La ecuación de Helmholtz y las soluciones armónicas de las Ecuaciones de Maxwell

Irla Mantilla N.†, Marco Quiñones
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Lima, Perú.
† *irlamn@uni.edu.pe*

Recibido el 23 de Noviembre del 2016; aceptado el 19 de Diciembre del 2016

Con la finalidad de interpretar matemáticamente las soluciones armónicas de las Ecuaciones de Maxwell, que determinan el comportamiento de la propagación de ondas electromagnéticas en forma estacionaria se formula una alternativa de resolución del sistema de Maxwell vía la transformación de éste en un problema de Helmholtz, asociado a valores de contorno mixtos del tipo Dirichlet(homogéneo) y Neumann(no homogéneo). En este proceso utilizamos la transformada de Fourier y el potencial de polarización.
Asumiendo la solución analítica del problema de Helmholtz mediante la aplicación del método de separación de variables, definida sobre un conjunto abierto bidimendional de forma rectangular, demostramos la regularidad y existencia de su solución.

Palabras Claves: Sistema de Maxwell, Problema de Helmholtz con condiciones Dirichlet(homogénea)-Neumann(no homogénea).

In order to interpret the solutions of the system Equations Maxwell, which determine the behavior of the propagation of electromagnetic waves in a stationary set, it is formulated an alternative of resolution of the system and the transformation in a Helmholtz problem, associated with mixed boundary values Dirichlet (homogeneous) and Neumann (non-homogeneous). In this process we use the Fourier transform and the polarization potential.
Assuming the analytical solution of the Helmholtz problem by applying the method of separation of variables , defined on a two-dimensional open set of rectangular form we showed the regularity and existence of its solution.

Keywords: Maxwell System, Helmholtz problem with Dirichlet conditions (homogeneous)-Neumann(non homogeneous).

1 Introducción

[1]La propagación de ondas electromagnéticas se describe mediante leyes físicas conducentes a un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales parciales que conforman el denominado sistema de Maxwell (SM), el cual relaciona los vectores de campo $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{J}$ y el campo escalar ρ, cuya descripción es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + rot_x\mathcal{E} &= 0 && \text{(Ley de inducción de Faraday)}\\
\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - rot_x\mathcal{H} &= -\mathcal{J} && \text{(Ley de Ampere)}\\
div_x\mathcal{D} &= \rho && \text{(Ley Eléctrica de Gauss)}\\
div_x\mathcal{B} &= 0 && \text{(Ley Magnética de Gauss)}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones constitutivas del sistema electromagnético se definen en base a los campos:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{H}).$$

Donde $\mathcal{E}$ es el campo eléctrico y $\mathcal{H}$ es el campo magnético. Demostrar las propiedades eléctricas del material, que conducen a estas relaciones son complicadas. En general, ellas no solo dependen del caracter molecular, sino también de las cantidades macroscópicas como la densidad y temperatura del material. También hay una dependencia del tiempo por efecto historial del comportamiento de los campos.

Una primera representación de D y B puede expresarse según la referencia [2], en la siguiente forma:

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi\mathcal{P} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \mathcal{H} - 4\pi\mathcal{M}$$

donde $\mathcal{P}$, denota el vector de polarización en la región eléctrica y $\mathcal{M}$ la magnetización del medio.

Estas relaciones pueden ser interpretadas como valores medios de los efectos microscópicos en el medio. Análogamente ρ y $\mathcal{J}$ representarán los valores medios macroscópicos de la densidad de carga libre y la densidad de corriente en el medio, respectivamente.
Ahora, si obviamos los efectos macroscópicos éstas relaciones se pueden modelar matemáticamente por las ecuaciones lineales de la forma que a continuación se detalla:

$$\mathcal{D} = \epsilon\mathcal{E} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \mu\mathcal{H}$$

donde las funciones escalares

$$\epsilon \ , \ \mu \ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

En el caso simple estas funciones ϵ y μ son constantes y llamamos a este medio homogéneo, por ejemplo el vacío.

