Matrices Exponenciales y su relación con las matrices confluentes de Vandermonde

Jesús Cernades Gómez† y William Carlos Echegaray Castillo‡
Escuela Profesional de Matemática. Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
†*cernadesgomez@hotmail.com*, ‡*williamechegaray@yahoo.com.br*

Recibido el 26 de Junio del 2014; aceptado el 25 de Julio del 2014

Sea una matriz $A \in \mathbb{C}(n,n)$ y deseamos calcular su matriz exponencial e^{tA} conociendo solamente los valores propios de A, no es necesario conocer los respectivos vectores propios. El enfoque que se presenta es la relación entre la matriz exponencial con las matrices confluentes de Vandermonde V. Este enfoque y los métodos resultantes son muy simples y pueden ser considerados como una alternativa al usar la forma canónica de Jordan. El análisis de los algoritmos para inversión de la matriz V, así como la representación matricial de V^{-1} son de interés independiente en muchas otras aplicaciones.

Palabras Claves: Matriz exponencial, matriz de Vandermonde.

Let $A \in \mathbb{C}(n,n)$ be a matrix and we wish to compute the matrix exponential e^{tA} under the assumption that the eigenvalues of A are known, but without determining the eigenvectors. The presented approach exploits the connection between matrix exponentials and confluent Vandermonde matrices V. This approach and the resulting methods are very simple and can be regarded as an alternative to the Jordan canonical form method. The inversion algorithms analysis for V as well as the matrix representation of V^{-1} are of independent interest also in many other applications.

Keywords: Matrix exponential, Vandermonde matrix.

1 Introducción

Sabemos que la exponencial de una matriz $A \in \mathbb{C}(n,n)$, denotada e^A, está definida por

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}. \tag{1}$$

Como vemos la serie (1) es una suma, generalmente, de términos infinitos, en este trabajo propondremos una manera de expresarla de manera más sencilla y sobre todo como una serie de términos finitos, es decir usando las primeras $(n-1)$ potencias de A; autores como [1], [2] y [3] proponen otros métodos para determinar y expresar la matriz exponencial e^{tA} como una serie de términos finitos.

En el presente trabajo empezaremos dando la definición de la matriz confluente de Vandermonde de la matriz A, luego resolveremos una ecuación diferencial ordinaria y con ello hallaremos una relación que existe entre la matriz exponencial e^{tA} y la inversa de la matriz confluente de Vandermonde asociada a la matriz A. En seguida generamos un algoritmo para la determinación de la inversa de la matriz confluente de Vandermonde, para ello nosotros precisamos de los coeficientes de la descomposición parcial de $det(\lambda I - A)^{-1}$. El algoritmo es también estudiado de una manera diferente como en [4]. Se presentará un segundo algoritmo donde no será necesario encontrar la descomposición parcial. Se darán algunos ejemplos que nos permitan ver la eficiencia de los algoritmos dados en este trabajo, así como también la forma compacta de la matriz inversa de la confluente de Vandermonde V y algunos otras tentativas para la mejora en el proceso de generar los algoritmos. Ambos algoritmos son rápidos, y su complejidad computacional es $O(n^2)$.

El trabajo es organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se dará la definición de la matriz confluente de Vandermonde asociada a una matriz A. En la sección 3 empezaremos dando un algoritmo para determinar los coeficientes del polinomio característico asociado a la matriz A y se demostrará la conexión que existe entre la matriz exponencial e^{tA} con la matriz confluente de Vandermonde V asociada a la matriz A. Dedicaremos la sección 4 para hallar la inversa de la matriz confluente de Vandermonde V, generando dos algoritmos diferentes, donde el segundo algoritmo es una variante del primero ya que en el segundo algoritmo se determinará los coeficientes de la descomposición parcial de la inversa del polinomio característico $p^{-1}(\lambda)$ se A, es decir los coeficientes p_{ij} de

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{p_{ij}}{(\lambda - \lambda_i)^j},$$

finalmente daremos algunos comentarios y culminaremos con las conclusiones.

