Aplicación de las coordenadas cartesianas al Movimento Planetario

Edgard Vidalón Vidalón†
Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
†*ssshimmler@yahoo.es*

Recibido el 6 de Febrero de 2014; aceptado el 14 de Marzo de 2014

El análisis del movimiento de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza gravitatoria causada por otra partícula (que está fija en el origen de coordenadas) se estudia en el curso de Mecánica Clásica de antegrado. Se demuestra en este curso, usando coordenadas polares, que la trayectoria es un cónica y para el caso de un movimiento eliptico(Ejemplo: Movimento Planetario) uno de los focos coincide con el origen de coordenadas.
En el presente artículo se demostrará la propiedad mencionada anteriormente(que es la primera ley de Kepler) mediante un método alternativo que consiste en usar coordenadas cartesianas y conceptos de Geometría Analítica.

Palabras Claves: Fuerza gravitatoria, momento planetario.

The analysis of the motion of a particle which moves under the action of a gravitational force caused by another particle (which is fixed in the origin of coordinates) is studied in the course of Clasical Mechanics in undergraduate. It is demostraded in this course, using polar coordinates, that the trajectory is a cónical and in the case of an elliptical movement (Example: Planetary Movement) one of the focus matches the origin of coordinates.
In the present article, the mentioned property will be shown (which is the Kepler's first law) by an alternative method that consists of using cartesian coordinates and concepts of analytical geometry.

Keywords: gravitational forces, planetary moment.

1 Introducción

Consideremos una partícula de masa m sometida a una fuerza central. Sea ρ, ϕ las coordenadas polares. Los vectores unitarios y transversal serán denotados respectivamente como $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$. Luego la fuerza central se expresa como

$$\overrightarrow{F} = F_\rho \, \vec{e}_\rho. \tag{1}$$

Como es obvio la componente radial de la fuerza(F_ρ) dependerá de la distancia ρ.
Del curso de Mécanica tenemos que para determinar la coordenada polar ρ en función del ángulo ϕ se debe resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\,(\frac{1}{\rho}) + \frac{1}{\rho} = -\frac{m\,\rho^2}{L^2}\,F_\rho \tag{2}$$

donde L representa al momento angular (que se conserva durante el movimiento).
La ecuación diferencial (2)(que en general no es lineal) se demuestra en diversos libros de Mecanica , por ejemplo [1] o [2] .
Por otra parte sea ρ_o, ϕ_o las condiciones iniciales para las coordenadas polares.
Es evidente que si resolvemos esta ecuación diferencial se obtiene dos constantes que se determinan con las condiciones iniciales para la funcion $\rho(\phi)$:

$$\rho(\phi_o), \quad \frac{d\rho}{d\phi}\,(\phi_o) \tag{3}$$

Apliquemos la ecuación (2) al problema de Kepler caso gravitatorio es decir: queremos estudiar el movimiento de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza gravitatoria debido a una partícula de masa M (que está fija en el origen de coordenadas). Luego la componente radial de la fuerza es

$$F_\rho = -\frac{G\,M\,m}{\rho^2} \tag{4}$$

reemplazando (4) en la ecuación (2) y al resolver la ecuación diferencial que

$$\rho = \frac{1}{C\,cos(\phi + \delta) + \frac{G\,M\,m^2}{L^2}}. \tag{5}$$

Que es la ecuación de la trayectoria en coordenadas polares. Para simplificar los cálculos supongamos que δ es cero, luego se tiene de la ecuación (5) que:

$$\rho(\phi) = \frac{1}{A\,cos(\phi) + \frac{G\,M\,m^2}{L^2}} \tag{6}$$

evaluando en $\phi = 0$

$$\rho_o = \frac{1}{C + \frac{G\,M\,m^2}{L^2}} \tag{7}$$

despejando la constante C

$$C = \frac{1}{\rho_o} - \frac{G\,M\,m^2}{L^2} \tag{8}$$

Es decir que la ecuación en coordenadas polares es:

$$\rho(\phi) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_o} - \frac{G\,M\,m^2}{L^2}\right)\,cos\,\phi + \frac{G\,M\,m^2}{L^2}} \tag{9}$$

De la Geometria Analítica la última ecuación nos representa la ecuación de un cónica en coordenadas polares donde uno de los focos coinciden con el origen de coordenadas(donde se ubica la otra partícula) . Comprobaremos este propiedad del movimiento usando coordenadas cartesianas pero restringiendo al caso de una trayectoria eliptica.

