

Métodos multimalla V-ciclo Y F-ciclo para el problema biarmónico usando el elemento Hsieh-Clough-Tocher

Cristina Navarro Flores, & William Carlos Echegaray Castillo

Facultad de Ingeniería Civil, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería

E-mail: cnavarrof@uni.edu.pe, williamechegaray@yahoo.com.br

Recibido el 25 de Marzo del 2013; aceptado el 29 de Abril del 2013

Este trabajo presenta un estudio ordenado de los métodos multimalla para ecuaciones diferenciales de cuarto orden, usando el elemento finito conforme Hsieh-Clough-Tocher (HCT) para su discretización. Para el cual se elige como problema modelo al problema biarmónico de la losa de concreto armado, mostrándose su forma variacional, la existencia y unicidad de su solución. Se busca que la solución del problema sea lo suficientemente regular, para ello se amplía la búsqueda en espacios de Sobolev de índice fraccionario donde ya se sabe que el problema biarmónico tiene una regularidad elíptica $\alpha \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. Se hace un estudio de los métodos multimalla, usando la teoría aditiva para mostrar la convergencia de los métodos V-ciclo y F-ciclo. Se adaptan los métodos multimalla para la discretización del elemento HCT y se demuestra que los métodos multimalla son convergentes para las ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden. Se muestran resultados numéricos de la convergencia de las multimallas, verificándose el análisis teórico. Se comparan los resultados de los diferentes algoritmos multimallas algebraicos, se muestran resultados de la solución numérica para el problema de la losa de concreto armado, usando el elemento finito HCT y las multimallas V-Ciclo, W-Ciclo y F-Ciclo en la solución del sistema lineal resultante, finalmente se dan algunas sugerencias para la mejora de ellos.

Palabras clave: Multimallas, elemento conforme HCT.

This paper presents an orderly study of multigrid methods for fourth-order differential equations using the finite element as Hsieh-Clough-Tocher (HCT) for its discretization. To which is chosen as a model problem to biharmonic problem of reinforced concrete slab, showing its variational form, the existence and uniqueness of its solution. It is intended that the solution of the problem is regular enough, to do the search is expands in Sobolev spaces of fractional index where it is already known that the problem has an elliptical biharmonic regularly $\alpha \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. A study of the multigrid methods is using the additive theory for show the convergence of V-cycle and F-cycle methods. They adapt the multigrid methods for the discretization of the element HCT and shows that are convergent multigrid methods for partial differential equations of fourth order. It numerical results show the convergence of multi mesh, verifying the theoretical analysis. The results of different multigrid algebraic algorithms are compared, results of the numerical solution to the problem of reinforced concrete slab are shown, using the finite element multigrid HCT and V-cycle, W-cycle and F-cycle in the solution the resulting linear system, finally some suggestions for improving them.

Keywords: Multigrids, element as HCT.

1. Introducción

Los métodos multimallas son métodos iterativos, eficientes para resolver sistemas lineales cuya matriz principal puede ser esparsa con un número de condición muy grande.

Los métodos multimalla se estudiaron por primera vez en Rusia en los años sesenta, y los primeros resultados de convergencia lo dieron Bank y Dupont en 1981.

En 1983 Braess y Hackbusch probaron que bajo una regularidad elíptica total, el número de contracción de un multimalla V-ciclo simétrico para un problema de segundo orden era menor o igual a $\frac{C}{C+m}$ donde m es el número de pasos suaves totales y C una constante independiente del número de iteraciones.

Luego una teoría multimalla multiplicativa se desarrolló por Zhang, Bramble y Pasciak, Xu y otros,

mostrando que el número de contracción es menor o igual a un número δ entre 0 y 1 independiente del número de pasos suaves e iteraciones.

La teoría multimalla aditiva fué desarrollada por Brenner, para problemas de segundo orden, que completa la generalización de los resultados clásicos de Braess y Hackbusch. La teoría multimalla aditiva es extendida a problemas de cuarto orden por Jie zhao.

Objetivos

Los objetivos que se pretende lograr son:

- Ilustrar la teoría aditiva para las multimallas.
- Aplicar el método multimalla para la discretización del elemento Hsieh-Clough-Tocher (HCT).
- Analizar la convergencia de los métodos multimallas para el elemento HCT.

- Aplicar a un problema de losa de concreto armado.

2. Conceptos preliminares

Se mencionan los conceptos necesarios, que se puede ver en [1], [3], [4], [7]

2.1. Definición de espacios

Espacio $L_2(\Omega)$

Se define

$$L_2(\Omega) = \{v : v \text{ real definida en } \Omega \text{ y } \int_{\Omega} v^2 dx < \infty\}$$

con producto interno y norma respectivamente

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx, \quad \|v\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2}$$

Espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$

Se define

$$H^2(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) : D^\alpha v \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq 2\},$$

donde

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, dotado del producto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} D^\alpha u D^\alpha v \right) dx$$

la norma asociada

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

y la semi norma

$$|u|_{H^2(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

Al espacio $H^2(\Omega)$ se le conoce como el espacio de Sobolev de orden 2.

Es conocido:

- El espacio $H^2(\Omega)$ es un espacio Hilbert, al igual que el espacio $L_2(\Omega)$
- La norma (1) y la semi norma (2) son normas equivalentes.

Teorema 2.1 (Fórmula de Green generalizada) *Se tiene la siguiente fórmula generalizada de Green: Para toda función $u \in H^2(\Omega)$ y toda función v de $H^1(\Omega)$, se tiene:*

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v ds$$

2.2. El Problema Biarmónico

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio poligonal acotado, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ continua Lipschitz. Dado el siguiente problema biarmónico con condiciones de frontera Dirichlet homogéneo.

Encontrar u definida en Ω solución de

$$(PB) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

Donde $f \in L_2(\Omega)$.

Se buscará la forma variacional de la ecuación (3). Para ello se define primero el espacio

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma = \partial\Omega\}$$

Multiplicando (3) por una función test $v \in H_0^2(\Omega)$ e integramos sobre Ω , a ambos lados y usando la fórmula de Green, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v dx &= \int_{\Omega} v \Delta^2 u dx = \int_{\Omega} v \Delta(\Delta u) dx \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \Delta u v ds}_0 - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nabla v dx \\ &= - \underbrace{\int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial u}{\partial n} ds}_0 + \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \\ &= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \end{aligned}$$

Formulación Variacional

Luego, se tiene la siguiente forma variacional del problema (3)

$$(PV) \quad \begin{cases} \text{Encontrar: } u \in H_0^2(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u, v) = \phi(v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (4)$$

Donde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx \quad (5)$$

$$\phi(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

Luego se verifica:

1. $a(\cdot, \cdot)$ es acotado.

En efecto:

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|a(v, w)| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \|w\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall v, w \in H_0^2(\Omega)$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva.

En efecto:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \\ &= |u|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\geq C \|u\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

3. $\phi(\cdot)$ es acotada.

En efecto:

$$\begin{aligned} |\phi(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v \right|, \quad f \in L_2(\Omega) \\ &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq M \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), M : cte. \end{aligned}$$

Luego ϕ es acotada y continua.

Existencia y unicidad de la solución de (PV)

Como la bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es acotada, coerciva y la lineal ϕ es continua y acotada, por el teorema de Lax-Milgram el problema (PV) (4), tiene solución única $u \in H_0^2(\Omega)$.

2.3. Regularidad elíptica

La estimación abstracta, Lema de Cea, reduce la estimación del error para el método de Ritz Galerkin a un problema en la teoría de aproximación, a la determinación de la magnitud del error de la mejor aproximación de $u \in H_0^2(\Omega)$ por un elemento de V_k (espacio de dimensión finita, $V_k \subset H_0^2(\Omega)$).

La solución de este problema depende de la regularidad (suavidad) de u y de la naturaleza del espacio V_k . De este modo: $u - \tilde{u}$, $\tilde{u} \in V_k$, se puede medir en otras normas.

Definición 2.1 (Espacio dual)

Sea $B(\Omega)$ el espacio definido sobre Ω . Se define $B'(\Omega) = \mathcal{L}(B(\Omega), \mathbb{R})$, es decir, si $\Lambda \in B'(\Omega)$

$\Lambda : B(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua.

y se representa

$$\Lambda(v) = \langle \Lambda, v \rangle, \quad \forall v \in B(\Omega)$$

Así $B'(\Omega)$ es el conjunto de funcionales lineales sobre el espacio $B(\Omega)$, al cual se le llama el **Espacio dual de $B(\Omega)$** .

Y está dotado por la norma

$$\|\Lambda\|_{B'(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in B(\Omega)} \frac{\langle \Lambda, v \rangle}{\|v\|_{B(\Omega)}}, \quad \text{con } \Lambda \in B'(\Omega)$$

donde $\|\cdot\|_{B(\Omega)}$ es la norma en $B(\Omega)$.

Definición 2.2 (El Dual de $H_0^2(\Omega)$)

El espacio dual de $H_0^2(\Omega)$ se denota por $H^{-2}(\Omega)$, es decir $H^{-2}(\Omega) = [H_0^2(\Omega)]'$, con norma

$$\|\phi\|_{H^{-2}(\Omega)} := \sup_{0 \neq v \in H_0^2(\Omega)} \frac{\langle \phi, v \rangle}{\|v\|_{H_0^2(\Omega)}}, \quad \text{con } \phi \in H^{-2}(\Omega)$$

Estimación de la Regularidad de la solución del problema Biarmónico

La estimación de la regularidad se presenta en términos de las normas de Sobolev de índice fraccionario, basado en la teoría de interpolación entre espacios de Hilbert e interpolación entre subespacios de un espacio de Hilbert, se pueden ver en [1] y se usa la siguiente notación ($0 \leq m < n$)

$$H^{\alpha m + (1-\alpha)n} = \underbrace{[H^n, H^m]_{\alpha}}_{\text{Espacio interpolante}} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (6)$$

Donde: α se le conoce como el índice de regularidad.

H^m y H^n son espacios de Sobolev.

2.3.1. Resultados para el Problema Biarmónico

Se tiene de [1], el cual menciona:

- De la formulación variacional (4), la funcional ϕ puede ser elegido en un espacio más general $H^{-2}(\Omega) = [H_0^2(\Omega)]'$.
- La regularidad elíptica de la ecuación biarmónica, implica que existe $\alpha \in \langle \frac{1}{5}, 1 \rangle$ tal que la solución u de (4) pertenece a $H^{2+\alpha}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ donde $\phi \in H^{-2+\alpha}(\Omega)$ y

$$\|u\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\phi\|_{H^{-2+\alpha}(\Omega)} \quad (7)$$

Donde: C_{Ω} depende solo de la forma de Ω .

- La siguiente estimación de dualidad se mantiene para la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$

$$a(v, w) \leq C |v|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} |w|_{H^{-2-\alpha}(\Omega)} \quad (8)$$

$C : cte, \forall v \in H^{2+\alpha}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), w \in H_0^2(\Omega)$.

Observación 2.1 Los espacios $H^{2+\alpha}$, $H^{-2+\alpha}$, $H^{-2-\alpha}$ son definidos como en (6).

2.4. Espacio del elemento finito y los métodos multimallas

Sea $\{T_k\}_{k \geq 1}$ una familia de triangulaciones de Ω obtenidas por una subdivisión regular, es decir: T_{k+1} se obtiene por la unión de los puntos medios de los lados del triángulo T_k .

Sea $h_k = \max\{\text{diam } T : T \in T_k\}$ el tamaño de la malla.

$$h_{k-1} = 2h_k \quad (9)$$

Formulación discreta

Sea $V_k \subset H_0^2(\Omega)$, (V_k de dimensión finita) y sea la siguiente notación

$$a_k(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) \text{ para el espacio } V_k$$

y se define

$$a_k(v, w) := \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \int_T D^2 v D^2 w dx, \quad \forall v, w \in V_k \quad (10)$$

Teniéndose el problema discreto

$$(PD) \quad \begin{cases} \text{Encontrar: } u_k \in V_k \text{ tal que} \\ a_k(u_k, v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in V_k. \end{cases} \quad (11)$$

Se definen el producto interno sobre V_k

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_k : V_k \times V_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

y $A_k : V_k \rightarrow V_k$ mediante

$$\langle A_k v, w \rangle_k = a_k(v, w), \quad \forall v, w \in V_k \quad (12)$$

De este modo (12), define un producto interno en V_k .

