

# Cálculo del potencial gravitatorio terrestre usando mediciones de gradiente gravitatorio de la misión GOCE - ESA

Leonardo José Chévez Abanto<sup>†</sup>, H. G. Valqui  
*Facultad de Ciencias.*  
*Universidad Nacional de Ingeniería*  
<sup>†</sup>leo.if864@gmail.com

Recibido el 14 de Noviembre de 2014; aceptado el 11 de Diciembre de 2014

Con el creciente número de aplicaciones del geoposicionamiento, se pone cada vez más énfasis en el mejor cálculo de trayectorias de satélites que luego serán usados como referencia para el cálculo de la posición de un vehículo receptor en Tierra. Las trayectorias de los satélites son determinadas principalmente por el campo gravitatorio total al que están afectados, sin embargo conocer el campo gravitatorio total no es tan simple. Con la finalidad de hallar el campo gravitatorio circundante a la Tierra existen misiones encargadas de medir el gradiente gravitatorio a 200 km de altura, tales como la misión GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer). En este trabajo se usan las mediciones de la misión GOCE para determinar el potencial gravitatorio total alrededor de la Tierra en forma “analítica” que puede ser usado para un mejor y más preciso cálculo de las trayectorias de los satélites que orbitan la Tierra.

**Palabras Claves:** satélites, misión GOCE, potencial gravitatorio.

With the increasing number of applications of GEO, it puts more emphasis on the best estimate of trajectories of satellites which will then be used as a reference for calculating the position of a receiver vehicle on Earth. The trajectories of satellites are primarily determined by the total gravitational field to which they are affected, but know the total gravitational field is not so simple. In order to find the gravitational field surrounding Earth missions are responsible for measuring gravity gradient at height 200 km such as GOCE mission (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer). In this work the mission GOCE measurements are used to determine “analytically” the total gravitational potential around the Earth that can be used for better and more accurate calculation of the trajectories of satellites orbiting the Earth.

**Keywords:** satellites, GOCE mission, gravitational potential.

## 1 Introducción

Existen varios Sistemas Globales de Navegación por Satélite (GNSS por sus siglas en inglés) como el Global Positioning System (GPS - Departamento de Defensa de los Estados Unidos), Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema (GLONASS - Unión Soviética), Galileo (Unión Europea), etc. donde estos satélites juegan el papel de puntos de referencia para determinar la posición instantánea de un vehículo receptor en Tierra.

A estos sistemas de navegación cada vez se les encuentran más aplicaciones (trayectorias de barcos y aviones, navegación “a ciegas”, seguimiento de los movimientos de placas tectónicas, etc.) que requieren cada vez de mayor precisión y rapidez en el cálculo de la posición de un vehículo en Tierra.

Las trayectorias que siguen cada uno de los satélites que conforman un GNSS son descritas por movimientos “aparentemente” elípticos. Estas trayectorias de los satélites GNSS son corregidas remotamente desde estaciones en Tierra, tratando que los satélites sigan trayectorias previamente calculadas. Estas correcciones implican sofisticados mecanismos, demanda de energía y tiempo.

Es natural que si las trayectorias previamente calculadas son más precisas, las correcciones serían menores, ahorrando así mecanismos, energía, tiempo y dinero. Entonces es necesario construir mejores métodos para el cálculo de las trayectorias, y así obtener los beneficios mencionados.

En este artículo se describe una forma de hallar el potencial gravitatorio terrestre dependiente del tiempo con la finalidad de ser usado para un cálculo preciso de las trayectorias de satélites GNSS. Conocer el potencial gravitatorio dependiente del tiempo facilitaría el control de los satélites.

