Suma de Momentos Angulares

H.G. Valqui
Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;

Recibido el 31 de Octubre del 2014; aceptado el 20 de Noviembre de 2014

Con el objeto de mostrar algunas deficiencias del modelo "oficial" Vectorial del Momento Angular, en un artículo anterior [1] construí el Modelo Escalar, del cual se obtuvo las mismas funciones propias y valores propios del modelo vectorial. En el presente artículo complemento tales resultados con el cálculo de la suma de dos momentos angulares escalares, obteniendo nuevamente resultados coincidentes con los del modelo "oficial". Por supuesto aquí tampoco aparece ninguna relación con los sistemas de coordenadas, ni las rotaciones de los sumandos alrededor de la suma de los momentos angulares.
Palabras Claves: Momento Angular, suma de momentos angulares, eje OZ de coordenadas, rotación de Larmor, Modelo Escalar del momento angular.

In order to show some faults in the "official" model of Angular Momentum, in a former publication [1] I constructed the Scalar Model of Angular Momentum, which has the same proper functions and the corresponding proper values as the Vectorial Model. Naturally, not relation with the coordinate axes appears in this model, neither appears the supposed rotations around the resulting angular momentum, of the momenta to be added.
Keywords: Angular Momentum, addition of angular momenta, coordinate axe OZ, Larmor rotation, Scalar Model of Angular Momentum

1 Introducción

01) En [1] se postuló la existencia del operador hermítico L, y del operador S, tales que

i) [L , S] = hS . Luego se definieron los operadores
ii) B = S^+, iii) J = L^2 + hL + BS .

El postulado (i) y las definiciones (ii) y (iii) constituyen las condiciones que definen L como un operador de momento angular, y son equivalentes a las condiciones estipuladas para el momento angular vectorial. Los mencionados operadores cumplen una serie de relaciones, entre ellas: J conmuta con L, con S y con B. Por ello, de [J , L] = 0 deducimos la existencia de un vector propio u común a estos dos operadores, J u = j(j+1)h^2 u, Lu = ℓ h u , donde j , ℓ son números semi−enteros que satisfacen $-j \leq \ell \leq j$, es decir, el número j correspondiente al valor propio de J establece los valores extremos de los valores propios del operador de momento angular L . Los valores j , ℓ , enteros corresponden a los momentos angulares orbitales, mientras los valores propios que son fraccionarios corresponden a los momento angulares intrínsecos (espines). Luego, a partir de la función propia u se construyen los 2j + 1 funciones propias unitarias del operador de momento angular L , que se designan $|j, \ell\rangle$, de manera que $J|j, \ell\rangle = j(l+1)\hbar^2|j, \ell\rangle$, $L|j, \ell\rangle = \ell\hbar|j, \ell\rangle$, con $\ell = -$ j, − j + 1 ,..... , j − 1, j.

Además se verifica que los cuatro operadores J , L , SB y BS conmutan dos a dos, por lo que sus 2 j + 1 funciones propias comunes constituyen una base del espacio de Hilbert sobre el que actúan.

2 Cálculo de la Suma de dos Momentos Angulares Escalares

02) Sean los 4 operadores J_1 , L_1 , S_1 , B_1 , que actúan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1$, y los 4 operadores J_2 , L_2 , S_2 , B_2 , que actúan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_2$. Estos espacios de Hilbert podrían ser de diferente dimensión y diferente naturaleza. Las funciones propias y bases de ambos cuartetos las denominaremos con símbolos similares $|\ j_1\ ,\ \ell_1\ \rangle$ y $|\ j_2\ ,\ \ell_2\ \rangle$, donde los subíndices indican la pertenencia al espacio correspondiente.

03) A continuación construimos el espacio Hilbert $\mathcal{H}_1 \bigotimes \mathcal{H}_2$, algunos de cuyos elementos serán de la forma u$\bigotimes$v , donde u ϵ $\mathcal{H}_1$, v ϵ $\mathcal{H}_2$ (los vectores del espacio producto serán, en general, combinaciones lineales de estos pares simples).