Por lo tanto $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ es una norma en V_k \square

A_k es simétrica y definida positiva respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$.

Luego

$$\langle A_k u_k, v \rangle_k = \langle f_k, v \rangle_k, \quad \forall v \in V_k \implies A_k u_k = f_k \quad (13)$$

Se usará el elemento HCT para la discretización del problema, y el sistema lineal que este genere se resolverá con los métodos multimalla.

2.5. Descripción del método multimalla iterativo del nivel k

En el nivel k el algoritmo multimalla, da una solución aproximada del sistema

$$A_k z = g \quad (14)$$

cuya solución aproximada es denotada por

$$\tilde{z} = MG(k, g, z_0, m_1, m_2) \quad (15)$$

donde

z_0 : es una aproximación inicial.

m_1 : número de pasos pre suave.

m_2 : número de pasos pos suave.

Sea $\rho(A_k)$ el radio espectral de A_k , entonces se elige Λ_k tal que:

$$\rho(A_k) < \Lambda_k = C h_k^{-4}, \text{ para alguna constante } C. \quad (16)$$

Sean los siguientes operadores de transferencia entre mallas

$$P_k^{k-1} : V_k \rightarrow V_{k-1} \text{ de fino a rugoso (Restricción)}$$

$$I_{k-1}^k : V_{k-1} \rightarrow V_k \text{ de rugoso a fino (Interpolación)}$$

que se definen como

$$(P_k^{k-1} v, w)_{k-1} = (v, I_{k-1}^k w)_k, \quad \forall v \in V_k, w \in V_{k-1} \quad (17)$$

2.5.1. Método multimalla en la iteración de nivel k

Del siguiente algoritmo genérico

Algorithm 1: Método multimalla en la iteración de nivel k

- i) Para $k = 1$, $MG(k, g, z_0, m_1, m_2) = A_1^{-1} g$.
 ii) Para $k > 1$, $MG(k, g, z_0, m_1, m_2)$ se tiene por los tres pasos que siguen:

1. Pre suavizador

Para $j = 1, 2, \dots, m_1$

$$\text{Calcular : } z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k} (g - A_k z_{j-1})$$

2. Corrección de la malla

Sea el residual: $r_k = g - A_k z_{m_1}$.

Aplicando la iteración del nivel $(k-1)$, **p** veces la iteración MG, con valor inicial 0, a la ecuación

$$A_{k-1} r_{k-1} = P_k^{k-1} r_k$$

para obtener $\tilde{r}_{k-1} \in V_{k-1}$ y hacer la corrección del error

$$z_{m_1+1} = z_{m_1} + I_{k-1}^k \tilde{r}_{k-1}$$

3. Post suavizador

Para $j = m_1 + 2, m_1 + 3, \dots, m_1 + m_2 + 1$.
 Calcular z_j :

$$z_j = z_{j-1} + \frac{1}{\Lambda_k} (g - A_k z_{j-1})$$

Finalmente

$$MG(k, g, z_0, m_1, m_2) = z_{m_1+m_2+1} \quad \square$$

se tiene la siguiente

Definición 2.3 Algoritmo V-Ciclo Del algoritmo anterior, si $p = 1$, el algoritmo es llamado un V-ciclo y se denota: MG_V .

Definición 2.4 Algoritmo W-ciclo Del algoritmo anterior, si $p = 2$, el algoritmo es llamado un W-ciclo y se denota: MG_W .

Definición 2.5 Algoritmo F-ciclo Si en el paso (2) del algoritmo genérico ($k > 1$) se usa una vez en el nivel $(k-1)$ seguido por una iteración V-ciclo, el algoritmo es llamado un F-ciclo y se denota: MG_F .

Observación 2.2 Si en la ecuación (15) los valores m_1 y m_2 son iguales se tiene métodos multimallas simétricos.

3. Teoría aditiva de las multimallas y método multimalla para la discretización del elemento HCT

3.1. Teoría aditiva de las multimallas

El objetivo de esta sección es presentar la teoría necesaria para establecer la convergencia de los algoritmos V-ciclo y F-ciclo. La teoría aditiva de las multimallas fué desarrollada en [3], [4] y [7].

Hipótesis de la teoría

Sea V_k el espacio de dimensión finita y se definen los siguientes operadores

- a) Operador identidad $Id_k : V_k \rightarrow V_k$
- b) Operador de Relajación $R_k : V_k \rightarrow V_k$ definido por

$$R_k = Id_k - \frac{1}{\Lambda_k} A_k \quad (18)$$

- c) Operador de restricción de malla fina a gruesa, $P_k^{k-1} : V_k \rightarrow V_{k-1}$
- d) Operador de interpolación de malla gruesa a fina, $I_{k-1}^k : V_{k-1} \rightarrow V_k$

Que están relacionados respecto a la forma bilineal $a_k(\cdot, \cdot)$

$$a_{k-1}(P_k^{k-1}v, w) = a_k(v, I_{k-1}^k w), \quad (19)$$

$$\forall v \in V_k, w \in V_{k-1}.$$

- e) El operador $T_{j,k,m} : V_k \rightarrow V_j$
- f) El operador $T_{k,j,m} : V_j \rightarrow V_k$ y se definen como

$$T_{j,k,m} = P_{j+1}^j R_{j+1}^m \dots P_k^{k-1} R_k^m, \quad \forall j < k \quad (20)$$

$$T_{k,j,m} = R_k^m I_{k-1}^k \dots R_{j+1}^m I_j^{j+1}, \quad \forall j < k \quad (21)$$

Con

$$T_{k,k,m} = Id_k \quad (22)$$

Definición 3.1 Sea $E_{k,m_1,m_2} : V_k \rightarrow V_k$ el operador del error de propagación del algoritmo multimalla V-ciclo aplicado a la ecuación (14), definido:

$$\mathbb{E}_{k,m_1,m_2}(z - z_0) = z - MG_V(k, g, z_0, m_1, m_2) \quad (23)$$

Definición 3.2 Sea el operador del error de propagación del algoritmo V-ciclo simétrico, $\mathbb{E}_{k,m} : V_k \rightarrow V_k$ aplicado a la ecuación (14), definido

$$\mathbb{E}_{k,m}(z - z_0) = z - MG_V(k, g, z_0, m, m) \quad (24)$$

Definición 3.3 Sea el operador de error de propagación del algoritmo F-ciclo

$$\tilde{\mathbb{E}}_{k,m} : \tilde{V}_k \rightarrow \tilde{V}_k$$

aplicado a la ecuación (14), definido

$$\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}(z - z_0) = z - MG_F(k, g, z_0, m) \quad (25)$$

Donde para los tres casos anteriores:

z : es la solución exacta de (14)

z_0 : es la aproximación inicial

3.2. Las hipótesis de la teoría aditiva

Una teoría aditiva del análisis de convergencia de los algoritmos multimalla V-ciclo y F-ciclo, se desarrolló en [7], basados en los operadores de error de propagación de los algoritmos multimalla V-Ciclo y F-Ciclo simétrico.

Definición 3.4 (Norma dependiente de la malla)

Una herramienta importante en el análisis de la convergencia, es la norma dependiente de la malla $\|\cdot\|_{s,k}$ definido como sigue:

$$\|v\|_{s,k} = \sqrt{(A_k^{s/2}v, v)_k}, \quad \forall v \in V_k \quad (26)$$

Definición 3.5 (Norma de la energía) Se define la norma de la energía

$$\|v\|_{a_k} = \sqrt{a_k(v, v)}, \quad \forall v \in V_k \quad (27)$$

Notación 3.1 Si X e Y representan expresiones y $C = cte$ independiente de la malla

Se denota como $X \lesssim Y$, si $X \leq CY$

Se denota como $X \approx Y$, si $X \lesssim Y$ e $Y \lesssim X$

De acuerdo a la teoría desarrollada en [7], se requiere verificar las siguientes hipótesis para el análisis de convergencia:

Hipótesis A, sobre V_k

$$(v, v)_k \approx \|v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V_k \quad (28)$$

$$\|v\|_{a_k} \lesssim h_k^{-2} \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad (29)$$

Hipótesis B, para los operadores de interpolación entre mallas I_{k-1}^k y P_k^{k-1}

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2,k-1}^2 + C_1 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (30)$$

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2-\alpha,k}^2 \leq (1 + \theta^2) \|v\|_{2-\alpha,k-1}^2 + C_2 \theta^{-2} h_k^{2\alpha} \|v\|_{2,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \|P_k^{k-1}v\|_{2-\alpha,k-1}^2 &\leq (1+\theta^2)\|v\|_{2-\alpha,k}^2 + \\ C_3\theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|v\|_{2,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \quad \theta \in (0,1) \end{aligned} \quad (32)$$

Donde C_1, C_2 y C_3 , constantes independientes de la malla.

Hipótesis C, para el producto de operadores:

$I_{k-1}^k P_k^{k-1}$ y $P_k^{k-1} I_{k-1}^k$

$$\|(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1})v\|_{2-\alpha,k} \lesssim h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (33)$$

$$\|(Id_{k-1} - P_k^{k-1} I_{k-1}^k)v\|_{2-\alpha,k-1} \lesssim h_k^\alpha \|v\|_{2,k-1}, \quad (34)$$

$\forall v \in V_{k-1}$.

Estimaciones

El operador $A_k : V_k \rightarrow V_k$, cumple

$$a_k(A_k^s v_1, v_2) = a_k(v_1, A_k^s v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V_k, \quad s \in \mathbb{R} \quad (35)$$

También el radio espectral $\rho(A_k)$ de A_k cumple:

$$\rho(A_k) \lesssim h_k^{-4} \quad (36)$$

Propiedades de las normas dependientes de la malla

a)

$$\|v\|_{0,k} = \sqrt{(v,v)_k} \approx \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad (37)$$

b)

$$\|v\|_{2,k} = \sqrt{a_k(v,v)} = \|v\|_{a_k}, \quad \forall v \in V_k \quad (38)$$

c)

$$\|A_k^s v\|_{t,k} = \|v\|_{t+4s,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad s, t \in \mathbb{R} \quad (39)$$

d) La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$\|v\|_{2+t,k} = \sup_{w \in V_k - \{0\}} \frac{a_k(v,w)}{\|w\|_{2-t,k}}, \quad \forall v \in V_k, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (40)$$

Como A_k es simétrica y definida positiva, sus valores propios son positivos, luego consideremos $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n_k}$ los valores propios de A_k y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_k}$ los correspondientes vectores propios, que satisfacen la relación de ortonormalidad.

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_k = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (41)$$

Para algún $v \in V_k$, podemos escribir

$$v = \sum_{i=1}^{n_k} c_i \phi_i, \quad \text{entonces } \langle v, v \rangle_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_i^2 \quad (42)$$

También

$$\langle A_k^s v, v \rangle_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_i^2 \lambda_i^s \quad (43)$$

Así también

$$\langle A_k^s v, v \rangle_k \lesssim h_k^{-4s} \langle v, v \rangle_k, \quad \text{para todo } s \geq 0 \quad (44)$$

Se establece una importante estimación inversa

$$\|v\|_{s,k} \lesssim h_k^{-(s-t)} \|v\|_{t,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad 0 \leq t \leq s \quad (45)$$

Para el operador de relajación $R_k : V_k \rightarrow V_k$ definido en (18), se tiene los siguientes resultados.

