FE DE ERRATA (Volumen 1, número 1, junio 1995)

El problema de la integral de Feynman

H. G. Valqui (*)

ABSTRACT

The Schroedinger equation controls the physical system dynamics, by means of a probability amplitude function (which expresses the probability of the numerical values of the physical observables). Such function is well determined at time t if one knows it at initial time t_0. Feynman built up a probabilistic operator -called the propagator- which applied to the function at time t_0 gives directly the corresponding function at time t. To that end, Feynman had to realize a certain "summation" incluiding all possible differentiable trajectories.

In this paper, after a short introduction, it is shown how to achieve that "summation", and it is calculated in the particular case of the free particle. After that, the Schroedinger equation is derived, as well as a formula for the approximated calculation of the propagator, when a potential function is present.

RESUMEN

La ecuación de Schroedinger determina la dinámica de los sistemas físicos, por medio de una función de amplitud de probabilidad (la probabilidad de que los observables físicos tomen valores específicos). Dicha función quedará bien determinada en todo instante t, si ella es conocida en un instante inicial t_0,

(*) Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Casilla postal 31-139, Lima Perú
e-mail: valqui@fc-uni.pe

Feynman construyó un operador probabilístico, llamado ***propagador****, que aplicado a la función inicial reproduce directamente la función en el instante t. Para ello, Feynman propuso realizar una cierta "suma" sobre todas las trayectorias posibles, continuamente diferenciables.*

En el presente trabajo, después de una introducción, se muestra la construcción de dicha "suma" y se la realiza en el caso particular de la partícula libre. Luego se obtiene la ecuación de Schroedinger y se construye una fórmula para el cálculo aproximado del propagador para el caso en el que el potencial es no nulo.

Introducción

Para describir la dinámica de los sistemas físicos sometidos a un potencial V (t, x), la física clásica postula la existencia de una función lagrangeana

$$L: R^{1+2n} \rightarrow R$$

con la cual se construye la funcional de Acción S,

$$S(t_2, a_2, t_1, a_1; q) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t, q(t), q'(t))$$

correspondiente a cada trayectoria $q: R^n \rightarrow R$, que conecta a los "puntos" crono-espaciales (t_1, a_1) y (t_2, a_2), previamente fijados, donde $t_1 \leq t_2$.

De entre todas las trayectorias posibles, que conecten los puntos indicados, sólo aquélla (o aquéllas) que proporcionen a S un valor extremal resultará físicamente realizada (Principio de Hamilton). Tal condición extremal implica que la función L deba satisfacer la ecuación diferencial de Euler-Lagrange (cuyas soluciones son precisamente las trayectorias físicamente realizables).

En cambio, en la física cuántica, dado el potencial V (t, x), se postula la existencia de:

1> una función compleja,

$$\Phi : R^{1+n} \rightarrow C$$

que debe contener toda la información sobre el sistema físico en consideración;

2> un operador diferencial espacial, llamado hamiltoniano, que en el caso no relativístico tiene la forma

$$H = -(h^2/2m)\ \nabla^2 + V \qquad \{3\}$$

donde ∇^2 es el laplaceano n-dimensional y V es operador de potencial actuando como un operador multiplicativo (operador diagonal, $V\Psi = V\Psi$); h y m son ciertas constantes;

3> una ecuación diferencial, llamada ecuación de Schroedinger,

$$H\ \Phi + (h/i)\ \partial\ \Phi = 0 \qquad (02)$$

donde ∂ es el operador de derivada temporal. Las soluciones contienen, en forma probabilística, con densidad de probabilidad igual a $|\Phi|^2$, toda la información sobre el sistema físico considerado.

El propagador de Feynman

En la ecuación de Schroedinger, se debe dar en el instante t_0, la función inicial $\Phi\ (t_0)$ para obtener, en el instante t, la función $\Phi\ (t)$. Por ello, Feynman se propuso construir un operador llamado -propagador temporal- $K\ (t, t_0)$ con $t_0 \leq t$, que al ser aplicado sobre el vector $\Phi\ (t_0)$ lo transforme en el vector $\Phi\ (t)$,

$$K\ (t, t_0)\ \Phi\ (t_0) = \Phi\ (t) \qquad (03)$$

o, en forma desarrollada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\ K\ (t,x, t_0, z)\ \Phi\ (t_0, z) = \Phi\ (t,x)$$

(donde la integración se realiza en todo el espacio considerado. Debe notarse que la expresión anterior representa el producto de una matriz de índices contínuos por un vector de índice tambien contínuo).

