

Argumentos pro modelo escalar

H. G. Valqui

Facultad de Ciencias.

Universidad Nacional de Ingeniería

Recibido el 2 de Marzo del 2015; aceptado el 21 de Marzo del 2015

Mostramos la notable precedencia temporal del momento magnético dipolar atómico sobre la aparición de la hipótesis del spin, como complemento de tal momento dipolar. También mostramos un modelo matemático de tal momento dipolar, en el que se patentiza la arbitrariedad de la supuesta proyección del momento angular sobre el tercer eje de coordenadas, OZ.

Palabras Claves: Dipolo magnético atómico, Efecto Zeeman, Momento Angular, modelo vectorial, proyección del operador de momento angular, modelo escalar.

We show the temporal precedence of the atomic magnetic dipole over the emergence of the spin hypothesis as complement to the magnetic dipole. We present as well a mathematical model of such magnetic dipole, showing the arbitrariness of the presumed angular momentum projection on the OZ axis.

Keywords: Atomic magnetic dipole, Zeeman Effect, Angular momentum, vectorial model, projection of angular momentum operator, scalar model of angular momentum.

1 Introducción

Como ya se ha mencionado en otros artículos [1] [2], el modelo vectorial del momento angular, tanto el orbital como el intrínseco, aparece afectado por varios equívocos; ver Apéndice. Esto ha promovido la construcción de algún otro modelo que superase los mencionados equívocos. El modelo vectorial ha tenido tres argumentos de apariencia sensata: i) La forma $\mathcal{L} = \mathcal{R} \times \mathcal{P}$, heredada del caso clásico, ii) La suposición de que las 3 componentes Q_1, Q_2, Q_3 de un operador vectorial \mathcal{Q} deberían corresponder los ejes de coordenadas OX, OY, OZ, respectivamente, como es parcialmente el caso del operador de gradiente, ∇ , iii) La tentación de considerar tales 3 componentes como si fuesen, de alguna manera, proyecciones del operador \mathcal{Q} sobre los mencionados ejes; lo cual ni siquiera es justificable en el caso del operador ∇ .

2 Dipolo magnético y momento angular

Por otra parte, suele insinuarse que el dipolo magnético, orbital o intrínseco, surge como una magnitud originada por la existencia de los correspondientes momentos angulares orbital e intrínseco. Pero el asunto es justamente al contrario. En 1896, Zeeman descubrió experimentalmente que los átomos sometidos a un campo magnético exterior, cambiaban los niveles de energía del espectro atómico, lo cual sugería la existencia de un dipolo magnético atómico [Todavía no existía el modelo de los electrones girando alrededor de un núcleo]. Posteriormente, en 1915, Stern y Gerlach descubrieron, también experimentalmente, que los electrones al in-

teractuar con un campo magnético \mathbf{B} , provisto de una gradiente intensa, eran forzados a seguir diferentes trayectorias discretas. En 1916, Sommerfeld sugirió la existencia de un momento dipolar intrínseco de los electrones, que permitía explicar las desviaciones discretas mencionadas. Recién en 1925, los físicos Uhlenbeck y Goudsmit plantearon la hipótesis de la existencia de momento angular intrínseco, que denominaron spin, por suponer que tal momento angular sería causado por la rotación del electrón sobre su propio eje. Específicamente plantearon que $s = 1/2$, $M_{mag} / M_{mech} = e/2\mu c$.

3 Modelo matemático de un momento magnético dipolar.

Lo interesante de este modelo [3] radica en la creación de un dipolo magnético producido por corrientes eléctricas físicamente inexistentes. Para el átomo de hidrógeno, en coordenadas esféricas, ensayamos la separación de variables $\chi(r, \theta, \phi) = \eta(r)g(\theta)f(\phi)$. Por otra parte, en el caso de la ecuación de Schrödinger, se cumple la ley de conservación de la probabilidad

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} + \partial\rho = 0$$

donde

$$\rho = |\Psi|^2,$$

$$\mathfrak{S} = (1/\mu)Re[\Psi^* \mathbf{P}\Psi] = (1/2\mu)[\Psi^* \mathbf{P}\Psi + (\Psi^* \mathbf{P}\Psi)^*].$$

En el presente caso,

$$\rho = |\chi(r, \theta, \phi)|^2, \quad \mathfrak{S} = (1/\mu)Im[\chi^* \mathbf{P}\chi].$$

Ahora usaremos un “truco matemático”: Si designamos con e la carga del electrón, entonces *definimos una densidad de carga* (matemática), la misma que producirá una *densidad de corriente* (matemática) según:

$$\rho_e = e\rho = e|\chi|^2, \quad \mathfrak{S}_e = e\mathfrak{S},$$

con lo cual la expresión de la conservación de la probabilidad se transforma en la expresión de la conservación de la carga.

