Percolación de lados sobre $\mathbb{Z}^d$ y el Teorema de Harris-Kesten

J. Cerda-Hernández†
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
†*javier@ime.usp.br*

Recibido el 20 de enero del 2013; aceptado el 15 de febrero del 2013

Estas notas son basadas en un minicurso "*Modelos de percolación*" que el autor dio en enero de 2014 en la Universidad Nacional de Ingeniería. El objetivo fue introducir un primer curso autocontenido sobre modelos de percolación, que es uno de los modelos más simples de la física estadística en presentar transición de fase, y desarrollar las herramientas necesarias para mostrar el celebrado resultado debido a Harris [8] y Kesten [1] sobre el cálculo exacto de p_c para percolación de lados en $\mathbb{Z}^2$.

Palabras Claves: Percolación, decaimiento exponencial, unicidad del cluster infinito, desigualdad FKG, fórmula de Russo.

These lecture notes are based on a mini-course "*Percolation models*" which I taught at National University of Engineering in January 2014. The goal was to try to develop a first self-contained course in percolation models, that is one of the simplest models of statistical physics exhibiting a phase transition, and present some fundamental tools that we use in the formulation and proof of Harris-Kesten Theorem (see [8] and [1]) on the exact value of the critical probability p_c for bond percolation on $\mathbb{Z}^2$.

Keywords: Percolation model, exponential decay,uniqueness of the open cluster, FKG inequality, Russo's formula.

1. Introducción

El primer modelo de percolación fue formulado en la década de los 50 por Broadbent y Hammersley [9] como un modelo de transporte de un fluido en un medio poroso. Desde su aparición los modelos de percolación se convirtieron en una de las áreas más activas de la teoría de probabilidad, no solo por el desafío matemático que generó para crear nuevas técnicas y herramientas para estudiar estos modelos, sino por la conexión posteriormente descubierta que existe con los sistemas físicos desordenados de la mecánica estadística y la transición de fase de estos (ver por ejemplo [11], [17], [12],[13], [14], [18]). La preguntas básicas que uno quiere resolver generalmente para este tipo de modelos son: ocurre percolación en el modelo? y si la respuesta es afirmativa, cuál es el valor exacto del parámetro para la ocurrencia de percolación? En general, el valor exacto es conocido sólo para un pequeño número de casos en que una propiedad fundamental es utilizada, la dualidad.

Broadbent y Hammersley plantearon el problema de calcular p_c en una variedad de modelos, incluyendo la percolación de lados en $\mathbb{Z}^2$ y demostraron algunos resultados no triviales, como por ejemplo que $0,35 < p_c(\mathbb{Z}^2) < 0,65$ (ver [10]), dando así una primera prueba de la existencia de transición de fase para el modelo de percolacion en $\mathbb{Z}^2$. El primer progreso sobre el cálculo del punto crítico en el retículo $\mathbb{Z}^2$ fue hecho por Harris [8], probando que $p_c(\mathbb{Z}^2) \geq 1/2$. Finalmente, 20 años despues, Kesten [1] probó que $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$, en su famoso paper "*The critical probability of bond percolation on the square lattice equals* 1/2". Otras propiedades importantes durante ese periodo fueron obtenidas, como la unicidad del punto crítico, establecida por Menshikov [7] y Aizenman y Barsky [6] de forma independiente, y la unicidad del cluster infinito probada por Aizenman, Kesten y Newman [5].

En estas notas definiremos el modelo de percolación de lados independientes sobre $\mathbb{Z}^d$, también llamado "*Percolación de Bernoulli*", y desarrollaremos las propiedades necesarias, como las mencionadas anteriormente, para demostrar el Teorema de Harris-Kesten. El autor agradece por la hospitalidad en la UNI y por la amistad brindada por los colegas durante la realización del minicurso. Un especial agradecimiento al Prof. W. Echegaray por invitarme a escribir estas notas.

2. El Modelo

Formalmente, considere el grafo d-dimensional $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, donde $\mathbb{Z}^d$ es el conjunto de vértices de la red, y $\mathbb{E}^d = \{\{x,y\} \subset \mathbb{Z}^d : ||x-y||_1 = 1\}$ es el conjunto de lados, donde $||x||_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$. El espacio de configuraciones para el modelo será $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$, i.e., una configuración $w \in \Omega$ es una función $w : \mathbb{E}^d \to \{0,1\}$. Diremos que un lado e es abierto en la configuración w, si $w(e) = 1$, caso contrario diremos que e es cerrado en la configuración w. El σ-álgebra considerado, denotado por $\mathcal{E}$, será el σ-álgebra generado por los cilindros finitos dimensionales. La medida de probabilidad para el modelo de percolación de Bernoulli con parámetro p en Ω será la medida producto $\mathbb{P}_p$ sobre $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$ such that $\mathbb{P}_p(w : w(e) = 1) = p$ para cualquier $e \in \mathbb{E}^d$.