Por otra parte, se sabe que los $(2j_1+1)(2j_2+1)$ vectores producto tensorial $|j_1, \ell_1\rangle \bigotimes |j_2\ ,\ \ell_2\rangle$ constituyen una base orto-normal del espacio producto. Por comodidad, considerando j_1, j_2 fijos escribiremos $|j_1, \ell_1\rangle \bigotimes |j_2, \ell_2\rangle = |j_1 j_2)\ell_1, \ell_2\rangle$. Por otra parte, si P es un operador en $\mathcal{H}_1$, mientras que Q un operador en $\mathcal{H}_2$, definiremos los operadores P' , Q" que actúan en el espacio producto, P'(u$\bigotimes$v) = (Pu$\bigotimes$v) , Q" (u$\bigotimes$v) = (u$\bigotimes$Qv), con P'Q"(u$\bigotimes$v) = Q" P'(u$\bigotimes$v) = (Pu$\bigotimes$Qv) (esta permutación de los operadores sólo será válida para operadores provenientes de los espacios factores)

04) De los operadores P , Q mencionados más arriba la "suma" P + Q carece de sentido, pero lo definido en el párrafo anterior nos permite construir la suma P' + Q", donde ambos operadores actúan en el espacio producto. Esto nos permite definir los operadores J = J_1' + J_2", L = L_1' + L_2", S = S_1' + S_2", B = B_1' + B_2", que actuarán en el espacio producto. A veces, por comodidad, escribiremos simplemente L_1 (u$\bigotimes$v) en vez de L_1' (u$\bigotimes$v) lo que en general no causa confusión, pues el subíndice indica en cual espacio está actuando el operador.

05) Verifiquemos que los vectores propios $|j_1,\ \ell_1\rangle \bigotimes |j_2,\ \ell_2\ \rangle$ son vectores propios de los 4 operadores J, L, SB, BS:

i) $J|j_1\ ,\ \ell_1\rangle \bigotimes |j_2,\ \ell_2\rangle = (J_1\text{'}+J_2\text{''})|j_1,\ \ell_1\ \rangle \bigotimes |j_2,\ell_2\rangle =$

$(J_1|j_1,\ell_1\ \rangle)\bigotimes |j_2,\ell_2\rangle + |j_1,\ell_1\rangle \bigotimes (J_2\ |\ j_2,\ell_2\rangle) =$

$j_1\ (\ j_1+1)\ h^2|\ j_1\ ,\ \ell_1\ \rangle \bigotimes |j_2,\ \ell_2\rangle\ +$

$j_2\ (j_2+1)\ h^2|j_1,\ell_1\rangle \bigotimes |j_2,\ell_2\rangle \to J\ |j_1,\ell_1\rangle \bigotimes |j_2,\ell_2\rangle =$

$(j_1^2 + j_2^2 + j_1 + j_2)|j_1,\ell_1\rangle \bigotimes |j_2,\ell_2\rangle\ h^2$,

o también, con

$|j_1,\ell_1\rangle \bigotimes |j_2,\ell_2\rangle \equiv |j_1 j_2)\ell_1,\ell_2\rangle$, podemos escribir:

$J\ |\ j_1\ j_2\ )\ \ell_1\ ,\ \ell_2\ \rangle =$
$(j_1^2 + j_2^2 + j_1 + j_2\ )\ h^2|j_1,j_2\ )\ \ell_1\ ,\ \ell_2\ \rangle$.

Análogamente,

ii) $L\ |\ j_1\ j_2\ )\ \ell_1\ ,\ \ell_2\ \rangle = (\ell_1 + \ell_2\ )\ h|\ j_1\ ,\ j_2\ )\ \ell_1\ ,\ \ell_2\ \rangle$.

iii) Para los operadores SB y BS tendremos en cuenta la definición que J satisface las relaciones:
SB = J − L_2 + hL , BS = J − L_2 − hL

06) Como J y L conmutan, entonces tienen funciones propias comunes (dentro del espacio producto tensorial, una de cuyas bases está formada por los vectores $|j_1, j_2\ )$ $\ell_1\ ,\ \ell_2\rangle$) que las denominaremos $|j_1 j_2|\ j\ ,\ \ell\rangle$, de manera que