El mencionado propagador debería incluir el efecto de todas las posibles trayectorias contínuamente diferenciables (y no sólo de la trayectorial extremal). Con tal fin, Feynman postuló

$$K\ (t, x, t_0, x_0) = \sum_q e^{(i/h)\ S\ (t,\ t_0,\ x,\ x_0;\ q)} \qquad (04)$$

donde la "suma" debería realizarse -de alguna manera- según todas las trayectorias contínuamente diferenciables.

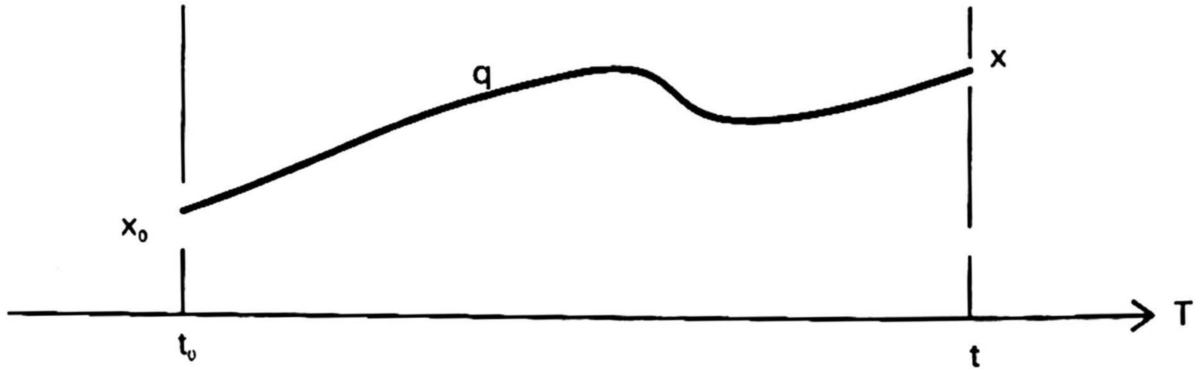

Fig. 1 *Una trayectoria q, que en el instante t_0 parte del punto x_0, para llegar, en el instante t, al punto x.*

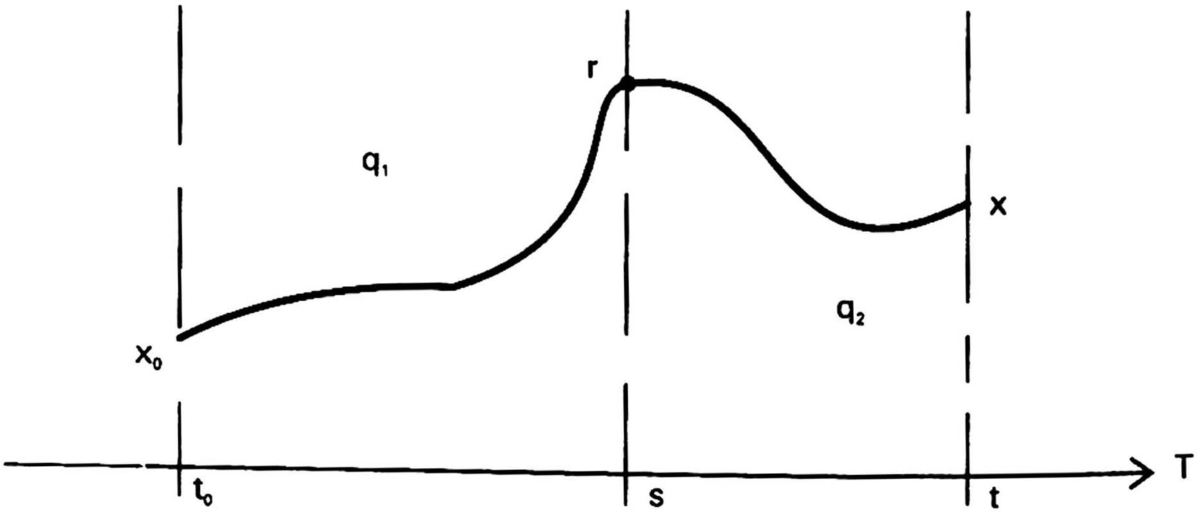

Fig. 2. *Una trayectoria q^r, que conecta a los puntos crono-espaciales inicial y final, pero que en el instante dado s debe pasar por el punto espacial r.*

Fijemos un instante intermedio s, $t_0 < s < t$ y un punto espacial r. Consideremos todas las trayectorias q^r, que conectando los puntos inicial y final pasen, en el instante s, por el punto espacial r, como se muestra en la fig. 2.