La ocurrencia de percolación esta asociada a la existencia de un camino infinito de lados abiertos atravesando el medio, por eso estamos interesados en propiedades de conectividad de w. Un conjunto de lados $\{e_1,\ldots,e_n\} \subset \mathbb{E}^d$, $n \geq 1$, donde $e_i = \{x_i, y_i\}$, $i = 1,\ldots,n$, será denominado un *camino* si $e_1,\ldots,e_n$ son diferentes y $y_i = x_{i+1}$, $i = 1,\ldots,n-1$. Un *camino abierto* es un camino que tiene todos sus lados abiertos. Un *circuito* será un camino $\{e_1,\ldots,e_n\}$ tal que $y_n = x_1$, es decir, un camino que se cierra asi mismo. Diremos que dos vértices x, y estan conectados, denotado por $x \leftrightarrow y$, si existe un camino abierto $\{e_1,\ldots,e_n\}$ tal que $x_1 = x$ e $y_n = y$. Denotamos el cluster de un vértice x como, $C_x = \{y \in \mathbb{Z}^d : y \leftrightarrow x\}$. Denotaremos por C el cluster del origen. Estamos interesados en $|C|$, el volumen (o cardinalidad) del aglomerado del origen, más precisamente, en su distribución $FD(k) = \mathbb{P}_p[|C| = k]$, $k = 1,2,3,\ldots,\infty$. Específicamente, queremos saber si cluster infinitos pueden ocurrir con probabilidad positiva:

$$\theta(p) := \theta(p,d) = \mathbb{P}_p[|C| = \infty] = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_p[|C| = k].$$

Expresiones para $\mathbb{P}_p[|C| = k]$ son relativamente fáciles de calcular para k pequeños, pero se tornan combinatoriamente más complicadas para k grande y no se tiene una forma explícita para un k general. Por esta razón el estudio de la densidad del cluster infinito $\theta(p)$ debe ser realizado usando otras técnicas. En 1 dimensión, i.e. $d = 1$, se obtiene fórmulas exactas y con esto se prueba que no existe percolación en 1 dimensión.

Las primeras propiedades cualitativas de la densidad del cluster infinito $\theta(p)$ que se pueden obtener son:

Lema 2.1. *Para $p \in [0,1]$, tenemos:*

(a) *La función $\theta(p)$ es no decreciente en p.*

(b) *La función $\theta(p,d)$ es no decreciente en d.*

Demostración. (a) Considere variables aleatorias uniformes U_e sobre $[0,1]$ indexadas por los lados. Para cualquier $p \in [0,1]$, sea $w_p \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$ la configuración dada por $w_p(e) = 1_{\{U_e \leq p\}}$ para cualquier $e \in \mathbb{E}^d$. Es fácil ver que la ley de w_p es $\mathbb{P}_p$. Ahora, note que si $p_1 \leq p_2$, entonces $w_{p_1} \leq w_{p_2}$. Por lo tanto

$$\theta(p_1) = \mathbb{P}_{p_1}(|C| = \infty) \leq \mathbb{P}_{p_2}(|C| = \infty) = \theta(p_2).$$

(b) El resultado se sigue de ver a $\mathbb{Z}^d$ como un hiperplano de $\mathbb{Z}^{d+1}$ y considerando el siguiente modelo de percolación en $\mathbb{Z}^{d+1}$: declaramos cerrado los lados fuera del hiperplano $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{Z}^{d+1}$. Si denotamos por $\tilde{C}$ el cluster del origen en este modelo, tenemos claramente que $\tilde{C} \subset C$. Esto finaliza la prueba. □

Usando la monoticidad de la función $\theta(p)$ tenemos que la percolación de Bernoulli sobre $\mathbb{Z}^d$ tiene transición de fase en el siguiente sentido.

Teorema 2.1. *Para $d \geq 2$, existe $0 < p_c < 1$ tal que $\mathbb{P}_p(|C| = \infty) > 0$ para $p > p_c$ y $\mathbb{P}_p(|C| = \infty) = 0$ para $p < p_c$.*

Usando la construcción dada en la prueba de la parte (a) del Lema 2.1 y la monoticidad de la función $\theta(p)$, tenemos la siguiente definición para p_c.

$$\begin{aligned} p_c &= \inf\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(|C| = \infty) > 0\} \\ &= \sup\{p \in [0,1] : \mathbb{P}_p(|C| = \infty) = 0\} \end{aligned}$$

Este punto, en general, podría ser igual a 0 ó 1. Por ejemplo, en el caso 1 dimensional $p_c = 1$. Probaremos a continuación que $0 < p_c < 1$ para $d \geq 2$.

Demostración. Probaremos que $\theta(p) = 0$ cuando p está próximo de 0. Fijemos un $n > 0$ y sea Ω_n el conjunto de caminos comenzando del origen y de longitud n. Si el cluster del origen es infinito, entonces es posible extraer de esta un camino abierto de longitud n en Ω_n, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(|C| = \infty) &\leq \mathbb{P}_p(\exists \gamma \in \Omega_n \text{ camino abierto}) \\ &\leq \sum_{\gamma \in \Omega_n} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ camino abierto}) \leq \sigma(n) p^n, \end{aligned}$$

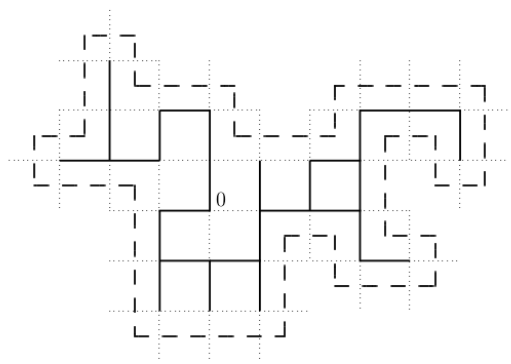
donde $\sigma(n) = |\Omega_n|$. Usando argumentos combinatorios es posibles obtener $\sigma(n) \leq 2d(2d-1)^{n-1}$. Asi, el lado derecho de la expresión anterior converge para 0 cuando $p < 1/(2d-1)$. Por lo tanto deducimos que $p_c \geq 1/(2d-1)$.