Usando mediciones experimentales del gradiente gravitatorio provistos por la misión GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) de la Agencia Espacial Europea (ESA por sus siglas en inglés), es posible calcular los coeficientes de la expansión en armónicos esféricos del potencial gravitatorio; de esta manera se tendría una función matemática con la mayor cantidad de coeficientes posibles calculados con datos experimentales, es decir, se transforman los datos numéricos en una ecuación analítica bien aproximada, la cual permitiría un mejor y más preciso cálculo de las trayectorias de los satélites, por lo tanto mejor control de los mismos, (por

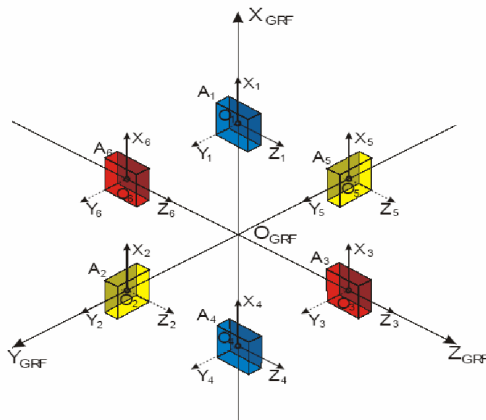
supuesto adicionalmente se debe considerar otras correcciones menores, por ejemplo la presión de radiación) consiguiendo así ahorro de energía y simplificación del mecanismo de control (las correcciones aplicadas serían menores).

Se debe tratar de ser lo más preciso posible pues los resultados finales de posición que calcula un vehículo receptor GNSS en Tierra son bastante sensibles a pequeñas variaciones en el sistema, por ejemplo un error de una millonésima de segundo en los relojes involucrados se traduce en un error de posición de 300 metros del vehículo en Tierra.

Es necesario anotar que, en rigor, el potencial gravitatorio no sólo depende del espacio sino también del tiempo, esta dependencia temporal del potencial gravitatorio causado por las posiciones variables de los cuerpos (Tierra, Sol, Luna, Júpiter, etc.) que intervienen, será resuelta usando series de Fourier para hallar funciones dependientes del tiempo que describan la variación temporal del potencial, de los coeficientes de la expansión en serie del potencial. Esta dependencia temporal es debida principalmente a los cambios de posición de cuerpos externos a la Tierra.

## 2 Gradiente Gravitatorio

El satélite GOCE cuenta con 6 acelerómetros, 2 en cada uno de sus 3 ejes espaciales (Gradiometer Reference Frame). Si bien con sólo un acelerómetro bastaría para medir la gravedad, esta medida es todavía muy pobre por lo cual resulta necesario usar 6.



**Figura 1:** Sistema de referencia propio del satélite medidor, cuya orientación cambia continuamente con respecto a la Tierra.

Estos acelerómetros se encuentran separados por una pequeña distancia. Cada par de acelerómetros toma una medición de la aceleración (vector gravedad, gradiente del potencial gravitatorio, 3 componentes), luego evalúa la diferencia entre estas mediciones teniendo un “vector diferencia de gravedad” (de 3 componentes) y finalmente divide esta diferencia entre la distancia que separa estos acelerómetros, obteniendo así tres cantidades que son las segundas derivadas espaciales, en ese instante, del potencial gravitatorio en las direcciones XGRF, YGRF,

ZGRF. Los valores que toman estas segundas derivadas del potencial gravitatorio son llamadas Gradiente Gravitatorio.

Los datos de las mediciones que brinda la misión GOCE se encuentran en un formato particular que, para su posterior procesamiento en este trabajo, es necesario tratar y darle forma de tablas o matriz de datos.

## 3 Dando forma analítica

El potencial gravitatorio  $U$  cumple con la ecuación de Laplace  $\nabla^2 U = 0$  que nosotros la usaremos en coordenadas esféricas, cuyas soluciones son los armónicos esféricos. Así el potencial se puede escribir como:

$$U(r, \theta, \phi) = \frac{-GM}{r} + \sum_{n=1}^{N_z} \frac{J_n P_n^0(\text{sen } \theta)}{r^{n+1}} + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \frac{P_n^m(\text{sen } \theta)(C_n^m \cos m\phi + S_n^m \text{sen } m\phi)}{r^{n+1}}, \quad (1)$$

donde  $G$ : Constante de gravitación universal  
 $= 6,67384 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

