

Métodos de Inserción de Nodos y Elevación de Grado en curvas B-spline usando matrices BSBT

Johnny Valverde Montoro[†] y Christian Salazar Fernández[‡]

Facultad de Ciencias.

Universidad Nacional de Ingeniería;

[†]*jvalverdem@uni.edu.pe,* [‡]*csalazarf@uni.pe*

Recibido el 7 de Enero del 2013; aceptado el 15 de Marzo del 2013

Una base B-spline se puede representar en forma matricial y con una matriz de transformación de bases aplicado a la representación original (abreviado a matriz BSBT) se obtiene otra representación respecto a otra base B-spline. En este trabajo, se mostrarán las condiciones de existencia y algunas propiedades útiles de las matrices BSBT. Luego, se propone una fórmula recursiva para matrices BSBT y un método eficiente para el cálculo de matrices BSBT. Finalmente se aplican estas técnicas en la inserción de nodos y la elevación de grados de curvas B-spline, obteniéndose nuevos algoritmos para estos procesos.

Palabras Claves: Bases B-spline, matriz de Transformación, curva B-spline, elevación de grado, inserción de nodos.

1. Introducción

Los B-spline constituyen una de las bases polinómicas más importantes en el modelamiento de curvas y superficies. Son aplicados ampliamente en los campos de Diseño Geométrico Asistido por Computadora (CAGD, por sus siglas en inglés) y Gráficos por Computadora (CG, por sus siglas en inglés). Un problema esencial en las curvas B-spline y en el modelamiento de superficies es la conversión entre diferentes representaciones de curvas B-splines y superficies, los cuales surgen en varias situaciones como reducción de datos, control de modelamiento, aproximación e intercambio de datos entre diferentes sistemas CAD. Muchas de estas conversiones son causadas por las operaciones básicas de curvas B-splines y superficies, tales como la inserción de nodos, la elevación de grado, la eliminación de nodos y la reducción de grado. Estas operaciones básicas han sido exploradas ampliamente, y esos son resultados muy útiles sobre ellos (ver [1, 3, 4, 6, 8, 9]). Teóricamente, todos esos problemas pueden ser reducidos a un cambio de base de una base B-spline a otra base B-spline, esto es, un problema de conversión entre diferentes bases B-splines. Y la clave de este problema es la transformación matricial de bases B-splines (abreviado a matriz BSBT, por sus siglas en inglés). En este trabajo se muestra que las matrices BSBT pueden ser usadas para establecer modelos matemáticos uniformes para la inserción de nodos, elevación de grados, eliminación de nodos, y reducción de grados de curvas y superficies B-splines, y proveer una herramienta general para la conversión entre diferentes representaciones de curvas y superficies B-spline.

La inserción de nodos y la elevación de grados son dos ejemplos importantes de matrices BSBT. Se puede ver en [2], [3, 4] que se han usado B-splines discretos para probar, en la presentación recursiva, propiedades y el cálculo de los elementos de esas matrices mientras exploraban el método para la inserción de nodos, elevación de grados y eliminación de nodos de curvas y superficies B-spline. Y

basados en esos resultados, dieron el Algoritmo de Oslo para la inserción de nodos (ver [3]) y el algoritmo de eliminación de nodos (ver [4]). Para las matrices BSBT generales se usaran las diferencias divididas y obtener algunos resultados en la representación, propiedades, cálculo y aplicación de ellas (ver [5]). Sin embargo, la forma de representación y el algoritmo de cálculo para matrices BSBT son relativamente complicadas. En este trabajo, se presenta una relación recursiva simple para las matrices BSBT generales con un nuevo método y se estudia la representación, cálculo y aplicación de ellas en las bases de la relación recursiva.

Este trabajo está organizado como sigue: las condiciones de existencia y algunas propiedades de matrices BSBT son dadas en la Sección 2; en la Sección 3 se presenta una propuesta de fórmula recursiva simple para matrices BSBT, y un método eficiente para el cálculo de matrices BSBT; luego, las aplicaciones de las matrices BSBT, son estudiadas en algunos aspectos, y un nuevo algoritmo uniforme para la inserción de nodos y elevación de grados de curvas B-spline, basado en matrices BSBT, es desarrollado con algunos ejemplos para ilustrar la estabilidad del nuevo algoritmo en la Sección 4; finalmente en la Sección 5 se presentan las conclusiones.

2. Condiciones de existencia y propiedades de las matrices BSBT

Sean k y \bar{k} dos enteros positivos. Denotemos como $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$, a las funciones bases B-splines de orden k , asociadas con el vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+k}\}$$

De modo similar, las funciones de bases B-spline de orden \bar{k} , asociadas con el vector nodo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{\bar{t}_0, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{\bar{n}+\bar{k}}\}$$

serán denotadas como $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$.

Los vectores nodos \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$ satisfacen las siguientes condiciones respectivamente:

$$n \geq k - 1, t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+k}, t_{k-1} < t_k, t_n < t_{n+1} \quad (1)$$

$$\bar{n} \geq \bar{k} - 1, \bar{t}_0 \leq \bar{t}_1 \leq \dots \leq \bar{t}_{\bar{n}+\bar{k}}, \bar{t}_{\bar{k}-1} < \bar{t}_{\bar{k}}, \bar{t}_{\bar{n}} < \bar{t}_{\bar{n}+1} \quad (2)$$

Definición 1. Sean las bases B-spline $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ y $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$, la matriz de transformación (cambio de base) es definida como sigue: si existe una matriz $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ de orden $(n+1) \times (\bar{n}+1)$, tal que:

$$\begin{bmatrix} B_{0,k}(t) \\ B_{1,k}(t) \\ \vdots \\ B_{n,k}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} \bar{B}_{0,\bar{k}}(t) \\ \bar{B}_{1,\bar{k}}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},\bar{k}}(t) \end{bmatrix}, t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] \quad (3)$$

La matriz $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ es llamada la matriz de transformación (o también llamada matriz de cambio de base) de la base de B-splines $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ a la base de B-splines $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$. En este trabajo, la matriz de transformación de bases B-spline será abreviada como matriz **BSBT**.