Usando la monoticidad de $\theta(p)$ en la variable dimensional, es suficiente probar que $\theta(p) > 0$ cuando p está próximo de 1 para $d = 2$. El argumento usado es conocido como *argumento de Peierls.* La prueba está basada en el concepto de dualidad.
Considere la red bidimensional dual de $\mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{Z}^2_* = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2).$$

Existe una relación 1 a 1 entre los vértices y lados de $\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{Z}^2_*$. Si denotamos la relación $e \to e_*$ entre los lados de $\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{Z}^2_*$, que asocia a cada lado de $\mathbb{Z}^2$ el lado secante de $\mathbb{Z}^2_*$, es posible inducir un modelo de percolación sobre $\mathbb{Z}^2_*$ a partir de $\mathbb{Z}^2$ declarando e_* ser abierto o cerrado conforme e sea abierto o cerrado. Formalmente, para cualqueir configuración $w \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2}$, definimos la configuración $w_* \in \{0,1\}^{\mathbb{E}^2_*}$ por $w_*(e_*) = w(e)$. Entonces, el modelo de percolación definido en $\mathbb{Z}^2_*$ es una percolación de Bernoulli de parámetro $p^* = p$ (Algunos autores consideran $w_*(e_*) = 1 - w(e)$ obteniendo así una percolación de Bernoulli de parámetro $p^* = 1 - p$).

La existencia de un cluster finito del origen en $\mathbb{Z}^2$ está asociada a la existencia de un circuito cerrado en $\mathbb{Z}^2_*$ alrededor del origen.



Note que $\mathbb{P}_p(|C| < \infty) + \mathbb{P}_p(|C| = \infty) = 1$, entonces si probamos que la probabilidad que el cluster del origen sea finito es estrictamente menor que 1 para valores de p próximos de 1, tendriamos necesariamente que $\mathbb{P}_p(|C| = \infty) > 0$ para los mismo valores de $p < 1$.

Usando el argumento anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_p[|C|<\infty] &= \mathbb{P}_p\left[\begin{matrix}\text{Existe un circuito cerrado}\\ \text{en } \mathbb{Z}^2_* \text{ alrededor del origen}\end{matrix}\right]\\
&\le \sum_{\gamma} \mathbb{P}_p[\gamma \text{ cerrado}]\\
&\le \sum_{n\ge 4}\sum_{\gamma:|\gamma|=n} P_p[\gamma \text{ cerrado}]\\
&\le \sum_{n\ge 4}\lambda(n)(1-p)^n,
\end{aligned}$$

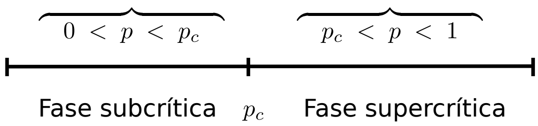
donde la suma es sobre todos los circuitos γ en $\mathbb{Z}^2_*$ alrededor del origen y $\lambda(n)$ denota en número de circuitos en $\mathbb{Z}^2_*$ alrededor del origen de longitud n.

Argumentos combinatorios simples producen la siguiente cota superior $\lambda(n) \le n3^{n-1}$. Reemplazando esta cota en la expresión anterior tenemos una cota para la probabilidad que el cluster del origen sea finito

$$\mathbb{P}_p[|C|<\infty] \quad \le \quad \sum_{n\ge 4}\frac{n}{3}[3(1-p)]^n,$$

que es una función continua y decreciente en p cuando $p > 2/3$, y anulandose en $p = 1$. La continuidad en p de esta cota garantiza la existencia de un $p_0 < 1$ tal que $\mathbb{P}_p[|C| < \infty] < 1$ para $p > p_0$. Esto finaliza la prueba. □

En general, el Teorema 2.1 sugiere que los modelos de percolación sobre los grafos $\mathbb{L}^d$ tendrían tres regiones bien marcadas para el comportamiento de la funcion densidad del cluster infinito, la fase subcrítica $p < p_c$, la fase crítica $p = p_c$ y la fase supercrítica.



Recordemos que percolación esta asociado a la existencia de un cluster infinito, entonces otro observable natural que permite estudiar percolación del modelo es el tamaño medio del cluster del origen, definido por

$$\chi(p) = \mathbb{E}_p(|C|),$$

donde $\mathbb{E}_p(X)$ denota la integral de la v.a. X respecto a la medida $\mathbb{P}_p$ definida anteriormente. Es posible escribir χ en términos de la distribución de $|C|$

$$\begin{aligned}
\chi(p) &= \infty\mathbb{P}_p(|C|=\infty) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}_p(|C|=n)\\
&= \infty\theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}_p(|C|=n),
\end{aligned}$$

entonces es evidente que $\chi(p) = \infty$ si $p > p_c$. Este resultado es intuitivo, puesto que si $p > p_c$ existirá clusters infinitos y estos harán que el tamaño medio del cluster explote. Pero, qué sucede con la función $\chi(p)$ en $0 < p < p_c$? La respuesta a esta pregunta fue respondida independientemente por Menshivok [7] e Aizenman y Barsky [6], eliminando así una posible fase adicional en el modelo. Los detalles a la respuesta de esta pregunta será discutida en la Sección 4.