$M$ : Masa de la Tierra =  $5,9736 \times 10^{24} kg$

$P_n^0$ : Polinomios de Legendre

$P_n^m$ : Polinomios asociados de Legendre

$N_z$ : Número de términos zonales

$N_t$ : Número de términos teserales

En la expresión (3) hay 3 familias de constantes  $J_n$ ,  $C_n^m$  y  $S_n^m$  que queremos determinar. Por otra parte, las mediciones realizadas por el satélite medidor son de tipo cartesiano con respecto a su sistema de referencia propio, entonces resulta necesario transformar la ecuación 3 al sistema de referencia cartesiano del satélite medidor (cuya posición y orientación cambian con el tiempo). Sea  $G$  una función de  $R^3 \rightarrow R$  que toma los mismos valores que  $U$  pero escrito en coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  respecto al sistema de referencia propio del satélite medidor:

$$G(x, y, z) = U(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z))$$

Los datos del satélite medidor son los valores que toman las derivadas segundas de  $G$  en la trayectoria del mismo. Calculando las derivadas tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \left( \frac{-1}{r} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial 1}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \left( \frac{-csc \theta}{r} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta} \cot \theta \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Calculando las derivadas de  $U$  tales como  $\frac{\partial U}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$  y reemplazándolas en las expresiones

(2), sabremos cómo se escriben las derivadas segundas de  $G$  (gradiente gravitatorio en el sistema propio del satélite medidor) en función de las derivadas de  $U$  (potencial gravitatorio con origen en el centro de la Tierra y fijo a este).

Las expresiones resultantes son de la forma:

$$D^2G = F(x) + \sum_{n=1}^{N_z} J_n F z_n(x) + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n (C_n^m A_n^m(x) + S_n^m B_n^m(x)),$$

donde  $D^2G$  significa la segunda derivada de  $G$ , que puede ser  $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$  ó  $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$ , además

$F_0(x)$  : Parte independiente de coeficientes

$F_n(x)$  : Función que acompaña al coeficiente  $J_n$

$A_n^m(x)$ : Función que acompaña al coeficiente  $C_n^m$

$B_n^m(x)$ : Función que acompaña al coeficiente  $S_n^m$

Queremos encontrar los valores de  $J_n$ ,  $C_n^m$  y  $S_n^m$  que hacen que los  $D^2G$  sean lo más cercanos posible a sus valores numéricos (datos experimentales).

### 4 Procedimiento de mínimos cuadrados

En ese sentido podemos escribir  $D^2G = g(J_n, C_n^m, S_n^m, x)$  y  $G_i$  representa el  $i$ -ésimo dato numérico (valores del gradiente gravitatorio, segundas derivadas de  $G$ ).

Considerando que tenemos  $N$  datos, construimos la función  $d$

$$d(J_n, C_n^m, S_n^m, x) = \sum_{i=1}^N [g(J_n, C_n^m, S_n^m, x_i) - G_i]^2$$

y deseamos que la función  $d$  sea mínima según  $J_n$ ,  $C_n^m$ ,  $S_n^m$  entonces

$$\frac{\partial d}{\partial J_l} = 0, \quad \frac{\partial d}{\partial C_i^k} = 0, \quad \frac{\partial d}{\partial S_p^q} = 0$$

$l = 1, 2, 3 \dots N_z; j, p = 1, 2, 3, \dots, N_t$

$N_z$  coeficientes  $J_n$ ,  $\frac{N_t(N_t + 1)}{2}$  coeficientes  $C_n^m$  y  $\frac{N_t(N_t + 1)}{2}$  coeficientes  $S_n^m$ , haciendo un total de  $N_z + N_t(N_t + 1)$  coeficientes de donde obtenemos las ecuaciones

$$\sum_{n=1}^{N_z} \left[ \sum_{i=1}^N F_n(x_i) F_l(x_i) \right] J_n + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N A_n^m(x_i) F_l(x_i) \right] C_n^m + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N B_n^m(x_i) F_l(x_i) \right] S_n^m = \sum_{i=1}^N (G_i - F_0(x_i)) F_l(x_i)$$

$$\sum_{n=1}^{N_z} \left[ \sum_{i=1}^N F_n(x_i) A_j^k(x_i) \right] J_n + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N A_n^m(x_i) A_j^k(x_i) \right] C_n^m + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N B_n^m(x_i) A_j^k(x_i) \right] S_n^m = \sum_{i=1}^N (G_i - F_0(x_i)) A_j^k(x_i)$$

$$\sum_{n=1}^{N_z} \left[ \sum_{i=1}^N F_n(x_i) B_p^q(x_i) \right] J_n + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N A_n^m(x_i) B_p^q(x_i) \right] C_n^m + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N B_n^m(x_i) B_p^q(x_i) \right] S_n^m = \sum_{i=1}^N (G_i - F_0(x_i)) B_p^q(x_i)$$