2 Definición de la Matriz de Vandermonde Generalizada

Las matrices de Vandermonde nos ayudan a desarrollar problemas de interpolación polinomial, solucionar sucesiones en forma recursiva, resolver ecuaciones diferenciales, entre otras aplicaciones, una matriz de Vandermonde está definida de la siguiente forma

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

cuyo determinante en su forma compacta está dada por

$$det(V(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \quad (3)$$

Para definir la matriz de Vandermonde generalizada, primero consideremos el siguiente polinomio

$$p(x) = (x - x_1)^{\nu_1}(x - x_2)^{\nu_2} \cdots (x - x_m)^{\nu_m},$$

cuyas raíces x_j son distintas, ν_j son sus multiplicidades y $\nu_1 + \nu_2 \cdots + \nu_m = n$, también denotemos el vector columna $f(t) = [1,\ t,\ t^2,\ \cdots,\ t^{n-1}]^T$ y por $f^{(k)}(t)$ la $k-$ésima derivada de este vector columna, se define la matriz $V_i(f) \in \mathbb{C}(n, \nu_i)$ cuyas columnas son de la forma $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_i)$ para $k = 0, 1, \cdots, \nu_i - 1$ y de esta manera se tiene la matriz generalizada de Vandermonde

$$V(p) = [V_1(f_p)\ V_2(f_p)\ \cdots\ V_m(f_p)], \quad (4)$$

llamada también matriz confluente de Vandermonde.

Ejemplo 2.1. *Consideremos el siguiente polinomio*

$$p(x) = (x - a)^3(x - b)^2,$$

luego tenemos $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$, $n = \nu_1 + \nu_2 = 5$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $V_1 \in \mathbb{C}(5, 3)$ *y* $V_2 \in \mathbb{C}(5, 2)$, *entonces la matriz de Vandermonde generalizada tiene la forma* $V(p) = [V_1(f_p)\ V_2(f_p)]$, *donde*

$$V_1(f_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 \\ a^3 & 3a^2 & 3a \\ a^4 & 4a^3 & 6a^2 \end{bmatrix}, \quad y \quad V_2(f_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \\ b^2 & 2b \\ b^3 & 3b^2 \\ b^4 & 4b^3 \end{bmatrix}.$$

La matriz confluente de Vandermonde también se puede expresar de la siguiente manera

$$V(p) = [V_1\ V_2\ \cdots\ V_m], \quad (5)$$

donde la matriz $V_k = V(x_k, \nu_k) \in \mathbb{C}(n, \nu_k)$ posee los siguientes elementos

$$V(x_k, \nu_k)_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} x_k^{i-j}, & i \ge j \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases} \quad (6)$$

donde $k = 1, 2, \cdots, m$, $i = 1, 2, \cdots, n$ y $j = 1, 2, \cdots, \nu_k$, ver [5] y [4].

Una generalización de la determinante dado en (3) está dada por

$$det(V(p)) = \prod_{1 \le i < j \le m} (x_j - x_i)^{\nu_i \nu_j} \quad (7)$$

la cual es la determinante generalizada de Vandermonde, para detalles ver ([5]).

3 Relación entre la matriz exponencial y las matrices confluentes de Vandermonde

En esta sección veremos la relación de la exponencial e^{tA} con la matriz confluente de Vandermonde $V(p)$, donde $A \in \mathbb{C}(n, n)$ y p es su polinomio característico.
Consideremos el polinomio p definido por

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad (8)$$

cuyas raíces $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ son los valores propios de A con sus respectivas multiplicidades $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m$ y además $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m = n$, por tanto (8) queda expresado como sigue

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\nu_m}, \quad (9)$$

denotaremos al par (λ_i, ν_i), $i = 1, \cdots, m$ donde λ_i es el valor propio de A y su respectiva multiplicidad ν_i.
Ahora veremos una forma de calcular la exponencial e^{tA} a través de la matriz confluente de Vandermonde. Sabemos que la solución de la ecuación diferencial con valor inicial

$$\begin{cases} x' & = & Ax \\ x(0) & = & v \end{cases} \quad (10)$$

está dada por $x(t) = e^{tA}v$, donde cada fila de la matriz columna $e^{tA}v$ es una combinación lineal de las funciones

$$e^{\lambda_1 t}, \frac{t}{1!}e^{\lambda_1 t}, \cdots, \frac{t^{\nu_1 - 1}}{(\nu_1 - 1)!}e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_m t}, \cdots, \frac{t^{\nu_m - 1}}{(\nu_m - 1)!}e^{\lambda_1 t}, \quad (11)$$

cuya combinación es solución de la ecuación diferencial lineal de orden n dada por