Lema 3.1 Las siguientes propiedades de suavidad se mantienen para $0 \leq t \leq s \leq 4$:

a)

$$\|R_k v\|_{s,k} \leq \|v\|_{s,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (46)$$

b)

$$\|R_k^m v\|_{s,k} \lesssim h_k^{-(s-t)} m^{-(s-t)/4} \|v\|_{t,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (47)$$

Se verá algunas relaciones importantes de los operadores I_{k-1}^k y P_k^{k-1} .

$$\|I_{k-1}^k v\|_{2,k} \lesssim \|v\|_{2,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (48)$$

También

$$\|(Id_{k-1} - P_k^{k-1} I_{k-1}^k)v\|_{2,k-1} \lesssim h_k^\alpha \|v\|_{2+\alpha,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (49)$$

y se tiene la siguiente relación

$$\|P_k^{k-1} v\|_{2,k-1} \lesssim \|v\|_{2,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (50)$$

Lema 3.2 Dado un número $w \in (0,1)$, las siguientes estimaciones se mantienen para m suficientemente grande:

a)

$$\|I_{k-1}^k R_{k-1}^m v\|_{2,k} \leq (1+w) \|v\|_{2,k-1}, \quad (51)$$

$\forall v \in V_{k-1}$.

b)

$$\|P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2-\alpha,k-1} \leq (1+w) \|v\|_{2-\alpha,k}, \quad (52)$$

$\forall v \in V_k$.

c)

$$\|R_k^m I_{k-1}^k v\|_{2+\alpha,k} \leq (1+w) \|v\|_{2+\alpha,k-1}, \quad (53)$$

$\forall v \in V_{k-1}$.

Corolario 3.1 Sea $j \leq k$, dado algún $w \in (0,1)$, y para m suficientemente grande se cumple las siguientes estimaciones

a)

$$\|T_{j,k,m}v\|_{2-\alpha,j} \leq (1+w)^{k-j} \|v\|_{2-\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (54)$$

b)

$$\|T_{k,j,m}v\|_{2+\alpha,k} \leq (1+w)^{k-j} \|v\|_{2+\alpha,j}, \quad \forall v \in V_j \quad (55)$$

Lema 3.3 (*Desigualdad fortalecida de Cauchy-Schwarz con suavidad*)

Sea $1 \leq j \leq k \leq K$. Y sea algún $w \in \langle 0, 1 \rangle$

$$a_K (T_{K,j,m} R_j^q v_j, T_{K,k,m} R_k^q v_k) \lesssim q^{-\alpha/2} \left(\frac{1+w}{2^\alpha} \right)^{k-j} (h_j^{-\alpha} \|v_j\|_{2-\alpha,j}) (h_k^{-\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k})$$

se cumple para todo $v_j \in V_j$ y $v_k \in V_k$, con m suficientemente grande.

Corolario 3.2 Sea $v_k \in V_k$ para $1 \leq k \leq K$. Entonces la siguiente estimación

$$a_K \left(\sum_{k=1}^K T_{K,k,m} R_k^q v_k, \sum_{k=1}^K T_{K,k,m} R_k^q v_k \right) \lesssim q^{-\alpha/2} \sum_{k=1}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2 \quad (56)$$

para m suficientemente grande.

3.3. Condiciones para la convergencia de los algoritmos V-Ciclo y F-Ciclo

En esta parte se establecerá el comportamiento asintótico del número de contracción de los algoritmos V-Ciclo y F-Ciclo con respecto al número m de pasos suaves.

Definición 3.6 (*Operador auxiliar*) Sea el operador auxiliar $\mathcal{E}_{K,m} : V_K \rightarrow V_K$ definido por:

$$\mathcal{E}_{K,m} = \sum_{k=2}^K T_{K,k,m} [R_k^m (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) h_k^{-2\alpha} A_k^{-\alpha/2} (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m] T_{k,K,m}$$

Lema 3.4 Se cumple

$$\|\mathcal{E}_{K,m}v\|_{2,K} \lesssim m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,K}, \quad \forall v \in V_K \quad (57)$$

Para m suficientemente grande.

Teorema 3.5 (*Convergencia del algoritmo V-Ciclo simétrico*)

Sea $\mathbb{E}_{k,m}$ el operador de error de propagación para el algoritmo V-Ciclo, entonces existen constantes positivas C y m_* , con C independiente de la malla tal que:

$$\|\mathbb{E}_{K,m}v\|_{2,K} \leq \frac{C}{m^{\alpha/2}} \|v\|_{2,K}, \quad \forall v \in V_K, \quad m \geq m_* \quad (58)$$

Demostración:

Si $K \geq 2$, sea $v \in V_K$ y

$$v_k = (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m T_{k,K,m} v \quad (59)$$

Entonces

$$a_K (\mathbb{E}_{K,m}v, \mathbb{E}_{K,m}v) \lesssim m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2$$

para m suficientemente grande. Luego

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}_{K,m}v\|_{2,K}^2 &\lesssim m^{-\alpha/2} \sum_{k=2}^K h_k^{-2\alpha} \|v_k\|_{2-\alpha,k}^2 \\ &\lesssim m^{-\alpha/2} m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,K} \|v\|_{2,K} \\ &= m^{-\alpha} \|v\|_{2,K}^2 \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 3.6 (*Convergencia del algoritmo F-Ciclo*)

Sea $\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}$ el operador de error de propagación para el algoritmo F-Ciclo, definido en (25). Entonces existen constantes positivas C y m_* , donde C independientes de la malla, tales que:

$$\|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}v\|_{2,k} \leq \frac{C}{m^{\alpha/2}} \|v\|_{2,k}, \quad \forall v \in V_k, \quad m \geq m_* \quad (60)$$

Demostración:

Sea $v \in V_k$. Considerando que el número de contracción en la j -ésima iteración del algoritmo F-Ciclo es η_j , es decir cumple:

$$\eta_j := \sup_{v \in V_j \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{\mathbb{E}}_{j,m}v\|_{2,j}}{\|v\|_{2,j}} \quad 1 \leq j \leq k \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}v\|_{2,k} &\leq \|R_k^m (Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1}) R_k^m v\|_{2,k} + \\ &\quad \|R_k^m I_{k-1}^k \mathbb{E}_{k-1,m} \tilde{\mathbb{E}}_{k-1,m} P_k^{k-1} R_k^m v\|_{2,k} \\ &\lesssim m^{-\alpha/2} \|v\|_{2,k} + m^{-\alpha/2} \eta_{k-1} \|v\|_{2,k} \\ &= m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}) \|v\|_{2,k}, \\ &\quad \text{para } m \geq m_0, m_0 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Además

$$\eta_k \lesssim m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}), \text{ para } m > m_0$$

Que implica:

$$\eta_k \leq C_0 m^{-\alpha/2} (1 + \eta_{k-1}), \text{ para } m > m_0, C_0 : \text{cte}$$

Teniéndose una cota general para

$$\eta_k \leq \frac{C_0}{m^{\alpha/2} - C_0}, \quad \forall k \text{ con } m^{\alpha/2} > C_0 \quad (62)$$

Luego

$$\|\tilde{\mathbb{E}}_{k,m}v\|_{2,k} \lesssim \frac{C}{m^{\alpha/2}} \|v\|_{2,k} \quad \square$$

4. Método multimalla para la discretización del elemento HCT

En esta sección se desarrolla los operadores de transferencia entre mallas para la discretización del elemento conforme HCT.

4.1. El elemento Hsieh Clough Tocher (HCT)

El elemento HCT completo se define en un triángulo y éste a su vez se divide en tres triángulos los cuales tienen como vértice común al centroide del triángulo mayor y sus otros dos vértices los vértices del triángulo mayor.

Sus funciones forma son funciones de clase C^1 en el triángulo, cuyas restricciones para cada triángulo menor son polinomios cúbicos.

Las variables nodales incluyen: Las evaluaciones de las funciones forma en los vértices del triángulo, las evaluaciones de las gradientes en los vértices y de las derivadas normales en los puntos medios de los lados del triángulo, (Ver fig.(1)).

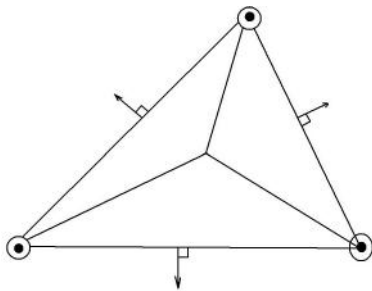


Figura 1. El macro elemento Hsieh-Clough-Tocher

Sea $\{\mathcal{T}_k\}_k \geq 1$ la familia de triangulaciones de Ω , y sea V_k el espacio del elemento HCT completo, asociado con \mathcal{T}_k .

Cuyas restricciones para cada $T \in \mathcal{T}_k$ es un polinomio cúbico por partes y cuyo valor nodal a lo largo de su frontera $\partial\Omega$ son cero.

También se tiene que:

$$V_k \subset H_0^2(\Omega) \quad V_{k-1} \not\subset V_k$$

El elemento HCT es conforme pero no anidado.

4.2. El elemento HCT, para el problema Biarmónico.

El método HCT para el problema:

Encontrar $u_k \in V_k$, tal que

$$a(u_k, v) = \phi(v), \quad \forall v \in V_k \tag{63}$$

Definición 4.1 Operador de interpolación nodal

Se define el operador de interpolación nodal de $C^1(\bar{\Omega})$ a V_k : Sean u y u_k soluciones de (4) y (63) respectivamente.

$$\Pi_k : C^1(\bar{\Omega}) \cap H_0^2 \longrightarrow V_k$$

Entonces:

$$\|u - u_k\|_a = \min_{v \in V_k} \|u - v\|_a \leq \|u - \Pi_k u\|_a \tag{64}$$

La norma de la energía $\|\cdot\|_a$ en $H_0^2(\Omega)$ se define:

$$\|v\|_a^2 = a(v, v) = |v|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V_k \tag{65}$$

Como el espacio de HCT es conforme, la forma bilineal $a_k(\cdot, \cdot)$ es simplemente $a(\cdot, \cdot)$. Así:

$$\|\cdot\|_{a_k} = \|\cdot\|_a$$

De (64) y (65), se sigue

$$\|u - u_k\|_a \lesssim h_k^\alpha \|u\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \tag{66}$$

Notación 4.1 Producto interno en V_k

Sean las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &= \text{conjunto de vértices internos de } \mathcal{T}_k \\ \mathcal{E}_k &= \text{conjunto de bordes internos de } \mathcal{T}_k \\ m_e &= \text{punto medio del borde } e \\ p &: \text{nodo} \\ N &= \text{número de triángulos que comparten} \\ &\quad \text{a } p \\ n(p) &= \frac{1}{6} \times N \end{aligned} \tag{67}$$

Definición 4.2 (Producto interno dependiente de la malla)

Se define el producto interno en V_k , por:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2)_k &:= h_k^2 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} n(p) v_1(p) v_2(p) \\ &\quad + h_k^4 \sum_{p \in \mathcal{V}_k} \nabla v_1(p) \cdot \nabla v_2(p) + \\ &\quad h_k^4 \sum_{e \in \mathcal{E}_k} \frac{\partial v_1}{\partial n}(m_e) \frac{\partial v_2}{\partial n}(m_e) \end{aligned} \tag{68}$$

Lema 4.1 Se cumple la hipótesis (28):

$$(v, v)_k \approx \|v\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V_k \tag{69}$$

Definición 4.3 Operador A_k

Se puede representar la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ por el operador $A_k : V_k \longrightarrow V_k$, que se define como:

$$(A_k v_1, v_2)_k = a(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V_k$$

Así la ecuación (63) se puede reescribir como sigue

$$A_k u_k = f_k \quad f_k \in V_k \tag{70}$$

$$(f_k, v)_k = \phi(v), \quad \forall v \in V_k$$

Definición 4.4 (Operador de transferencia entre malla gruesa a fina)

Sea

$$I_{k-1}^k : V_{k-1} \longrightarrow V_k \text{ y se define como } I_{k-1}^k = \Pi_k |_{V_{k-1}}$$

Definición 4.5 (Operador de transferencia entre malla fina a gruesa)

Se define $I_k^{k-1} : V_k \longrightarrow V_{k-1}$ como la transpuesta

de I_{k-1}^k respecto al producto interno discreto como:

$$(I_k^{k-1}v, w)_{k-1} = (v, I_{k-1}^k w)_k \quad \forall v \in V_k, w \in V_{k-1}$$

