J^k_{m_s}(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

donde los bloques de Jordan $J^k_{m_i}(\lambda_i)$ son de la forma siguiente:

$$J^k_{m_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \cdots & \binom{k}{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} & \cdots & \binom{k}{m_i-2}\lambda_i^{k-m_i+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k & \binom{k}{1}\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

Sea $\gamma = \rho(A) < 1$. Notamos que

$$\begin{aligned} \|J^k\|_1 &= \sum_{i=1}^{m_s}\left(\sum_{j=k-m_i+1}^{k} a_{i,j}|\lambda_i|^j\right), \quad a_{i,j} \in \mathbb{N} \\ &\leq \sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{k-j}, \quad b_j \in \mathbb{N},\ m = \max\{m_s\} \\ &= \gamma^k\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Se tiene que $\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j} \geq 1$, se define

$$\beta = \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j}\right)\|P\|_1\|P^{-1}\|_1 \geq 1$$

.

De (17) se sigue

$$\begin{aligned} \|A^k\|_1 &= \|PJ^kP^{-1}\|_1 \\ &\leq \|P\|_1\|P^{-1}\|_1\|J^k\|_1 \\ &\leq \|P\|_1\|P^{-1}\|_1\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\gamma^{-j}\right)\gamma^k \\ &= \beta\gamma^k. \end{aligned}$$

□

Estamos listos para presentar la equivalencia entre EMC y EXE.

Teorema 7.3. *El sistema* (2) *es EMC si y solo si es EXE.*

Prueba. Ver [8]. □

Teorema 7.4. *Si el sistema* (2) *es EMC entonces se tiene CSE.*

Prueba. Del teorema anterior, si el sistema (2) es EMC entonces es EXE, es decir, existen constantes positivas $0 < \alpha < 1 \leq \beta$ tales que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ se tiene

$$E\left\{\|x(k)\|^2\right\} \leq \beta\alpha^k E\left\{\|x(0)\|^2\right\},$$

Esta desigualdad implica

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|x(k)\|^2\} \leq \frac{\beta}{1-\alpha}E\left\{\|x(0)\|^2\right\}, \tag{18}$$

aplicando la desigualdad de Markov se sigue

$$\Pr\left\{\|x(k)\| \geq \epsilon\right\} \leq \frac{E\{\|x(k)\|^2\}}{\epsilon^2} \tag{19}$$

De (18) y (19) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\Pr\left\{\|x(k)\| \geq \epsilon\right\} &\leq \frac{1}{\epsilon^2}\sum_{k=0}^{\infty}E\{\|x(k)\|^2\} \\ &\leq \frac{\beta}{\epsilon^2(1-\alpha)}E\left\{\|x(0)\|^2\right\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Definiendo la sucesión de eventos

$$A_k = \{\|x(k)\| \geq \epsilon\}$$

se sigue de (20) y del lema de Borel-Cantelli que

$$\Pr\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right\} = 0.$$

Tomando complemento en esta igualdad se obtiene

$$\Pr\{\cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n^c\} = 1,$$

de donde

$$\Pr\left\{\lim_{n\to\infty} \|x(k)\| = 0\right\} = 1.$$

□

Conclusiones

1. En este trabajo se define la solución de un SLSMS.

2. Se analizaron los distintos tipos de estabilidad definidos en [1], los cuales se logró que estos sean equivalentes teniendo en cuenta que el espacio de estado es finito.

3. Encontramos un test computacional muy similar para los MJLS, el cual consiste en analizar la estabilidad mediante el radio espectral de una matriz, el cual contiene la información probabilística de la cadena de Markov y los parámetros del sistema.

---

1. Costa, Oswaldo Luiz do Valle. *Discrete-time Markov jump linear systems* Springer, London, 2005.

2. B. L. Stevens and F.L. Lewis Aircraft Modeling, Dynamics and Control , New York, NY: Wiley, 1991.

3. R.W. Newcomb The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits,, *IEEE Trans. Autom. Control* Vol CAS-28 No.1, pp.62-71, January, 1981.

4. Yuandong Ji. Chizeck Howard. Jump Linear Quadratic gaussian control: Steady-State Solution and Testable Conditions, *Control-Theory and Advanced Technology* Vol 6. No.3, pp.289-319, 1990.

5. Tejada R. Arturo. *Analysis of error recovery effects on digital flight control systems.* Ms Dissertation, Old Dominion University, 2002.

6. Feng Xiangbo. Loparo Kenneth. & Yuandong Ji. Chizeck Howard. *Stochastic Stability properties of Jump Linear Systems*,IEEE Transactions on Automatic Control, vol 37 No.1, pp. 38-53, 1992.

7. Fang, Y. *Stability analysis of linear control systems with uncertain parameters* , Ph.D. Dissertation, Dept. of Systems, Control, and Industrial Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland, OH.Springer, London, 1998.

8. Mayta G. Jorge. *Regularidad y Estabilidad de Sistemas Lineales con Saltos Markovianos en Tiempo Discreto.* Tesis M.S, Dpto. Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, 2015.