Otra versión del momento angular

H. G. Valqui
Instituto de Física. Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería

Recibido el 19 de Febrero de 2014; aceptado el 6 de Marzo de 2014

En el modelo "oficial"del Momento Angular, en particular el del Spin, se recurre a un operador vectorial que posee componentes relativas a los ejes coordenados. Tal modelo vectorial, sugerido por el momento angular orbital, **R**×**P**, parece innecesario; además es fuente de confusión al implicar que el operador de momento angular posee proyecciones según los ejes coordenados. En este artículo se presenta una versión no vectorial de dicho operador (sin que se haga ninguna mención de ejes coordenados), y se construyen los mismos resultados que se obtienen con el modelo vectorial.

Palabras Claves: Momento angular, modelo vectorial, modelo escalar, momento magnético dipolar asociado, valores propios semi-enteros.

The standard model of Angular Moment, in particular that of Spin, uses a vectorial operator that has three components along the coordinate axes. Such vectorial model suggested by the orbital angular momento **R**×**P** seems to be dispensable; moreover it leads to confusion because it implies that such operator has projections along the coordinate axes. The present article shows a scalar model (without any mention of the coordinate axes) that produces the same known results of the vectorial model.

Keywords: Angular Moment, vectorial model, scalar model, associated dipolar magnetic moment, half-integers proper values.

1 Introducción

Recordemos que para la validez de un modelo físico se requiere:

i) El modelo debe ser lógica y matemáticamente consistente,
ii) Debe sustentarse en las mediciones singulares de la propiedad en consideración,
iii) Debe permitir el cálculo de la probabilidad de cada medición singular, para así obtener el valor más probable del valor de la propiedad medida.
iv) Debería sugerir la identificación de otras propiedades medibles del sistema u objeto en consideración.
v) No debe sugerir la existencia de propiedades no medibles.

Sea un espacio de Hilbert, y los operadores lineales $\mathcal{A}$, J, S, B, donde los dos primeros son autoadjuntos; cumpliéndose que :

i) $[\ \mathcal{A}\ ,\ \mathrm{S}\ ] = \hbar\mathrm{S}$, ii) $\mathrm{B} = \mathrm{S}^\dagger$, iii) $[\ \mathrm{S}\ ,\ \mathrm{B}\ ] = 2\hbar\mathcal{A}$,
iv) $\mathrm{J} \equiv \mathcal{A}^2 + \hbar\mathcal{A} + \mathrm{B\ S}$

Puede verificarse fácilmente que;

1) $[\ \mathcal{A}\ ,\ \mathrm{B}\ ] = -\ \hbar\mathrm{B}$, 2) $[\ \mathcal{A}\ ,\ \mathrm{S}\ ] = \hbar\mathrm{S}$, 3) $[\ \mathcal{A}\ ,\ \mathrm{BS}\ ] = 0$,
4) $[\ \mathcal{A}^2\ ,\ \mathrm{BS}\ ] = 0$,
5) $[\ \mathrm{J}\ ,\ \mathcal{A}\ ] = 0$, $[\mathrm{J}\ ,\ \mathrm{B}] = 0$, $[\mathrm{J}\ ,\ \mathrm{S}] = 0$
6) $[\ \mathrm{J}\ ,\ \mathrm{BS}\ ] = 0$

Adicionalmente, aplicando la inducción matemática, se obtiene:

7) $[\mathcal{A}\ ,\ \mathrm{S}^n\ ] = \mathrm{n}\hbar S^n$ and $[\mathcal{A}\ ,\ \mathrm{B}^n\ ] = -\ \mathrm{n}\hbar B^n$
8) Por otra parte, de
$[\mathcal{A}^2\ ,\ \mathrm{S}^n] = \mathcal{A}[\mathcal{A}\ ,\ \mathrm{S}^n\ ] + [\mathcal{A}\ ,\ \mathrm{S}^n\ ]\mathcal{A}$
obtenemos:
$[\mathcal{A}^2\ ,\ \mathrm{S}^n\ ] = \mathrm{n}\hbar\ \mathrm{S}^n\ (\ 2\mathcal{A} + \mathrm{n}\hbar)$ y análogamente,
$[\mathcal{A}^2\ ,\ \mathrm{B}^n\ ] = \mathrm{n}\hbar\ \mathrm{B}^n\ (-\ 2\mathcal{A} + \mathrm{n}\hbar)$.

2 Construcción del subespacio propio de J y $\mathcal{A}$.

Teniendo presente que los operadores J y $\mathcal{A}$ conmutan, ellos tienen funciones propias comunes. Sea u un vector unitario propio, común a dichos operadores; es decir,

$$\mathcal{N}(u) = 1\ ,\ \mathrm{J}\ u = \lambda\ \hbar^2 u,\ \mathcal{A}u = \mu\hbar u$$

donde los coeficientes $\hbar$ y $\hbar^2$ han sido colocados para lograr las unidades físicas adecuadas.