Notamos también que ρ y $\mathcal{J}$ pueden depender del material y de los campos. Por lo tanto necesitamos una

relación futura que describa esta aproximación, es decir la relación entre el medio de conducción, el campo eléctrico y la corriente eléctrica inducida.
Una buena representación es descrita por la ley de Ohm es dado por la siguiente igualdad:

$$\mathcal{J} = \sigma\mathcal{E} + \mathcal{J}_\epsilon$$

donde $\mathcal{J}_\epsilon$ es la densidad de corriente externa, para un medio isotrópico y la función $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la conductividad.
Si $\sigma = 0$ entonces el material es llamado dialéctrico. Por ejemplo en el vacío se tiene $\sigma = 0$ y $\epsilon = \epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$; $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Vs/Am$.
En un medio anisotrópico la función σ es una matriz valuada.

2 Transformación de las Ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo

Consideramos campos ondulatorios, describiendo los campos armónicos en el tiempo. Definimos E y H, como las transformaciones de Fourier del campo eléctrico y magnético respectivamente, es decir:

$$E(x;\omega) = (\mathcal{F}, \mathcal{E})(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(x,t)e^{i\omega t\, dt}$$

$$H(x,\omega) = (\mathcal{F}, \mathcal{H})(w,\omega) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(x,t)e^{i\omega t}\, dt$$

Como podemos observar los campos E y H son ahora valores complejos, $E(.;\omega)$, $H(.;\omega) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3$.
Como se puede ver se trata de campos vectoriales a los que denotamos con letras latinas mayúsculas. $\mathcal{F}_t(u') = -i\omega\mathcal{F}_t u$ es la transformada de la ecuación de Maxwell armónica en el tiempo y esta dada por:

$$\begin{aligned} -i\omega B + rotE &= 0, \\ i\omega D + rotH &= \sigma E + J_e, \\ divD &= \rho \\ divB &= 0 \end{aligned}$$

El sistema de Maxwell armónico en el tiempo puede obtenerse de la suposición que todos los campos se comportan periodicamente con respecto al tiempo con la misma frecuencia ω, entonces las funciones de valores complejos:

$$\mathcal{E}(x,t) = e^{-i\omega t}E(x),\ \mathcal{H}(x,t) = e^{-i\omega t}H(x),$$

corresponden a las partes reales e imaginarias del sistema de Maxwell armónico en el tiempo.

Con las ecuaciones constitutivas $D = \epsilon E$ y $B = \mu H$ tenemos que:

$$\begin{aligned} rotE - i\omega\mu H &= 0 && \text{(1a)} \\ rotH + (i\omega\epsilon - \sigma)E &= J_e, && \text{(1b)} \\ div(\epsilon E) &= \rho, && \text{(1c)} \\ div(\mu H) &= 0 && \text{(1d)} \end{aligned}$$

Asumiendo (por simplicidad) un medio isotrópico podemos eliminar H ó E de la ecuación (1a) y (1b) lo que conduce a las siguientes expresiones:

$$rot\left(\frac{1}{i\omega\mu} rotE\right) + (i\omega\epsilon - \sigma)E = J_e \tag{2}$$

y

$$rot\left(\frac{1}{i\omega\epsilon - \sigma} rotH\right) + i\omega\mu H = rot\left(\frac{1}{i\omega\epsilon - \sigma} J_e\right) \tag{3}$$

Introduciendo los valores $\epsilon_0 > 0$ y $\mu_0 > 0$ en el vacío y sus valores adimensionales relativos $\mu_r(x)$, $E_r(x) \in \mathbb{R}$ y $\epsilon_c(x) \in \mathbb{C}$ definidos por

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \qquad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \qquad \epsilon_c = \epsilon_r + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$$

las ecuaciones (2) y (3) toman la forma

$$rot\left(\frac{1}{\mu_r} rotE\right) - k^2\epsilon_c E = i\omega\mu_0 J_e,$$

$$rot\left(\frac{1}{\epsilon_c} rotH\right) - k^2\mu_r H = rot\left(\frac{1}{\epsilon_c} J_e\right)$$

con el número de onda $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, nosotros concluimos que según la ecuación $1.1.d$,

$div(\mu_r H) = 0$, puesto que $div(rot)$ es cero.