Sea q_1 una trayectoria cualquiera que conecta a los puntos crono-espaciales (t_0, x_0) y (s, r); sea q_2 una trayectoria que conecta a los puntos (s, r) y (t, x). Entonces, cualquier q^r puede ser considerada como la reunión de una cierta trayectoria q_1 y una cierta trayectoria q_2. Ahora, cualquier trayectoria q puede ser obtenida eligiendo, primeramente y para un instante s, un cierto punto espacial r, luego, eligiendo las correspondientes trayectorias q_1 y q_2. Para una trayectoria $q^r = q_1 \cup q_2$ podemos escribir,

$$S\,(t, b, t_0, a; q^r) = S\,(t, b, s, r; q_2) + S\,(s, r, t_0, a; q_1)$$

y, también

$$e^{\tau \bullet S(t,\, b,\, t_0,\, a;\, q^r)} = e^{\tau \bullet S(t,\, b,\, s,\, r;\, q_2)} \bullet e^{\tau \bullet S(s,\, r,\, t_0,\, a;\, q_1)}$$

Es decir, en general, para incluir todas las trayectorias, podemos escribir,

$$\sum_q F(t, b, t_0, a; q) = \int_{-\infty}^{\infty} dr\ \left[\sum_{q_2} \sum_{q_1} F\ (t, b, s, r; q_2) \bullet F(s, r, t_0, a; q_1) \right] \qquad (05)$$

Aplicando (05) a nuestro caso obtendremos,

$$K(t, x, t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dr\ K(t, x, s, r)\ K(s, r, t_0, x_0)$$

o, en forma abreviada

$$K(t, t_0) = K(t, s)\ K(s, t_0) \qquad (06)$$

donde s es cualquier instante intermedio.

Considerando la propiedad (06) dividamos el intervalo (t_0, t) en N subintervalos, con $t_N = t$; entonces podemos escribir,

$$K(t, t_0) = \prod_{j=0}^{N-1} K(t_{j+1}, t_j) \qquad (07)$$

o, también,

$$K\ (t, x, t_0, x_0) = \int dx_{N-1}\ dx_{N-2}\ \dots\ dx_j \dots dx_1 \prod_{j=0}^{N-1} K(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j)$$

donde

$$\mathbf{K(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j) = \sum_{q_i} e^{(i/h)\, S(t_{j+1},\, x_{j+1},\, t_j,\, x_j;\, q_j)}} \qquad \mathbf{(08)}$$

$$\mathbf{S(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j; q_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt\, L(t, q_j(t), q'_j(t))} \qquad \mathbf{(09)}$$

Notemos que, en principio, algunas trayectorias q_j pueden tomar, para instantes t intermedios entre t_j y t_{j+1}, valores $q_j(t)$ muy alejados tanto de x_j como de x_{j+1}. Pero, por otra parte, teniendo presente la continuidad de las trayectorias, cuando la diferencia $\varepsilon_j = t_{j+1} - t_j$ sea muy pequeña, los valores x_j, x_{j+1} y $q_j(t)$ deberán ser casi coincidentes. Es decir, en tales circunstancias, todas las trayectorias q_j serán casi coincidentes. Por la continuidad de la derivada, también las velocidades q'_j serán casi coincidentes.

Ahora, para los casos en los que la función lagrangeana sea contínua, y para valores de ε_j suficientemente pequeños, podemos aplicar en (09) el teorema del valor intermedio,

$$S(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j; q_j) = \varepsilon_j \; L(\theta, q_j\;(\theta), q'_j\;(\theta)), \qquad t_j \leq \theta \leq t_{j+1}$$

Considerando lo argumentado anteriormente, sobre la casi coincidencia de las trayectorias y las velocidades, una buena aproximación para los valores intermedios sería,

$$\theta \approx t_j + \varepsilon_j/2, \qquad q_j(\theta) \approx (x_{j+1} + x_j)/2, \qquad q'_j\;(\theta) \approx (x_{j+1} - x_j)/\varepsilon_j$$

[con lo cual a todas las trayectorias entre (t_j, x_j) y (t_{j+1}, x_{j+1}) les corresonde un único valor intermedio; lo mismo sucede con las velocidades].