4.3. Operador de interpolación y operadores de transferencia entre mallas

En esta sección se tratará de las propiedades del operador de interpolación y de los operadores de transferencia entre mallas. Se inicia con una estimación ya conocida y una interpolación del operador $I_d - \Pi_k$ entre espacios de Sobolev, donde I_d es el operador identidad en $L_2(\Omega)$.

$$|\zeta - \Pi_k \zeta|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} |\zeta|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad \forall \zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega) \quad (71)$$

Lema 4.2 Sea $\zeta \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+\alpha}(\Omega)$ y $\zeta_k \in V_k$ que se relacionan por

$$a(\zeta, v) = a(\zeta_k, v) \quad \forall v \in V_k \quad (72)$$

Entonces

$$\|\zeta - \zeta_k\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} \|\zeta\|_{H^{2+\alpha}(\Omega)} \quad (73)$$

Demostración:

De la estimación inversa (45), se tiene

$$\|v\|_{s,k} \lesssim h_k^{-(s-t)} \|v\|_{t,k}, \quad \forall v \in V_k \quad 0 \leq t \leq s$$

considerando $s = 2$ y $t = 0$ se tiene

$$\|v\|_{2,k} \lesssim h_k^{-2} \|v\|_{0,k}, \quad \forall v \in V_k$$

por (38) y (37), se sigue

$$\|v\|_{a_k} \lesssim h_k^{-2} \|v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall v \in V_k \quad \square \quad (74)$$

Haciendo un repaso

- El lema (4.1) prueba la hipótesis (28)
- La relación (74) prueba la hipótesis (29)
- Con la norma $\|\cdot\|$ definida en (26) y (68), las propiedades (36), (37), (38), (39), (40), (45), (46) y (47) están totalmente establecidas para el espacio HCT.

Definición 4.6 (Operador de proyección del espacio L_2 en V_k)

Sea el Operador de proyección de L_2 en V_k , como

$$Q_k : L_2(\Omega) \longrightarrow V_k$$

verificándose

$$Q_k(v) = v \quad \forall v \in V_k \quad (75)$$

$$\|Q_k(\zeta)\|_{L_2(\Omega)} \lesssim \|\zeta\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in L_2(\Omega) \quad (76)$$

$$\|Q_k(\zeta)\|_{H_2(\Omega)} \lesssim \|\zeta\|_{H_2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in H_0^2(\Omega) \quad (77)$$

De las cuales se tiene que el operador Q_k es acotado de:

- i) $L_2(\Omega) \longrightarrow (V_k, \|\cdot\|_{0,k})$
- ii) $H_0^2(\Omega)(V_k, \|\cdot\|_{2,k}) \longrightarrow (V_k, \|\cdot\|_{2,k})$

Propiedad 4.1 (Interpolación de espacios de Sobolev y las normas de Hilbert)

Las siguientes propiedades se pueden ver en [3]

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} \lesssim \|v\|_{s,k} \quad \forall v \in V_k \quad (78)$$

$$\|Q_k \zeta\|_{s,k} \lesssim \|\zeta\|_{H^s(\Omega)} \quad \forall \zeta \in H_0^s(\Omega) \text{ para } s \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (79)$$

En el siguiente lema se relacionan las normas dependientes y las normas de Sobolev, ver [5]

Lema 4.3 Para $s \in [0, 2]$ con $s \neq \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$, se cumple

$$\|v\|_{s,k} \approx \|v\|_{H^s(\Omega)} \quad \forall v \in V_k \quad (80)$$

Demostración:

(\longrightarrow) Sea $v \in V_k$, $s \neq \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$, luego

$$\|v\|_{s,k} = \|Q_k v\|_{s,k} \lesssim \|v\|_{H^s(\Omega)}$$

(\longleftarrow) De (78): $\|v\|_{H^s(\Omega)} \lesssim \|v\|_{s,k}, \quad \forall v \in V_k$

Más resultados, lemas y demostraciones se pueden ver en [4], [5]

Corolario 4.1 Las siguientes estimaciones se cumplen:

a)

$$\|\Pi_{k-1} v - v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k. \quad (81)$$

b)

$$\|\Pi_k v - v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha} \|v\|_{2+\alpha,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1}. \quad (82)$$

Demostración

a) Sea $v \in V_k$

$$\begin{aligned} \|\Pi_{k-1}v - v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} &\approx \|\Pi_{k-1}v - v\|_{2-\alpha,k} \\ &\lesssim h_k^{-(2-\alpha)}h_k^{(2+\alpha)}\|v\|_{2+\alpha,k} \\ &= h_k^{2\alpha}\|v\|_{2+\alpha,k} \quad \square \end{aligned}$$

b) Sea $v \in V_{k-1}$

$$\begin{aligned} \|\Pi_k v - v\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} &\approx \|\Pi_k v - v\|_{2-\alpha,k} \\ &\approx h_k^{-(2-\alpha)}\|\Pi_k v - v\|_{L_2(\Omega)} \\ &\lesssim h_k^{-(2-\alpha)}h_k^{(2+\alpha)}\|v\|_{2+\alpha,k-1} \\ &= h_k^{2\alpha}\|v\|_{2+\alpha,k-1} \quad \square \end{aligned}$$

5. Análisis de convergencia

En esta sección se desarrolla la convergencia de los métodos multimallas V-Ciclo y F-Ciclo para la discretización con el elemento finito HCT. Para ello se requiere verificar el cumplimiento de las hipótesis de (28) a (34).

5.1. Prueba de las hipótesis A, de la teoría aditiva

Es referido al cumplimiento de las hipótesis sobre V_k . Las cuales ya fueron probadas en la sección anterior. En la hipótesis (28) se verificó en el Lema(4.1) y la hipótesis (29) se verificó en (74).

5.2. Prueba de las hipótesis B, de la teoría aditiva

Es referido al cumplimiento de las hipótesis para los operadores de interpolación entre mallas: I_{k-1}^k y P_k^{k-1} .

Lema 5.1 *La hipótesis (30) se cumple, es decir:*

$$\begin{aligned} \|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 &\leq (1 + \theta^2)\|v\|_{2,k-1}^2 + \\ &C_1\theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|v\|_{2+\alpha,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Demostración:

Sea $v \in V_{k-1}$

$$\begin{aligned} \|I_{k-1}^k v\|_{2,k}^2 &= |\Pi_k v|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (1 + \theta^2)\|v\|_{2,k-1}^2 + C\theta^{-2}h_k^{-4}|\Pi_k v - v|_{0,k}^2 \\ &\leq (1 + \theta^2)\|v\|_{2,k-1}^2 + C\theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|v\|_{2+\alpha,k-1}^2 \quad \square \end{aligned}$$

Lema 5.2 *Se cumple la hipótesis (31)*

$$\begin{aligned} \|I_{k-1}^k v\|_{2-\alpha,k}^2 &\leq (1 + \theta^2)\|v\|_{2-\alpha,k-1}^2 + \\ &C_2 \theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|v\|_{2,k-1}^2, \quad \forall v \in V_{k-1}, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Ver demostración en [5],[4]

Lema 5.3 *La hipótesis (32) se cumple, es decir*

$$\begin{aligned} \|P_k^{k-1}v\|_{2-\alpha,k-1}^2 &\leq (1 + \theta^2)\|v\|_{2-\alpha,k}^2 + \\ &C\theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|v\|_{2,k}^2, \quad \forall v \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

Demostración:

Sean $\zeta_k \in V_k$ arbitrario, y $\zeta \in H_0^2(\Omega)$, $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$, luego

$$\begin{aligned} \|P_k^{k-1}\zeta_k\|_{2-\alpha,k-1}^2 &\leq (1 + \theta^2)\|\zeta_k\|_{2-\alpha,k}^2 + \\ &C\theta^{-2}h_k^{2\alpha}\|\zeta_k\|_{2,k}^2, \quad \forall \zeta_k \in V_k, \theta \in \langle 0, 1 \rangle \quad \square \end{aligned}$$

5.3. Prueba de las hipótesis C, de la teoría aditiva

Se refiere al cumplimiento de las hipótesis para el producto de operadores: $I_{k-1}^k P_k^{k-1}$ y $P_k^{k-1} I_{k-1}^k$, como se verá en lo que sigue.

Lema 5.4 *La hipótesis (33) se cumple, es decir*

$$\|(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1})v\|_{2-\alpha,k} \lesssim h_k^{2\alpha}\|v\|_{2+\alpha,k}, \quad \forall v \in V_k \quad (83)$$

Demostración:

Sea $\zeta_k \in V_k$ arbitrario. Si $\zeta \in H_0^2(\Omega)$ y $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$, entonces

$$|\zeta_k - P_k^{k-1}\zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha}\|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}$$

y se tiene

$$|\zeta_k - P_k^{k-1}\zeta_k|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \lesssim h_k^{2\alpha}\|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}$$

También

$$P_k^{k-1}\zeta_k \in V_{k-1} \Rightarrow I_{k-1}^k(P_k^{k-1}\zeta_k \in V_{k-1}) = \Pi_k(P_k^{k-1}\zeta_k)$$

Luego

$$\begin{aligned} \|(Id_k - I_{k-1}^k P_k^{k-1})\zeta_k\|_{2-\alpha,k} &\approx \|\zeta_k - \Pi_k(P_k^{k-1}\zeta_k)\|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha}\|\zeta_k\|_{2+\alpha,k}, \quad \forall \zeta_k \in V_k \quad \square \end{aligned}$$

Lema 5.5 *La hipótesis (34) se cumple, es decir*

$$\|(Id_{k-1} - P_k^{k-1} I_{k-1}^k)v\|_{2-\alpha,k-1} \lesssim h_k^\alpha\|v\|_{2,k-1}, \quad \forall v \in V_{k-1} \quad (84)$$

Demostración:

Sea $\zeta_{k-1} \in V_{k-1}$ y se definen $\zeta \in H_0^2(\Omega)$ y $\zeta_k \in V_k$ por:

$$a(\zeta, \phi) = a(\zeta_{k-1}, Q_{k-1}\phi), \quad \forall \phi \in H_0^2(\Omega)$$

$$a(\zeta_k, v) = a(\zeta, v), \quad \forall v \in V_k$$

Sea

$$\begin{aligned} Form &:= \|(Id_{k-1}\zeta_{k-1} - P_k^{k-1}I_{k-1}^k\zeta_{k-1})\|_{2-\alpha,k-1} \\ &\lesssim h_k^{2\alpha}\|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha,k-1} + |\zeta_k - \Pi_k\zeta_{k-1}|_{H^{2-\alpha}(\Omega)} \\ &\quad + h_k^{2\alpha}\|\zeta_{k-1}\|_{2+\alpha,k-1} \\ &= h_k^\alpha\|\zeta_{k-1}\|_{2,k-1}, \quad \forall \zeta_{k-1} \in V_{k-1} \quad \square \end{aligned}$$

Hasta aquí se verificaron todas las hipótesis de la teoría aditiva (3.2) para los métodos multimalla con la discretización del elemento finito HCT.

En consecuencia los teoremas de convergencia para el algoritmo V-Ciclo simétrico y para el algoritmo F-Ciclo simétrico (Teorema (3.5) y el Teorema (3.6)) se cumplen para el elemento HCT, con lo cual se prueba la convergencia.

6. Resultados Numéricos

Todas las pruebas de los ejemplos numéricos se realizaron con el software MATLAB version 7.8 (R2009a).

Para esta parte se puede ver [2], [5], [6], [9]

6.1. Implementación del elemento finito HCT completo

Sea el triángulo K de vértices a_1, a_2 y a_3 , con centro de gravedad a . Además sean $\{b_1, b_2, b_3\}$ los puntos medios de sus lados y sean $\{c_1, c_2, c_3\}$ los puntos donde recaen las alturas. El triángulo K se divide en tres triángulos K_1, K_2 y K_3 , como se observa en la figura (2).