Para el campo elétrico se tiene que,

$$(\epsilon_c E) = -\frac{i\omega\mu_0}{k^2} divJ_e = -\frac{i}{\omega\epsilon_0} divJ_e.$$

En el vacío se tiene que:$\epsilon_c = 1$, $\mu_r = 1$, por lo tanto las ecuaciones se reducen al sistema:

$$rot\ rot\, E - k^2E = i\omega\mu_0 J_e \tag{4}$$

$$rot\ rot\, H - k^2H = rot\, J_e. \tag{5}$$

$$rot\ rot = \nabla div - \Delta \tag{6}$$

Según las ecuaciones constitutivas de la Transformada de Fourier del sistema de Maxwel, usando la propiedad (6) y considerando la corriente externa $J_e = 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes ecuaciones en derivadas parciales denominadas ecuaciones de Helmholtz:

$$\Delta E + k^2E = 0 \qquad \text{y} \qquad \Delta H + k^2H = 0.$$

3 Ecuación de Helmholtz mediante ondas en tubos cilíndricos

El estudio de las ondas en tubos cilíndricos es muy importante para nuestra investigación puesto que más adelante trataremos de medir el campo eléctrico y el

campo magnético en la ionósfera utilizando un modelo matemtíco tipo sistema no estacionario bajo ciertas condiciones iniciales y de frontera de Maxwell.
En la construcción de distintos aparatos radiotérmicos es importante analizar la transmisión de energía electromagnética desde el transmitor a la antema transmisora o lo contrario desde la antena al receptor.
Consideremos el comportamiento de una onda en un medio. Para esto:

1) Consideramos una sección transversal arbitraria de un tubo cilíndrico que se extiende ilimitadamente a lo largo del eje Z. Supondremos que las paredes del cilindro son conductores ideales. Denotamos mediante $\mathcal{E}$ la superficie y mediante $\mathcal{S}$ el corte transversal del tubo. Sea $\mathcal{C}$ contorno que limita este corte.

2) Las características del medio en el desplazamiento con parametros eléctrico y magnético ϵ y μ son iguales a 1, $\delta = 0$.

3) En el desplazamiento de ondas no hay fuente exterior.

4) Los campos varían periodicamente según la transformada de Fourier del sistema de Maxwell ley $e^{-i\omega t}$. Las ecuaciones de Maxwell pueden ser expresadas por el conjunto de ecuaciones que a continuación se detalla:

$$(A_1)\quad \left\{\begin{array}{lcl} rot\ H &=& -ikE \\ rot\ E &=& ik\,H \\ div\ H &=& 0 \\ DivE &=& 0 \end{array}\right.$$

donde $k = \dfrac{\omega}{\epsilon}$.
Como se ha supuesto que las paredes por donde se desplazan las ondas son conductores ideales, la componente tangencial de E_t es igual a cero, es decir:

$$\frac{\partial E}{\partial t}\backslash \mathcal{E} = 0$$

Hipotesis: Se puede demostrar que en el desplazamiento de una onda definida en (2) y (3), existe una propagación de ondas electromagnéticas.
Demostrar esta afirmación nos conduce a buscar la solución del sistema (A_1), por lo visto en el proceso anterior, esto nos conduce a buscar una solución del sistema (A_2), es decir resolver la ecuación de Helmholtz para potencial de polarización Π denotado por (A_3) mas las condiciones dadas en el contorno.
Buscaremos la solución de las ecuaciones (A_1) de la forma

$$(A_2)\quad \left\{\begin{array}{lcl} E &=& grad\,div\,H + k^2\Pi \\ H &=& -ik\,rot\Pi \end{array}\right.$$