2 Ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas

Definiendo:

$$A \equiv \frac{1}{\rho_o} - \frac{G\,M\,m^2}{L^2} \tag{10}$$

$$B \equiv \frac{G\,M\,m^2}{L^2} \tag{11}$$

la ecuación (9) se expresa como

$$\rho = \frac{1}{A\,cos\,\phi + B} \tag{12}$$

de donde

$$A\,\rho\,cos\,\phi + B\,\rho = 1 \tag{13}$$

pero como

$$x = \rho\,cos\,\phi, \;\; \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{14}$$

de la ecuación (13) obtenemos que

$$A\,x + B\,\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \tag{15}$$

es decir

$$B^2\,(x^2 + y^2) = (1 - A\,x)^2 \tag{16}$$

finalmente

$$(B^2 - A^2)x^2 + 2\,A\,x + B^2\,y^2 = 1 \tag{17}$$

que es la ecuación de una cónica con eje focal en el eje X. Consideremos un movimiento de un planeta de masa m alrededor de una estrella de masa M que está fija en el origen de coordenadas , con las condiciones iniciales :

$$\vec{r}(0) = \rho_o\,\vec{i} \tag{18}$$

$$\vec{v}(0) = v_o\,\vec{j}. \tag{19}$$

Con estas condiciones la trayectoria es de tal modo que el eje focal coincide con el eje X. Luego podemos aplicar la ecuación (17).

Si $B^2 - A^2 > 0$ la trayectoria es una elipse(que es la observada en el movimiento de los planetas).

Consideremos el caso particular que la magnitud A sea positivo. De la relación (17) se consigue

$$\frac{\left(x + \frac{A}{B^2 - A^2}\right)^2}{\frac{B^2}{(B^2 - A^2)^2}} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{B^2 - A^2}\right)} = 1. \tag{20}$$

Es fácil demostrar que

$$\frac{B^2}{(B^2 - A^2)^2} > \frac{1}{B^2 - A^2} \tag{21}$$

luego la ecuación (20) es la ecuación de una elipse de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \tag{22}$$

por lo tanto los semiejes son

$$a = \frac{B}{B^2 - A^2} \tag{23}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{B^2 - A^2}} \tag{24}$$

De la teoría de Cónicas (ver por ejemplo [3]) la distancia del centro de la elipse a los focos es

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{25}$$

De las ecuaciones (23) , (24) y (25) conseguimos

$$c = \frac{A}{B^2 - A^2} \tag{26}$$

por definición de excentricidad $e = c/a$ tenemos

$$e = \frac{A}{B}. \tag{27}$$

Para el caso de la ecuación (22) las coordenadas del centro y de los focos son:

$$C_o(h,\,k), \quad F_1(h - c,\,0), \quad F_2(h + c,\,0). \tag{28}$$

Si comparamos la ecuación (20) con (22) tenemos que:

$$h = \frac{-A}{B^2 - A^2}, \;\; k = 0 \tag{29}$$

luego las coordenadas de los focos para la trayectoria del movimiento de la partícula son

$$h_1 = \frac{-2\,A}{B^2 - A^2}, \;\; c_1 = 0 \tag{30}$$

$$h_2 = 0, \;\; c_2 = 0 \tag{31}$$

es decir la partícula de masa M ocupa uno de los focos de la trayectoria eliptica, comprobando asi la primera ley de Kepler.

Finalmente damos la relación de los libros mencionados en el presente artículo.

3 Conclusiones

1) La trayectoria de una partícula con potencial de Kepler es una cónica. Un caso especial es la trayectoria elíptia. Esto se puede demostrar usando coordenadas polares y cartesianas.

2) La demostración de las propiedades de movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales se puede hacer considerando no necesariamente coordenadas polares.

1. Jerry B. Marion, *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*. Ed. Reverté S. A., Edición 1975, p.276-282(1975).

2. Joseph Norwood, *Mecánica Clásica a Nivel Intermedio*. Ed. Prentice Hall / Pearson, p.136-140(1981).

3. Norman B. Haaser, Joseph P. La Salle, Joseph A. Sullivan , *Anaálisis Matemático*. Ed. Trillas S. A., Vol I, p.236-243(1977)