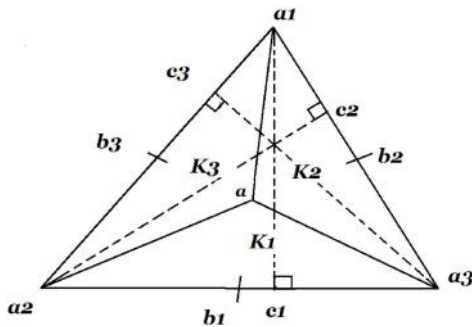


Figura 2. Elemento finito HCT completo

Donde

$$P_K = \{p \in C^1(K) : p_i = p|_{K_i} \in P_3(K_i), 1 \leq i \leq 3\}$$

$$\sum_K = \{p(a_i), \nabla p(a_i), \frac{\partial p}{\partial n}(b_i), i = 1, 2, 3\}$$

Teniéndose presente que $\nabla p(a_i)$ representa a dos grados de libertad, para cada $i = 1, 2, 3$. De este modo la $dim P_K = 12$, es decir se deben tener 12 funciones de forma.

Para ello y por su simplicidad se expresarán en coordenadas de áreas $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ que se define como:

sea un punto (x, y) interior a un triángulo, ver figura (3), donde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \text{área}(K_1)/\text{área}(K) \\ \lambda_2 &= \text{área}(K_2)/\text{área}(K) \\ \lambda_3 &= \text{área}(K_3)/\text{área}(K) \end{aligned}$$

Así $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

Si se conoce los vértices del triángulo $a_1 = (x_1, y_1), a_2 = (x_2, y_2)$ y $a_3 = (x_3, y_3)$ se tiene lo siguiente

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{(x - x_2)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_2)(y - y_2)}{\Delta} \\ \lambda_2 = \frac{(x - x_3)(y_3 - y_1) + (x_1 - x_3)(y - y_3)}{\Delta} \\ \lambda_3 = \frac{(x - x_1)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)(y - y_1)}{\Delta} \end{cases} \quad (85)$$

con $\Delta = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$

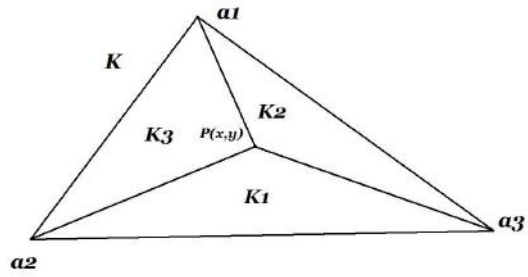


Figura 3. Coordenadas de área para un triángulo K

6.1.1. Polinomios de forma

Para cada subtriángulo $K_i, i = 1, 2, 3$ se tiene 12 polinomios de forma, que se denota como

$$R_i = \{R_1^i, R_2^i, R_3^i, R_4^i, R_5^i, R_6^i, R_7^i, R_8^i, R_9^i, R_{10}^i, R_{11}^i, R_{12}^i\} \quad (86)$$

y cada polinomio de forma $R_j^i, j = 1, 2, \dots, 12$ es de grado 3, y están en función de:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1^2\lambda_2, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_3^2\lambda_2, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\} \\ L_2 &= \{\lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_1^3, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_3^2\lambda_2, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1^2\lambda_2, \lambda_2\lambda_3\lambda_1\} \\ L_3 &= \{\lambda_3^3, \lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^2\lambda_2, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_1^2\lambda_2, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1\lambda_2\} \end{aligned}$$

En el orden que se muestran, donde los coeficientes que componen la combinación está almacenada en las matrices de coeficientes Cf_1, Cf_2, Cf_3 para los sub-triángulos K_1, K_2, K_3 respectivamente, se puede ver en [5], [6] y por su gran tamaño no se muestra aquí.

Estas matrices se obtienen haciendo cumplir las condiciones que hay entre los sub-triángulos, planteando las ecuaciones y escribiéndolas en términos de las excentricidades del triángulo K , ver [5].

Luego los polinomios de forma para cada sub-triángulo (86), se obtiene como

$$R_i = Cf_i * L_i^t, \text{ para } i = 1, 2, 3$$

En la figura Fig.(4), se muestran las 12 funciones de forma para el sub-triángulo K_1 , en la figura Fig.(5) se muestran 2 de las 12 funciones de forma del sub-triángulo K_2 ; análogamente para el sub-triángulo K_3 , en la figura Fig.(6) se muestran 2 de sus 12 funciones de forma .

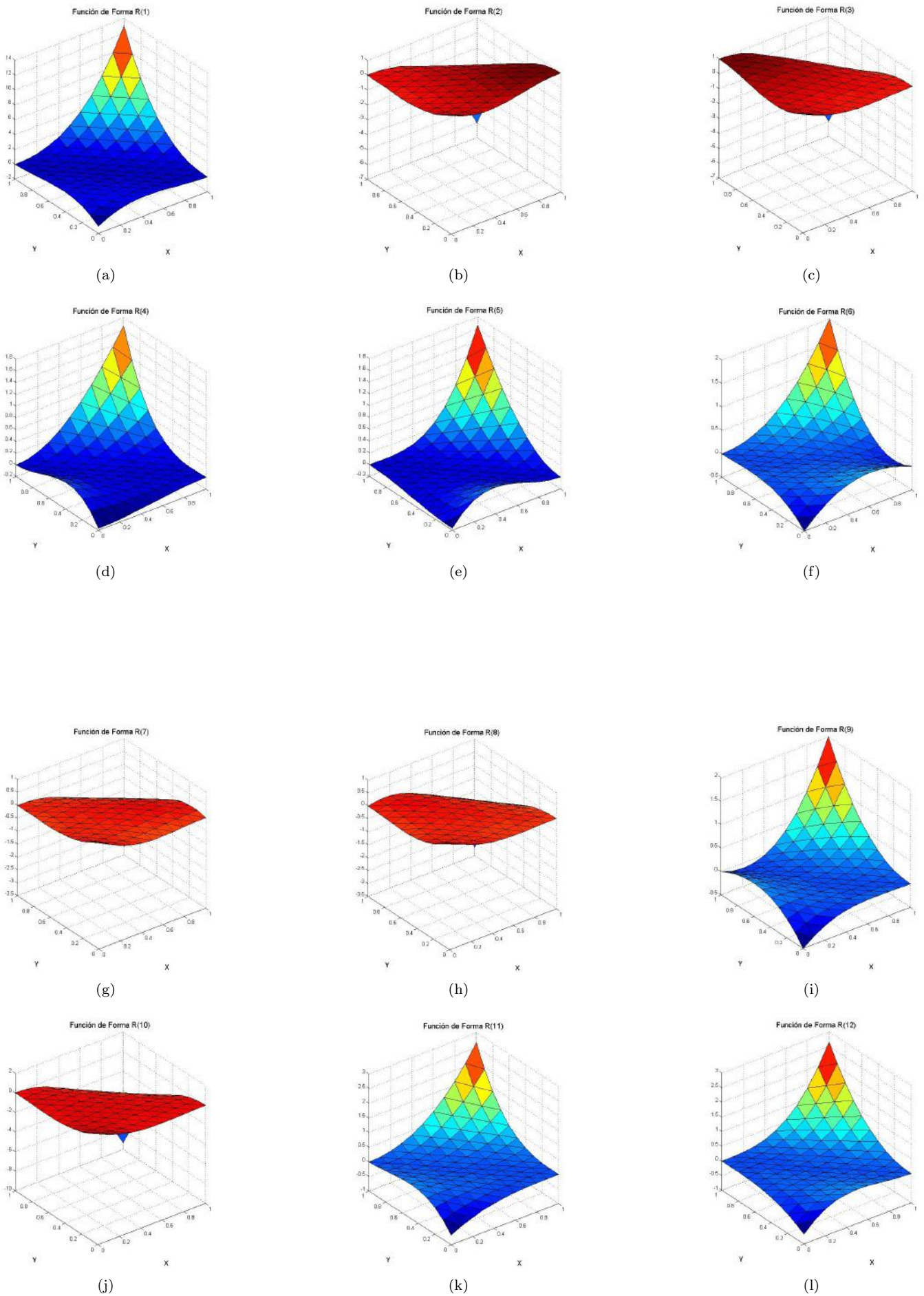


Figura 4. Doce funciones de forma para el sub_triángulo K_1

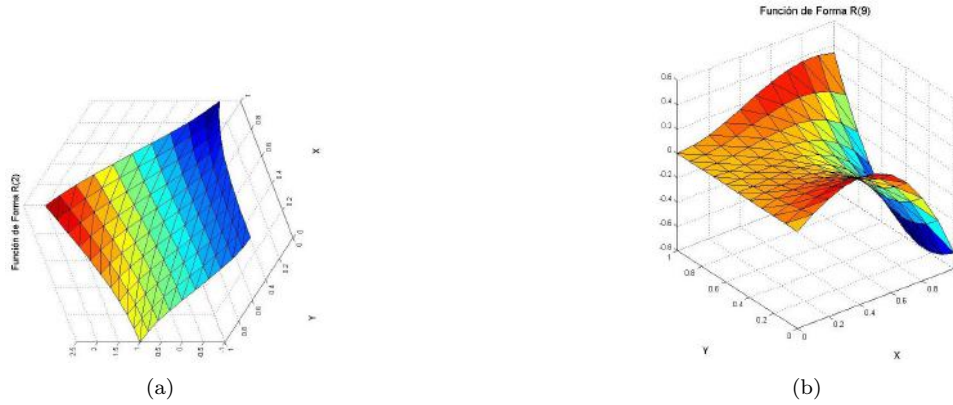


Figura 5. Dos funciones de forma para el sub_triángulo K2

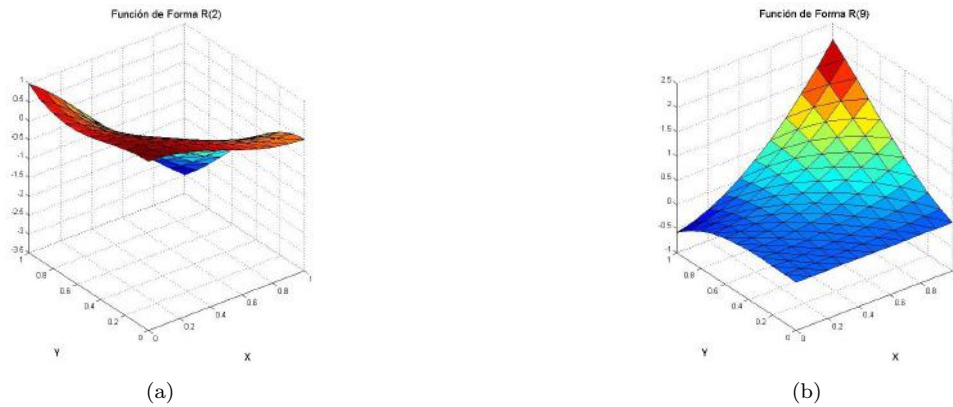


Figura 6. Dos funciones de forma para el sub_triángulo K3

6.2. Aplicación física: Problema de una losa

Se aplicará al siguiente problema de una losa delgada de material elástico homogéneo e isótropo, es decir que presenta el mismo comportamiento mecánico para cualquier dirección de estiramiento alrededor de un punto.

$$P : \begin{cases} \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 u = f, & u \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & u \in \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (87)$$

Donde:

- E : Módulo de Young
- ν : Coeficiente de Poisson
- e : Espesor de la losa
- f : Fuerza uniformemente distribuida a la losa
- u : **Desplazamiento vertical del plano medio de la losa**

Por las condiciones de frontera, se dice que este tipo de losa es empotrada en los bordes, **sostenida por la teoría de losas delgadas de Kirchhoff**. Donde el coeficiente de Poisson es la constante de elasticidad del material y E (el módulo de Young) que lleva las propiedades del material.