$J\ |j_1 j_2|\ j,\ \ell\rangle = j\ (j+1)\ h^2|j_1 j_2|\ j,\ \ell\rangle$,

$L\ |j_1 j_2|\ j\ ,\ \ell\rangle = \ell\ h\ |j_1 j_2|\ j\ ,\ \ell\rangle$

Por otra parte, considerando los valores mínimos de ℓ_1 y ℓ_2 tenemos

$J\ |j_1 j_2\ )\ {-j_1},{-j_2}\rangle = (L^2 + hL + SB)\ |j_1 j_2\ )\ {-j_1},{-j_2}\rangle$

Pero, SB) $|j_1 j_2\ )\ {-j_1},{-j_2}\rangle =$

$S(B_1 + B_2\ )\ |j_1 j_2)\ {-j_1},{-j_2}\rangle = 0 \to$

$J|j_1 j_2){-j_1},{-j_2}\rangle = (L^2 + hL\ )\ |j_1 j_2\ )\ {-j_1},{-j_2}\rangle =$

$(L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 + hL_1 + hL_2\ )\ |\ j_1, j_2\ )\ {-j_1},\ {-j_2}\rangle =$

$[j_1^2 + j_2^2 + 2j_1j_2 - j_1 - j_2\ )]\ h^2|j_1,\ j_2){-j_1},{-j_2}\rangle =$

$[(j_1 + j_2\ )^2 - j_1 - j_2\ ]\ h^2|j_1\ ,\ j_2\ )\ {-j_1}\ ,\ {-j_2}\rangle$;

luego, con j = $j_1 + j_2$

$\to J\ |j_1, j_2\ )\ {-j_1},{-j_2}\rangle = j(j-1)\ h^2|j_1,j_2\ )\ {-j_1},{-j_2}\rangle$.

Por otra parte,

$L\ |j_1 j_2){-j_1},{-j_2}\rangle = -\ (\ j_1+j_2)h|j_1\ ,\ j_2){-j_1},{-j_2}\rangle =$

$-\ j\ h|\ j_1\ ,\ j_2\ )\ -\ j_1\ ,\ -\ j_2\ \rangle$

entonces $|j_1 j_2){-j_1},\ {-j_2}\ \rangle$ es vector propio tanto de J como de L con el valor propio mínimo de L, es decir, $L_{min} = -j_1 - j_2 = -$ j

Así tenemos que:

$1\Sigma)|j_1,j_2|\ j\ ,\ -\ j\rangle = |j_1,j_2){-j_1},{-j_2}\rangle$.

07) Para generar otros vectores propios de J y L aplicamos a la igualdad anterior el operador S = S_1' + S_2", por comodidad S = $S_1 + S_2$

$S|j_1,j_2|\ j\ ,\ -\ j\rangle = (S_1\text{'}+\ S_2\text{''})\ |j_1,j_2)\ {-j_1},\ {-j_2}\ \rangle =$
$S_1\text{'}|j_1,j_2){-j_1},{-j_2}\rangle + S_2\text{''}\ |j_1\ ,\ j_2\ )\ {-j_1}\ ,\ {-j_2}\ \rangle$. ($)

Pero, en general, en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1$, se cumple

$S\ |\ell\ ,\ -\ell+\ k-\ 1\rangle =$
$[\ell(\ell+1) - (-\ell+\ k-\ 1)(-\ell+\ k)]^{1/2}\ h|\ell, -\ell + k\rangle$ (*)

$B|\ell\ ,\ -\ \ell+\ k-\ 1\rangle =$
$[\ell(\ell+1) - (-\ell+\ k-\ 1)(-\ell+\ k-\ 2)]^{1/2}h\ |\ell\ ,\ -\ \ell\ +\ k\text{-}2\rangle$
entonces, en ($)

$(2j)^{1/2}|j_1,j_2|j,-j+1\rangle =$
$(2j_1)^{1/2}|j_1,j_2){-j_1}+1,{-j_2}\rangle + (2j_2)^{1/2}|j_1,j_2){-j_1},{-j_2}+1\rangle$
lo cual, con a$\equiv (j_1/j)^{1/2}$, b$\equiv(j_2/j)^{1/2}$, lo escribiremos así:

$2\Sigma)\ |j_1,\ j_2|j,-j+1\rangle = a\ |\ j_1\ ,\ j_2\ )\ -\ j_1 + 1\ ,\ -\ j_2\ \rangle\ +$
$b\ |\ j_1\ ,\ j_2\ )\ -\ j_1\ ,\ -\ j_2 + 1\rangle$

08) Los vectores $|j_1,j_2){-j_1}+1,{-j_2}\rangle$ y $|j_1,j_2){-j_1},{-j_2}+1\rangle$ son orto-normales y constituyen un sub-espacio bidimensional, caracterizado por la suma $\ell_1 + \ell_2 = -\ j_1 - j_2 + 1 = -$ j + 1 . Para la segunda base, correspondiente a J, L, hemos obtenido el vector $|j_1\ ,\ j_2\ |\ j\ ,\ -\ j + 1\rangle$ que

satisface tal condición; pero mientras j_1 y j_2 son fijos, el valor j no lo es. Con ℓ = j − 1 , y ℓ ⟩ j , las posibilidades de j son j = j , j = j − 1 . Entonces el vector buscado, orto-normal al ya obtenido, será

3Σ) $|j_1, j_2|$ j − 1 , − j + 1⟩ =
b $|j_1\ ,j_2)$−j_1 +1 ,−j_2⟩−a$|j_1, j_2)$−j_1, −j_2 + 1⟩

09) Aplicando nuevamente S = S_1 + S_2 podemos escribir, por una parte,

S$|j_1, j_2|j$, − j +1⟩ =
a(S_1+S_2)$|j_1$,$j_2)$−j_1+1, −j_2⟩+b(S_1+S_2)$|j_1, j_2)$−j_1,−j_2+1⟩

por otra parte,

S $|j_1$, j_2 | j − 1 , − j + 1⟩ = b(S_1 + S_2) $|j_1$, j_2) −j_1 +1, −j_2⟩− a(S_1 + S_2) j_1, j_2) − j_1, −j_2 + 1⟩ lo que da los dos nuevos resultados:

4Σ) $|j_1$, j_2 | j , − j + 2⟩ = p | j_1 , j_2) − j_1 +2 , − j_2 ⟩ + q | j_1 , j_2) − j_1 +1 , − j_2 + 1⟩ + r | j_1 , j_2) − j_1 , − j_2 + 2⟩, donde los coeficientes se calculan como lo indica (*)

5Σ) $|j_1$, j_2 |j − 1, − j + 2⟩ = t | j_1 , j_2) − j_1 +2, −j_2 ⟩ + u| j_1, j_2)−j_1 +1,−j_2+1⟩+v$|j_1$,j_2)−j_1, −j_2+2⟩

10) Los vectores | j_1,j_2)−j_1 +2 ,−j_2⟩,$|j_1$,j_2)−j_1+1,−j_2+1⟩, | j_1,j_2)−j_1,−j_2+2⟩ son orto-normales y constituyen un sub-espacio 3-dimensional caracterizado por cumplir $\ell_1 + \ell_2 = -j_1 - j_2 + 2$ = − j + 2, con j = j, j − 1. Entonces falta el valor j = j − 2.
Construyendo un vector ortogonal a los vectores $|j_1, j_2|$j−1,−j+ 1⟩ y $|j_1, j_2|$j−1,−j+1⟩ obtenemos

6Σ) $|j_1$,$j_2|$ j − 2 , − j + 2⟩ = x | j_1,j_2) − j_1 +2, − j_2 ⟩ + y | j_1,j_2) − j_1 +1 , − j_2 + 1⟩ + z | j_1,j_2) − j_1 , − j_2 + 2⟩

11) Así podemos proseguir, aplicando los operadores S = S_1 + S_2 e incrementando los valores propios de L = L_1 + L_2 hasta, después de N = (2 j_1 + 1) (2 j_2 +1) etapas, obtener los máximos valores de dichos valores propios en la última igualdad