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = 0, \quad (12)$$

donde las constantes están dadas en (8), las cuales se pueden obtener, también, de la siguiente forma iterativa

$$\begin{array}{ll} B_1 = I, & a_1 = -\frac{1}{1}tr(AB_1), \\ B_2 = AB_1 + a_1 I, & a_2 = -\frac{1}{2}tr(AB_2), \\ \vdots & \vdots \\ B_n = AB_{n-1} + a_{n-1}I, & a_n = -\frac{1}{n}tr(AB_n), \end{array} \quad (13)$$

con $0 = AB_n + a_n I$, mayor referencia ver ([6], [7], [8]). Luego la solución de la ecuación (10) puede ser expresada

$$x(t) = Ce(t) \quad (14)$$

donde C es una matriz de orden $n \times n$ y

$$e(t) = (e^{\lambda_1 t}, \cdots, \frac{t^{\nu_1 - 1}}{(\nu_1 - 1)!}e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_m t}, \cdots, \frac{t^{\nu_m - 1}}{(\nu_m - 1)!}e^{\lambda_m t})^T.$$

Ahora determinemos la matriz C dada en (14) y la solución obtenida la compararemos con (10).
De la ecuación (14) obtenemos $x^{(k)}(t) = Ce^{(k)}(t)$ y por la condición inicial de la ecuación diferencial $x(0) = v$ se tiene $x^{(k)}(0) = A^k v$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$:

$$Ce^{(k)}(0) = A^k v, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1. \qquad (15)$$

Consideremos los vectores $e(0), e^{(1)}(0), \cdots, e^{(n-1)}(0)$ y $v, Av, \cdots, A^{n-1}v$ las columnas de las matrices V y A_v, respectivamente

$$V = [e(0)\, e^{(1)}(0)\, \cdots\, e^{(n-1)}(0)],\ A_v = [v\, Av\, \cdots,\ A^{n-1}v]. \qquad (16)$$

Entonces la ecuación (15) la podemos reescribir de la forma matricial

$$CV = A_v. \qquad (17)$$

Observamos que la matriz V tiene la estructura de la transpuesta de la matriz confluente de Vandermonde dada en (5), es decir,

$$V = \begin{bmatrix} V(\lambda_1, \nu_1) \\ V(\lambda_2, \nu_2) \\ \vdots \\ V(\lambda_m, \nu_m) \end{bmatrix},$$

donde

$$V(\lambda, \nu) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \cdots & & \binom{n-1}{0}\lambda^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 & \cdots & & \binom{n-1}{1}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 3\lambda & \cdots & & \binom{n-1}{2}\lambda^{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{v-1}\lambda^{n-\nu} \end{bmatrix}$$

cuyo orden es $n \times \nu$ y por la ecuación (7) la matriz V es no-singular.

Ejemplo 3.1. *Consideremos que cierta matriz A, cuyo orden es 6×6, posee el siguiente polinomio característico*

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^3 (\lambda - 3)^1,$$

entonces se tiene que

$$V(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$V(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 24 & 80 \end{bmatrix},$$

$$V(3,1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \end{bmatrix},$$

de donde

$$V = \begin{bmatrix} V(1,2) \\ V(2,3) \\ V(3,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 80 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 24 & 80 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \end{bmatrix},$$

y $det(V) = (2-1)^{3\times 2}(3-1)^{2\times 1}(3-2)^{1\times 3} = 4.$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las ecuaciones (14) y (17).

Lema 3.1. *La solución $x(t)$ del problema de valor inicial en (10) es dado por*

$$x(t) = e^{tA}v = A_v V^{-1} e(t), \qquad (18)$$

donde V, A_v son definidos en (16).

4 Algoritmo recursivo para la inversión de V

En lo sucesivo se denotará e_k el $k-$ésimo vector unitario y w_{k-1}^T es la $k-$ésima vector fila de V^{-1}, es decir, $w_{k-1}^T = e_k^T V^{-1}$.

Lema 4.1. *El vector $y(t) = V^{-1}e(t)$ es la solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' &= By \\ y(0) &= e_1, \end{cases} \qquad (19)$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

y $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ son los coeficientes del polinomio característico (8).