donde Π es el potencial de polarización.
Consideramos el caso en que el vector Π dirigido a lo largo del eje z $(H = 0)$

$$rot(-ikrot\Pi) = -ikE \;=\; -ik[grad(div\Pi) + k^2\Pi]$$

$$rot(grad(div\Pi) + k^2\Pi) \;=\; ikH = ik(-ikrot(\Pi))$$

Luego tenemos:

$$\overbrace{rot(-i\cancel{k}rot(\Pi))}^{0} = \overbrace{-i\cancel{k}grad(div\Pi) - i\cancel{k}^3\Pi}^{(*)}$$

$$rot(grad(div\Pi) + k^2\Pi) = k^2rot\Pi$$

De (*) en la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$$

o:

$$\Delta_2\Pi\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi = 0$$

Observación:

$$rotrot\Pi = \Delta(\Delta.\Pi) - \Delta^2\Pi$$

$$= \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}$$

donde:

$$\Pi = \Pi e_z$$

luego concluimos que:

$$rotrot\Pi = 0$$

Resolveremos

$$(A_3)\quad \{\ \Delta\Pi + k^2\Pi \;=\; 0$$

Observación: Se tiene la ecuación de Helmholtz que incluye la función de potencial de polarización a partir de la cual se determinará el campo electromagnético.

4 Formulación del problema Helmholtz con condiciones de contorno por definir

$$(PCCH)\quad \left\{\begin{array}{c} \Delta\Pi + k^2\Pi = 0 \\ CC,\ (por\ definir) \end{array}\right.$$

Para la resolución clásica de este problema utilizamos el método de variables separables, pero necesitamos definir las condiciones de contorno no conocidas, entonces asumimos una solución que satisface (PCCH).

Sea:

$$\Pi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}(x,y,z) = \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x}\right) Y(y)Z(z)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\right) Y(y)Z(z)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y}(x,y,z) = X(x)\left(\frac{\partial Y(y)}{\partial y}\right) Z(z)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}(x,y,z) = X(x)\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial x^2}\right) Y(y)Z(z)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z}(x,y,z) = X(x)Y(y)\left(\frac{\partial Z(z)}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}(x,y,z) = X(x)Y(y)\left(\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}\right)$$

De la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0$$

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y)Z(z) + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} Z(z) +$$
$$+X(x)Y(y)\frac{\partial^2 Z(Z)}{\partial z^2} + k^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0$$

haciendo cambio de variables $\psi(M) = X(x)Y(y)$, entonces

$$\frac{\partial^2 \psi(M)}{\partial x^2} Z(z) + \frac{\partial^2 \psi(M)}{\partial y^2} Z(z) + \psi(M)\frac{\partial^2 Z(Z)}{\partial z^2} +$$
$$+k^2 \psi(M)Z(z) = 0$$

$$\left(\frac{\psi(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(M)}{\partial y^2}\right) Z(z) + \psi(M)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} +$$
$$+k^2 \psi(M)Z(z) = 0$$

$$(*)_1 \begin{cases} (\Delta_2 \psi(M)Z(z)) + & \\ +\psi(M)\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + & \\ +k^2 \psi(M)Z(z) & = 0 \\ \psi(M)Z(z) & = \Pi(x,y,z) \\ \Pi_n(M,z) & = \psi_n(M)Z_n(z) = \lambda_n \end{cases}$$