Luego, teniendo presente que en coordenadas esféricas $\mathbf{P} = h/i[\mathbf{e}_r D_r + (1/r)\mathbf{e}_\theta + (1/r \cdot \text{sen}\theta)\mathbf{e}_\phi D_\phi]$ podemos verificar que $\chi^* D_r \chi$ es real, $\chi^* D_\theta \chi$ es real, mientras que $\chi^* D_\phi \chi = im\chi^* \chi$ es imaginario; es uno de los valores propios de \mathcal{L}_3 .

4 Momento magnético dipolar

Por otra parte obtenemos $\mathfrak{S} = (hm)/(mr \text{sen}\theta)|\chi|^2 \mathbf{e}_\phi$; esta densidad de corriente de probabilidad –multiplicado por e – puede ser (matemáticamente) interpretada como la densidad de una corriente (matemática) que circula alrededor del eje Z . Entonces, si consideramos un anillo circular “horizontal” de radio $r \cdot \text{sen}\theta$ y sección transversal $d\mathbf{a} = (r d\theta) \cdot dr \mathbf{e}_\phi$, la corriente que circula por dicho anillo diferencial sería

$$dI = \mathfrak{S}_e \cdot d\mathbf{a} = ehm/(\mu r \text{sen}\theta)|\chi|^2 da$$

Esta corriente produciría un dipolo magnético, cuyo momento sería:

$$d\mathbf{M} = (1/c)[\pi(r \text{sen}\theta)^2 \mathbf{e}_3] \cdot dI = m M_B \mathbf{e}_3 |\chi|^2 2\pi r^2 \text{sen}\theta dr \cdot d\theta,$$

donde $M_B = |e|h/2\mu c$, es el llamado magnetón de Bohr. Integrando en todo el espacio y considerando la condición de normalización $\int |\chi|^2 dV = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |\chi|^2 = 1$, obtenemos el momento magnético dipolar orbital total:

$$\mathbf{M}_{dip \text{ mag } or} = M_B \mathbf{e}_3 \quad [*]$$

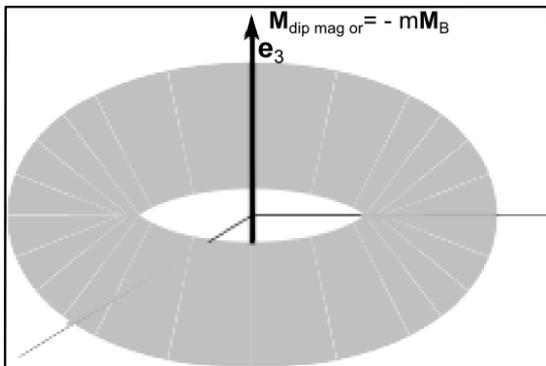


Figura 1. Dipolo magnético orbital generado por una corriente matemática alrededor del eje OZ , cuya dirección es arbitraria.

Lo extraordinario de este modelo matemático (que como tal no tendría manifestación física) radica en que cuando el átomo, en particular el átomo de hidrógeno, es colocado en un campo magnético exterior \mathbf{B} , aparece la interacción del mencionado momento dipolar con el campo \mathbf{B} , lo que se manifiesta en el llamado efecto Zeeman normal. La energía de interacción del dipolo magnético \mathbf{M} con el campo magnético \mathbf{B} tiene la forma $W = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$, lo que en el presente caso sería nos sugiere cómo construir el operador de interacción entre el operador de momento magnético y un campo magnético: $W = -\mathbf{M}_{dip \text{ mag } or} \cdot \mathbf{B} = -[(|e|h/2\mu c)m\mathbf{e}_3] \cdot \mathbf{B}$, que es el término que se añade al hamiltoniano no magnético para calcular el llamado Efecto Zeeman Normal producido por el campo magnético exterior \mathbf{B} .

5 El Operador Momento dipolar magnético orbital

Por otra parte debemos tener presente que aquí m es el número cuántico angular, tal que

$$\mathcal{L}_3 \chi = mh\chi \quad [**]$$

donde equivocadamente a \mathcal{L}_3 suele considerársele la “proyección del operador” de momento angular \mathcal{L} sobre el eje OZ . En el artículo sobre el modelo escalar [?] se muestra que la expresión [**] es en realidad válida para el mismo operador \mathcal{L} ; es decir, $\mathcal{L}\chi = mh\chi$, lo que adicionalmente se justifica porque el eje OZ , y con ello la supuesta proyección \mathcal{L}_3 , es determinado en una dirección completamente arbitraria. Las expresiones [*] y [**] sugieren, como en el caso clásico, una relación de proporcionalidad entre el vector $\mathbf{M}_{dip \text{ mag } or}$ y el operador \mathcal{L} . Con tal fin primeramente definimos el operador multiplicativo $\mathcal{M}_{dip \text{ mag } or}$, tal que, $\mathcal{M}_{dip \text{ mag } or} \chi = \mathbf{M}_{dip \text{ mag } or} \chi$; lo que nos permite escribir