Prueba:
La matriz B es exactamente la matriz compañera del polinomio característico dado en (8) y sabemos del lema (3.1) que la solución para la ecuación diferencial (19) es

$$y(t) = B_{e_1} V^{-1} e(t)$$

y por (16) se tiene $B_{e_1} = [e_1, Be_1, \cdots B^{n-1}e_1] = I_n$, y por tanto, tenemos

$$y(t) = V^{-1}e(t). \qquad \blacksquare$$

El siguiente resultado que es una consecuencia del lema (3.1) y (4.1) representa a e^{tA} en suma finita.

Teorema 4.1. *La matriz e^{tA} puede ser representada como*

$$e^{tA} = y_0(t)I + y_1(t)A + \cdots + y_{n-1}(t)A^{n-1}, \qquad (20)$$

donde $y(t) = (y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t))^T = V^{-1}e(t)$

Prueba:
De la ecuación (8) y del teorema de Chayley-Hamilton se tiene que

$$p(A) = 0.$$

Si denotamos por D como el operador diferencial, entonces tendremos que

$$p(D)e^{tA} = 0,$$

de esta última consecuencia se garantiza que cada componente de la matriz e^{tA} es combinación lineal de una solución fundamental de la ecuación diferencial (12). Sea entonces

$$\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{n-1}(t),$$

soluciones fundamentales de la ecuación (12), luego matriz e^{tA} se puede escribir como una combinación lineal

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \phi_0(t)F_0 + \phi_1(t)F_1 + \cdots + \phi_{n-1}(t)F_{n-1} \\ &= [\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{n-1}(t)] \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{21}$$

de una manera única, con $F_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices constantes, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Derivando la ecuación (21), se tiene

$$\phi_0^{(i)}(0)F_0 + \phi_1^{(i)}(0)F_1 + \cdots + \phi_{n-1}^{(i)}(0)F_{n-1} = A^i,$$

para $i = 0, 1, \cdots, n-1$ y además representamos $W[\phi, t]$ el Wronskiano de solución fundamental $\phi_0(t)$, $\phi_1(t), \cdots, \phi_{n-1}(t)$, es decir

$$W[\phi, t] = \begin{bmatrix} \phi_0(t) & \phi_1(t) & \cdots & \phi_{n-1}(t) \\ \phi_0^{(1)}(t) & \phi_1^{(1)}(t) & \cdots & \phi_{n-1}^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0^{(n-1)}(t) & \phi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \phi_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

entonces obtendremos la ecuación matricial

$$W[\phi, 0] \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix},$$

y como $W[\phi, 0]$ es invertible se tiene

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = W[\phi, 0]^{-1} \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Luego en la ecuación (19) se tendrá

$$e^{tA} = [\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{n-1}(t)] W[\phi, 0]^{-1} \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Finalmente como

$$y(t) = (y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t)) = V^{-1}e(t),$$

entonces cada componente es combinación lineal de la solución fundamental $\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{n-1}(t)$ de (12) luego existirá una matriz $C \in \mathbb{C}$ tal que

$$[y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t)] = [\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{n-1}(t)]C,$$

entonces

$$W[y, t] = W[\phi, t]C,$$

luego tenemos

$$W[y, t]W[y, 0]^{-1} = W[\phi, t]W[\phi, 0]^{-1},$$

y del lema (4.1) se tiene que $W[y, 0] = I$, entonces

$$[y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t)] = [\phi_0(t), \phi_1(t), \cdots, \phi_{n-1}(t)]W[\phi, 0]^{-1},$$

y por lo tanto tendremos

$$\begin{aligned} e^{tA} &= [y_0(t), y_1(t), \cdots, y_{n-1}(t)] \begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= y_0(t)I + y_1(t)A + \cdots + y_{n-1}(t)A^{n-1} \end{aligned}$$