Eligiendo, por comodidad, todos los $\varepsilon_j = \varepsilon = (t - t_0)/N$, podremos ensayar la aproximación (postulado de Feynman)

$$K(t_{j+1}, x_{j+1}, t_j, x_j) = \sum_{q_j} e^{(i/h)\;S_j} \approx A(\varepsilon)\; e^{(i\,\varepsilon/h)\,L(t_j + \varepsilon_j/2,\,(x_{j+1} + x_j)/2,\,(x_{j+1} - x_j)/\varepsilon)} \tag{10}$$

donde $A(\varepsilon)$ es un coeficiente que, por una parte, expresaría la multiplicidad de las trayectorias q_j y por otra parte, debe permitir la existencia del límite cuando ε tienda a cero,

$$K(t, x, t_0, x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon)^N \int dx_{N-1} \ldots dx_1 \prod_{j=0}^{N-1} e^{(i\,\varepsilon/h)\;L_j} \tag{11}$$

donde, $L_j \equiv L(t_j + \varepsilon/2,\; (x_{j+1} + x_j)/2,\; (x_{j+1} - x_j)/\varepsilon)$.

Esta es una forma general para el propagador de Feynman, donde el coeficiente $A(\varepsilon)$ todavía es una incógnita.

Un caso particular: La partícula libre

Consideremos el caso de la partícula libre, donde $V = 0$. Entonces,

$$L(t_j + \varepsilon/2, (x_{j+1} + x_j)/2, (x_{j+1} - x_j)/\varepsilon) = (m/2)\,((x_{j+1} - x_j)/\varepsilon)^2$$

Para $\alpha = m/(2h\varepsilon)$,

$$\Gamma(\varepsilon) = \int dx_{N-1} \ldots dx_1 \; e^{i\alpha \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)^2}$$

el propagador quedará expresado por

$$K_0(t, x, t_0, x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon)^N \, \Gamma(\varepsilon) \tag{12}$$

Ahora, teniendo presente la identidad algebraica

$$(1/\mu)(y - x)^2 + (x - z)^2 = (1 + 1/\mu)(x - x^0)^2 + (1/(\mu + 1))(y - z)^2 ,$$

con $x^0 = (y + \mu z)/(\mu + 1)$, podemos escribir,

$$\sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)^2 = (x_1 - x^0_1)^2 + (1/2)(x_2 - x_0)^2 + \sum_{j=2}^{N-1} (x_{j+1} - x_j)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} (1 + 1/j)(x_j - x^0_j)^2 + (1/N)(x - x_0)^2$$

de donde obtenemos

$$\Gamma(\varepsilon) = e^{i(\alpha/N)(x - x_0)^2} \int dx_{N-1} \ldots dx_1 \prod_{j=1}^{N-1} e^{i\alpha(1 + 1/j)(x_j - x^0_j)^2}$$

Pero, en el caso unidimensional, las integrales en el plano complejo (ver apéndice) tienen la misma expresión que en la recta real,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{iax^2} = \sqrt{(i\pi/a)} \tag{13}$$

entonces,

$$\prod_{j=1}^{N-1} \int dx_j \; e^{i\alpha(1 + 1/j)(x_j - x^0_j)^2} = \prod_{j=1}^{N-1} [i\pi \cdot j/\alpha(j + 1)]^{\frac{1}{2}}$$

de donde,

$$\Gamma(\varepsilon) = e^{i(\alpha/N)(x - x_0)^2} \sqrt{1/N} \; (i\pi/\alpha)^{(N-1)/2}$$

lo que nos permite escribir,

$$A(\varepsilon)^N \, \Gamma(\varepsilon) = \sqrt{\alpha/(i\pi N)} \; A(\varepsilon)^N \, (i\pi/\alpha)^{N/2}$$

o, teniendo presente que $N \cdot \varepsilon = t - t_0$,

$$A(\varepsilon)^N \, \Gamma(\varepsilon) = \sqrt{m/(i\, 2\pi\, h\,(t - t_0))}\;\; A(\varepsilon)^N \;\; (i\, 2\pi\, h\varepsilon/m)^{N/2}$$

Entonces, con el objeto de que la expresión anterior tenga límite cuando ε tiende a cero, resulta conveniente asignar al coeficiente A (ε) el valor

$$A(\varepsilon) = \sqrt{m/(i\, 2\, \pi\, h\, \varepsilon)} \tag{14}$$

con lo cual, finalmente obtenemos

$$K_0(t, x, t_0, x_0) = \sqrt{m/(i\, 2\, \pi\, h\,(t - t_0))}\;\; e^{i\,(m/2\,h)\,(x - x_0)^2/(t - t_0)} \tag{15}$$

que es la expresión para el propagador de la partícula libre.