Como los subíndices muestran, $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ esta totalmente determinada por k, \bar{k}, \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$, cuando exista.

Usaremos la siguiente notación para los elementos de la matriz BSBT.

$$\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} a_{0,0}(k,\bar{k}) & a_{0,1}(k,\bar{k}) & \dots & a_{0,\bar{n}}(k,\bar{k}) \\ a_{1,0}(k,\bar{k}) & a_{1,1}(k,\bar{k}) & \dots & a_{1,\bar{n}}(k,\bar{k}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,0}(k,\bar{k}) & a_{n,1}(k,\bar{k}) & \dots & a_{n,\bar{n}}(k,\bar{k}) \end{bmatrix}.$$

Aunque los elementos de $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ están relacionados a los vectores nodo \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$, los $a_{i,j}(k,\bar{k})$ son empleados para representar a los elementos de $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$.

Teorema 1. Sean k y \bar{k} dos enteros positivos, tal que $\bar{k} \geq k$, los vectores nodos \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$ que satisfacen las condiciones (1) y (2), respectivamente; y las bases B-spline $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ y $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ de orden k y \bar{k} respectivamente. Finalmente, supongamos que, en \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$, los nodos t_i y \bar{t}_i tengan como multiplicidades a r_i y \bar{r}_i , respectivamente. Si las condiciones:

$$(a) \quad \bar{t}_{\bar{k}-1} = t_{k-1}, \bar{t}_{\bar{n}+1} = t_{n+1},$$

$$(b) \quad \text{para } i = k, k+1, \dots, n, t_i \in \bar{\mathbf{T}} \text{ y } \bar{r}_i \geq r_i + \bar{k} - k$$

se cumplen, entonces la matriz BSBT $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ de $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ a $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ existe. Más aún, cuando $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ existe, $a_{i,j}(k,\bar{k})$ es único si $\bar{t}_{j+\bar{k}} > \bar{t}_j$; y $a_{i,j}(k,\bar{k})$ puede ser cualquier número real si $\bar{t}_{j+\bar{k}} = \bar{t}_j$, para $j = 0, 1, 2, \dots, \bar{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Sea $S^{k-1}([t_{k-1}, t_{n+1}])$ el espacio de funciones splines de grado $k-1$ con nodos

$$\{t_{k-1} < t_k, t_{k+1}, \dots, t_n < t_{n+1}\}$$

las condiciones (a) y (b) nos aseguran que $t_i \in \bar{\mathbf{T}}, i = k-1, k, \dots, n+1$ es decir todos esos nodos están en $\bar{\mathbf{T}}$, por

lo que $\{\bar{B}_{j,\bar{k}}(t)\}_{j=0}^{\bar{n}}, t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$ pertenece al espacio $S^{k-1}([t_{k-1}, t_{n+1}])$. Luego para $B_{i,k}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$ se tendrá $B_{i,k}(t) \in S^{k-1}([t_{k-1}, t_{n+1}])$, entonces para $i = 0, 1, \dots, n$ se tiene:

$$B_{i,k}(t) = \sum_{j=0}^{\bar{n}} a_{i,j}(k,\bar{k}) \bar{B}_{j,\bar{k}}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] \quad (4)$$

Si $\bar{t}_{j+\bar{k}} > \bar{t}_j$, los $\bar{B}_{j,\bar{k}}(t), 0 \leq j \leq \bar{n}$ no serían idénticamente nulos en $[t_{k-1}, t_{n+1}]$, entonces son linealmente independientes, así los $a_{i,j}(k,\bar{k})$ son únicos en la representación de $B_{i,k}(t)$ en la ecuación (4).

Si $\bar{t}_{j+\bar{k}} = \bar{t}_j$, entonces $\bar{B}_{j,\bar{k}}(t) \equiv 0$, por lo que $a_{i,j}(k,\bar{k})$ puede ser cualquier número real en la ecuación (4). \square

De ahora en adelante se asume que $\bar{k} \geq k$, y que los vectores nodos \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$ satisfacen no sólo las condiciones (1) y (2) sino también las condiciones (a) y (b) del Teorema 1. Y se considera $a_{i,j}(k,\bar{k}) = 0$ si $\bar{t}_{j+\bar{k}} = \bar{t}_j$.

Bajo estas consideraciones, la matriz BSBT $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ existe y es única por el Teorema 1.

Lema 1. Sea $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ la matriz BSBT de $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ en $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$. Para cualquier i y j , tales que $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \bar{n}$, si $a_{i,j} \neq 0$ entonces $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+k}]$.