■

Corolario 4.1. *Las componentes del vector $y(t)$, pueden recursivamente ser determinado a partir de $y_{n-1}(t)$:*

$$y_{k-1}(t) = y_k'(t) + a_k y_{n-1}(t), \quad k = n-1, \cdots, 1 \tag{22}$$

Prueba:
De la ecuación (19) tenemos

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n-2}(t) \\ y_{n-1}(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{n-2}(t) \\ y_{n-1}(t) \end{bmatrix},$$

de donde se obtiene

$$y_k'(t) = y_{k-1}(t) - a_k y_{n-1}(t),$$

para $k = n-1, \cdots, 1$ y para $k = 0$ se obtiene

$$y_0'(t) = -a_0 y_{n-1}(t)$$

y con ello se tiene la ecuación (22). ■

Definiendo la matriz diagonal por bloques

$$\widetilde{J} = diag(\widetilde{J}_1, \cdots, \widetilde{J}_m), \tag{23}$$

donde $\widetilde{J}_i = \lambda_i$ en caso $\nu_i = 1$, en caso contrario se tiene

$$\widetilde{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & & \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \lambda_i & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $y(t) = V^{-1}e(t)$, entonces

$$e_k^T y(t) = y_{k-1}(t) = e_k^T V^{-1} e(t) = w_{k-1} e(t),$$

y además sabemos que las ν_i componentes a partir de i de $e'(t)$ tiene la forma

$$\lambda_i e^{\lambda_i t}, \frac{e^{\lambda_i t} + \lambda_i t e^{\lambda_i t}}{1!}, \cdots, \frac{(\nu_i - 1)t^{\nu_i - 2} e^{\lambda_i t} + \lambda_i t^{\nu_i - 1} e^{\lambda_i t}}{(v_i - 1)!},$$

para $i = 1, \cdots, m$, el cual la denotamos por $e'_i(t)$ con lo cual obtenemos la siguiente expresión

$$e'_i(t) = \widetilde{J}_i^T e_i(t),$$

luego del corolario (4.1) y de la expresión anterior se tiene que

$$\begin{array}{rcl} y'_k(t) + a_k y_{n-1} & = & w_k^T e'(t) \\ w_{k-1}^T e(t) & = & w_k^T \widetilde{J}^T e(t) + a_k w_{n-1}^T e(t) \end{array}$$

y por tanto obtenomos el siguiente

Lema 4.2. *Las filas $w_0^T, \cdots, w_{n-1}^T$ de V^{-1} satisface la recurrencia*

$$w_{k-1} = \widetilde{J} w_k + a_k w_{n-1}, \tag{24}$$

para $k = n-1, \cdots, 1, 0$, donde $w_{-1} = 0$.

Como se observa el problema de obtener los w_k depende basicamente del término w_{n-1} de V^{-1}. debido a esta finalidad se hará la descomposición $p^{-1}(\lambda)$ como fracciones parciales, esto es

$$\frac{1}{p(\lambda)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{p_{ij}}{(\lambda - \lambda_i)^j}, \tag{25}$$

para mayor detalle ver ([9]).

Observación 4.1. *Del corolario (4.1) se tiene que*

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & y'_0(t) + a_0 y_{n-1}(t) \\ y_0(t) & = & y'_1(t) + a_1 y_{n-1}(t) \\ y_1(t) & = & y'_2(t) + a_2 y_{n-1}(t) \\ & \vdots & \\ y_{n-2}(t) & = & y'_{n-1}(t) + a_{n-1} y_{n-1}(t), \end{array}$$

derivando la expresión anterior a partir de la segunda línea tenemos

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & y'_0(t) + a_0 y_{n-1}(t) \\ y'_0(t) & = & y''_1(t) + a_1 y'_{n-1}(t) \\ y''_1(t) & = & y_2^{(3)}(t) + a_2 y''_{n-1}(t) \\ & \vdots & \\ y_{n-2}^{(n-1)}(t) & = & y_{n-1}^{(n)}(t) + a_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(t), \end{array}$$

luego sumando se obtiene

$$0 = y_{n-1}^{(n)}(t) + a_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y_{n-1}(t), \tag{26}$$

es decir y_{n-1} es una solución de (12).

Teorema 4.2. *La última fila de w_{n-1}^T de V^{-1} es dado por los coeficientes de (25) como sigue*

$$w_{n-1}^T = \left(p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1\nu_1}, \cdots, p_{m1}, \cdots, p_{m\nu_m}\right) \tag{27}$$