Las losas son elementos estructurales horizontales cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes

en comparación con su altura donde las cargas son perpendiculares a su plano, se emplean para proporcionar superficies planas y útiles. La losa es el principal sostén para las personas, elementos, maquinarias que puedan desarrollar de forma segura todas las actividades y a veces de contribuir a la estabilidad de los edificios, aparte de su función estructural cumplen con otras funciones tales como: Control ambiental, seguridad e instalaciones, pavimentos o pisos, ver Fig. (9)

Por esta razón es de mucha importancia el buen comportamiento de la losa y es por ello el interés de estimar la deformación de la losa. Mayor información en [8], [9].

6.3. Formulación variacional del problema de la losa

Su formulación variacional se vio en la ecuación (5) y se mostró que una forma bilineal es

$$a_1(u, v) = \iint_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx dy \quad (89)$$

Sin embargo esta forma bilineal no es única ver [5], obteniéndose infinitas formas bilineales de la forma

$$a_t(u, v) = ta_1(u, v) + (1-t)a_2(u, v), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (90)$$

Sea $t = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}$ en (90), se tiene

$$a(u, v) = (1-\nu)[u_{xx}v_{xx} + 2u_{xy}v_{xy} + u_{yy}v_{yy}] + \nu[u_{xx} + u_{yy}][v_{xx} + v_{yy}]$$

De este modo, se tiene la formulación variacional del problema la losa:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \{ (1-\nu)[u_{xx}v_{xx} + 2u_{xy}v_{xy} + u_{yy}v_{yy}] + \\ \nu[u_{xx} + u_{yy}][v_{xx} + v_{yy}] \} dxdy = \int_{\Omega} fvdxdy \end{cases}$$

6.4. Implementación del método de elementos finitos HCT para la losa de concreto armado

Sea V_h el espacio discreto construido a partir del elemento finito HCT completo. Luego el problema (91) en el espacio finito V_h , se puede expresar

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h) \text{ para todo } v_h \in V_h \end{cases} \quad (91)$$

Para obtener La matriz de rigidez elemental relacionados a cada uno de los sub triángulos $K_i, i = 1, 2, 3$ se usará la matriz $[DLG]$ de derivadas en coordenadas de áreas y la matriz $[DA_i]$ de cambio a coordenadas de áreas. Ver [5], [6]

Luego usando la integración numérica en coordenadas de áreas, para la resolución numérica del problema discreto

$$\int_{K_i} \phi(x, y) dxdy \approx Area(K_i) \sum_{s=1}^S \omega_s \phi(b_s)$$

Queda expresado

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in C_h} [DLG(u_h)]_{1 \times 12} [M]_{12 \times 12} [DLG(v_h)]_{12 \times 1}^t$$

$$f_h(v_h) = \sum_{K \in C_h} [B]_{1 \times 12} [DLG(v_h)]_{12 \times 1}^t$$

Donde $[M] = \sum_{i=1}^3 [M_i]$ y cada matriz $[M_i]$ tiene la forma de:

$$M_i = [DA_i] \left(Area(K_i) \sum_{s=1}^S \omega_s \left\{ \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)^2} \begin{bmatrix} \partial_{xx} L_i \\ \partial_{xy} L_i \\ \partial_{yy} L_i \end{bmatrix} \right\} b(s) \right) [DA_i]^t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 2(1-\nu) & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{xx} L_i \\ \partial_{xy} L_i \\ \partial_{yy} L_i \end{bmatrix} \Bigg\} b(s) \Bigg) [DA_i]^t$$

Análogamente

$$[B] = \sum_{i=1}^3 [B_i]$$

$$[B_i] = Area(K_i) \sum_{s=1}^S \omega_s f(b_i) [L_i(b_s)] [DA_i]^t$$

Resultando un sistema lineal de forma

$$Ku = F \quad (92)$$

Que se solucionará numéricamente con los métodos multimallas V-Ciclo, W-Ciclo y F-Ciclo.

6.5. Aplicación de los métodos multimalla V-Ciclo simétrico, W-Ciclo y F-Ciclo para solucionar el sistema lineal del problema de la losa

En esta sección se presenta la aplicación y los resultados numéricos para ilustrar la convergencia de los métodos multimalla al sistema (92), es decir se ilustran los resultados de los teoremas (3.5) y (3.6).

Definición 6.1 (Número de contracción (γ_k))

Si se tiene el sistema $A_k u = \psi$ y

$$MG(A_k, \psi, u_0, m_1, m_2)$$

es el resultado de usar un método multimalla, con u_0 vector inicial para las iteraciones, m_1 y m_2 los pasos pre-suaves y pos-suaves de la multimalla, se define:

$$\gamma_k = \sup_{u \in V_k \setminus \{0\}} \frac{\|u - MG(A_k, \psi, u_0, m_1, m_2)\|_{2,k}}{\|u - u_0\|_{2,k}}$$

Si al dominio cuadrado convexo $\Omega \subset R^2$, se le hace una triangulación por una subdivisión regular, de forma continua, se tiene mallas por niveles, como se observa en la fig. (7).

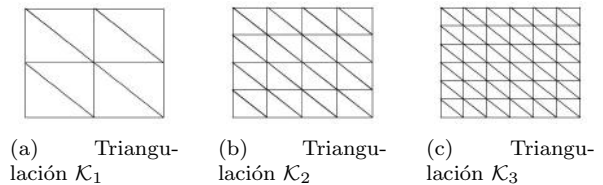


Figura 7. Triangulación del dominio cuadrado ($\Omega \subset R^2$)

Sea $e_k^t := u_k(x_i, y_j) - u_k^t(x_i, y_j)$ el error global en la malla de nivel k en la t -ésima iteración. Este error, representado en un espacio de Fourier, tiene dos tipos de componentes: Alta frecuencia y de baja frecuencia.

Los métodos Multimalla combinan dos esquemas complementarios para reducir el error global (e_k^t):

- a) Procesos de relajación, para reducir las componentes de alta frecuencia y sucede en el nivel de malla k .
- b) Corrección en las mallas más gruesas, para reducir las componentes de baja frecuencia y se da en un nivel de malla inferior ($k - 1$).

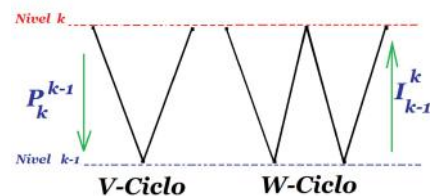


Figura 8. Representación de los métodos multimalla y sus operadores de transferencia entre mallas.

Luego se requieren los dos operadores: De restricción (P_k^{k-1}) e interpolación (I_{k-1}^k) para ir de una malla fina a otra malla más gruesa y viceversa.

Los métodos multimalla son de dos tipos:

- Geométricas, si el número de nudos interiores de la malla coincide con el orden del sistema lineal a resolver.
- Algebraicas, si no se da el caso geométrico o no se tiene información de la malla en el sistema lineal a resolver. Que se puede ver en [2]

El sistema lineal del problema de la losa (92) es de orden cuatro veces el número de nudos de la malla, para cualquier nivel de malla. Es por ello que se usará multimallas algebraicas, que es similar a las geométricas, la diferencia está en encontrar los adecuados operadores de transferencia entre mallas.

Para el sistema lineal del problema de la losa, se usó la matriz operador de restricción P_k^{k-1} , que por su tamaño no se muestra aquí, ver [5], y cuya matriz operador de interpolación es $I_{k-1}^k := 4(P_k^{k-1})^T$.

La aplicación de estos operadores se puede explicarse como sigue: Dado un vector columna $v_{12 \times 1}$ este vector puede ser reducido por la matriz operador restricción P_k^{k-1} con $P_k^{k-1}v$ que resulta ser un vector de orden 3×1 . Análogamente, se puede ampliar un vector columna de 3 elementos por la aplicación de la matriz operador interpolación I_{k-1}^k al hacer $I_{k-1}^k v$ que resultaría un vector columna de 12×1 elementos.

Estos operadores de transferencia de una malla a otra, cumplen con la propiedad que si se aplica a una matriz simétrica, el resultado también es una matriz simétrica.

Ejemplo 6.1 Sea la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

Al multiplicar los operadores por la izquierda y derecha a la matriz A , se tiene

$$P_k^{k-1} A I_{k-1}^k = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Y se consigue reducir el orden de la matriz A de 12, a una matriz de orden 3, conservando su simetría. \square

Denotamos la matriz principal del sistema lineal del problema de la losa (92) por A_h (correspondiente al nivel de malla k) la cual se llevará al nivel inferior por la aplicación de los operadores de transferencia haciendo: $A_{2h} = P_k^{k-1} A_h I_{k-1}^k$. Luego haciendo uso de las siguientes funciones tenemos los resultados.

```
function Aprox=MultimallaVCycloHCT(Ah, fh, vh, m)
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);
[R,I]=MatricesReIHCT(length(vh));
for p = 1 : 1
    rh = fh - Ah * vh; f2h = R * rh; A2h = R * Ah * I;
    v0 = zeros(length(f2h), 1);
    v2h=SORRichardson(A2h, f2h, v0, 20);
    vh = vh + I * v2h;
end
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m); solAprox = vh;
```

```
function Aprox=MultimallaWCycloHCT(Ah, fh, vh, m)
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);
[R,I]=MatricesReIHCT(length(vh));
for p = 1 : 2
    rh = fh - Ah * vh; f2h = R * rh; A2h = R * Ah * I;
    v0 = zeros(length(f2h), 1);
    v2h=SORRichardson(A2h, f2h, v0, 20);
    vh = vh + I * v2h;
end
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m); solAprox = vh;
```

```
function Aprox=MultimallaFCycloHCT(Ah, fh, vh, m)
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m);
[R,I]=MatricesReIHCT(length(vh));
for p = 1 : 2
    rh = fh - Ah * vh; f2h = R * rh; A2h = R * Ah * I;
    v0 = zeros(length(f2h), 1);
    v2h=SORRichardson(A2h, f2h, v0, 20);
    vh = vh + I * v2h;
    vh=MultimallaVCycloHCT(Ah, fh, vh, m);
end
vh=SORRichardson(Ah, fh, vh, m); solAprox = vh;
```

6.6. Resultados numéricos del problema de la losa de concreto armado

En Ingeniería Civil, el problema de las losas es un problema común y de gran importancia, se requiere conocer los desplazamientos, con ellos se consigue las deformaciones y los esfuerzos para un buen comportamiento estructural.



Figura 9. Losa de concreto armado

Considerando que la losa es un dominio cuadrado

convexo de 1m de lado, $\Omega = [0;1] \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2$, una fuerza uniformemente distribuida $f(x,y) = -10 \text{ Ton/m}^2$, $E = 2,1 \times 10^7 \text{ Ton/m}^2$ (Módulo de Young), $\nu = 0,2$ (coeficiente de Poisson) y $e = 0,1\text{m}$ (espesor de la losa).

Se considera el plano medio de la losa en su estado inicial al nivel del plano XY, luego los puntos del plano medio por efecto de la fuerza aplicada verticalmente, se desplazarán en la dirección de Z^- .

Resultados de la convergencia de los métodos multimalla V-Ciclo simétrico, W-Ciclo y F-Ciclo

Los sistemas lineales que se obtiene por la discretización del elemento finito HCT, son resueltos con los métodos multimallas V-Ciclo, W-Ciclo y F-Ciclo. En los siguientes se aprecian los cálculos de los números de contracción y se muestran los resultados de convergencia para los métodos multimallas, para distintas triangulaciones del dominio. Se muestran el decrecimiento uniforme de los números de contracción a medida que se incrementa el número de pasos m pre-suaves y pos-suaves.

Cuadro 1. Número de contracción ($\gamma_{m,k,v}$) para el algoritmo multimalla V-Ciclo para diferentes niveles de triangulación.