Demostración. Ver [5] \square

Teorema 2. Sea $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ la matriz BSBT de $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ en $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$. Se tiene que $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ posee las siguientes propiedades:

(a) Para cualquier i tal que $k-1 \leq i \leq n$, se tiene:

- Si $t_i = t_{i+k}$, entonces $a_{i,j} = 0, j = 0, 1, \dots, \bar{n}$.
- Si $t_i < t_{i+k}$ y $i \geq k$ entonces $a_{i,j} = 0$ cuando $\bar{t}_j < t_i$
- Si $t_i < t_{i+k}$ y $i \leq n-k$ entonces $a_{i,j} = 0$ cuando $\bar{t}_{j+\bar{k}} > t_{i+k}$

(b) Para cualquier j tal que $\bar{k}-1 \leq j \leq \bar{n}$, se tiene:

- Si $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+\bar{k}}$ entonces $a_{i,j}(k,\bar{k}) = 0, i = 0, 1, \dots, n$.
- Si $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$ entonces $a_{i,j}(k,\bar{k}) = 0$ cuando $t_i > \bar{t}_{\max\{j,\bar{k}-1\}}$ o $t_{i+k} < \bar{t}_{\min\{j+\bar{k},\bar{n}+1\}}$

(c) Para cualquier j tal que $k-1 \leq j \leq \bar{n}$, si $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$ entonces $\sum_{i=0}^n a_{i,j}(k,\bar{k}) = 0$ y hay a lo más k elementos no nulos en la j -ésima columna de $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$.

Demostración. Se usa el hecho que si $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \neq \emptyset$ entonces $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \neq \emptyset$, es más

$$[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] = [M, N]$$

donde $M = \max\{\bar{t}_j, t_{k-1}\} = \bar{t}_{\max\{j,\bar{k}-1\}}$ y $N = \min\{\bar{t}_{j+\bar{k}}, t_{n+1}\} = \bar{t}_{\min\{j+\bar{k},\bar{n}+1\}}$. Notar que $M < N$.

(a)

- Si tenemos $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+\bar{k}}$, entonces se tiene $a_{i,j} = 0$. Cuando $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$, lo veremos por contradicción, es decir suponemos que $a_{i,j}(k, \bar{k}) \neq 0$ para algún $0 \leq j \leq \bar{n}$, entonces del lema 1 tendremos $a_{i,j} \neq 0$ entonces:

$$[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+k}]$$

pero como $t_i = t_{i+k}$ entonces $[t_i, t_{i+k}] = \emptyset$ así que necesariamente $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

- Supongamos que $a_{i,j} \neq 0$, entonces del lema 1

$$[M, N] = [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+k}]$$

entonces $M = \max\{\bar{t}_j, t_{k-1}\} \geq t_i$ así que $\bar{t}_j \geq t_i$ o $t_{k-1} \geq t_i$; lo cual siempre se contradice pues $\bar{t}_j < t_i$ y como $i \geq k$ se tiene que $t_i \geq t_k > t_{k-1}$.

- Supongamos que $a_{i,j} \neq 0$, entonces del lema 1

$$[M, N] = [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+k}]$$

entonces $N = \min\{\bar{t}_{j+\bar{k}}, t_{n+1}\} < t_{i+k}$ así que $\bar{t}_{j+\bar{k}} < t_{i+k}$ o $t_{n+1} < t_{i+k}$; lo cual es siempre una contradicción pues $\bar{t}_{j+\bar{k}} > t_{i+k}$ y como $i+k \leq n$ se tiene que $t_{i+k} \leq t_n < t_{n+1}$.

(b)

- Si $\bar{t}_j = \bar{t}_{j+\bar{k}}$, entonces $a_{i,j} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

- Supongamos que $a_{i,j} \neq 0$, entonces del lema 1

$$[M, N] = [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+\bar{k}}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+k}]$$

así que $M = \bar{t}_{\max\{j, k-1\}} \geq t_i$ y $N = \bar{t}_{\min\{j+\bar{k}, \bar{n}+1\}} < t_{i+k}$, lo que contradice las hipótesis.

(c) Como las bases B-spline son una partición de la unidad

$$\sum_{j=0}^{\bar{n}} \bar{B}_{i, \bar{k}}(t) \equiv 1 \equiv \sum_{i=0}^n B_{i, k}(t) \quad (5)$$

de la definición de matriz BSBT $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}}$, tenemos

$$B_{i, k}(t) = \sum_{j=0}^{\bar{n}} a_{i, j}(k, \bar{k}) \bar{B}_{j, \bar{k}}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$$

reemplazando en (5)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\bar{n}} \bar{B}_{i, \bar{k}}(t) &= \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^{\bar{n}} a_{i, j}(k, \bar{k}) \bar{B}_{j, \bar{k}}(t) \right] \\ \sum_{j=0}^{\bar{n}} (1) \bar{B}_{i, \bar{k}}(t) &= \sum_{j=0}^{\bar{n}} \left[\sum_{i=0}^n a_{i, j}(k, \bar{k}) \right] \bar{B}_{j, \bar{k}}(t) \\ \sum_{j=0}^{\bar{n}} \left[1 - \sum_{i=0}^n a_{i, j}(k, \bar{k}) \right] \bar{B}_{j, \bar{k}}(t) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Si $\bar{t}_j < \bar{t}_{j+\bar{k}}$, entonces todos los $\bar{B}_{j, \bar{k}}(t)$ que no son idénticamente nulos en $[t_{k-1}, t_{n+1}]$, son linealmente independientes, por lo tanto $1 = \sum_{i=0}^n a_{i, j}(k, \bar{k})$. \square

