El spin no es necesariamente relativístico

H.G. Valqui (*)

ABSTRACT

A prism decomposes an incident light ray in many outgoing rays of different colours. This idea is applied to the case of an electron-ray directed to a Stern-Gerlach's device, from which emerge two electron-rays of different 'colours'. This decomposition is achieved by postulating that the Schroedinger equation is really a two-component (matricial) equation, in such a way that, when no magnetic field is present, it reproduces trivially two times the (scalar) Schroedinger equation. The passage from the trivial matrix equation to the magnetic-field-dependent one, forces the appearance of the so called spin matrices.

RESUMEN

Un rayo de luz que incide sobre un prisma resulta descompuesto en muchos rayos de diferentes colores. Esta idea es aplicada al caso de un rayo de electrones que incide sobre un aparato de Stern-Gerlach, donde se producen dos rayos salientes. Tal descomposición se obtiene asumiendo que la ecuación de Schroedinger es realmente una ecuación (matricial) de dos componentes, de manera que, en ausencia de un campo magnético, dicha ecuación representa la repetición trivial de la ecuación escalar de Schroedinger. El paso de la ecuación matricial trivial al de la ecuación para el caso en que exista un campo magnético implica la aparición de las matrices de Pauli.

(*) Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Casilla postal 31-139, Lima - Perú.

Introducción

La construcción del operador de spin realizada por Pauli no reproducía, por un factor 2, los resultados esperados. Posteriormente Dirac logró construir un modelo que sí reproducía correctamente los resultados experimentales; pero tal modelo surgió de la ecuación relativística del electrón, por lo que en adelante se supuso que el spin era necesariamente un efecto relativístico.

En un artículo matemático aparecido en 1981 [1], quedó aclarado que el operador del spin no es necesariamente producto de los postulados relativísticos.

Aquí desarrollamos las características principales de tal construcción para el caso del spin 1/2.

El modelo no relativístico

El modelo clásico de la óptica considera que la luz blanca es una especie de superposición de ondas luminosas de diferentes colores. Esta onda blanca mantiene su estructura mientras no atraviese algún medio material que posea la propiedad de separar a las diferentes ondas componentes. El medio clásico de separación de ondas luminosas está constituido por un prisma: Sobre un prisma incide luz blanca, y de él emergen haces de luz de varios colores, en direcciones diferentes a la del haz incidente.

Por analogía podemos suponer que la función de onda de un conjunto de partículas (átomos) que inciden sobre un aparato de Stern-Gerlach es una "superposición" de dos funciones de onda (cada una correspondiente a uno de los "colores" de spin). Esta "superposición" podría ser detectada recién en presencia de un campo magnético no homogéneo (que desempeñaría el papel de un prisma).

Con el objeto de obtener una ecuación de Schroedinger que proporcione dos soluciones diferentes (cada una correspondiente a un "color" de spin), como un primer paso escribiremos doblemente la misma ecuación estacionaria de Schroedinger:

$$H f_1 = E f_1, \quad H f_2 = E f_2 \tag{01}$$

donde H es el operador hamiltoniano

$$H = (1/2m)\ \mathbf{P}^2 + V \tag{02}$$

siendo P el operador (vectorial) de momentum lineal y V el operador (escalar, multiplicativo) de potencial.

De otro lado, sabemos que si un electrón penetra en un campo magnético **B** el momento lineal pasa a ser **P** + e **A**, donde ∇x **A** = **B** y el hamiltoniano toma la forma

$$H_B = (1/2m)\,(\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^2 + V \tag{02a}$$

A continuación escribiremos las dos ecuaciones escalares (01) como una sola ecuación (matricial).

$$H^{\circ}\, f = E\, f \tag{03}$$

donde H° es una matriz diagonal trivial, f es una función vectorial y E es un número real

$$H^{\circ} = \begin{vmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{vmatrix} = H\ \mathbf{I}, \quad f = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \end{vmatrix}$$

siendo **I** la matriz unidad. Notemos que también podemos escribir

$$H^{\circ} = (1/2m)\,\mathbf{P}^2\ \mathbf{I} + V\ \mathbf{I}, \tag{02b}$$

Es claro que (03) es una forma trivial de reescribir las dos ecuaciones (01), las mismas que, además, son coincidentes.