3. Herramientas probabilisticas

La función indicadora de un subconjunto A de $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$ es la función $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ dada por

$$1_A(w) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad w \notin A,\\ 1 & \text{si} \quad w \in A.\end{cases}$$

Introduzimos el siguiente orden parcial sobre el espacio de configuraciones $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$: $w \le w'$ si, y sólo si $w(e) \le w'(e)$ para todo $e \in \mathbb{E}^d$. Una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada creciente si $X(w) \le X(w')$ siempre que $w \le w'$. Similarmente, X es llamada decreciente si $-X$ es creciente. Note que toda función creciente es necesariamente acotada por $X(0) \le X(w) \le X(1)$ para todo $w \in \Omega$. Un subconjunto A de Ω es creciente si su función indicadora es creciente. Ejemplos típicos de eventos crecientes con los que se trabajará a lo largo de las notas son $\{x \leftrightarrow y\}$, $\{|C| = \infty\}$. A continuación damos una propiedad muy importante que satisfacen los eventos crecientes que fue probada por Fortuin, Kasteleyn y Ginibri en 1971 [19](ver también [20]).

Teorema 3.1 (Desigualdad FKG [19],[20]). *(a) Sea X e Y dos variables aleatorias crecientes tal que $\mathbb{E}_p(X^2) < \infty$ y $\mathbb{E}_p(Y^2) < \infty$, entonces*

$$\mathbb{E}_p(XY) \ge \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y).$$

(b) Si A y B son eventos crecientes, entonces

$$\mathbb{P}_p(A\cap B) \ge \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

Otra herramienta importante en el desarrollo de estas notas, y que servirá en la sección 4, es la fórmula de Russo [21]. Esta fórmula permite obtener una expresión cerrada para la derivada en el parámetro p de un evento creciente.

Sea A un evento creciente y w una configuración de Ω. Decimos que un lado e es pivotal para (A, w), si una de las siguientes propiedades acontece:

$$\begin{matrix} \text{ó} & w \in A & \text{y} & w' \notin A\\ \text{ó} & w \notin A & \text{y} & w' \in A,\end{matrix}$$

donde

$$w'(f) = \begin{cases} w(f) & , \quad f \ne e\\ 1 - w(e) & , \quad f = e\end{cases}$$

Denotamos por $N(A)$ el número de lados pivotales para el evento A.

Teorema 3.2 (Russo [21]). *Si A es un evento creciente dependiendo de un conjunto finito de lados, entonces*

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = E_p(N(A)) = \sum_{e} P_p(e \textit{ es pivotal para } A).$$

4. Decaimiento exponencial

Como mencionamos en la sección 2, el estudio del cluster del origen puede efectuarse a través del observable macroscópico $\chi(p)$. Claramente χ es no decreciente en p, y $\chi(0) = 1, \chi(1) = \infty$. En el caso $p > p_c$ sabemos que $\chi(p) = \infty$, pero quedaba por responder el comportamiento de χ en el caso $p < p_c$. Este es el objetivo de esta sección. Como queremos descartar una fase adicional para el modelo de percolación de Bernoulli sobre $\mathbb{Z}^d$, definiremos otro punto crítico en término de χ, de la siguiente forma

$$\tilde{p} = \sup\{p : \chi(p) < \infty\}.$$

Usando un argumento parecido al usado en la prueba del Teorema 2.1 tenemos

$$\begin{aligned} \chi(p) &\leq \sum_{n\geq 0} \sigma(n)p^n \\ &\leq 1 + \sum_{n\geq 1} 2dp[(2d-1)p]^{n-1}, \end{aligned}$$

así $\chi(p) < \infty$ si $p < 1/(2d-1)$. Por lo tanto $\tilde{p}$ esta bien definido y $\tilde{p} > 0$. Otra propiedad fácil de deducir es $\tilde{p} \leq p_c$. En esta sección daremos un sketch de la prueba $\tilde{p} = p_c$ estableciendo asi la llamada unicidad del punto crítico. Este resultado es consecuencia del decaimiento exponencial del radio de C.

Sea S_n la bola de radio n con centro en el origen con la norma $||\cdot||_1$, i.e.,

$$S_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : ||x||_1 \leq n\}.$$

Denotamos por ∂S_n la superficie de S_n, que es el conjunto de puntos x tal que $||x||_1 = n$. Denotamos por A_n el evento que existe un camino abierto juntando el origen con algún vértice de ∂S_n. El siguiente resultado devido a Menshivok [7] e Aizenman y Barsky [6], conocido como decaimiento exponencial debajo de p_c, es la propiedad fundamental que permitió probar la unicidad del punto crítico.