3. Representaciones recursivas y algoritmo de matrices BSBT

3.1. Relación recursiva de matrices BSBT

Supongamos que los órdenes k y \bar{k} , y los vectores nodo \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$ de las bases B-spline son dados. Sea $m = \bar{k} - k$, para el entero s tal que $1 \leq s \leq k$, construimos los vectores nodo $\mathbf{T}^{(s)} = \{t_{k-s}, t_{k-s+1}, \dots, t_{n+s}\}$ y $\bar{\mathbf{T}}^{(s)} = \{\bar{t}_{k-s}, \bar{t}_{k-s+1}, \dots, \bar{t}_{\bar{n}+m+s}\}$ removiendo los primeros y últimos $k-s$ nodos en los vectores nodo \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$, respectivamente. Sean $\{B_{i, k}(t)\}_{i=k-s}^n$ y $\{\bar{B}_{i, s+m}(t)\}_{i=k-s}^{\bar{n}}$ las bases B-spline, de orden s y $m+s$ respectivamente, asociadas a los vectores de nodo $\mathbf{T}^{(s)}$ y $\bar{\mathbf{T}}^{(s)}$, respectivamente. De acuerdo al Teorema 1, existe la matriz BSBT, de $\{\bar{B}_{i, s+m}(t)\}_{i=k-s}^{\bar{n}}$ a $\{B_{i, k}(t)\}_{i=k-s}^n$, la cual es denotada como $\mathbf{A}_{s, m+s, \mathbf{T}^{(s)}, \bar{\mathbf{T}}^{(s)}}$. Sea

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(s)} &= \mathbf{A}_{s, m+s, \mathbf{T}^{(s)}, \bar{\mathbf{T}}^{(s)}} \quad (6) \\ &= \begin{bmatrix} a_{k-s, k-s}^{(s)} & a_{k-s, k-s+1}^{(s)} & \cdots & a_{k-s, \bar{n}}^{(s)} \\ a_{k-s+1, k-s}^{(s)} & a_{k-s+1, k-s+1}^{(s)} & \cdots & a_{k-s+1, \bar{n}}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n, k-s}^{(s)} & a_{n, k-s+1}^{(s)} & \cdots & a_{n, \bar{n}}^{(s)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene:

$$\begin{bmatrix} B_{k-s, s}(t) \\ B_{k-s+1, s}(t) \\ \vdots \\ B_{n, s}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s, m+s}(t) \\ \bar{B}_{k-s+1, m+s}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n}, m+s}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] \quad (7)$$

notar que $\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \bar{\mathbf{T}}} = \mathbf{A}^{(k)}$, ahora se dará una fórmula recursiva para calcular $\mathbf{A}^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, k$.

Lema 2. La matriz BSBT $\mathbf{A}^{(1)}$ puede ser construida como sigue:

Para cualquier i tal que $k-1 \leq i \leq n$ se tiene:

- Si $t_i = t_{i+1}$, entonces $a_{i, j}^{(1)} = 0$, $j = k-1, k, \dots, \bar{n}$.

- Si $t_i < t_{i+1}$, entonces

$$a_{i, j}^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+1} \\ & \text{y } [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}] \cap [t_{k-1}, t_{n+1}] \subseteq [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde $m = \bar{k} - k$

Demostración. En este caso $\mathbf{A}^{(1)}$ sería la matriz BSBT de $\{\bar{B}_{i, m+1}(t)\}_{i=k-1}^{\bar{n}}$ a $\{B_{i, 1}(t)\}_{i=k-1}^n$, es decir cuando $s = 1$ en la ecuación 7

$$\begin{bmatrix} B_{k-1, 1}(t) \\ B_{k, 1}(t) \\ \vdots \\ B_{n, 1}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(1)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-1, m+1}(t) \\ \bar{B}_{k, m+1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n}, m+1}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] \quad (8)$$

Demostración. Para cualquier $s, 2 \leq s \leq k, \mathbf{A}^{(s)}$ cumple:

$$\begin{bmatrix} B_{k-s,s}(t) \\ B_{k-s+1,s}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s,m+s}(t) \\ \bar{B}_{k-s+1,m+s}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s}(t) \end{bmatrix}, t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

Derivando con respecto a t :

$$\begin{bmatrix} B'_{k-s,s}(t) \\ B'_{k-s+1,s}(t) \\ \vdots \\ B'_{n,s}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}'_{k-s,m+s}(t) \\ \bar{B}'_{k-s+1,m+s}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}'_{\bar{n},m+s}(t) \end{bmatrix}, t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (9)$$

y de la fórmula para la derivada de los B-splines:

$$B'_{i,s}(t) = \frac{s-1}{t_{i+s-1} - t_i} B_{i,s-1}(t) - \frac{s-1}{t_{i+s} - t_{i+1}} B_{i+1,s-1}(t)$$

para $i = k-s, k-s+1, \dots, n$
 Veamos para $i = k-s$,

$$B'_{k-s}(t) = \frac{s-1}{t_{k-1} - t_{k-s}} B_{k-s,s-1}(t) - \frac{s-1}{t_k - t_{k-s+1}} B_{k-s+1,s-1}(t)$$

como $t \notin [t_{k-s}, t_{k-1})$ y $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$, se tiene $B_{k-s,s-1}(t) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} B'_{k-s,s}(t) &= -\frac{s-1}{t_k - t_{k-s+1}} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ &= (s-1)(-c_{k-s+1}^{(s)}) B_{k-s+1,s-1}(t) \end{aligned}$$

Para $i = k-s+1, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} B'_{i,s}(t) &= (s-1) \left[\frac{1}{t_{i+s-1} - t_i} B_{i,s-1}(t) - \frac{1}{t_{i+s} - t_{i+1}} B_{i+1,s-1}(t) \right] \\ &= (s-1) [c_i^{(s)} B_{i,s-1}(t) - c_{i+1}^{(s)} B_{i+1,s-1}(t)] \end{aligned}$$