Ahora, teniendo presente que **P** es un operador (vectorial) de tres componentes, **P** = h/i ∇, construiremos un operador **P**^ multiplicando cada componente por un coeficiente matricial,

$$\mathbf{P}^{\wedge} = \hat{u}_1\, P_1 + \hat{u}_2\, P_2 + \hat{u}_3\, P_3 \tag{04}$$

donde los $\hat{u}_k$ son ciertas matrices de dos por dos. Nótese que no interesa el orden en el que se escriban los productos $\hat{u}_k\, P_k$. Las matrices $\hat{u}_k$ deben ser construídas de manera que se cumpla

$$\mathbf{P}^{\wedge 2} = \mathbf{P}^2\ \mathbf{I} \tag{04a}$$

es decir,

$$H^{\circ} = (1/2m)\ \mathbf{P}^{\wedge 2} + V\mathbf{I} \tag{02c}$$

Elevando al cuadrado la expresión (04) y teniendo presente que las componentes de **P** conmutan entre sí, obtenemos

$$\mathbf{P}^{\wedge 2} = \hat{u}_1^{\,2} P_1^{\,2} + \hat{u}_2^{\,2} P_2^{\,2} + \hat{u}_3^{\,2} P_3^{\,2} + (\hat{u}_1\, u_2 + \hat{u}_2\, \hat{u}_1)\ P_1\, P_2$$

$$+ (\hat{u}_2\, u_3 + \hat{u}_3\, \hat{u}_2)\ P_2\ P_3\ +\ (\hat{u}_3\, u_1 + \hat{u}_1\, \hat{u}_3)\ P_3\ P_1$$

Ahora, con el objeto de satisfacer la condición (04a) exigimos que las matrices $\hat{u}_k$ satisfagan las condiciones

$$\hat{u}_1^{\,2} = \hat{u}_2^{\,2} = \hat{u}_3^{\,2} = I \tag{04b}$$

$$\hat{u}_k\, \hat{u}_j + \hat{u}_j\, \hat{u}_k = 0 \quad \text{para } k \neq j \tag{04c}$$

Hasta este momento, la ecuación (03), con el hamiltoniano (02c) sólo es una forma trivial de escribir la misma ecuación de Schroedinger para un electrón en ausencia de un campo magnético. Ahora conectaremos un campo magnético **B**, lo que, según (02a) y (02c), nos lleva a considerar el hamiltoniano (matricial)

$$H^{\circ}_{B} = (1/2m)\,(\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^{\wedge 2} + V\,I \tag{02d}$$

Este hamiltoniano ya no es diagonal, pues si bien las componentes del operador **P** conmutan entre sí y las componentes del operador (multiplicativo) **A** también conmutan entre sí; en cambio, las componentes de **P** no conmutan con las componentes de **A**, por lo cual las componentes del operador **P** + e **A** tampoco conmutarán entre sí. La correspondiente ecuación

$$H^{\circ}_{B}\, f = E^{\circ}_{B}\, f \tag{03a}$$

donde E°_{B} es un número real, representa a dos ecuaciones (escalares) acopladas.

Ahora, teniendo presente tanto las relaciones (04b), (04c) como

$P_i\, P_j - P_j\, P_i = 0$, $\quad A_i\, A_j - Aj\, Ai = 0$; y también
$P_i\, A_j - A_j\, P_i = (h/i)\;\partial A_j/\partial x_i$,

podemos desarrollar $(\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^{\wedge 2}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^{\wedge 2} = {} & (\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^2 + e\,(P_1 A_2 + A_1 P_2 - P_2 A_1 - A_2 P_1)\;\hat{u}_1\,\hat{u}_2 \\
& + e\,(P_2 A_3 + A_2 P_3 - P_3 A_2 - A_3\;P_2)\;\hat{u}_2\,\hat{u}_3 \\
& + e\,(P_3 A_1 + A_3 P_1 - P_1 A_3 - A_1 P_3)\;\hat{u}_3\,\hat{u}_1 \\
= {} & (\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^2 + (he/i)\,(\partial A_2/\partial x_1 - \partial A_1/\partial x_2)\;\hat{u}_1\,\hat{u}_2 \\
& + (he/i)\,(\partial A_2/\partial x_3 - \partial A_2/\partial x_3)\;\hat{u}_2\,\hat{u}_3 \\
& + (he/i)\,(\partial A_3/\partial x_1 - \partial A_3/\partial x_1)\;\hat{u}_3\,\hat{u}_1 \\
= {} & (\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^2 + (he/i)\,(B_3\;\hat{u}_1\,\hat{u}_2 + B_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3 + B_2\,\hat{u}_3\,\hat{u}_1)
\end{aligned}$$

es decir,

$$(\mathbf{P} + e\,\mathbf{A}\,)^{\wedge 2} = (\mathbf{P} + e\,\mathbf{A})^2\, I + 2e\, S_B \tag{05}$$

donde

$$S_B = (h/2i)\,(B_1\,\hat{u}_2\,\hat{u}_3 + B_2\,\hat{u}_3\,\hat{u}_1 + B_3\,\hat{u}_1\,\hat{u}_2) \tag{05a}$$

lo cual nos permite escribir

$$H'_B = H_B I + (e/m)\,S_B \tag{02e}$$

donde, como deseábamos, en el nuevo hamiltoniano aparece un término adicional, dependiente del campo magnético.