Teorema 4.1. *Si $p < p_c$, entonces existe $\psi(p) > 0$ tal que*

$$\mathbb{P}_p(A_n) \leq e^{-n\psi(p)}$$

Antes de dar un sketch de la prueba, veamos la principal consecuencia de este teorema.

El número de vértices en S_n esta acotado por el volumen de la bola Euclideana de radio $n+1$ en $\mathbb{R}^d$. Entonces existe una constante $\nu(d)$ que depende sólo de la dimensión tal que

$$|S_n| \leq \nu(d)(n+1)^d.$$

Definamos la variable aleatoria $M = \max\{n :$ tal que A_n acontece$\}$. Si $p < p_c$ entonces $\mathbb{P}_p(M < \infty) = 1$. Luego

$$\begin{aligned} \chi(p) &\leq \sum_{n} \mathbb{E}_p(|C| \mid M = n)\mathbb{P}_p(M = n) \\ &\leq \sum_{n} |Sn|\mathbb{P}_p(A_n). \end{aligned}$$

Usando el Teorema 4.1 tenemos la siguiente desigualdad

$$\chi(p) \leq \nu(d) \sum_{n} (n+1)^d e^{-n\psi(p)}.$$

La expresión del lado derecho es convergente para todo $p < p_c$, obteniendo así la unicidad del punto crítico.

Corolario 4.1. *El tamaño medio $\chi(p)$ del cluster del origen es finito si $p < p_c$.*

Otro importante resultado que se puede concluir usando el decaimiento exponencial de A_n es el decaimiento exponencial de $|C|$ (ver [6],[3]), i.e. existe $\lambda(p) > 0$ tal que

$$\mathbb{P}_p(|C| \geq n) \leq e^{-n\lambda(p)}.$$

Prueba del Teorema 4.1. La demostración de este teorema utiliza la fórmula de Russo para encontrar una relación entre las probabilidades del evento creciente A_n para valores diferentes del parámetro p. Sea $e \in \mathbb{E}^d$, entonces el evento $\{e \text{ es pivotal para } A_n\}$ es independiente del estado de e. Bajo esta observación tenemos que $P_p[e \text{ es pivotal para } A_n] = \frac{1}{p}\mathbb{P}_p[e \text{ es abierto y pivotal para } A_n]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}\mathbb{P}_p(A_n) &= \frac{1}{p}\sum_e \mathbb{P}_p[e \text{ es abierto y pivotal para } A_n] \\ &= \frac{1}{p}\sum_e \mathbb{P}_p[A_n \cap \{e \text{ es pivotal para } A_n\}] \\ &= \frac{1}{p}\sum_e \mathbb{P}_p[A_n]\mathbb{P}_p[A_n \cap \{e \text{ es pivotal para } A_n\}|A_n] \\ &= \frac{1}{p}\mathbb{E}_p[N(A_n)|A_n]\mathbb{P}_p[A_n]. \end{aligned}$$

Dividiendo la primera expresión por $\mathbb{P}_p(A_n)$ e intengrando en el intervalo $[p_1, p_2]$, tenemos

$$\mathbb{P}_{p_2}[A_n] = \mathbb{P}_{p_1}[A_n] \exp\left(\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p}\mathbb{E}_p[N(A_n)|A_n]dp\right).$$

Note que $\mathbb{P}_p(A_n) \downarrow \theta(p)$ cuando $n \uparrow \infty$. Usando la identidad anterior sólo necesitamos probar que $\mathbb{E}_p[N(A_n)|A_n]$ crece linealmente en n. La mayor parte de la prueba está dedicada a estimar $\mathbb{E}_p[N(A_n)|A_n]$. La heurística del crecimiento lineal en n es dada como sigue: Si $p < p_c$ entonces $\mathbb{P}_p(A_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces para un n suficientemente grande estamos condicionando a un evento de probabilidad pequeña. Si A_n ocurre, entonces la probabilidad que el origen y ∂S_n se conecten es remota, por eso existen muchos lados abiertos en S_n que son cruciales para la ocurrencia de A_n. Luego, es plausible que el número de tales lados cruciales (lado pivotal) en los caminos desde el origen hasta ∂S_{2n} es el doble que el número de lados cruciales en caminos del origen hasta ∂S_n. Así el número $N(A_n)$ de lados pivotales para A_n debería crecer linealmente en n.

Usando esta idea, Menshikov consiguio probar que

$$\mathbb{E}_p[N(A_n)|A_n] \geq \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_p(A_i)} - 1.$$

Usando esta conta inferior y probando la convergencia de la serie $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}_p(A_i)$ uno concluye el la prueba del Teorema 4.1. Los detalles para llegar a la última desigualdad pueden ser encontradas en [7], [3], [6].

$\square$

5. Unicidad del cluster infinito

La ergodicidad de la medida producto $\mathbb{P}_p$ tiene como consecuencia que casi ciertamente existe un cluster infinito cuando $\theta(p) > 0$. Además, el evento que existe un cluster infinito es invariante por traslaciones, y por lo tanto trivial bajo $\mathbb{P}_p$ por la Ley $0-1$ de Kolmogorov.