Este último sistema de ecuaciones, cuyas variables son todos los  $J_n$ ,  $C_n^m$  y  $S_n^m$  se puede escribir en forma matricial:

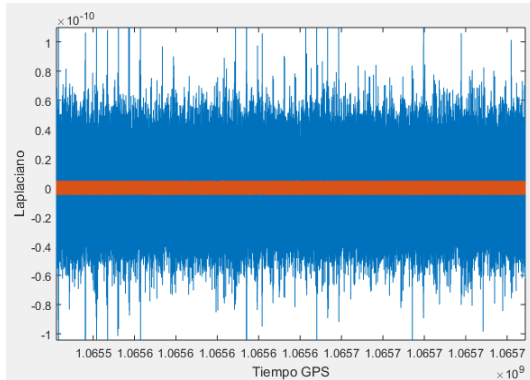
$$M \begin{pmatrix} J_n \\ C_n^m \\ S_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (G_i - F_0(x_i)) F_l(x_i) \\ \sum_{i=1}^N (G_i - F_0(x_i)) A_j^k(x_i) \\ \sum_{i=1}^N (G_i - F_0(x_i)) B_p^q(x_i) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Para calcular los elementos de la matriz  $M$  y dar solución a (3), escribimos un programa en paralelo (para aprovechar todos los núcleos del procesador de la PC donde se corre este programa) usando el software MATLAB. Este además calcula el *Coficiente*

de Determinación que califica la aproximación. Debido al excesivo tiempo de cálculo se discriminarán algunos datos que no tienen mayor incidencia. Sabemos que

$$\nabla^2_{cartesiano} G = \nabla^2_{esférico} U = 0.$$

Pero al tratarse de datos numéricos de mediciones, no todos ellos cumplen con  $\nabla^2 G = 0$ . Esto nos da un indicio de cómo discriminar datos, para este trabajo se eliminaron los datos cuyo Laplaciano sean los más alejados de cero. De esta manera nos quedamos sólo con el 20% de los datos iniciales.



**Figura 2:** Primera discriminación de datos según el valor del Laplaciano.

Con estos datos de 47 días, se separaron según el día en el que fueron tomados. Teniendo así los datos del día 1, día 2, . . . , día 46 y día 47. Los cálculos de coeficientes serán diarios. Usando los datos numéricos de  $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$  se calcularon los coeficientes  $J_n, C_n^m$  y  $S_n^m$ . Usando los datos numéricos de  $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$  se calcularon otros valores de coeficientes  $J_n, C_n^m$  y  $S_n^m$ . Además, usando los datos numéricos de  $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$  se calcularon también otros coeficientes  $J_n, C_n^m$  y  $S_n^m$ .

**Tabla 1:** Comparación de coeficientes de correlación.

Tipo de dato usado	Coefficiente de determinación
$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$	99,93%
$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$	99,91%
$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$	99,96%

Estas familias de coeficientes presentan valores similares entre sí, pero ¿cómo sabemos si son consistentes? Una prueba sencilla sería calcular el valor de la gravedad en un punto del Ecuador terrestre, pues su valor es conocido  $9,796 \frac{m}{s^2}$ . Para ello tomamos el gradiente del potencial  $U$  y lo evaluamos en:  $r = 6378,1 km; \theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = 0$

**Tabla 2:** Comparación de valores del módulo de la gravedad.

Tipo de dato usado	Valor de $ \vec{g}  (m/s^2)$
$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$	8,667
$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$	9,837
$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$	8,898

El resultado obtenido con  $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$  es el que mejor se ajusta al valor real de la aceleración de la gravedad. En adelante los cálculos serán realizados utilizando los datos numéricos de  $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ . Se usaron 15 términos zonales ( $N_z = 15$ ) y 15 tesaerales ( $N_t = 15$ ). Teniendo un total de 255 coeficientes por calcular.