El propagador para un potencial independiente del tiempo

Definiendo el operador hamiltoniano

$$H(t) = (-h^2/2m)\;\nabla^2 + V(t),$$

donde V (t) es un operador multiplicativo (diagonal)

$$V(t)\;\Phi(t) = V(t)\;\Phi(t)$$

la ecuación de Schroedinger puede ser escrita

$$H(t)\;\Phi(t) + (h/i)\,\partial\,\Phi(t) = 0 \tag{16}$$

(donde el tiempo puede ser creciente o decreciente; si se desea que la ecuación sea válida sólo para tiempos crecientes deberá introducirse tal condición en forma explícita).

Para el caso en el que el potencial V no dependa del tiempo, escribiremos

$$H0 = (-h^2/2m)\;\nabla^2 + V;$$

En este caso particular, se cumplirá que

$$\partial\,\Phi(t) = (-\,i/h)\;H0\,\Phi \Rightarrow \partial^n\,\Phi(t) = (-i/h)^n\;(H0)^n\;\Phi(t)$$

es decir,

$$e^{\tau\cdot\partial}\;\Phi(t) = e^{(-i/h)\,\tau\cdot H0}\;\;\Phi(t) \tag{17}$$

Por otra parte, suponiendo la analiticidad temporal de la función Φ al desarrollarla en su serie de Taylor obtendremos

$$\Phi(t+\tau) = [e^{\tau \bullet \partial}] \bullet \Phi(t),$$

o también,

$$\Phi(t+\tau) = U(\tau) \bullet \Phi(t),$$

donde, el operador

$$U(\tau) = e^{(-i/h)\tau \bullet H0} \tag{18}$$

sólo contiene operadores espaciales. Este operador U (τ), debido a su efecto sobre la función Φ, es llamado operador de propagación temporal (de las funciones que pertenecen al espacio de soluciones de la ecuación de Schroedinger).

Comparando este resultado con el del propagador K0, para el caso en el que V no dependa del tiempo, podemos deducir que ambos operadores son coincidentes,

$$\partial V = 0 \Rightarrow U(\tau) = K0(t+\tau, t) \tag{19}$$

(eventualmente, para asegurar que K0 actúe sólo para tiempos crecientes, el operador U debe ser multiplicado por la función de escalón temporal).

Claro está que, entonces, los elementos de la matriz contínua U serán

$$U(\tau, x, y) = K0(t+\tau, x, t, y) \tag{20}$$

o, para t crecientes

$$\theta(\tau) \bullet U(\tau, x, y) = K0(t+\tau, x, t, y) \tag{20a}$$

Por otra parte, ya hemos visto que para τ suficientemente pequeño, por el postulado de Feynman, (10), podemos escribir

$$U(\tau, x, y) = K0(t+\tau, x, t, y) \approx A(\tau)\ e^{-\pi \bullet A(\tau)^2 \bullet (y-x)^2 - (i\,\tau/h)\ V((x+y)/2)}$$

y también,

$$\Phi(t+\tau, x) = [K0(t+\tau, t) \bullet \Phi(t)](x) \approx A(\tau) \bullet \int dy \bullet e^{-\pi \bullet A(\tau)^2 \bullet (y-x)^2 - (i\,\tau/h)V}\ \Phi(t, y)$$

donde, en el límite, $\approx$ se convierte en un signo de igualdad. Cambiando la variable de integración $y = x + z$, con lo cual no se alteran los límites de integración, [por simplicidad consideraremos $V = 0$].

$$\Phi(t+\tau, x) \approx A(\tau) \bullet \int dz \bullet e^{-\pi \bullet A(\tau)^2 \bullet z^2} \, \Phi(t, x+z)$$

Al desarrollar $\Phi(t, x+z)$ en serie de Taylor, las correspondientes potencias impares se anularán en la integración, y las potencias pares, al ser integradas producirán sumandos con coeficientes proporcionales a potencias positivas de τ (ver apéndice). Sólo el primer sumando, después de multiplicar por $A(\tau)$, resulta independiente de τ; de manera que al pasar al límite, cuando τ tiende a cero, se anularán todos los sumandos, excepto el primero. Es decir, obtenemos

$$\Phi(t+\tau, x) = [K0(t+\tau, t) \bullet \Phi(t)](x) \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} \Phi(t, x)$$

con lo cual se verifica que

$$[K0(t+\tau, t)]_{x,y} = [e^{(-i/h)\tau \bullet H0}]_{x,y} \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} \delta(x-y)$$

o, si se prefiere,

$$K_0(t+\tau, t) = e^{(-i/h)\tau \bullet H0} \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} I$$

es decir, en el límite, como debería ser, $K_0(t, \tau)$ se reduce a la matriz unidad.