Prueba:
Del lema (4.1) sabemos que $y(t) = (y_0(t), \ldots, y_{n-1}(t))^T$ satisface la ecuación (19), de donde se tiene

$$y^k(0) = B^k y(0) = B^k e_1 = e_{k+1},$$

para $k = 0, 1, \cdots, n-1$.
Y de esto último obtenemos que

$$y_{n-1}(0) = \cdots = y_{n-1}^{(n-2)}(0) = 0, \quad y_{n-1}^{(n-1)}(0) = 1. \tag{28}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (26) y con condiciones inciales dadas en (28) se tiene

$$\mathscr{L}\{y_{n-1}(t)\}(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0) = 1,$$

de donde

$$\begin{aligned} y_{n-1}(t) = \mathscr{L}^{-1}[p^{-1}(s)] &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} p_{ij} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\lambda_i)^j}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{p_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{\lambda_i t} \\ &= \left(p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1\nu_1}, \cdots, p_{m1}, \cdots, p_{m\nu_m}\right) e(t), \end{aligned}$$

y como $y_{n-1}(t) = w_{n-1}^T e(t)$ obtendremos
$w_{n-1}^T = \left(p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1\nu_1}, \cdots, p_{m1}, \cdots, p_{m\nu_m}\right).$ ■

Ahora nos econtramos en condición de mencionar el siguiente algoritmo para la matriz inversa confluente de Vandermonde V.

Algorithm 1: Algoritmo de recurrencia para la matriz inversa confluente de Vandermonde asociada a la matriz A

```
Ingresa la matriz A;
Calcule los coeficientes a_i dados en la ecuación(13);
Determine J~ dado en (23);
Calcule los coeficientes p_ij de la ecuación (19);
Calcule w_{n-1} del teorema (4.2);
for k = n-1, ..., 1 do
    w_{k-1} = J~ w_k + a_k w_{n-1}
end
Salida V^{-1} = [w_0, w_1, ..., w_{n-1}]^T;
Fin del algoritmo
```

Ejemplo 4.1. *Sea la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora procederemos a calcular con el algoritmo (1) la matriz inversa confluente de Vandermonde asociada a esta matriz A:
Con la ecuación (13) obtenemos los coeficientes $a_3 = 3$, $a_2 = -6$, $a_1 = -28$ y $a_0 = -24$, con ellos determinamos el polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 6\lambda^2 - 28\lambda - 24$ cuyos valores propios son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad $\nu_1 = 3$ y $\lambda_2 = 3$ con $\nu_2 = 1$.
De la ecuación (19) se tiene

$$\widetilde{J} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego, fácilmente se obtiene la descomposición parcial de $\frac{1}{p(s)}$

$$\frac{1}{(s+2)^3(s-3)} = \frac{-1/125}{(s+2)^1} + \frac{-1/25}{(s+2)^2} + \frac{-1/5}{(s+2)^3} + \frac{1/125}{s-3}.$$

Del teorema (4.2) se tiene

$$w_{n-1} = w_3 = \left(-\frac{1}{125}, -\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{125}\right)^T$$

y usando el lema (4.2) tenemos la siguiente matriz

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{117}{125} & -\frac{12}{125} & -\frac{6}{125} & -\frac{1}{125} \\ \frac{42}{25} & \frac{13}{25} & -\frac{6}{25} & -\frac{1}{25} \\ \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{125} & \frac{12}{125} & \frac{6}{125} & \frac{1}{125} \end{bmatrix}^T,$$

como $e(t) = (e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t}, e^{3t})^T$ *y también tenemos* $y(t) = (y_0(t), y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T = V^{-1}e(t)$, *y con ello obtenemos*

$$y_0(t) = -\frac{117}{125}e^{-2t} + \frac{42t}{25}e^{-2t} + \frac{12t^2}{5}e^{-2t} + \frac{8}{125}e^{3t}$$

$$y_1(t) = -\frac{12}{125}e^{-2t} + \frac{13t}{25}e^{-2t} + \frac{8t^2}{5}e^{-2t} + \frac{12}{125}e^{3t}$$

$$y_2(t) = -\frac{6}{125}e^{-2t} - \frac{6t}{125}e^{-2t} - \frac{t^2}{5}e^{-2t} + \frac{6}{125}e^{3t}$$

$$y_3(t) = -\frac{1}{125}e^{-2t} - \frac{t}{25}e^{-2t} - \frac{t^2}{5}e^{-2t} + \frac{1}{125}e^{3t},$$

y finalmente tendremos que

$e^{tA} = y_0(t)I + y_1(t)A + y_2(t)A^2 + y_3(t)A^3.$ □

Obtener los coeficientes p_{ij}, dados por la ecuación (25) no es tarea fácil, aunque dado a conocer la matriz confluente de Vandermonde se puede generar un algoritmo para determinarlos, para ello introducimos las siguientes matrices diagonales por bloques con bloques triangulares superiores Toeplitz,