**Tabla 3:** Cantidad de coeficientes según  $N_z$  y  $N_t$ .

Términos	Número de Términos	Cantidad de Coeficientes	
Zonales	$N_z = 15$	$J_n, N_z$	15
Tesaerales	$N_t = 15$	$C_n^m, \frac{N_t(N_t + 1)}{2}$	120
		$S_n^m, \frac{N_t(N_t + 1)}{2}$	120
TOTAL			255

## 5 Dependencia temporal de los coeficientes

Se realizó el cálculo de los 255 coeficientes usando los datos de cada uno de los 47 días de mediciones, teniendo así 47 grupos de 255 coeficientes cada uno. Estos 47 grupos representan la variación temporal (diaria) de los coeficientes de la expansión en serie del potencial gravitatorio terrestre.

Para darle forma analítica (dependiente del tiempo) a la variación diaria de los 255 coeficientes, se usó un algoritmo en MATLAB que calcula la Serie de Fourier con dominio temporal que aproxima mejor la variación diaria de cada uno de los 255 coeficientes.

De este modo hemos transformado 47 días de resultados de 255 coeficientes  $J_n, C_n^m, S_n^m$  en 255 funciones  $J_n(t), C_n^m(t), S_n^m(t)$ .

Luego, podemos reescribir la expresión (3) así:

$$U(r, \theta, \varphi, t) = \frac{-GM}{r} + \sum_{n=1}^{N_z} \frac{J_n(t) P_n^0(\text{sen } \theta)}{r^{n+1}} + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{m=1}^n \frac{P_n^m(\text{sen } \theta) (C_n^m(t) \text{sen } m\varphi + S_n^m(t) \text{sen } m\varphi)}{r^{n+1}}$$

Ahora tenemos una expresión analítica dependiente de la posición y del tiempo que determina el potencial gravitatorio causado por los cuerpos celestes del sistema solar en los alrededores de la Tierra.

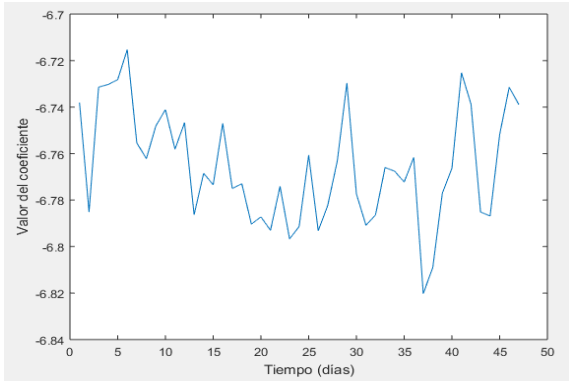


Figura 3: Variación temporal del coeficiente  $J_1$

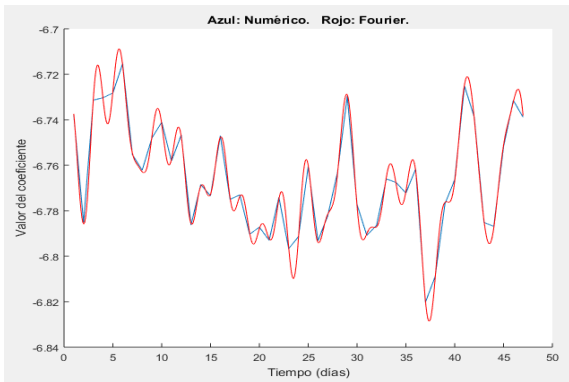


Figura 4: Serie de Fourier de la variación temporal del coeficiente  $J_1$  con  $R^2 = 99.92$ .

## 6 Construcción de Superficies Equipotenciales Gravitatorias

La última expresión permite hallar el valor del potencial gravitatorio en un punto  $P$  determinado por  $[r, \theta, \phi]$  en el instante  $t_0$ , esto es  $U(r, \theta, \varphi, t_0)$ .

Teniendo en cuenta esto, podemos buscar otros puntos del espacio (diferentes de  $P$ ) que, en el mismo instante de tiempo  $t_0$ , tomen el mismo valor de potencial  $U_0$ . Esta colección de puntos serían *puntos equipotenciales*  $U_0$  en el instante  $t_0$ . Si la cantidad de puntos es lo suficientemente grande, podemos hablar de una *superficie equipotencial*. Finalmente, si esto lo hacemos para distintos instantes de tiempo, es posible apreciar cómo varía con el tiempo esta superficie equipotencial (superficie oscilante).