$\gamma_{m,k,v}$	$m=1$	$m=4$	$m=7$	$m=10$	$m=13$	$m=16$	$m=19$	$m=22$
$k=2$	0.9707	0.8930	0.8345	0.7742	0.7416	0.7213	0.6871	0.6541
$k=3$	0.9757	0.8961	0.8346	0.7778	0.7414	0.7254	0.6878	0.6545
$k=4$	0.9723	0.8990	0.8458	0.7880	0.7497	0.7209	0.6891	0.6527
$k=5$	0.9705	0.8975	0.8469	0.7713	0.7349	0.7273	0.6804	0.6575

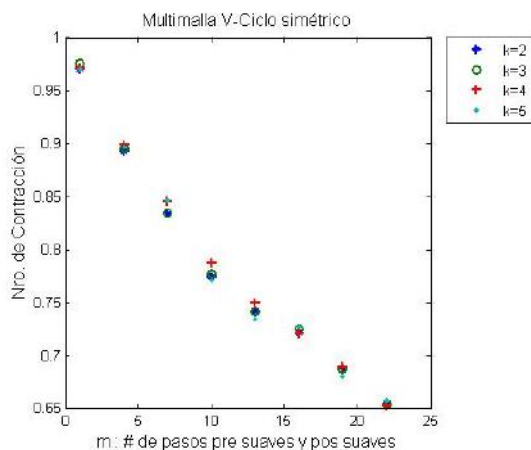


Figura 10. Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el V-Ciclo

Cuadro 2. Número de contracción ($\gamma_{m,k,v}$) para el algoritmo multimalla W-Ciclo para diferentes niveles de triangulación.

$\gamma_{m,k,v}$	$m=1$	$m=4$	$m=7$	$m=10$	$m=13$	$m=16$	$m=19$	$m=22$
$k=2$	0.9707	0.8988	0.8332	0.7772	0.7406	0.7274	0.6874	0.6523
$k=3$	0.9757	0.8954	0.8375	0.7758	0.7414	0.7221	0.6854	0.6598
$k=4$	0.9793	0.8990	0.8386	0.7811	0.7497	0.7239	0.6874	0.6532
$k=5$	0.9695	0.8956	0.8324	0.7893	0.7449	0.7222	0.6895	0.6544

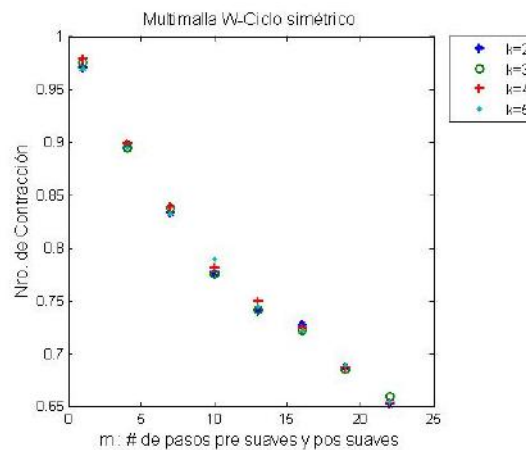


Figura 11. Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el W-Ciclo

Cuadro 3. Número de contracción ($\gamma_{m,k,v}$) para el algoritmo multimalla F-Ciclo para diferentes niveles de triangulación.

$\gamma_{m,k,v}$	$m=1$	$m=4$	$m=7$	$m=10$	$m=13$	$m=16$	$m=19$	$m=22$
$k=2$	0.9754	0.8976	0.8354	0.7765	0.7474	0.7299	0.6854	0.6565
$k=3$	0.9837	0.8943	0.8390	0.7764	0.7477	0.7267	0.6885	0.6484
$k=4$	0.9854	0.8843	0.8323	0.7832	0.7445	0.7274	0.6704	0.6443
$k=5$	0.9865	0.8975	0.8354	0.7824	0.7464	0.7244	0.6785	0.6463

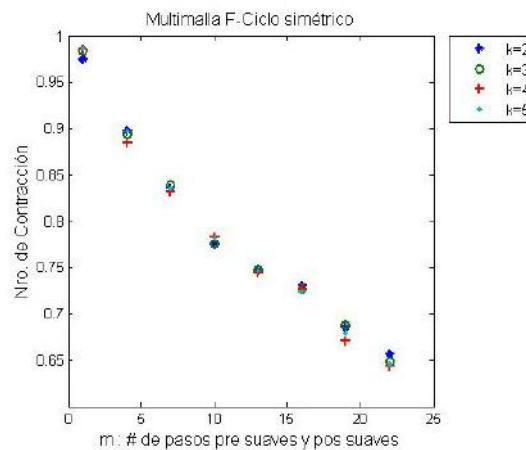


Figura 12. Decrecimiento uniforme del Nro. de Contracción para el F-Ciclo

En el cuadro (1), cuadro (2) y cuadro (3), se puede ver que los algoritmos convergen para m tan pequeño como 1, así también se puede apreciar de las tres tablas, que la proporción de convergencia son casi los mismos.

En el cuadro (4) y el cuadro (5) se muestran los resultados numéricos del teorema (3.5) y del teorema (3.6), que mencionan la existencia de una constante C independiente de la malla y del número de pasos pre y pos suaves en la multimalla, a partir de un m^* suficientemente grande tal que $m^{1/2}\gamma_{m,k,v} \leq C$.

Para estos resultados se asume que el índice de regularidad elíptica $\alpha = 1$, ya que este dominio Ω es poligonal convexo (resultado teórico).

Cuadro 4. Constante $C = 5$ independiente de la malla para el V-Ciclo.

$m^{1/2}\gamma_{m,k,v}$	$m = 16$	$m = 19$	$m = 22$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$k = 2$	2.88	2.99	3.06	3.85	4.02	3.55	3.12
$k = 3$	2.90	2.99	3.06	3.95	4.23	3.59	3.21
$k = 4$	2.88	3.00	3.06	3.84	4.12	3.51	3.12
$k = 5$	2.90	2.96	3.08	3.89	4.02	3.61	3.16

Cuadro 5. Constante $C = 5$ independiente de la malla para el F-Ciclo.

$m^{1/2}\gamma_{m,k,v}$	$m = 16$	$m = 19$	$m = 22$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$k = 2$	2.91	2.98	3.07	3.73	4.18	3.39	2.91
$k = 3$	2.90	3.00	3.04	3.74	4.21	3.41	3.03
$k = 4$	2.90	2.92	3.02	3.80	4.22	3.38	3.12
$k = 5$	2.89	2.95	3.03	3.82	4.29	3.44	2.96

Deformadas de la losa, curvas de nivel y curvas asintóticas

Los resultados se mostrarán para dos niveles de mallas:

Nivel	Nº de elementos triangulares totales	Orden de la matriz Ah	Número de condición de la matriz Ah
$k = 4$	200	484	$7,6480 \times 10^7$
$k = 5$	648	1444	$2,5069 \times 10^8$

En los gráficos de la Fig.(13) y Fig.(14) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla V-Ciclo** en un nivel de malla $k = 4$ y $k = 5$ para el número de pasos $m = 6$ y $m = 20$ en sus algoritmos.

En los gráficos de la Fig.(15) y Fig.(16) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla W-Ciclo** en un nivel de malla $k = 4$ y $k = 5$ para el número de pasos $m = 6$ y $m = 20$ en sus algoritmos.