$P = diag(P_1, \cdots, P_m)$ con

$$P_k = \begin{bmatrix} p_{k\nu_k} & p_{k\nu_k-1} & \cdots & p_{k1} \\ & p_{k\nu_k} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & p_{k\nu_k-1} \\ 0 & & & p_{k\nu_k} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

donde $k = 1, \cdots, m$.
Luego, sea h_{n-1} un vector que está conformado por los vectores unitarios $e_{\nu_1}, e_{\nu_1+\nu_2}, \cdots, e_n$, es decir,

$$h_{n-1} = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{\nu_1}, \underbrace{0,\cdots,0,1}_{\nu_2}, \cdots, \underbrace{0,\cdots,0,1}_{\nu_m})^T,$$

y sabemos que por el teorema (4.2) que

$$w_{n-1} = Ph_{n-1} \tag{30}$$

Consideremos la recursión

$$h_{k-1} = \widetilde{J}h_k + a_k h_{n-1}, \tag{31}$$

donde $k = n-1, \cdots, 1$.
El siguiente lema nos permite determinar de otra forma las filas w_{k-1}^T de V^{-1}.

Lema 4.3. *Si (30) se satisface, entonces*

$$w_{k-1} = Ph_{k-1}, \tag{32}$$

para $k = n-1, \cdots, 1$.

Prueba:
De la ecuación (30) y (31) tenemos

$$\begin{array}{rcl} Ph_{k-1} & = & P\widetilde{J}h_k + a_k Ph_{n-1} \\ & = & P\widetilde{J}h_k + a_k w_{n-1} \end{array}, \tag{33}$$

para $k = n-1, \cdots, 1$. De la ecuación (23) y (29) se tiene que $\widetilde{J}_k P_k = P_k \widetilde{J}_k$ y por tanto $\widetilde{J}P = P\widetilde{J}$, entonces de la ecuación (33) se obtiene

$$Ph_{k-1} = \widetilde{J}Ph_k + a_k w_{n-1}, \tag{34}$$

para $k = n-1, \cdots, 1$.
Si $k = n-1$, entonces de la ecuación (34) tendremos

$$Ph_{n-2} = \widetilde{J}Ph_{n-1} + a_{n-1}w_{n-1},$$

y del lema (4.2) se tiene

$$Ph_{n-2} = w_{n-2},$$

entonces procediendo para $k = n-2, \cdots, 1$ se obtiene

$$w_{k-1} = Ph_{k-1},$$

para $k = n-1, \cdots, 1$ y en el caso $k = 0$ tenemos que $w_{-1} := 0 = Ph_{-1}$ y como P es invertible entonces $h_{-1} = 0$. ■

Del lema anterior obtenemos una forma de hallar la inversa de la matriz confluente de Vandermonde a través del siguiente

Corolario 4.2. *La transpuesta de* V^{-1} *está dada por*

$$V^{-T} = PH,$$

donde $H = (h_0, h_1, \cdots, h_{n-1})$.

Prueba:
Este resultado se obtiene directamente del lema (4.3). ■

Del corolario (4.2) se sigue que

$$P^{-1} = HV^T. \tag{35}$$

Definamos $Q = diag(Q_1, \cdots, Q_m)$, donde $Q_k = P_k^{-1}$. Como P_k es una matriz triangular superior Toeplitz su inversa es también lo es, es decir,

$$Q_k = \begin{bmatrix} q_{k\nu_k} & q_{k\nu_k-1} & \cdots & q_{k1} \\ & q_{k\nu_k} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & q_{k\nu_k-1} \\ 0 & & & q_{k\nu_k} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Como $Q_kP_k = I_{\nu_k}$, entonces $Q_kP_ke_{\nu_k} = e_{\nu_k}$, y por tanto obtenemos el siguiente sistema lineal

$$Q_kp^{(k)} = e_{\nu_k}, \tag{37}$$

donde $p^{(k)} = (p_{k1}, \cdots, p_{k\nu_k})^T$ con lo cual se obtienen los coeficientes p_{ij} de la ecuación (25), para más detalle sobre matrices Toeplitz ver [10].

Se propone el siguiente algoritmo para la inversión de V.