Finalmente para $i = n$,

$$B'_{n,s}(t) = \frac{s-1}{t_{n+s-1} - t_n} B_{n,s-1}(t) - \frac{s-1}{t_{n+s} - t_{n+1}} B_{n+1,s-1}(t)$$

como $t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$, se tiene $B_{n+1,s-1}(t) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} B'_{n,s}(t) &= \frac{s-1}{t_{n+s-1} - t_n} B_{n,s-1}(t) \\ &= (s-1)c_n^{(s)} B_{n,s-1}(t) \end{aligned}$$

Juntando estos resultados se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B'_{k-s,s}(t) \\ \vdots \\ B'_{i,s}(t) \\ \vdots \\ B'_{n,s}(t) \end{bmatrix} &= (s-1) \begin{bmatrix} -c_{k-s+1}^{(s)} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ \vdots \\ c_i^{(s)} B_{i,s-1}(t) - c_{i+1}^{(s)} B_{i+1,s-1}(t) \\ \vdots \\ c_n^{(s)} B_{n,s-1}(t) \end{bmatrix} \\ &= (s-1) \begin{bmatrix} -c_{k-s+1}^{(s)} & & & & \\ c_{k-s+1}^{(s)} & -c_{k-s+2}^{(s)} & & & \\ & c_{k-s+2}^{(s)} & -c_{k-s+3}^{(s)} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1}^{(s)} & -c_n^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ B_{k-s+2,s-1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} \\ &= (s-1)\mathbf{C}^{(s)} \begin{bmatrix} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ B_{k-s+2,s-1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} B'_{k-s,s}(t) \\ B'_{k-s+1,s}(t) \\ \vdots \\ B'_{n,s}(t) \end{bmatrix} = (s-1)\mathbf{C}^{(s)} \begin{bmatrix} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ B_{k-s+2,s-1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix}; t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (10)$$

En forma análoga para los $\bar{B}'_{i,m+s}$,

$$\begin{bmatrix} \bar{B}'_{k-s,m+s}(t) \\ \bar{B}'_{k-s+1,m+s}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}'_{\bar{n},m+s}(t) \end{bmatrix} = (m+s-1)\bar{\mathbf{C}}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix}; t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (11)$$

Reemplazando (10) y (11) en 9, se obtiene:

$$(s-1)\mathbf{C}^{(s)} \begin{bmatrix} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ B_{k-s+2,s-1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} = (m+s-1)\bar{\mathbf{C}}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix}; \quad (12)$$

Y de la definición de la matriz BSBT $\mathbf{A}^{(s-1)}$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} B_{k-s+1,s-1}(t) \\ B_{k-s+2,s-1}(t) \\ \vdots \\ B_{n,s}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(s-1)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix}; t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

que al reemplazarlo en (12)

$$\begin{aligned} (s-1)\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{A}^{(s-1)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix} \\ = (m+s-1)\mathbf{A}^{(s)}\bar{\mathbf{C}}^{(s)} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix}; t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \end{aligned}$$

Haciendo $\mathbf{P} = ((s-1)\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{A}^{(s-1)} - (m+s-1)\mathbf{A}^{(s)}\bar{\mathbf{C}}^{(s)})$, se tiene:

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \bar{B}_{k-s+1,m+s-1}(t) \\ \bar{B}_{k-s+2,m+s-1}(t) \\ \vdots \\ \bar{B}_{\bar{n},m+s-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

Si $\mathbf{P} = [p_{i,j}]$ para $i = k-s, k-s+1, \dots, n$ y $j = k-s+1, k-s+2, \dots, \bar{n}$, entonces:

$$\sum_{j=k-s+1}^{\bar{n}} p_{i,j} \bar{B}_{j,m+s-1}(t) = 0; \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1})$$

como $\{\bar{B}_{j,m+s-1}(t)\}_{j=k-s+1}^{\bar{n}}$ es linealmente independiente en $[t_{k-1}, t_{n+1})$, se tiene $p_{i,j} = 0$ para $i = k-s, k-s+1, \dots, n$. Por lo tanto $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, lo que nos lleva a:

$$\mathbf{A}^{(s)}\bar{\mathbf{C}}^{(s)} = \frac{s-1}{m+s-1}\mathbf{C}^{(s)}\mathbf{A}^{(s-1)}. \quad \square$$

4. Un nuevo método uniforme para inserción de nodos y elevación de grados de curvas B-spline

La inserción de nodos y elevación de grados son dos operaciones básicas en la manipulación de curvas B-splines. En esta sección se emplean las matrices BSBT para explorar esas operaciones a partir de un punto de vista uniforme.

Sea

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i B_{i,k}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}) \quad (18)$$

una curva B-spline de orden k , donde $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ son sus puntos de control y $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$ es la base normalizada de B-spline de orden k asociada con el vector de nodos $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n+k}\}$ el cual satisface la condición (1). Algo en común que tienen los métodos de inserción de nodos y elevación de grado de una curva B-spline $\mathbf{p}(t)$ es que el objetivo es representar la curva original $\mathbf{p}(t)$ mediante una nueva base de polinomios B-spline, esto es, encontrar nuevos puntos de control $\bar{\mathbf{p}}_0, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \dots, \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}$ tales que:

$$\mathbf{p}(t) = \bar{\mathbf{p}}(t) = \sum_{i=0}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{p}}_i \bar{B}_{i,\bar{k}}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}), \quad (19)$$

donde $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ es una base B-spline normalizada de orden \bar{k} asociada con el nuevo vector nodo $\bar{\mathbf{T}} = \{\bar{t}_0, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{\bar{n}+\bar{k}}\}$.