9) Los números λ , μ son reales por tratarse de operadores hermíticos.

10) Calculando el valor medio del operador J ,

$\langle u, (\mathcal{A}^2 + \hbar\mathcal{A} + \mathrm{B\ S})u\rangle = \langle \mathcal{A}u, \mathcal{A}u\rangle + \hbar\ \langle u, \mathcal{A}\ u\rangle + \langle \mathrm{S}u, \mathrm{S}u\rangle = \mathrm{N}\langle u, (\mathcal{A}^2 + \hbar\mathcal{A} + \mathrm{B\ S})u\rangle$
$\rightarrow$

$- (\lambda + 1/4)^{1/2} \leq \mu + 1/2 \leq (\lambda + 1/4)^{1/2}$

A continuación, manteniendo λ fijo, y a partir de u , queremos construir el subespacio de las funciones propias del operador $\mathcal{A}$, y los correspondientes valores propios.

11) De [B , S] = - $2\hbar\mathcal{A} \rightarrow$ [B , S^2] = - $2\hbar$ S ($2\mathcal{A}$ + h) y recurriendo a la inducción matemática obtenemos:

[B , S^n] = - n$\hbar$ S^{n-1} [$2\mathcal{A}$ + (n-1) h]

12) Ahora estableceremos la relación entre las normas $\mathcal{N}(S^{n+1}u)$ y $\mathcal{N}(S^n u)$:

$\mathcal{N}(S^{n+1}u)^2 = \langle S^{n+1}u, S^{n+1}u\rangle = \langle S\ S^n u, S^{n+1}u\rangle = \langle S^n u, BS^{n+1}u\rangle$,

aplicando el resultado de (11) obtenemos

$\mathcal{N}(S^{n+1}u)^2 =$
$\langle S^n u, \{S^{n+1}$ B - (n+1)$\hbar$ S^n [$2\mathcal{A}$ + n $\hbar$]} $u\rangle$=
$\langle S^n u$, S^n {SB - (n+1)$\hbar$[$2\mathcal{A}$ + n $\hbar$]} $u\rangle$

Pero J = $\mathcal{A}^2$ - $\hbar\mathcal{A}$ + SB , entonces

$\mathcal{N}(S^{n+1}u)^2 = \langle S^n u$, S^n {[J - $\mathcal{A}^2$ + $\hbar\mathcal{A}$] - (n+1)$\hbar$[$2\mathcal{A}$ + n $\hbar$]} $u\rangle$
= $\langle S^n u$, S^n {J - $\mathcal{A}^2$ - (2n+1)$\hbar\mathcal{A}$ - n(n+1)$\hbar^2$}$u\rangle$
= $\langle S^n u$, S^n {λh^2 - $\mu^2 h^2$ - (2n+1)$\hbar^2\mu$ - n(n+1)$\hbar^2$}$u\rangle \rightarrow$

$\mathcal{N}(S^{n+1}u)^2$ = f(n)$\hbar^2\langle S^n u, S^n u\rangle$ = f(n)$\hbar^2\mathcal{N}(S^n u)^2$,

donde,

f(n)$\equiv$ λ - μ^2 - (2n+1) μ - n(n+1) =

λ + 1/4 - (μ+n +1/2)^2

13) Según (10) se cumple que f(0) $\geq$ 0 ; pero, por otra parte, si n es suficientemente grande el número f(n) se vuelve negativo, en cuyo caso debe cumplirse que $\mathcal{N}(S^n u)$ = 0 $\rightarrow$ $S^n u = 0$.

Consecuentemente debe existir un entero N_0 tal que

f(N_0) $\geq$ 0, pero f(N_0 +1) <0.

3 Representación geométrica de la función f

14) Consideremos la parábola
f(x) = λ + 1/4 - (x + μ +1/2)^2 = λ + 1/4 - (x - q)^2, donde q $\equiv -\mu$ - 1/2 como en la Figura 1.

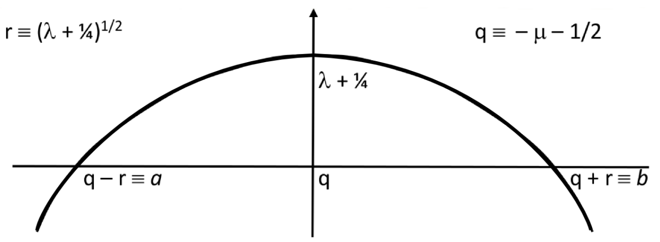

Figura 1: *Parábola f(x) = λ + 1/4 - (x + μ +1/2)^2 = λ + 1/4 - (x - q)^2; q $\equiv -\mu$ - 1/2*

Notemos que f(q) = r > 0 , f(a) = f(b) = 0

$\rightarrow$ b = q + r , a = q - r , b - a = 2r $\geq$1 ,

donde a y b son números reales.