Algorithm 2: Segundo algoritmo de recurrencia para la matriz inversa confluente de Vandermonde asociada a la matriz A

1 Ingrese la matriz A;
2 **for** $j = n-1, \cdots, 1$ **do**
3   Calcule las columnas h_{j-1} de H de la ecuación(31)
4 **end**
5 Calcule la matriz Q de la ecuación (34);
6 Calcule la matriz triangular Toeplitz P_k resolviendo el sistema (37);
7 Calcule P;
8 Calcule $V^{-1} = (PH)^T$;
9 Salida V^{-1};
10 **Fin del algoritmo**

Para ver otra forma de representación de V^{-1} ver [4], [5], [11].

Ejemplo 4.2. *Consideremos la misma matriz dada en el ejemplo (4.1)*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Del algoritmo (2) paso 2 y 3 se tiene

$$H = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 1 & 0 \\ -12 & -8 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

y además

$$V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & 1 & 9 \\ -8 & 12 & -6 & 27 \end{bmatrix}$$

luego del paso 5 tenemos

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 125 \end{bmatrix},$$

del paso 5 y 6 obtenemos

$$P = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} -25 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -25 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

del paso 8 tendremos

$$V^{-1} = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} 117 & 210 & 300 & 8 \\ -12 & 65 & 200 & 12 \\ -6 & -30 & -25 & 6 \\ -1 & -5 & -25 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentario 4.1. *Otra forma de obtener $y(t) = V^{-1}e(t)$ dado por el teorema (4.1) para la obtención de la representación e^{tA} es a través de la descomposición QR de V resolviendo el sistema $QRy(t) = e(t)$.*

Comentario 4.2. *Para probar la validez del teorema (4.2), podemos usar, en lugar de la transformada de Laplace, la serie de potencia o la serie infinita de Laurent de $(\lambda - \lambda_i)^{-j}$.*

Comentario 4.3. *En el teorema (4.1), requerimos para la representación de la exponencial e^{tA}, las soluciones $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{n-1}$ que son las soluciones fundamentales de la ecuación (12), pero podríamos tener $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{N-1}$ soluciones de la ecuación diferencial generada por el polinomio minimal*

$$q(\lambda) = \lambda^N + b_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$$

de $p(\lambda)$ y así se obtendría

$$e^{tA} = y_0(t)I + y_1(t)A + \cdots + y_{N-1}(t)A^{N-1}.$$

Conclusiones

1. Se ha logrado representar en una forma finita la matriz e^{tA} hallando la matriz inversa confluente de Vandermonde asociada a la matriz A.
2. Mediante el algoritmo (1) logramos obtener de manera recursiva finita la inversa de la matriz confluente de Vandermonde.
3. Mediante el algoritmo (2) podemos determinar los coeficientes de la descomponsición parcial de la inversa del polinomio característico $p(\lambda)$.

1. I. E. Leonard, The Matrix Exponential, SIAM Rev. 38 pp. 507-512 (1996).
2. C. Moler and C. F. Van Loan, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, SIAM Rev. 20 pp. 801-836 (1978).
3. C. Moler and C. F. Van Loan, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later SIAM Rev. 45 pp. 1-46 (2003).
4. S.H. Hou and W.-K. Pang, Inversion of Confluent Vandermonde Matrices, Computers and Mathematics with applications, 43, pag. 1539-1547, (2002).
5. D. Kalman, Notes The Generalized Vandermonde Matrix, University Of Wisconsin-Green Bay, Gree Bay, WI 54302 (1984).
6. C. Pozrikidis, Numerical Computation in Science and Engineering, Oxford, University Press, (1998).
7. D. K. Faddeev and V. N. Faddeeva, Computational Methods of Linear Algebra, Freeman, San Franacisco, CA, (1963).
8. S. H. Hou, A simple proof of the Leverrier-Faddeev Characteristic Polynomial Algorithm, SIAM Rev. 40, pp. 706-709, (1998).
9. R. M. Benazic, Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Uni, Perú, (2007).
10. G. Labahn and T. Shalom, Inversion of Toeplitz Matrices with only two Standard Equations, Linear Algebra and its Applications. 175, 143-158, (1992).
11. G. Sansigre and M. Alvarez, On Bezoutian reduction with the Vandermonde matrix, Linear Algebra Appl. 121, pp. 401-408, (1989).