Ahora veamos la forma que debe tener S_B. De (04b) y (04c) obtenemos que $\hat{u}_k = -\hat{u}_l\,\hat{u}_k\,\hat{u}_l$, de donde resulta que la traza de cada una de tales matrices debe ser nula,

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{u}_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

es decir, dichas matrices deben tener la forma,

$$\begin{vmatrix} q & r \\ s & -q \end{vmatrix}$$

Si tenemos presente que las matrices buscadas deben representar a un observable físico, ellas deberán ser autoadjuntas, es decir, el número q debe ser real y, además, debe cumplirse que $s = r^*$. Por otra parte, debido a (04b), los elementos de la matriz deben satisfacer que $q^2 + rs = 1$. La forma más general de una matriz que satisface los requerimientos mencionados es:

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & e^{i\mu}\,\mathrm{sen}\,\beta \\ e^{-i\mu}\,\mathrm{sen}\,\beta & -\cos\beta \end{vmatrix} \tag{06}$$

donde μ, β son números reales arbitrarios. Ahora, puesto que para un sistema de tres matrices autoadjuntas, siempre podemos encontrar una transformación unitaria que diagonalice a una de ellas, entonces para $\hat{u}_3$ podemos tomar el valor $\beta = 0$, obteniendo

$$\hat{u}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \tag{06a}$$

Si, ahora, de acuerdo con (04c), exigimos que las matrices de la forma (06) deban anticonmutar con la matriz (06a), obtenemos $\cos\beta = 0$, es decir $\beta = \pi/2$. Entonces, las otras dos matrices tendrán la forma

$$\hat{u}_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{i\mu 1} \\ e^{-i\mu 1} & 0 \end{vmatrix} \qquad \hat{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -e^{i\mu 2} \\ e^{-i\mu 2} & 0 \end{vmatrix}$$

pero, por otra parte, estas matrices deben anticonmutar entre sí, $\hat{u}_1 \hat{u}_2 + \hat{u}_2 \hat{u}_1 = 0$. De esta condición resulta que, necesariamente cos $(\mu_1 - \mu_2) = 0$, es decir $\mu_1 - \mu_2 = \pi/2$. Ahora, por comodidad escribimos $\mu_1 = \mu$; entonces obtenemos $e^{i\mu_2} = ie^{i\mu}$, con lo cual podemos escribir

$$\hat{u}_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{i\mu} \\ e^{-i\mu} & 0 \end{vmatrix} \qquad \hat{u}_2 = i \begin{vmatrix} 0 & -e^{i\mu} \\ e^{-i\mu} & 0 \end{vmatrix} \tag{06b}$$

donde μ es un número real arbitrario. Para el caso particular en el que $\mu = 0$, se obtienen las conocidas matrices de Pauli.

Usando (06a) y (06b) podemos verificar que, al multiplicar tales matrices, sé cumplen las relaciones

$$\hat{u}_j \hat{u}_k = i \hat{u}_m \quad \text{para j, k, m = 1, 2, 3 cíclicamente}$$

lo cual, con (05a), nos permite escribir

$$S_B = (h/2) \ (\hat{u}_1 B_1 + \hat{u}_2 B_2 + \hat{u}_3 B_3) = (h/2) \ \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{B} \tag{05b}$$

Si ahora definimos las matrices

$$S_k = (h/2) \ \hat{u}_k, \qquad \mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3) \tag{07}$$

podemos verificar que se satisfacen las relaciones

$$S_j S_k = (ih/2) \ S_m, \ \text{para j, k, m = 1, 2, 3 cíclicamente,}$$

$$S_j S_k + S_k S_j = 0, \quad \text{para} \ j \neq k$$

de las cuales podemos obtener

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = ih \ \mathbf{S}$$

que es la misma ecuación que satisfacen los operadores de momento angular.

Usando (05b), (06a), (06b) y (7) obtenemos

$$S_B = (h/2) \begin{vmatrix} B_3 & e^{i\mu} B_- \\ e^{-i\mu} B_+ & -B_3 \end{vmatrix} \tag{05c}$$

donde $B\_ = B_1 - i B_2$, $B_+ = B_1 + i B_2 = B\_^*$, lo que evidencia que el hamiltoniano $\mathbf{H}^{\bullet}{}_{B}$, en contraste con el operador H°, no es trivialmente diagonal.