La ecuación de Schroedinger

Calculemos la derivada temporal de la función $\Phi(t)$. Para ello consideremos la diferencia

$$\Phi(t+\varepsilon) - \Phi(t) = K(t+\varepsilon, t)\, \Phi(t) - \Phi(t),$$

o, en forma desarrollada,

$$\Phi(t+\varepsilon, x) = \int dy\; K(t+\varepsilon, x, t, y)\; \Phi(t, y)$$

Usando la aproximación (10), podemos escribir

$$\Phi(t+\varepsilon, x) \approx A(\varepsilon) \int dy\; e^{(i\,\varepsilon/h)\, L(t+\varepsilon/2,\, (x+y)/2,\, (y-x/2)}\; \Phi(t, y)$$

Recurriendo al cambio de variable $y = z + x$, con lo cual no resultan afectados los límites de integración,

$$\Phi(t+\varepsilon, x) \approx A(\varepsilon) \int dz\; e^{(i\,\varepsilon/h)\, L(t+\varepsilon/2,\, x+z/2,\, z/\varepsilon)}\; \Phi(t, x+z)$$

Para el lagrangeano L (t, x, w) = $(m/2)\ w^2$ - V (t, x), con el α definido anteriormente, podemos escribir,

$$\Phi\,(t+\varepsilon, x) \approx A\,(\varepsilon) \int dz\ e^{i\alpha z^2 - i(\varepsilon/h)\,V(t+\varepsilon/2,\, x+z/2)}\ \Phi\,(t, x+z) \qquad (21)$$

Con el objeto de calcular la derivada temporal, basta desarrollar las funciones del segundo miembro de (21) en la primera potencia de ε. Notemos que no es necesario desarrollar el potencial, pues él ya está afectado de un coeficiente ε. Por otra parte, es claro que z tenderá a cero cuando ε tienda a cero, pero todavía ignoramos la forma de tal variación.

Ahora, desarrollemos Φ en serie de Taylor. Entonces, considerando, por simplicidad, el caso unidimensional,

$$\Phi\,(t, x+z) = \Phi\,(t, x) + z\ \Phi_1\,(t, x) + (z^2/2)\ \Phi_2\,(t, x)\ +\ \ldots + z^n\ \mu\,(t, x, z)$$

Además, teniendo presente que ε es muy pequeño, podemos escribir, dentro del grado de aproximación indicado,

$$e^{-i(\varepsilon/h)\,V(t+\varepsilon/2,\, x+z/2)}\ \Phi\,(t, x+z) = [1 - i\,(\varepsilon/h)\,V\,(t, x)]\,[\Phi + z\,\Phi_1 + (z^2/2)\,\Phi_2\ +\ \ldots]$$

donde, a la derecha aparecen 2n + 2 sumandos. Sólo el primero de dichos sumandos es independiente tanto de ε como de z.

Ahora reescribiremos la expresión (21),

$$\Phi\,(t+\varepsilon, x)\ \approx\ A\,(\varepsilon) \int dz\ e^{i\alpha z^2}\ \{\ \Phi\,(t, x) + 2n+1\ \text{sumandos}\ (\varepsilon, z)\}$$

o, realizando la integración,

$$\Phi\,(t+\varepsilon, x)\ \approx\ A\,(\varepsilon)\ \sqrt{(2\pi\, i\, h\, \varepsilon/m)}\ \ \Phi\,(t, x) + A\,(\varepsilon) \int dz\ e^{i\alpha z^2}\ \{2n+1\ \text{sum.}\ (\varepsilon, z)\}$$

Aquí nuevamente podemos apreciar la conveniencia de asignar al coeficiente A (ε) el valor dado en (14). Entonces obtenemos la diferencia necesaria para la derivación temporal,

$$\Phi\,(t+\varepsilon, x) - \Phi\,(t, x)\ \approx\ A\,(\varepsilon) \int dz\ e^{i\alpha z^2}\ \{2n+1\ \text{sumandos}\ (\varepsilon, z)\}$$

De los 2n + 1 sumandos aquí considerados, los que son proporcionales a las potencias impares de z se anularán al realizar la integración.