Definimos por η la variables aleatoria que cuenta el número de clusters infinitos diferentes de una configuración de $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$. Note que η es invariante por traslaciones, entonces por la ergodicidad de $\mathbb{P}_p$ tenemos que η es constante casi ciertamente, i.e., existe una constante $k \in \{0,1,\dots\} \cup \{\infty\}$ tal que $\mathbb{P}_p(\eta = k) = 1$. Naturalmente k depende de la elección del valor de p, por ejemplo, si $p < p_c$ entonces $k = 0$. El siguiente teorema responde totalmente a la interrogante de que valores puede tomar el rango de la v.a η cuando existe un cluster infinito con probabilidad positiva.

Teorema 5.1. *Si p es tal que $\theta(p) > 0$, entonces*

$$\mathbb{P}_p(\eta = 1) = 1.$$

Note que gracias al Teorema 5.1 uno puede afirmar que para cualqueir $p \in [0,1]$ solo puede ocurrir ó $\mathbb{P}_p(\eta = 0) = 1$ ó $\mathbb{P}_p(\eta = 1) = 1$.

La prueba del Teorema 5.1 será dividida en 2 partes, la primera exluirá $2 \leq \eta < \infty$ y la segunda exluirá $\eta \geq 3$.

Proposición 5.1. *Si $p \in [0,1]$, entonces ó $\mathbb{P}_p(\eta = 0) = 1$ ó $\mathbb{P}_p(\eta = 1) = 1$ ó $\mathbb{P}_p(\eta = \infty) = 1$.*

Demostración. Sea k la constante tal que $P_p[\eta = k]$. Supongamos que $1 \leq k < \infty$. Demostraremos que k solamente puede tomar el valor $k = 1$.

Denotemos por Q_n el cubo de lado $2n+1$ centrado en el origen y consideremos el evento

$$A_n = \{\text{todos los cluster infinitos intersectan } Q_n\}.$$

Note que A_n depende solamente de la frontera de Q_n, pues para saber si Q_n intersecta todos los cluster infinitos basta observar la frontera de Q_n. Como $k < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_p[A_n, \eta = k] = \mathbb{P}_p[\eta = k] = 1.$$

Usando a igualdad anterior, elegimos n_0 de modo que $\mathbb{P}_p[A_{n_0}] > 0$. Luego, definimos el evento

$$B_{n_0} = \{\text{todos los lados internos de } Q_{n_0} \text{ estan abiertos}\}.$$

Note que B_{n_0} depende apenas de los lados interiores a Q_{n_0} y es independiente de A_{n_0}, pues A_{n_0} solo depende de la frontera. Así concluimos que

$$P_p[\eta = 1] \geq P_p[A_{n_0} \cap B_{n_0}] = P_p[A_{n_0}]P_p[B_{n_0}] > 0.$$

$\square$

La siguiente proposición descarta el caso $\eta \geq 3$ en la red $\mathbb{Z}^d$.

Proposición 5.2. *Si $p \in [0,1]$, entonces $\mathbb{P}_p(\eta \geq 3) = 0$.*

La prueba de este resultado es un poco extensa y no la presentaremos en estas notas, pero pueden ser halladas en [5], [22], [3], [4].

6. Teorema de Harris-Kesten

Harris (1960) demostró que $\theta(1/2) = 0$, y por lo tanto $p_c(\mathbb{Z}^2) \geq 1/2$. Posteriormente Kesten (1980) demostró, usando técnicas desarrolladas por Russo, Seymour y Welsh, que $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq 1/2$. La prueba está basada en 3 argumentos fundamentales para el modelo de percolación sobre $\mathbb{Z}^2$: la autodualidad de la red $\mathbb{Z}^2$, el decaimiento exponencial en la fase subcrítica y la unicidad del cluster infinito en la fase supercrítica.

Teorema 6.1 (Teorema de Harris-Kesten: $p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$)**.** *Para percolación de lados sobre $\mathbb{Z}^2$, $\theta(1/2) = 0$ y $\theta(p) > 0$ para $p > \frac{1}{2}$.*

La prueba de este famoso resultado será dividida en dos Lemas

Lema 6.1. *En dos dimensiones se tiene que $\theta(1/2) = 0$.*

Este resultado tiene como consecuencia inmediata que $p_c(\mathbb{Z}^2) \geq 1/2$.

Demostración. Primero observemos que si $A_1, \dots, A_n$ son eventos crecientes de igual probabilidad, entonces por la desigualdad FKG tenemos que

$$1 - P_p(\cup_{i=1}^n A_i) = P_p(\cap_{i=1}^n A_i^c) \geq (1 - P_p(A_1))^n.$$

Por lo tanto

$$P_p(A_1) \geq 1 - (1 - P_p(\cup_{i=1}^n A_i))^{1/n},$$

conocido como el truco de la raíz cuadrada de Cox y Durrett.

Supongamos que $\theta(1/2) > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n^i el evento que algun vértice del lado izquierdo del cuadrado $T_n = [0,n]^2$ pertenece a un cluster abierto infinito sin usar los otros vértices de T_n. Similarmente defina los eventos A_n^d, A_n^a y A_n^b reemplazando lado izquierdo por lado derecho, lado de arriba y lado de abajo, respectivamente. Note que por la simetría de T_n y geometría de $\mathbb{Z}^2$ estos eventos tienen la misma probabilidad.