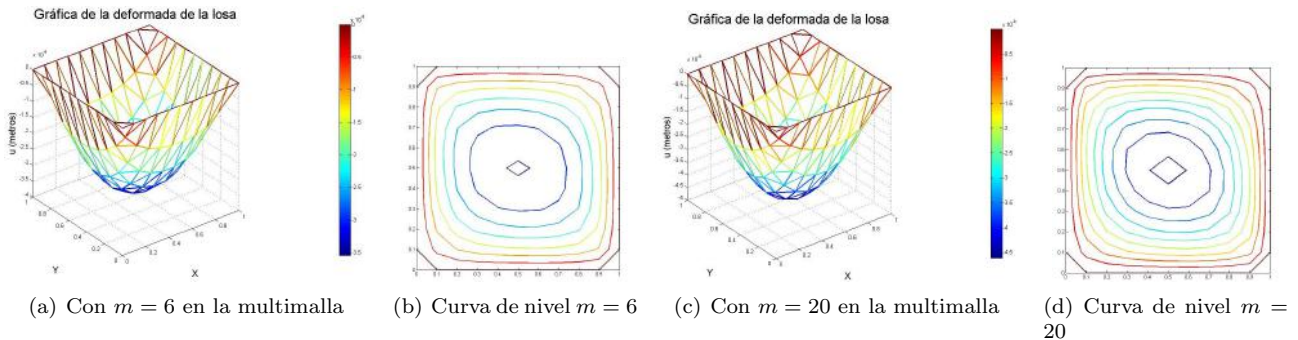


Figura 13. Usando V-Ciclo en el nivel $k = 4$, con 200 elementos

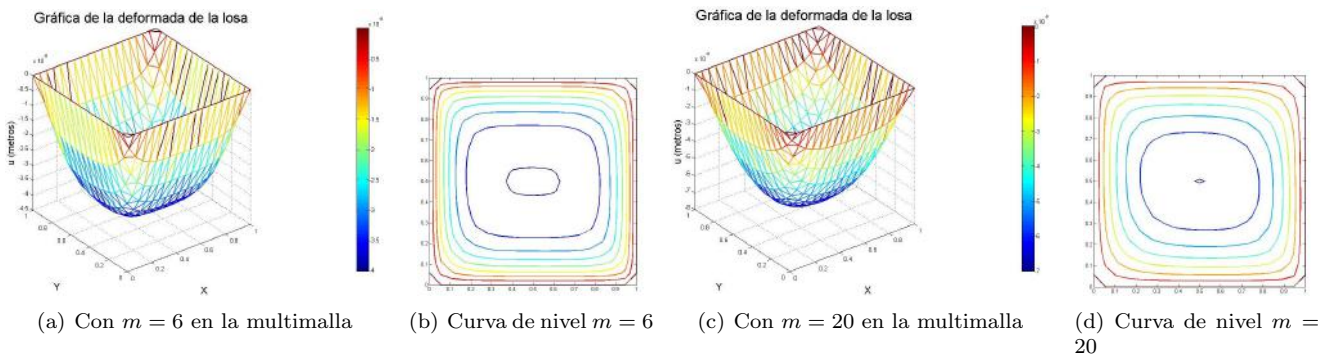


Figura 14. Usando V-Ciclo en el nivel $k = 5$, con 648 elementos

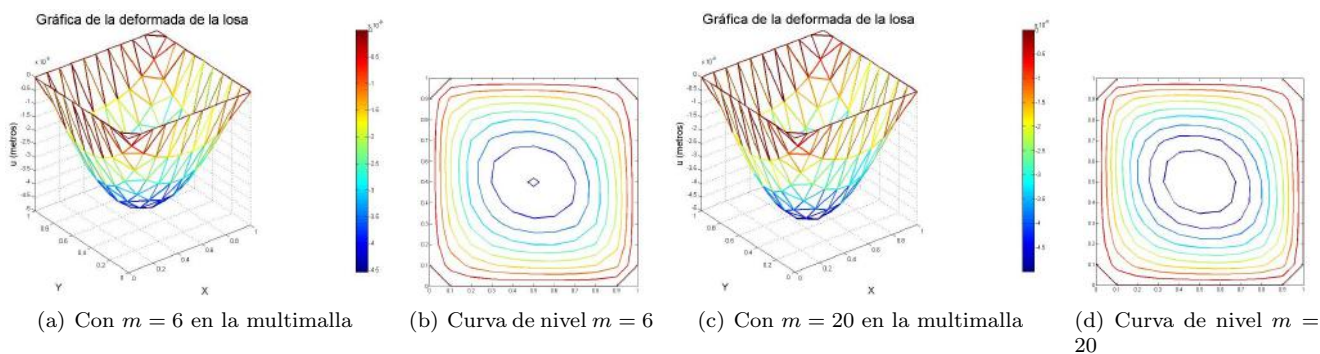


Figura 15. Usando W-Ciclo en el nivel $k = 4$, con 200 elementos

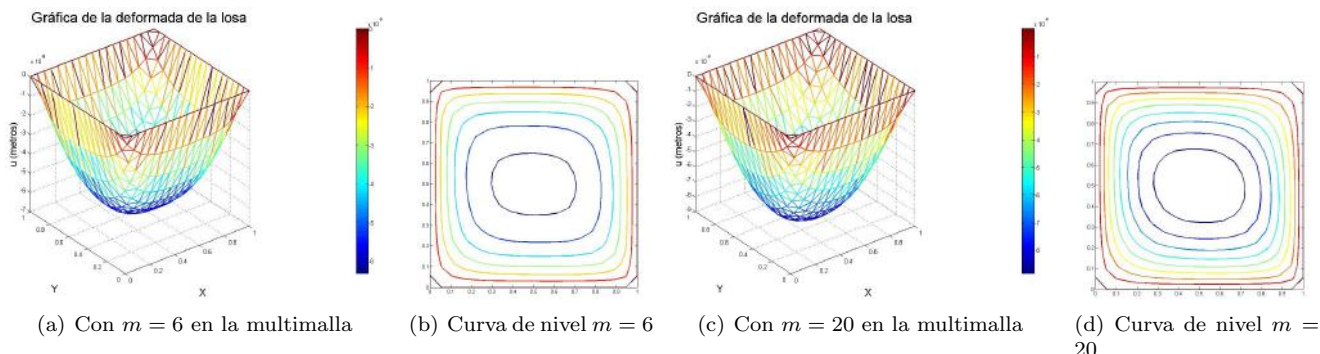


Figura 16. Usando W-Ciclo en el nivel $k = 5$, con 648 elementos

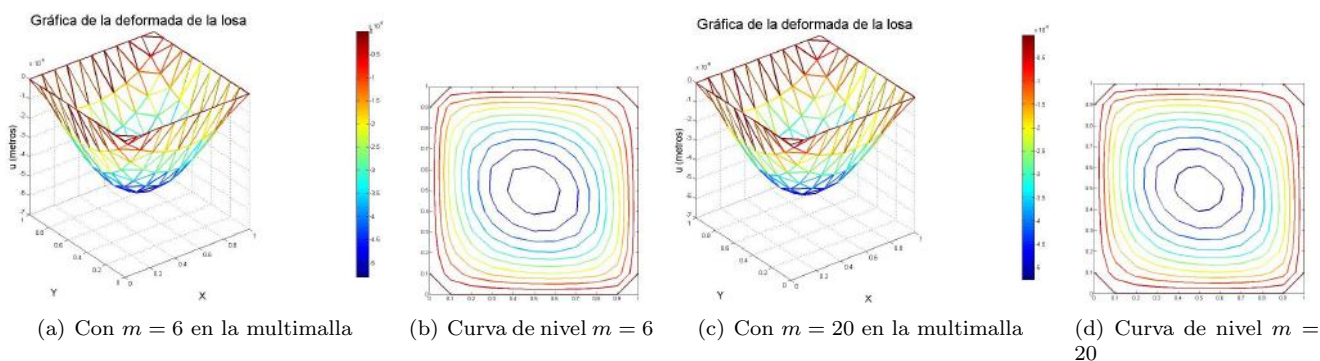


Figura 17. Usando F-Ciclo en el nivel $k = 4$, con 200 elementos

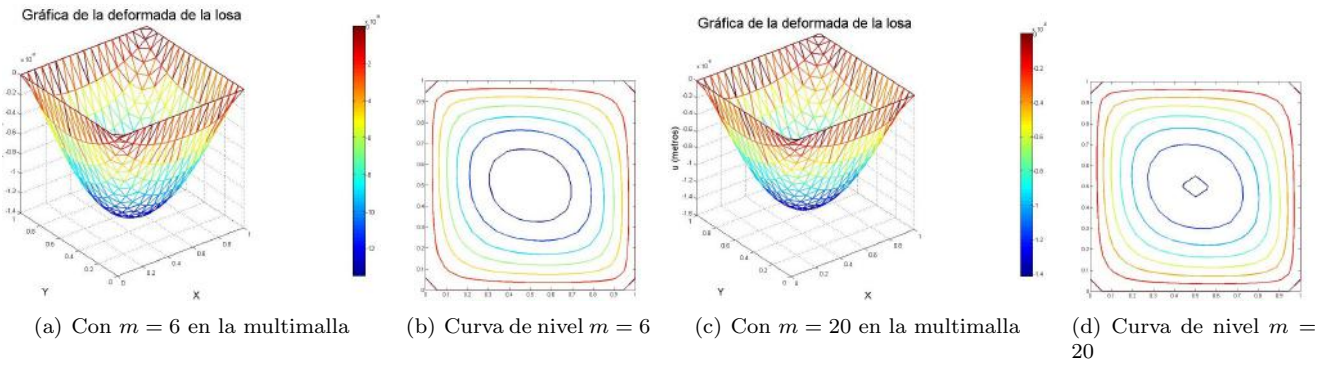


Figura 18. Usando F-Ciclo en el nivel $k = 5$, con 648 elementos

En los gráficos de la Fig.(17) y Fig.(18) se muestran las deformaciones y sus curvas de nivel de la losa, donde los sistemas lineales fueron resueltos con el **método multimalla F-Ciclo** en un nivel de malla $k = 4$ y $k = 5$ para el número de pasos $m = 6$ y $m = 20$ pasos en sus algoritmos.

En la figura Fig.(21), se pueden comparar los comportamientos de las asintoticidades de las curvas y se puede ver que para el nivel de malla $k = 5$ todas coinciden, para cual sea el valor del número de pasos pre-suaves y pos-suaves en las multimallas.

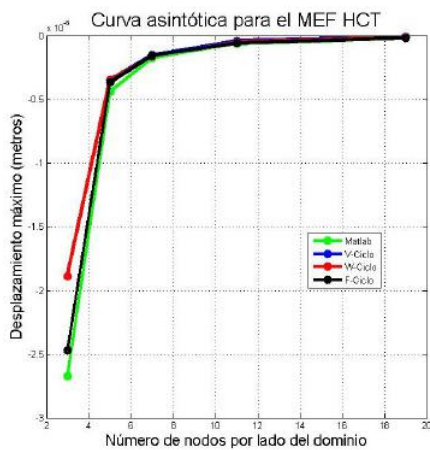
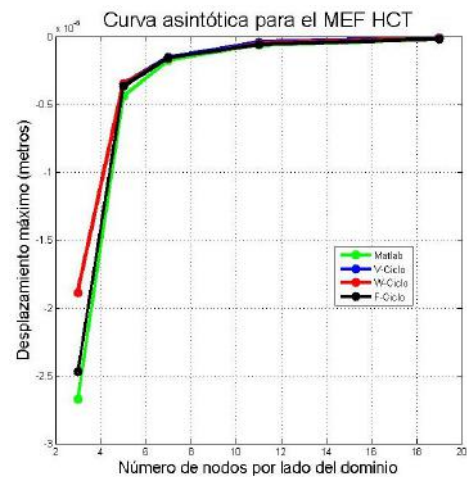


Figura 19. Asintoticidad de las curvas, para $m=6$ en las multimallas



(a) Con $m = 6$ para las multimallas

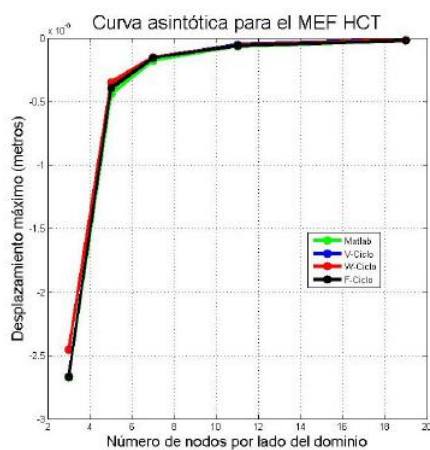
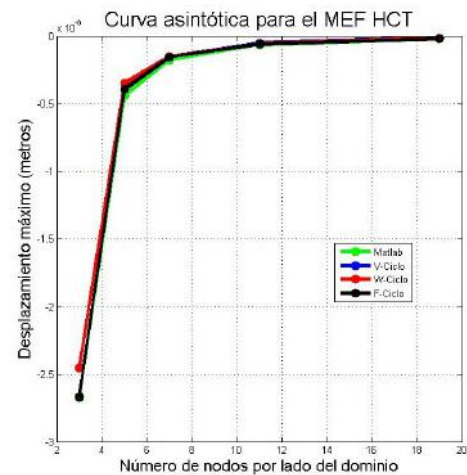


Figura 20. Asintoticidad de las curvas, para $m=20$ en las multimallas



(b) Con $m = 20$ para las multimallas

Figura 21. Comparando las asintoticidades de las curvas

Algorithm 2: Principal HCT - Multimallas

1. **Definir el dominio:** Nivel de la malla
(k) $X \leftarrow [0, 1]$ $Y \leftarrow [0, 1]$
2. **Triangulación de dominio:**
 $[N^\circ \text{Triángulos}, \text{Triángulos}] \leftarrow$
Triangulación(X,Y)
3. **Asignar:** $E \leftarrow 2,1 \times 10^7$ $\nu \leftarrow 0,2$ $ee \leftarrow 0,1$
4. **Desde** $i = 1, 2, \dots, N^\circ \text{Triángulos}$ **hacer**
 $v \leftarrow$ **Coordenadas**(Triángulo(i))
 $[Ke_i, Fe_i] \leftarrow$ **KyF** (v, E, ee, ν)
5. $K \leftarrow$ **Ensamblar**(Ke_i) $F \leftarrow$ **Ensamblar**(Fe_i)
6. $u \leftarrow$ **Solucionar sistema lineal**(K,F)
7. $Z \leftarrow$ **Selección de los desplazamientos**(u)
8. **Graficar:** (X,Y,Z)

7. Conclusiones y recomendaciones

1. El elemento finito HCT, por sus propiedades del operador de interpolación nodal es apropiado para resolver problemas de cuarto orden. Las coordenadas de área fueron de gran ayuda por su expresión breve y clara para el cálculo y por la simplicidad en la cuadratura.
2. Los resultados numéricos verifican la convergencia de los métodos multimalla V-Ciclo y F-Ciclo.
3. Se sugiere usar un mallador que tenga a sus elementos numerados consecutivamente para no ocasionar una matriz con elementos dispersos respecto a su diagonal.
4. Finalmente, los resultados de la deformada de la losa, va depender: De un buen mallado del dominio donde la numeración de sus elementos sean los más cercanos posibles, la transformación de elementos triangulares, la elección de un buen método de relajación para las multimallas y la cuadratura que se elija.

1. CONSTANTIN BACUTA, *Subspace Interpolation with Applications to Elliptic Regularity*, Diciembre 2007.
2. GUNDOLF HAASE, *Multigrid Methods: From Geometrical to Algebraic Versions.*, Institute of Computational Mathematics - Johannes Kepler University of Linz. Altenbergerstr. 69, A-4040 Linz, Austria, 2006.
3. JAMES H. BRAMBLE - XUEJUN ZHANG, *The Analysis of multigrid Methods*, Texas AM University, College Station, TX 77843, 1997.
4. JIE ZHAO, *Multigrid Methods for Fourth Order Problems* Electronic Transactions on Numerical analysis. Volume 7, 1998 pp. 40-55.
5. CRISTINA NAVARRO FLORES, *Métodos multimalla V-Ciclo y F-Ciclo para el problema biarmónico usando el elemento Hsieh-Clough-Tocher. Tesis de maestría - FC-UNI* (2014)
6. MICHAEL BERNADOU - KAMAL HASSAN, *Basis Functions for general Hsieh-Clough-Tocher triangles, Complete or reduced.* Rapports de Recherche N°5 (1980)
7. SUSANNE C. BRENNER. , *Convergence of the Multigrid V-Cycle Algorithm for second-order boundary value problems without full Elliptic Regularity.*, MATHEMATICS OF COMPUTATION. Vol 71, Number 238, Pages 507-525 - 2001.
8. J. R. WHITEMAN, *Conforming finite element methods for the clamped plate problem.* Technical University of Clausthal in September, 1974.
9. ZIENKIEWICZ-TAYLOR, *El Método de los Elementos Finitos. Formulación Básica y Problemas Lineales* Volumen 1 - 4ta. Edición. (1994)