También podemos verificar que las columnas

$$\tilde{a}_{\uparrow} = \begin{vmatrix} B + B_3 \\ e^{-i\mu} B_+ \end{vmatrix} \qquad \tilde{a}_{\downarrow} = \begin{vmatrix} e^{i\mu} B_- \\ -B - B_3 \end{vmatrix} \tag{08}$$

donde B es el módulo de $\mathbf{B}$, son los vectores propios del operador S_B , son los vectores propios del operador S_B,

$$S_B\ \tilde{a}_\uparrow = (+Bh/2)\ \ \tilde{a}_\uparrow,\ \ S_B\ \tilde{a}_\downarrow = (-Bh/2)\ \ \tilde{a}_\downarrow \tag{08a}$$

Los vectores $\tilde{a}_\uparrow$ and $\tilde{a}_\downarrow$ son ortogonales pero no unitarios. Para obtener que ellos sean unitarios escribiremos el campo **B** en coordenadas esféricas expresadas en algún sistema de referencia (arbitrario),

$$B_1 = B\ \text{sen}\phi\ \cos\beta\ ,\ B_2 = B\ \text{sen}\phi\ \text{sen}\beta,\ B_3 = B\cos\phi$$

lo cual permite escribir

$$B_+ = B\ e^{i\beta}\ \text{sen}\phi = 2B\cos(\phi/2)\ e^{i\beta}\ \text{sen}(\phi/2)$$

$$B + B_3 = 2B\cos(\phi/2)\cos(\phi/2),$$

construir los vectores propios ortonormales

$$\tilde{A}_\uparrow(\phi,\beta) = \begin{vmatrix} e^{i(\mu-\beta)}\cos(\phi/2) \\ \text{sen}(\phi/2) \end{vmatrix},\qquad \tilde{A}_\downarrow(\phi,\beta) = \begin{vmatrix} e^{i(\mu-\beta)}\ \text{sen}(\phi/2) \\ -\cos(\phi/2) \end{vmatrix} \tag{08b}$$

y reescribir al operador S_B

$$S_B = \mathbf{S}\bullet\mathbf{B}(\phi,\beta) = B\ h/2 \begin{vmatrix} \cos\phi & e^{i(\mu-\beta)}\ \text{sen}\ \phi \\ e^{-i(\mu-\beta)}\ \text{sen}\ \phi & -\cos\phi \end{vmatrix} \tag{05d}$$

Energías y funciones propias del operador H°B

Si definimos la constante numérica

$$b = (eh(/2m)\ B$$

y tenemos presente las expresiones (02e) y (05d), podemos escribir (03a) en la forma

$$\begin{vmatrix} H_B + b\cos\phi & b\ e^{i(\mu-\beta)}\ \text{sen}\phi \\ b\ e^{-i(\mu-\beta)}\ \text{sen}\phi & H_B - b\cos\phi \end{vmatrix}\ f = E^\circ{}_B\ \ f \tag{3b}$$

o, si se prefiere,

$$[H_B + b\cos\phi]\ f_1 + [b\ e^{i(\mu-\beta)}\ \text{sen}\phi]\ f_2 = E^\circ{}_B\ \ f_1 \tag{3c}$$

$$[b\ \ e^{-i(\mu-\beta)}\ \text{sen}\phi]\ f_1 + [H_B - b\ \ \cos\phi]\ f_2 = E^\circ{}_B\ \ f_2 \tag{3d}$$

donde eventualmente debemos considerar dos valores para $E^\circ{}_B$.

Sean, por otra parte g_1 y g_2 dos funciones propias del operador H_B

$$H_B\, g_1 = E_B\, g_1\,, \quad H_B\, g_2 = E_B\, g_2 \tag{9}$$

correspondientes a un mismo valor propio (no exigimos que dichas funciones sean linealmente independientes). Ahora mostraremos que tales funciones son soluciones de las ecuaciones (3c) y (3d). En efecto, aplicando (9) a (3c) y (3d) podemos escribir

$$[E_B + b\ \cos\phi]\ g_1 + [b\ e^{i(\mu-\beta)}\ \mathrm{sen}\phi]\ g_2 = E^{\circ}_B\ g_1$$

y

$$[b\ e^{-i(\mu-\beta)}\ \mathrm{sen}\phi]\ g_1\ +\ [E_B - b\ \cos\phi]\ g_2 = E^{\circ}_B\ g_2$$

cuyas soluciones no triviales exigen que los coeficientes de las funciones consideradas satisfagan la ecuación