Por otro lado, para las potencias pares tenemos que (ver apéndice),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2k+2}\ e^{i\alpha x^2} = i\,(2k+1)/(2\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2k}\ e^{i\alpha x^2} \qquad (22)$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, lo cual, teniendo presente el valor dado en (13), nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^{2k}\ e^{i\alpha x^2} = (2k-1)!!\bullet (i/2\alpha)^k \bullet \sqrt{(i\,\pi/\alpha)} \sim \alpha^{-k-1/2} \sim \varepsilon^{k+1/2}$$

donde $(2k-1)!! = 1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet \ldots \bullet (2k-1)$. Después de multiplicar por $A(\varepsilon)$ la diferencia resulta proporcional a una serie de potencias de ε con exponentes $k = 1, 2, \ldots$ Entonces, al dividir entre ε y pasar al límite $\varepsilon \to 0$, sólo el primer sumando de la derecha no se anulará, quedando

$$\partial\,\Phi(t,x) = (-i/h)\,V(t,x)\,\Phi(t,x) - h/(2im)\,\Phi_2$$

o, también

$$(-h^2/2m)\ \nabla^2\ \Phi(t,x) + V(t,x)\,\Phi(t,x) + (h/i)\ \partial\,\Phi(t,x) = 0$$

o,

$$(-h^2/2m)\ \nabla^2\ \Phi(t) + V(t)\,\Phi(t) + (h/i)\,\partial\,\Phi(t) = 0 \qquad (23)$$

es decir, el vector $\Phi(t)$, obtenido aplicando el propagador al vector arbitrario $\Phi(t_0)$, resulta ser solución de la ecuación de Schroedinger, correspondiente a dicho valor inicial $\Phi(t_0)$.

Finalmente, teniendo presente que $\Phi(t) = K(t,t_0)\ \Phi(t_0)$, podemos escribir,

$$(-h^2/2m)\ \nabla^2 K(t,t_0)\,\Phi(t_0) + V(t)\,K(t,t_0)\,\Phi(t_0) + (h/i)\ \partial K(t,t_0)\,\Phi(t_0) = 0$$

donde $\Phi(t_0)$ es un vector arbitrario; entonces, obtenemos

$$(-h^2/2m)\ \nabla^2 K(t,t_0) + V(t)\,K(t,t_0) + (h/i)\ \partial K(t,t_0) = 0 \qquad (24)$$

es decir, este propagador de Feynman también es solución de la ecuación de Schroedinger.

En la deducción anterior no se ha considerado que el operador $K(t,t_0)$ actúe sólo para tiempos crecientes; ésta es una exigencia que es necesario imponer para garantizar su carácter probabilístico. En tal caso, considerando el caso particular en el que V no depende del tiempo, y teniendo presente (20a), la ecuación de Schroedinger toma la forma

$$(-h^2/2m)\ \nabla^2\, K0\,(t, t_0) + V \bullet K0\,(t, t_0) + (h/i)\ \partial\, K0\,(t, t_0) = i \bullet h \bullet \delta\ (t - t_0)$$

lo que nos permite afirmar que, también en el caso general, la ecuación que asegura el efecto "hacia el futuro" del propagador es de la forma

$$(-h^2/2m)\ \nabla^2\, K\,(t, t_0) + V\,(t) \bullet K\,(t, t_0) + (h/i)\, \partial\, K\,(t, t_0) = i \bullet h \bullet \delta\ (t - t_0)$$

o, si se prefiere

$$H\,(t) \bullet K\,(t, t_0)\ +\ (h/i)\ \partial\, K\,(t, t_0) = i \bullet h \bullet \delta\,(t - t_0) \qquad (24a)$$

El caso de perturbación dependiente del tiempo

Consideremos el caso en que el hamiltoniano H (t) puede expresarse como la suma

$$H\,(t) = H0 + W\,(t), \text{ con } H0\ =\ (-h^2/2m)\ \nabla^2\ + V,\quad \partial V = 0$$

entonces tendremos las ecuaciones

$$[H0 + (h/i)\, \partial]\, K\,(t, t_0) + W\,(t) \bullet K\,(t, t_0) = i \bullet h \bullet \delta\,(t - t_0)$$

y, por otra parte,

$$[H0 + (h/i)\, \partial]\, K0\,(t, t_0) = i \bullet h \bullet \delta\,(t - t_0) \qquad (25)$$

donde $K0\ (t,\ t_0)$ está expresado por H0 como se ve de (18) y (20a), y lo suponemos calculable de alguna manera.