Así, dos problemas aparentemente distintos, son esencialmente el mismo. La única diferencia entre ellos es que tomamos una nueva base B-spline diferente $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$, que es totalmente determinada por el nuevo orden \bar{k} y el nuevo vector nodo $\bar{\mathbf{T}}$. Para el problema de inserción de nodos se tiene $\bar{k} = k$ y

$$\mathbf{T} \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subset \bar{\mathbf{T}}. \quad (20)$$

Se denota como r_i y \bar{r}_i a las multiplicidades de t_i y \bar{t}_i en los vectores nodo \mathbf{T} y $\bar{\mathbf{T}}$, respectivamente. Luego, para el problema de elevación de grado se tiene que $\bar{k} > k$ y $\bar{\mathbf{T}}$ satisface la condición (20) y

$$\bar{r}_i = r_i + \bar{k} - k, \quad i = k, k+1, \dots, n. \quad (21)$$

Luego, en base al Teorema 1, existe la matriz BSBT $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ a a partir de una nueva base B-spline $\{\bar{B}_{i,\bar{k}}(t)\}_{i=0}^{\bar{n}}$ en la base original B-spline $\{B_{i,k}(t)\}_{i=0}^n$. De esto, a partir de la ecuación (19), se tiene:

$$[\bar{\mathbf{p}}_0, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \dots, \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}] = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}. \quad (22)$$

Esto muestra que los problemas de inserción de nodos y elevación de grado de las curvas B-splines puede ser convertidos uniformemente al problema del cálculo de matrices BSBT.

Empleando una matriz BSBT podemos también realizar la inserción de nodos y la elevación de grados de las curvas B-spline simultáneamente. Para insertar algún nodo

y elevar el orden de k a \bar{k} ($\bar{k} > k$ en la curva B-spline $\mathbf{p}(t)$), el nuevo vector de nodo $\bar{\mathbf{T}}$ debería ser construido de modo que las condiciones (20) y (21) son satisfechas. En esta situación la matriz $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ aún existe, en virtud del Teorema 1.

Ahora, se proporcionarán dos nuevos métodos para la inserción de nodos y elevación de grados de curvas B-spline en un modo unificado basado en la fórmula recursiva para matrices BSBT dada en el capítulo anterior. Los métodos pueden ser usados para insertar nodos, elevar grados o hacer ambas operaciones simultáneamente en curvas B-spline.

Sean $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$ el vector de puntos de control de la curva original $\mathbf{p}(t)$ definida mediante la ecuación (18) y $\bar{\mathbf{P}} = [\bar{\mathbf{p}}_0, \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \dots, \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}]$ el vector de punto de control de la nueva curva \mathbf{p}_t resultante de la inserción de nodos, elevación de grados o de ambas operaciones simultáneamente de $\mathbf{p}(t)$. Uno de nuestros métodos es en modo directo: primero calculamos la matriz $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ mediante el método dado en el capítulo anterior, luego calculamos $\bar{\mathbf{P}}$ mediante la ecuación (22). Sin embargo, el tiempo de complejidad del método es $O(k^2 \bar{n})$.

El otro método dado a continuación es más eficiente. Sean $\mathbf{C}^{(s)}$ y $\mathbf{A}^{(s)}$ definidas como en los capítulos anteriores. Escribiendo:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}, \\ \mathbf{P}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s+1)} \mathbf{C}^{(s+1)}, \quad s = k-1, k-2, \dots, 1, \end{cases} \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{P}}^{(s)} = \mathbf{P}^{(s)} \mathbf{A}^{(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (24)$$

Se considera $\mathbf{C}^{(s)}$ como en el capítulo anterior. Luego, denotando $\mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}^{(k)} = \mathbf{A}_{k,\bar{k},\mathbf{T},\bar{\mathbf{T}}}$ se tiene $\bar{\mathbf{P}}^{(k)} = \bar{\mathbf{P}}$, en virtud de las ecuaciones (22)-(24). De acuerdo a las ecuaciones (23),(24) y el Teorema 3 se obtiene:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{P}}^{(1)} = \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)}, \\ \bar{\mathbf{P}}^{(s)} = \frac{m+s}{s} \bar{\mathbf{P}}^{(s+1)} \bar{\mathbf{C}}^{(s+1)}, \quad s = 1, 2, \dots, k-1. \end{cases} \quad (25)$$

Se denota como $\mathbf{P}^{(s)} = [\mathbf{p}_{k-s}^{(s)} \mathbf{p}_{k-s+1}^{(s)} \dots \mathbf{p}_n^{(s)}]$ y $\bar{\mathbf{P}}^{(s)} = [\bar{\mathbf{p}}_{k-s}^{(s)} \bar{\mathbf{p}}_{k-s+1}^{(s)} \dots \bar{\mathbf{p}}_{\bar{n}}^{(s)}]$, para $s = 1, 2, \dots, k$. Se considera $\bar{c}_j^{(s)}$ y $\mathbf{A}_j^{(s)}$ como en los capítulos anteriores. Luego, debido al lema 2, y las ecuaciones (15), (24) y (25), se obtiene:

$$\bar{\mathbf{P}}_j^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+1}, \\ \mathbf{P}_j^{(1)}, & [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+m+1}) \cap [t_{k-1}, t_{n+1}) \subseteq [t_i, t_{i+1}), \bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+1}, \end{cases} \quad (26)$$