Pero de (12) tenemos que

$\mathcal{N}(Su)^2$ = f(0)$\hbar^2\mathcal{N}(u)^2 = f(0) \geq 0$

$\rightarrow$ - r $\leq$ q $\leq$ r $\rightarrow$ a $\leq$ 0 , b$\geq$0 .

15) Queremos mostrar que b es un número entero no negativo. Es claro que todo número real puede ser acotado por dos números enteros, uno mayor que el otro en una unidad, es decir, N $\leq$ b < N + 1 , lo que implica que f(N) $\geq$ 0 y f(N+1) < 0.

Una consecuencia importante de esto consiste en que $S^{N+1}u = 0$.

Efectivamente, $\mathcal{N}(S^{N+2}u)^2$ = f(N+1) $\hbar^2\mathcal{N}(S^{N+1}u)^2$, entonces para que el primer término no sea negativo, $\mathcal{N}(S^{N+1}u)^2 = 0 \rightarrow S^{N+1}u$= 0 con lo cual debe cumplirse que f(N) $\mathcal{N}(S^N u)^2$ = 0 con la consecuencia de que

i) f(N) = 0 , ó ii) $S^N u = 0$.

Ahora mostraremos que ii) $S^N u = 0 \rightarrow$ f(0) = 0.

Notemos que (ii) implica f(N-1) $\mathcal{N}(S^{N-1}u)^2 = 0$; pero aquí el primer factor es positivo, entonces $S^{N-1}u = 0 \rightarrow$ f(N - 2) $\mathcal{N}(SN-2u)^2 = 0$, donde nuevamente el primer factor sigue siendo positivo. Así podemos continuar con N - 3 , N - 4 , N - k temor de que al lado izquierdo de la parábola se tenga f(N- k) < 0 , pues mientras que

N - k > a $\leq$ 0 la función f no puede tomar valores negativos. Luego, para N - k = 1 obtenemos:

0 = $\mathcal{N}(u)^2$ = f(0) $\hbar^2\mathcal{N}(u)^2 \rightarrow$ f(0) = 0.

Así, sin contar N = 0, con f(0) = 0 , deberá ser cierto que f(0) $\neq$ 0, y consecuentemente u = 0, la cual es una conclusión contradictoria; entonces la posibilidad (i) es la única correcta; lo que significa que b = N.

Entonces hemos demostrado que para la funciones propias $S^n u$, con λ, μ fijos, existe un entero no negativo n = N , tal que 0 = f(N) = λ + 1/4 - (N + μ +1/2)^2 $\rightarrow$ λ = (N + μ)(N + μ +1).

16) Si ahora repetimos la secuencia de operaciones de (11) hasta (15), pero esta vez comenzando de [S,B] = $2\hbar\mathcal{A}$, obtenemos

[S,B^n] = n$\hbar$ B^{n-1}[2$\mathcal{A}$ - (n-1) h]

$\mathcal{N}$(B$^{n+1}u)^2$ = g(n)$\hbar^2\mathcal{N}$(B$^n u)^2$,

donde

g(n) $\equiv$ λ - μ^2 + (2n +1) μ - n(n+1) =
λ + 1/4 - (μ - n -1/2)^2

y encontramos que debe existir un mayor entero N$'$ tal que g(N$'$) $\geq$0 , pero g(N$'$ + 1) < 0. En este caso nuevamente obtenemos que g(N$'$) = 0, es decir,

λ + 1/4 - (μ - N$'$ -1/2) 2 = 0

$\rightarrow$ λ = (N$'$ - μ)(N$'$ + 1 - μ)

4 Los valores propios ℓ y μ son semienteros

17) Las dos fórmulas para λ, en (15) y en (16), nos permiten escribir,

(N + μ)(N + 1 + μ) = (N$'$ - μ)(N$'$ + 1 - μ) $\rightarrow$

(2μ + N - N$'$)(N + N$'$ + 1) = 0 , pero N , N$'$ $\geq$ 0

$\rightarrow$ μ = (N$'$ - N)/2

$\rightarrow$ λ = (N$'$ - (N$'$ - N)/2)(N$'$ + 1 - (N$'$ - N)/2)

$\rightarrow$ λ = ((N$'$ + N)/2)((N$'$ + N)/2 + 1) = $\ell(\ell + 1)$, donde ℓ $\equiv$(N$'$ + N)/2

Puesto que los números 2ℓ y 2μ son enteros, entonces los valores propios ℓ , μ son llamados semi-enteros.