Restando las igualdades anteriores obtenemos

$$H0 \bullet J\,(t, t_0) + (h/i)\, \partial\, J\,(t, t_0) = -\,W\,(t) \bullet K\,(t, t_0) \qquad (26)$$

donde $J\,(t, t_0) = K\,(t, t_0)\ -\ K0\,(t, t_0)$

Por otra parte, expresando (25) entre los instantes t, t_1 y aplicando ambos miembros al producto $W\,(t_1)\ K\,(t_1, t_0)$, tendremos

$$[H0 + (h/i)\, \partial]\, K0\,(t, t_1) \bullet W\,(t_1) \bullet K\,(t_1, t_0) = i \bullet h \bullet \delta\,(t - t_1)\, W\,(t_1)\ K\,(t_1, t_0)$$

e, integrando en el intervalo $(t,\ t_0)$, obtenemos

$$[H0 + (h/i)\, \partial] \bullet \int_{t_0}^{t}\ K0\,(t, t_1) \bullet W\,(t_1) \bullet K\,(t_1, t_0) = i \bullet h \bullet W\,(t)\, K\,(t, t_0) \qquad (27)$$

Podemos apreciar que multiplicando la ecuación (26) por ih, ella coincidirá con la ecuación (27). Es decir, la expresión integral es una solución para $J(t, t_0)$. Así obtenemos

$$K(t, t_0) = K0(t, t_0) + (i/h) \bullet \int_{t_0}^{t} dt_1 \bullet K0(t, t_1) \bullet W(t_1) \bullet K(t_1, t_0) \tag{28}$$

que es una ecuación integral para $K(t, t_0)$ en función del operador "conocido" $K0(t, t_0)$ y del potencial "perturbador" $W(t)$.

Escribamos la ecuación (28) en forma abreviada

$$K = K0 + (i/h) \langle K0 \bullet W \bullet K \rangle \tag{28a}$$

Definamos las soluciones aproximadas

$K^{(0)} = K0$, $K^{(1)} = K0 + (i/h) \langle K0 \bullet W \bullet K^{(0)} \rangle$ y en general

$$K^{(n+1)} = K0 + (i/h) \langle K0 \bullet W \bullet K^{(n)} \rangle, \quad n = 1, 2 \ldots \tag{29}$$

donde, la sucesión, si es convergente, deberá converger hacia $K(t, t_0)$. En forma práctica, consideraremos que la convergencia se ha obtenido cuando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas sea "suficientemente pequeña". Es decir, para un valor de n tal que

$$K^{(n+1)} - K^{(n)} \approx 0 \tag{30}$$

Debe tenerse presente que los resultados anteriores también son válidos para el caso en el que W sea independiente del tiempo.

APENDICE

A: En el intervalo $(-\pi/4, 0)$ se cumple $1 + 4\theta/\pi < \cos 2\theta$, así mismo en el intervalo $(0, \pi/4)$ se cumple $1 - 4\theta/\pi < \cos 2\theta$. Entonces, para $a > 0$, $0 < \alpha \leq \pi/4$, integrando la función $g(z) = \exp(-a \bullet z^2)$ a lo largo de un arco de radio R obtenemos que

$$\left| \int_0^{\pm\alpha} dz \; g(z) \right| < (\pi/4aR) \bullet g(R) \bullet [\exp(aR^2 (4\alpha/\pi)) - 1]$$

que tiende a 0 cuando $R \to \infty$.

B. Integrando g (z) a lo largo del triángulo curvilíneo con vértices 0, R, R • exp (iα) ó vértices 0, R, R • exp (-iα); luego de tomar el límite para $R \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\int_0^\infty dx\ g(x \bullet e^{\pm i\alpha}) = [1/\exp(\pm i\alpha)] \bullet \int_0^\infty dx\ g(x)$$

$$= 1/2\ \sqrt{\pi/a}\ /\exp(\pm i\alpha)$$

lo que para $\alpha = \frac{\pi}{4}$ da $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{iax^2} = \sqrt{i\pi/a}$

C: De $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ g(x) \bullet x^n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ g(x) \bullet (-x)^n$

podemos ver que cuando n es impar los dos miembros se diferencian sólo en el signo, luego la integral será nula.

En particular obtenemos

$$e^{-iax^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = -2ia \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x \bullet e^{-iax^2} = 0$$

D: Para $p(n, x) = x^n\ e^{-iax^2}$ obtenemos

$$p(n+1, x)' = (n+1)\ p(n, x)\ - 2ia \bullet p(n+2, x)$$

de donde, para n par, integrando

$$(n+1)/(2ia) \int_{-\infty}^{\infty} dx \bullet x^n\ e^{-iax^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \bullet x^{n+2}\ e^{-iax^2}$$

BIBLIOGRAFÍA {85}

R. Feynman-A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals Mc Graw-Hill, 1965*