$$j = k-1, k-2, \dots, \bar{n},$$

$$\bar{\mathbf{P}}_j^{(s)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s}, \\ \mathbf{P}_j^{(s)} \mathbf{A}_j^{(s)}, & \bar{t}_j = \bar{t}_{j+m+s-1} < \bar{t}_{j+m+s}, \\ \frac{s-1}{(m+s-1)\bar{c}_j^{(s)}} \bar{\mathbf{P}}_j^{(s-1)} + \bar{\mathbf{P}}_{j-1}^{(s)}, & \bar{t}_j < \bar{t}_{j+m+s-1}, \end{cases} \quad (27)$$

$$j = k-s, k-s+1, \dots, \bar{n}, \quad s = 2, 3, \dots, k.$$

De acuerdo a las ecuaciones (23), (26) y (27), se presentan dos algoritmos que corresponden a los dos casos considerados para calcular el nuevo vector de puntos de control $\bar{\mathbf{P}}$.

Caso 1.

El nuevo vector nodo $\tilde{\mathbf{T}}$ satisface la condición de anclaje $\tilde{t}_0 = \tilde{t}_1 = \dots = \tilde{t}_{\bar{k}-1}$.

Algoritmo LC.

1. Calcular $\mathbf{P}^{(k)}, \mathbf{P}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{P}^{(1)}$ recursivamente mediante la ecuación (23).
2. Calcular $\bar{\mathbf{P}}^{(1)}, \bar{\mathbf{P}}^{(2)}, \dots, \bar{\mathbf{P}}^{(k)}, \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^{(k)}$ recursivamente mediante las ecuaciones (26) y (27).

Caso 2.

El nuevo vector nodo $\tilde{\mathbf{T}}$ no esta anclado. Definamos el vector nodo no anclado

$$\tilde{\mathbf{T}} = \{\overbrace{\tilde{t}_{\bar{k}-1}, \dots, \tilde{t}_{\bar{k}-1}}^{\bar{k}}, \tilde{t}_{\bar{k}}, \tilde{t}_{\bar{k}+1}, \dots, \tilde{t}_{\bar{n}+\bar{k}}\}$$

Se puede calcular $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}}}$ mediante el algoritmo LC. Consideremos $\mathbf{U}^{(s)}$ como en la ecuación (16). Si se denota como h a la multiplicidad de $\tilde{t}_{\bar{k}-1}$ en el vector nodo $\tilde{\mathbf{T}}$. En virtud de las ecuaciones (17) y (22) se tendrá:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}}} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}_{\bar{k}, \bar{k}, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{T}}} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{U}^{(\bar{k}-h-2)}\mathbf{U}^{(\bar{k}-h-3)} \dots \mathbf{U}^{(0)}.$$

Obviamente se puede calcular $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$ mediante la siguiente fórmula recursiva

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{P}}^{(\bar{k}-h-1)} = \tilde{\mathbf{P}}, \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(s)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(s+1)}\mathbf{U}^{(s)}, \quad s = \bar{k} - h - 2, \bar{k} - h - 3, \dots, 0 \end{cases} \quad (28)$$

Algoritmo LUC.

1. Calcular $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{A}_{k, \bar{k}, \mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}}}$ mediante el algoritmo LC.
2. Calcular $\tilde{\mathbf{P}}^{(\bar{k}-h-1)}, \tilde{\mathbf{P}}^{(\bar{k}-h-2)}, \dots, \tilde{\mathbf{P}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^{(0)}$ recursivamente mediante la ecuación (28).

Se puede estimar que los tiempos de complejidad del Algoritmo LC y del Algoritmo LUC son ambos $O(k\bar{n})$. Se dan ahora ejemplos para los diversos casos:

Ejemplo 6 (Inserción de nodos).

Sea $\mathbf{p}_1(t)$ la curva B-spline de orden 4 con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{1, 1, 1, 1, 1.5, 2, 3, 5, 5, 5, 5\}$$

Ahora considero como puntos de Boor a:

i	\mathbf{p}_i
0	(1, 3)
1	(3, 5)
2	(5, 4)
3	(6, 3.5)
4	(7, 3)
5	(8, 4)
6	(7, 4.5)

Al insertar los siguientes 7 nodos:

$$\{1.1, 1.3, 1.5, 1.8, 1.9, 3, 4\}$$

Entonces se tendrá un nuevo vector nodo:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \{1, 1, 1, 1, 1.1, 1.3, 1.5, 1.5, 1.8, 1.9, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5\}$$

donde $\bar{k} = 4$ (el grado no cambia), pero ahora $\bar{n} = 13$.

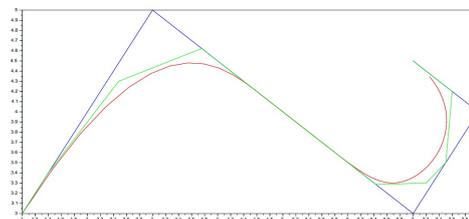


Figura 1. Curva B-spline $\mathbf{p}_1(t)$ y los polígonos de control antes (azul) y después (verde) de insertar los nodos.

Ejemplo 7 (Elevación de grado).