Por hipótesis ($\theta(1/2) > 0$) y por la unicidad del cluster infinito tenemos

$$\mathbb{P}_{1/2}(\text{existe un cluster infinito abierto}) = 1,$$

de donde concluimos que

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_n^i \cup A_n^d \cup A_n^a \cup A_n^b) \to 1$$

cuando $n \to \infty$. Usando el truco de la raiz cuadrada, tenemos

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_n^u) \to 1$$

cuando $n \to \infty$ para $u = i, d, a, b$.

Usando la convergencia anterior, podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{P}_{1/2}(A_N^u) > 7/8 \qquad \mathbb{P}_{1/2}(A_{N-1}^u) > 7/8$$

para $u = i, d, a, b$.

Ahora vamos a repetir el procedimiento en la red dual. Sea $A_*^i(n)$ el evento que algún vértice del lado izquierdo de $T_n^* = [0, n-1] + (1/2, 1/2)$ pertenece a un cluster cerrado infinito de $\mathbb{Z}_*^2$ sin usar los otros vértices de T_n^*. Similarmente defina los eventos $A_*^d(n)$, $A_*^a(n)$ y $A_*^b(n)$, reemplazando lado izquierdo por lado derecho, lado de arriba y lado de abajo, respectivamente. Así tenemos que

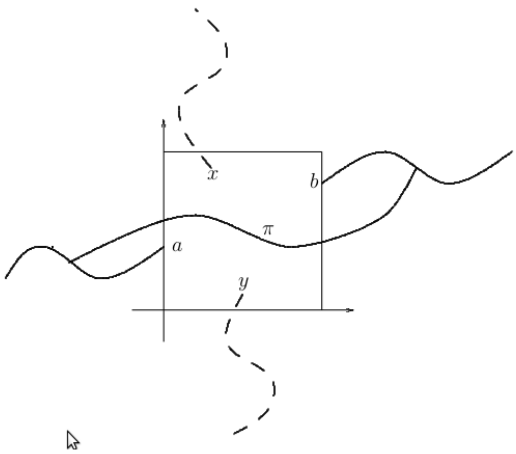
$$\mathbb{P}_{1/2}(A_*^u(N)) = \mathbb{P}_{1/2}(A_{N-1}^u) > 7/8,$$

para $u = i, d, a, b$.

Definamos el conjunto

$$A = A_N^i \cap A_N^d \cap A_*^a(N) \cap A_*^b(N).$$

Note que (en A) si sólo existiera un cluster infinito abierto en $\mathbb{Z}^2$ y un cluster infinito cerrado en $\mathbb{Z}_*^2$, entonces los caminos abiertos infinitos a la izquierda y derecha de T_N se deben juntar por lados abiertos que están dentro de T_N^*, pues por fuera hay caminos infinitos cerrados arriba y abajo de T_N^* bloqueando el paso. Similarmente, los caminos infinitos cerrados de arriba y abajo de T_N^* de deben conectar por lados cerrados dentro T_N. Mas en este caso, la uniones por dentro de T_N y T_N^* se deben cruzar, lo que es imposible. Luego, en A existen dos cluster infinitos abiertos disjuntos en $\mathbb{Z}^2$ o dos cluster infinitos cerrados disjuntos en $\mathbb{Z}_*^2$. La siguiente figura ilustra este razonamiento.



Entonces por la unicidad del cluster infinito, Teorema 5.1, concluimos que $\mathbb{P}_p(A) = 0$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1/2}(A^c) &\leq \mathbb{P}_{1/2}[(A_N^i)^c] + \mathbb{P}_{1/2}[(A_N^d)^c] + \\ &\quad \mathbb{P}_{1/2}[(A_*^a(N))^c] + \mathbb{P}_{1/2}[(A_*^b(N))^c] \\ &\leq 1/2. \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior conluimos que $\mathbb{P}_{1/2}(A) \geq 1/2$, que es una contradicción. Esto prueba el lema. $\square$

El segundo lema que probaremos para completar la prueba del Teorema 6.1 es el siguiente

Lema 6.2. *En dos dimensiones, se tiene que $p_c \leq 1/2$.*

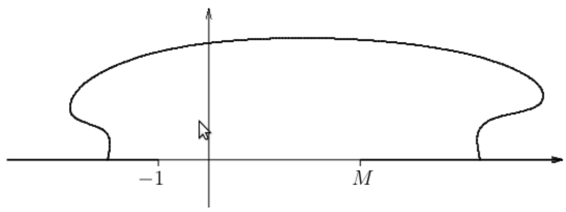
Demostración. Vamos a probar que si $p < p_c$, entonces existe un cluster infinito cerrado en el dual con probabilidad positiva, lo que implicaría que $1 - p \geq p_c$ (por la autodualidad de $\mathbb{Z}^2$). Esas dos desigualdades implican que $p_c \leq 1/2$.