$$[E_B + b\ \cos\phi - E^{\circ}_B]\ [E_B - b\ \cos\phi - E^{\circ}_B]\ -\ b^2\ \mathrm{sen}^2\phi = 0$$

la misma que proporciona dos valores para la energía E°_B

$$E^{\circ}_{B1} = E_B + b, \qquad E^{\circ}_{B2} = E_B - b$$

o también

$$E^{\circ}_{B1} = E_B + (eh/2m)\ B\ , \quad E^{\circ}_{B2} = E_B - (eh/2m)\ B \tag{10}$$

que son los valores de la energía que se obtienen en el experimento de Stern-Gerlach. Además obtenemos que las correspondientes funciones (vectoriales) propias son

$$f_{\uparrow} = \begin{vmatrix} (e^{i(\mu-\beta)}\ \cos\phi/2)\ g_1 \\ (\mathrm{sen}\phi/2)\ g_1 \end{vmatrix} = A_{\uparrow}\,(\phi,\beta)\ g_1, \qquad f_{\downarrow} = A_{\downarrow}\,(\phi,\beta)\ g_1$$

donge g_1 es una de las funciones de (9).

Conclusión

Partiendo de la ecuación no relativística de Schroedinger, $H\ f_1 = E\ f_1$, o de la ecuación $H_B\ f_1 = E\ f_1$ cuando se haya presente un campo magnético **B**, hemos construído la ecuación matricial $H^{\circ}\ f = E^{\circ}\ f$, o correspondientemente, la ecuación $H^{\circ}_B\, f = E^{\circ}_B\, f$, donde $H^{\circ}_B = H_B I + (e/m)\ S_B$.

Cuando no existe un campo magnético la ecuación $H^{\circ}_B\ f = E^{\circ}_B\ f$ se reduce a expresar dos veces la ecuación $H\, f_1 = E\, f_1$. Pero en la presencia de un campo magnético, el hamiltoniano H_B es modificado por la adición de un sumando, que explica correctamente los dos niveles de energía medidos después que el rayo de electrones emerge del aparato de Stern-Gerlach, (10).

Finalmente queremos anotar que:

i) Los valores propios de S_B son completamente independientes de la dirección del campo **B**. Esto es consistente con el hecho de que tal dirección está referida a un sistema de referencia arbitrario.

ii) Los vectores propios de S_B son vectores en un espacio complejo y no representan ninguna dirección en el espacio físico convencional.

iii) Los vectores propios "rotan" al rotar el campo **B**, con un período 4π, de manera que

$$\tilde{A}_\uparrow(\phi + 4\pi, \beta + 4\pi) = \tilde{A}_\uparrow(\phi, \beta), \qquad \tilde{A}_\downarrow(\phi + 4\pi, \beta + 4\pi) = \tilde{A}_\downarrow(\phi, \beta)$$

pero

$$\tilde{A}_\uparrow(\phi + 2\pi, \beta + 2\pi) = -\tilde{A}_\uparrow(\phi, \beta), \qquad \tilde{A}_\downarrow(\phi + 2\pi, \beta + 2\pi) = -\tilde{A}_\downarrow(\phi, \beta)$$

y

$$\tilde{A}_\uparrow(\phi + 3\pi, \beta) = \tilde{A}_\downarrow(\phi, \beta), \qquad \tilde{A}_\downarrow(\phi + 3\pi, \beta) = \tilde{A}_\uparrow(\phi, \beta)$$

iv) En el caso especial en el que el tercer eje del sistema de referencia coincida con la dirección de **B**, es decir, para $\phi = 0$, el operador S_B se torna diagonal y las ecuaciones (3c) y (3d) se desacoplan, dando

$$[H_B + (eh/2m)\,B]\, f_1 = E_{B1}\, f_1, \qquad [H_B - (eh/2m)\,B]\, f_2 = E_{B2}\, f_2$$

v) Los ángulos ϕ y β expresan la orientación (arbitraria) del campo **B**. En ninguna parte se ha mencionado una supuesta orientación que podría atribuírsele al spin del electrón.

vi) En ningún momento hemos hecho uso de la inhomogenidad del campo **B**; sólo nos ha interesado la presencia del mismo.

REFERENCIAS

[1] **H. Valqui.** *Expansión de un operador por efecto de un prisma; Rev. Per. de Física, Vol. 1, Nº 2, 1981.*

[2] **S. Fluegge.** *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 4; Springer 1964.*

[3] **D. Blochinzew.** *Grundlagen der Quantenmechanik; Harri Deutsch 1962.*

[4] **Feynman-Leighton-Sands.** *The Feynman Lectures on Physics, III; Addison-Wesley 1965.*