$$\mathcal{M}_{dip \text{ mag } or} = (|e|/2mc)\mathcal{L}$$

Aquí también conviene mencionar que en el modelo escalar de momento angular aparece un operador \mathcal{J} (diferente de \mathcal{L}), cuyos valores propios se obtienen de la relación $\mathcal{J}\chi = j(j+1)h^2\chi$, cumpliéndose que $-j \leq m \leq j$, siendo tanto j (no negativo) como m , números semi-enteros, es decir, $2j$, $2m$ son números enteros. Es decir, los valores propios de \mathcal{J} indican los valores extremos que pueden tomar los valores propios del operador \mathcal{L} de momento angular.

5.1 Hamiltoniano para un átomo en un campo magnético

Otra forma de ver la relación de los dipolos magnéticos con los momentos angulares, lo proporciona el hamiltoniano para un átomo en un campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$,

$$\mathbf{H}_B = (1/2m)[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} - q/c\mathbf{A})]^2 + V$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la matriz vectorial cuyas componentes son las matrices de Pauli. Se puede verificar que:

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{P} - q/c\mathbf{A})]^2 = (\mathbf{P} - q/c\mathbf{A})^2 - (qh/c)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B},$$

de manera que si H es el hamiltoniano sin campo magnético se puede escribir

$$\mathbf{H}_B = H - (q/2c)[\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} - h\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}] + (q^2/2c^2)\mathbf{A}^2,$$

Si \mathbf{B} es un campo uniforme, entonces una solución de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ es $\mathbf{A} = (1/2)\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, con $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, lo cual permite escribir, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{B} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{P}$; es decir, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathcal{L}$; consecuentemente,

$$\mathbf{H}_B = H - (q/2\mu c)\mathbf{B} \cdot (\mathcal{L} + 2\mathcal{S}) + (q^2/8\mu c^2)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})^2 \quad [***]$$

donde $\mathcal{S} = (h/2)\boldsymbol{\sigma}$ es el llamado operador de spin.

5.2 Energía de interacción magnética

En [***] la expresión $\mathbf{B}(\mathcal{L} + 2\mathcal{S})$ contiene al operador de momento angular \mathcal{L} ; pero $\mathcal{L} + 2\mathcal{S}$ no es operador de momento angular. En cambio, tanto $(q/2\mu c)\mathcal{L}$ como $(q/\mu c)\mathcal{S}$ son operadores de dipolo magnético y, por supuesto la interacción del campo \mathbf{B} no es con el operador $\mathcal{L} + 2\mathcal{S}$, sino con el dipolo magnético total

$(q/2\mu c)(\mathcal{L} + 2\mathcal{S})$. En este caso también, en el modelo vectorial, se elije el sistema de coordenadas de manera que el eje OZ sea paralelo al campo \mathbf{B} , lo que produce que la energía de interacción magnética tome la forma $(q/2\mu c)B(\mathcal{L}_3 + 2\mathcal{S}_3)$; mientras que en el modelo escalar dicha energía se expresa simplemente como $(q/2\mu c)B(\mathcal{L} + 2\mathcal{S})$.

6 Conclusiones

- La hipótesis del spin apareció recién 29 años después que surgiera experimentalmente el momento dipolar atómico, y las interacciones de los átomos con un campo magnético exterior no requieren de la existencia del spin.
- Los productos $\mathbf{B} \cdot \mathcal{L} = B\mathcal{L}_z$, $\mathbf{B} \cdot \mathcal{S} = B\mathcal{S}_z$ del modelo vectorial aparecen en el modelo escalar directamente como los productos $B\mathcal{L}$, $B\mathcal{S}$, respectivamente.
- Como consecuencia de la no existencia de las supuestas proyecciones $\mathcal{L}_3, \mathcal{S}_3$, también desaparece la llamada rotación de Larmor (pero no desaparecen necesariamente las frecuencias de Larmor).

1. H. G. Valqui, Modelo Escalar del Momento Angular, REVCUNI 17 (1), 1-4, 2014.
2. H. G. Valqui, Suma de momentos angulares escalares,

REVCUNI 17 (1), 5-8, 2014.

3. H. G. Valqui, Apuntes de Mecánica Cuántica II, 2015.