Si $p < p_c$ tenemos, por la unicidad del punto crítico y que a su vez es consecuencia del decaimiento exponencial en $p < p_c$, que

$$\chi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C| \geq n) < \infty.$$

Sea M un entero positivo y definamos el conjunto

$$A_M = \{\text{Existe un camino abierto } \pi \text{ en } \mathbb{Z}^2 \text{ uniendo algún sitio de la forma } (k,0) \text{ con } k < 0 \text{ a otro lugar de de la forma } (l,0) \text{ con } l \geq M \text{ con la propiedad que todos los lados de } \pi \text{ a no ser los extremos, están arriba del eje horizontal}\}.$$



Luego tenemos las siguientes desigualdades para la probabilidad del evento A_M

$$\begin{aligned} P_p(A_M) &\leq \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{l=M}^{\infty} \{(k,0) \leftrightarrow (l,0) \text{ para algún } k < 0\}\right) \\ &\leq \sum_{l=M}^{\infty} P_p((k,0) \leftrightarrow (l,0) \text{ para algún } k < 0) \\ &= \sum_{l=M}^{\infty} P_p((0,0) \leftrightarrow (k-l,0) \text{ para algún } k < 0) \\ &= \sum_{l=M}^{\infty} P_p((0,0) \leftrightarrow (l+m,0) \text{ para algún } m > 0) \\ &\leq \sum_{l=M}^{\infty} P_p(|C| \geq l). \end{aligned}$$

Usando la relación anterior y la finitud del cluster medio del origen podemos escoger M tal que

$$P_p(A_M) \leq 1/2.$$

Definamos el conjunto

$$L = \{(m + 1/2, 1/2) : -1 \leq m < M\}.$$

Denotemos por $C(L)$ el conjunto de vértices del dual conectados a L por caminos cerrados en el dual. Si $|C(L)| < \infty$, entonces existe un circuito abierto en el dual de $\mathbb{Z}_*^2$, que es $\mathbb{Z}^2$, alrededor de $C(L)$. Entonces

$$\mathbb{P}_p[|C(L)| < \infty] \leq \mathbb{P}_p[A_M] \leq 1/2.$$

Por lo tanto $P_p[|C(L)| = \infty] \geq 1/2$. Entonces por lo menos algún vértice de L tiene que pertenecer a un cluster infinito cerrado. Así conluimos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p[0_* \text{ pertenece a un cluster} & \\ \text{infinito cerrado}] &\geq \frac{1}{M+1} P_p[|C(L)| = \infty] \\ &\geq \frac{1}{2(M+1)} > 0. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que la probabilidad de existir un cluster infinito cerrado en el dual es positiva. Esto prueba el lema y concluye la demostración del Teorema 6.1. □

1. Kesten H., *The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$*. Comm. Math. Phys. Vol. 74(1), Pag 41-59 (1980).
2. Kesten H., *Percolation Theory for Mathematicians.* Birkhauser(1982).
3. Grimmett, G. R.: *Percolation.* Springer-Verlag, Berlin (1999).
4. Bollobas, B., Riordan O.: *Percolation.* Cambridge University Press, United Kingdom (2006).
5. Aizenman, M., Kesten, H. , Newman, C.M. : *Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation.* Communications in Mathematical Physics 111, 505-532 (1987)
6. Aizenman, M., Barsky D.: *Sharpness of the phase transition in percolation models.* Communications in Mathematical Physics 108, 489-526 (1987).
7. Menshikov M.V.: *Coincidence of critical points in percolation problems.* Soviet Mathematics Doklady 33, 856-859 (1986).
8. Harris T., *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 56, 13-20 (1960).
9. Broadbent S.R., Hammersley J.M.*Percolation processes I. Cristals and mazes.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 53, 629 -641 (1957).
10. Hammersley J.M.*Percolation processes: Lower bounds for the critical probability.* Ann. Math. Statist, 28, 790-795 (1957).
11. van der Berg, J. , Maes, C.: *Disagrement percolation in the study of Markov fields.* Ann. Probab. 22, 749–763 (1994).
12. Krikun, M., Yambartsev, A.: *Phase transition for the Ising model on the critical Lorentzian triangulation. Journal of Statistical Physics*, v. 148, p. 422-439 (2012).
13. Häggström, O.: *Markov random fields and percolation on general graphs.* Adv. in Appl. Probab. v. 32, p. 39–66 (2000).
14. Grimmett, G. R.: *Space-Time Percolation. Progress in Probability.* v. 60, p. 305–320 (2008).
15. Fontes L.R.:*Notas en percolação.* IMPA (1998).
16. Grimmett, G. R.: *The stochastic random-cluster process and the uniqueness of random-cluster measures. Ann. Probab.*. v. 23(4), p. 1461–1510 (1995).
17. Georgii, H., Häggström, O. : *The random geometry of equilibrium phases.* Phase transitions and critical phenomena, Vol 18. Academic press, San Diego, CA , 1–142 (2001).
18. Fortuin, C.M., Kasteleyn, R.W.: *On the random-cluster model I. Introduction and relation to other models. Physica*, 57, 536–564 (1972).
19. Fortuin, C. M., Kasteleyn, P. W., Ginibre, J.: *Correlation inequalities on some partially ordered sets*, Communications in Mathematical Physics 22, 89-103 (1971).
20. Holley, R.:*Remarks on the FKG inequalities*, Communications in Mathematical Physics 36, 227-231 (1974).
21. Russo, L.: *On the critical percolation probabilities*, Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie and Verwandte Gebiete 56, 229-237 (1981).
22. Burton, R.M., Keane M.: *Density and uniqueness in percolation*, Communications in Mathematical Physics 121, 501-505 (1989).