Sea $\mathbf{p}_2(t)$ la curva B-spline de orden $k = 3$ con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{2, 2, 2, 3, 5.9, 6, 6, 10, 10, 10\}$$

Los puntos de Boor serán:

i	\mathbf{p}_i
0	(4, 2)
1	(2, 5)
2	(5, 10)
3	(11, 11)
4	(14, 7)
5	(10, 3)
6	(7, 4)

Se quiere elevar de grado a $\bar{k} = 5$, entonces el nuevo vector nodo será:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \{2, 2, 2, 2, 2, 3, 5.9, 6, 6, 10, 10, 10, 10, 10\}$$

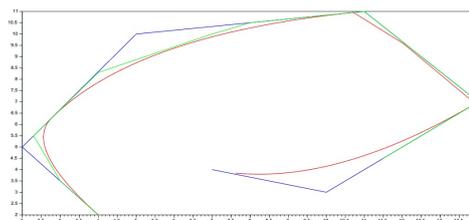


Figura 2. Curva B-spline $\mathbf{p}_2(t)$ y los polígonos de control antes (azul) y después (verde) de elevar el grado.

Ejemplo 8 (Inserción de nodos y elevación de grado).

Sea $\mathbf{p}_3(t)$ la curva B-spline de orden $k = 4$ con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{4, 4, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 8, 8\}$$

Con puntos de Boor:

i	\mathbf{p}_i
0	(3, 6)
1	(2, 7)
2	(5, 11)
3	(10, 4)
4	(6, 16)
5	(12, 12)

Al insertar los nodos: $\{5.5, 6.5\}$ y elevar el grado a $\bar{k} = 5$, se tendrá como nuevo vector nodo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{4, 4, 4, 4, 4, 5, 5.5, 6.5, 7, 8, 8, 8, 8, 8\}$$

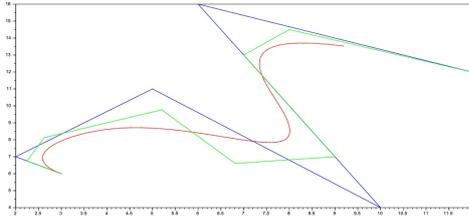


Figura 3. Curva B-spline $\mathbf{p}_3(t)$ y los polígonos de control antes (azul) y después (verde) de insertar los nodos y elevar el grado simultáneamente.

Ejemplo 9 (Inserción de nodos y elevación de grado).

Sea $\mathbf{p}_4(t)$ la curva B-spline de orden $k = 4$ con vector nodo:

$$\mathbf{T} = \{1, 3, 4, 5, 8, 8, 9, 9.3, 9.5, 9.5\}$$

Con puntos de Boor:

i	\mathbf{p}_i
0	(8, 8)
1	(6, 15)
2	(12, 7)
3	(13, 17)
4	(15, 10)
5	(7, 17)

Al insertar los nodos: $\{5.1, 8.9\}$ y elevar el grado a $\bar{k} = 5$, se obtendrá como nuevo vector nodo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \{1, 3, 4, 5, 5.1, 8, 8, 8.9, 9, 9.3, 9.5, 9.5\}$$

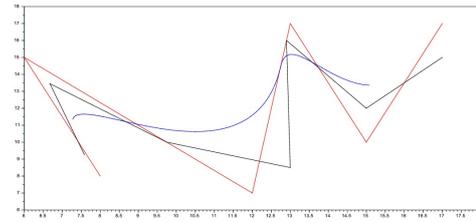


Figura 4. Curva B-spline $\mathbf{p}_4(t)$ y los polígonos de control antes (rojo) y después (negro) de insertar los nodos y elevar el grado simultáneamente.

5. Conclusiones

En este trabajo, se presenta una relación recursiva simple para matrices BSBT. Sobre la base de esto, se propone una fórmula recursiva para el cálculo de matrices BSBT, y es desarrollado un algoritmo eficiente para el cálculo de las mismas. Los resultados muestran que las matrices BSBT proveen una herramienta general para la conversión entre las diferentes representaciones de las curvas y superficies B-spline, que son causadas por las operaciones básicas de B-spline tales como la inserción de nodos, elevación de grados, eliminación de nodos y reducción de grados. Empleando matrices BSBT, se propone un método uniforme para la inserción de nodos y la elevación de grados de curvas B-spline. Este método es eficiente, de propósito general y simple de implementar. Esto puede ser usado para insertar un nodo o múltiples nodos, elevar un grado o múltiples grados, o insertar nodos y elevar grados simultáneamente.

1. L. Juhasz and Z. Bancsik. Increasing the degree of closed B-spline curves. *Mathematical and Computer Modeling*, 38:817-882,2003.
2. T. Lyche. Discrete B-splines and conversion problems. In W. Dahmen, M. Casca, and C.A. Micchelli, editors, *Computation of Curves and Surfaces*, pages 117-136, Netherlands, 1990. Kluwer Academic Publisher.
3. T. Lyche and K. Morken. Making the Oslo algorithm more efficient. *SIAM Journal of Analysis Numerical*, 23(3):663-675, 1986.
4. T. Lyche and Morken. Knot removal for parametric b-spline curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 4(3):217-230,1987.
5. R.J. Pan. The transformation matrices of b-spline bases and their applications. *ACAT Mathematicae Applicatae Sinica*, 26(1):91-101,2003.
6. L. Piegl and W. Tiller. Algorithm for degree reduction of B-spline curves. *Computer-Aided Design*,27(2):101-110,1995.
7. L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS Book*. Springer, Berlin, 2 edition, 1997.
8. H. Prautzsch. Degree elevation of B-spline curves. *Computer-Aided Design*, 1(1):193-198, 1984.
9. H. Prautzsch and B. Piper. A fast algorithm to raise the degree of splines curves. *Computer Aided Design*, 8(3):253-265.1991.
10. L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1 edition, 1981.