NΣ) | j_1 , j_2 | j , j⟩ = | j_1 , j_2) j_1 , j_2 ⟩

12) Pero j no puede tomar todos los valores desde 0 hasta j = j_1 + j_2. Si designamos con j_o el valor mínimo permitido para la suma, deberá cumplirse que $\sum_{j_o}^{j}(2j+1)$ = (2 j_1 + 1)(2 j_2 + 1) , de donde se obtiene que $j_o^2 = (j_1 - j_2\ )^2 \rightarrow j_o = |j_1 - j_2|$

13) El proceso aquí presentado nos ha permitido cambiar de base en el espacio producto tensorial $\mathcal{H}_1 \bigotimes \mathcal{H}_2$, de dos espacios independientes. Manteniendo j_1 y j_2 fijos y partiendo de la base orto-normal | j_1 j_2) ℓ_1 , ℓ_2 ⟩ | ≡ $|j_1$, $\ell_1\rangle \bigotimes |j_2, \ell_2\rangle$ que posee (2j_1 + 1)(2 j_2 + 1) elementos, con $- j_1 \le \ell_1 \le j_1$, $- j_2 \le \ell_2 \le j_2$, hemos construido una segunda base con un total de también (2j_1 + 1)(2 j_2 + 1) vectores de la forma $|j_1$, j_2 | j , ℓ ⟩, que son vectores propios comunes a los operadores L y J , cumpliéndose por una parte − j ≤ ℓ ≤ j, y por otra $|j_1 - j_2|$ ≤ j ≤ j = j_1 + j_2 .

14) Como se puede notar el procedimiento seguido para realizar la suma de momentos angulares escalares, es completamente equivalente al procedimiento que se sigue en el caso de la suma [2] de momentos angulares vectoriales, y los resultados son coincidentes, pero de interpretación diferente, lo que esquemáticamente puede apreciarse en la Figura 1.

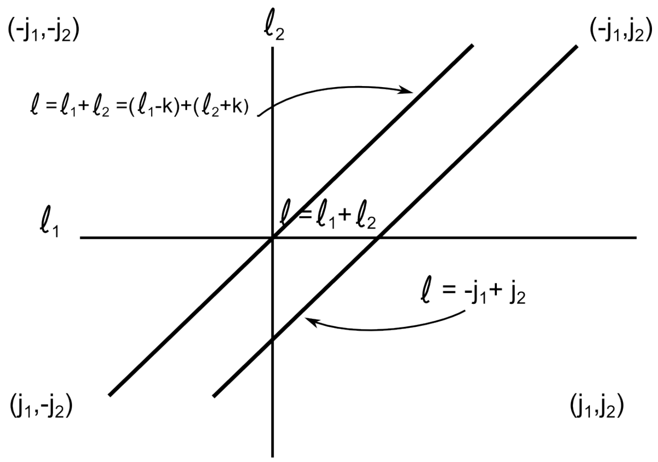

Figura 1. *Esquema del rectángulo para los (2 j_1 + 1)(2 j_2 +1) valores del valor propio ℓ, donde para j_2 fijo se cumple $-j_1 \le \ell \le j_1$, mientras que para j_1 fijo se cumple $-j_2 \le \ell \le j_2$. En cada diagonal a 45° los valores de ℓ_1 y ℓ_2 van cambiando de manera que $\ell = \ell_1 + \ell_2$ se mantiene constante, desde $\ell = -j_1 - j_2$ hasta $\ell = j_1 + j_2$.*

3 Conclusiones

1. Los resultados para las funciones propias y valores propios de la suma de momentos angulares coinciden con los resultados “oficiales” del modelo vectorial.
2. En el modelo escalar por supuesto no se presenta la falta de paralelismo que en modelo vectorial aparece entre los momentos angulares sumandos y el momento angular suma.
3. El artículo anterior [1] y el presente artículo ponen en evidencia que el Momento Angular Vectorial que exige el recurso de los ejes coordenados, haciendo aparecer las rotaciones de Larmor alrededor de uno de los ejes (usualmente el eje OZ), es un modelo insatisfactorio, el que

además sugiere algunas propiedades que el operador de momento angular no posee.

1. H.G. Valqui. *Modelo Escalar del Momento Angular.* Revciuni Volumen 17, páginas 1-4, 2014.
2. H.G. Valqui. *Apuntes de Mecánica Cuántica II.* Universidad Nacional de Ingeniería.