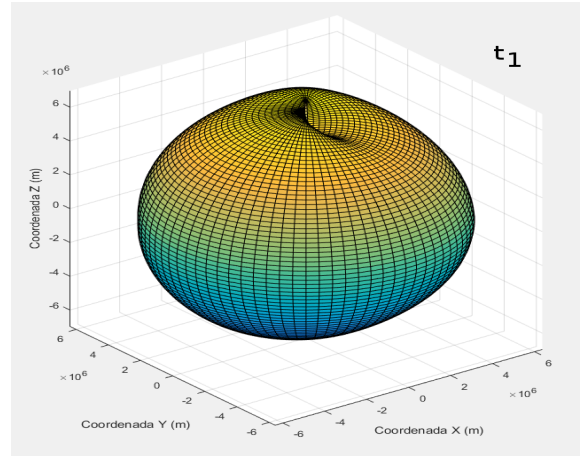


Figura 5: Superficie equipotencial terrestre para el día  $t_1 = 1.0000$ .

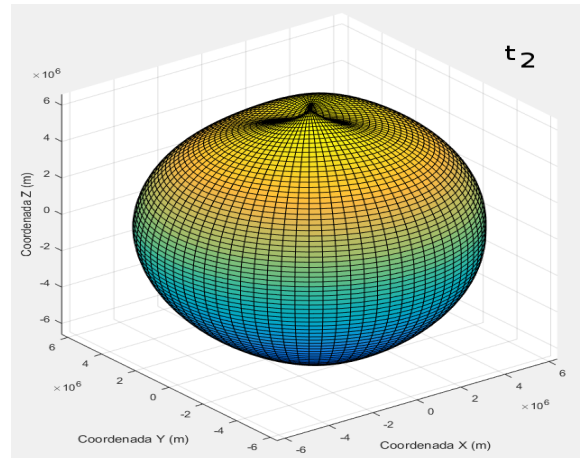


Figura 6: Superficie equipotencial terrestre para el día  $t_2 = 9.8283$ .

## 7 Conclusiones

- i. En la bibliografía se encuentra la expresión 3 con el inicio de la expansión en  $n=2$ . Eliminando los términos  $J_1, C_1^1, S_1^1$ . Aquí se toman en cuenta todos los términos de la expansión, incluyendo los mencionados. De los resultados se aprecia que estos términos no son nulos.
- ii. El coeficiente de determinación no es el único criterio que se debe tomar en cuenta para este problema. En la Tabla 1 se muestran los coeficientes de determinación, cuyo mayor valor se obtiene para los resultados usando los datos  $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$  pero finalmente se eligieron los resultados obtenidos con  $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$  porque ofrecen mejores resultados físicos.
- iii. Las superficies equipotenciales halladas han sido construidas a partir de las mediciones. Estas mediciones no incluían la zona polar (menos de  $7^\circ$  alrededor de los polos), por lo que las correspondientes funciones analíticas calculadas tampoco son válidas para esas zonas.
- iv. Como ya se ha mencionado, la variación temporal del potencial gravitatorio se debe a que las posiciones de los cuerpos del sistema solar también cambian con el tiempo.

1. WIKIPEDIA, *Geopotential Model*.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Geopotential\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Geopotential_model)
2. INSTITUTO NACIONAL DE TECNOLOGÍAS EDUCATIVAS Y DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, ESPAÑA, *Intensidad del Campo Gravitatorio*.  
[http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/wikididactica/index.php/Intensidad\\_del\\_campo\\_gravitatorio](http://recursostic.educacion.es/multidisciplinar/wikididactica/index.php/Intensidad_del_campo_gravitatorio)
3. EUROPEAN SPACE AGENCY, *GOCE L1B Products User Handbook*. GOCE PDGS Team. 2006
4. EUROPEAN SPACE AGENCY, *GOCE Standards*. European GOCE Gravity Consortium, 2014.
5. EUROPEAN SPACE AGENCY, *GOCE Level 2 Product Data Handbook*. European GOCE Gravity Consortium, 2010.