Notemos que además se cumple,

$\ell + \mu$ = N$'$ $\geq$ 0, $\ell - \mu$ = N $\geq$ 0 $\rightarrow$ - $\ell \leq \mu \leq \ell$

$\rightarrow$ μ = - ℓ, - ℓ + 1,....., ℓ - 1, ℓ

Es decir, para cada valor propio de J , existen 2ℓ+1 diferentes valores propios de $\mathcal{A}$. Además podemos reconocer que los valores enteros de ℓ y μ corresponden al momento angular orbital, mientras que los valores propios fraccionarios corresponden al operador de spin.

5 Interacción con un campo magnético externo

18) Debe quedar claro que no es el momento angular (orbital o intrínseco) el que interactúa con un campo magnético, sino los momentos dipolares magnéticos asociados.
Así tenemos el momento magnético $\mathbf{M}_{orb}$ = $(q/2\mu c)$ **L**, asociado al momento magnético orbital **L**, y el momento magnético intrínseco $\mathbf{M}_{int}$ = (q/μc) **S**, asociado al spin **S**, que en el presente modelo son operadores escalares. En el caso del spin, de acuerdo con el experimento de Stern-Gerlach, existen en general 2s + 1 estados de polarización, así que la función de estado χ debe ser una columna de n elementos, con n > 1 ; y el operador **S** deberá ser representado por una matriz de n$\times$n . La energía de interacción, $\mathcal{W}$, entre el campo magnético **B**, de magnitud B, y el dipolo magnético intrínseco $\mathbf{M}_{int}$, puede escribirse como: $\mathcal{W}$ = - B$\mathbf{M}_{int}$ = - (q/μc)**S**B.

Si consideramos las funciones propias χ_k, k = 1 , 2,..., n, resulta conveniente representar **S** en su forma diagonal, cuyos elementos serán, en orden decreciente, s$_1$, s$_2$, ..., s$_{n-1}$, s$_n$, with s$_k$ = - k + (n + 1)/2

6 Dinámica de la función de estado general

19) La ecuación de Schrödinger para los estados del spin es

$$\mathcal{W}\chi + (\hbar/\mathrm{i})\ \partial\chi/\partial \mathrm{t} = 0$$

Pero

$\chi(t) = \sum_k a_k(t)\chi_k$,

$\mathcal{W}\chi_k$ = - (q/μc)BS χ_k = - (q/μc)B $s_k\chi_k$

$\rightarrow$

- (q/μc)B$\sum_k s_k a_k(t)\chi_k + (\hbar/i)\sum_k \dot{a}_k\chi_k = 0 \rightarrow$

- (q/μc)B$s_k a_k(t) + (\hbar/i)\dot{a}_k = 0$, $\dot{a_k} \equiv \dfrac{da_k}{dt}$

$\rightarrow a_k(t) = c_k \exp(iw_k t)$,

donde $w_k = (q/\mu$c)(B/ $\hbar)s_k$.

Entonces,

$\chi(t) = \sum_k c_k \exp(iw_k t)\chi_k$, con $\sum_k |c_k|^2 = 1$

Notemos que $\chi(t)$ es un vector columna en el espacio de Hilbert n-dimensional, donde con el tiempo describe una curva más o menos complicada sobre la esfera unitaria.

7 Conclusiones

1) Con el modelo escalar se han obtenido los mismos valores propios -y las mismas funciones propias- que los obtenidos en el modelo vectorial.

2) El modelo vectorial del momento angular no es indispensable para establecer las propiedades de tal operador.

3) Como se ha mostrado en el modelo escalar, el momento angular no tiene ninguna relación con las direcciones de los ejes de coordenadas. Entonces no es correcto considerar que las componentes de momento angular vectorial, son componentes que corresponden a las de los ejes coordenados.

4) Tampoco es correcto representar al spin por vectores de longitud $\ell\hbar$ distribuidos angularmente de manera que sus proyecciones sobre el eje OZ sean los diferentes $2\ell{+}1$ valores propios de L_z. Este "truco" además sugiere que **S** estaría cuantizado angularmente, para lo cual no existe ningún sustento.

5) En el modelo escalar tampoco aparece la llamada rotación de Larmor alrededor del eje OZ. Sí existen las que podríamos llamar "frecuencias de Larmor " que se manifiestan en el espacio de Hilbert $(2s + 1)$-dimensional.

1. R. Feynman, *Lectures on Physics III.* Oxford University Press, 1995.
2. H. G. Valqui, *Apuntes de Mecánica Cuántica, Universidad Nacional de Ingeniería.*
3. J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics, Chap 3: Schwinger$'$s Oscillator Model.* Addison Wesley, 1994.