Planteamos una ecuación diferencial ordinaria que satisface $(*)_1$

$$Z_n''(Z) + (k^2 - \lambda)Z(z) = 0 \qquad (**)_2$$
$$\Delta_2 \psi(M)Z(z) + \psi(M)(\lambda - k^2)Z_n(z) +$$
$$+K^2 \psi_n(M)Z_n(z) = 0$$
$$\Delta_2 \psi(M)Z(z) + \lambda \psi(M)Z(z) = 0$$
$$(\Delta_2 \psi(M) + \lambda \psi(M))\, Z(z) = 0$$

si $Z(z) \neq 0$, entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta_2 \psi(M) + \lambda \psi)M & = & 0 \\ \psi \backslash_C & = & 0 \end{array}\right\}$$

la solución del problema $(*)_1$ tiene la forma $\Pi_n(M,z) = \psi_n(M)Z_n(z)$ donde $Z_n(z)$ se determina por la ecuación

$$f_n'' + (k^2 - \lambda_n)f_n = 0$$

cuya solución general será:

$$Z_n(z) = A_n e^{i\gamma_n z} + B_n e^{-i\gamma_n z}$$

donde, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n} > 0$ son raíces conjugadas de la solución de $(**)_2$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
De la ecuación:

$$\Delta_2 \psi(M) + \lambda \psi(M) = 0$$
$$\psi \backslash_C = 0$$

Asignando a la función: $U = \psi(M)$, se tiene el siguiente problema (.) el cual resolvemos de modo analítico

$$(.) \begin{cases} \Delta U + \lambda U & = 0 \\ U\backslash_C & = 0 \\ \nabla U \cdot \bar{\eta} & = A_1 \text{ en } \partial\omega_3 \\ \nabla U \cdot \bar{\eta} & = A_2 \text{ en } \partial\omega_2 \end{cases}$$

Para el cual consideraremos el siguiente dominio particular en dos dimensiones.

5 Ecuación de Helmholtz en dos dimensiones

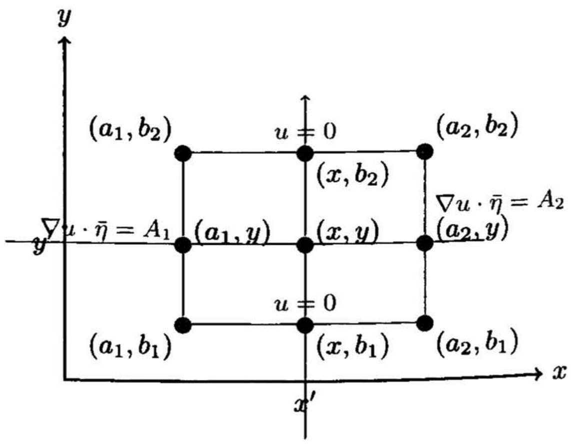

Figura 1. *Dominio rectangular y condiciones mixtas Dirichlet-Neumann constantes.*

Teorema 1. *Dada la ecuación de Helmhotz bidimensional:*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = 0 \tag{7}$$

en el sistema de coordenadas cartesianas, donde $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, *$\Omega$ abierto y* $w \in C^2(\Omega)$, *y las funciones*

$w(x,y) = (A cos\mu_1 x + B sen\mu_1 x)(C cos\mu_2 y + D sen\mu_2 y); \lambda = \mu_1^2 + \mu_2^2;$
$w(x,y) = (A cos\mu_1 x + B sen\mu_1 x)(C cosh\mu_2 y + D senh\mu_2 y); \lambda = \mu_1^2 - \mu_2^2;$
$w(x,y) = (A cosh\mu_1 x + B senh\mu_1 x)(C cos\mu_2 y + D sen\mu_2 y); \lambda = -\mu_1^2 + \mu_2^2;$
$w(x,y) = (A cosh\mu_1 x + B senh\mu_1 x)(C cosh\mu_2 y + D senh\mu_2 y); \lambda = -\mu_1^2 - \mu_2^2;$

donde A, B, C y D son constantes arbitrarias, entonces el problema de Helmhotz tiene solución si solo sí satisface la ecuación (2.1).

Proof. Sea:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = 0, \qquad \lambda = \mu_1^2 + \mu_2^2$$

Supongamos que:

i)

$$\begin{aligned} w &= (Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x)(Ccos\mu_2 y + \\ &\quad +Dsen\mu_2 y), && (8)\\ \frac{\partial w}{\partial x} &= (-A\mu_1 sen\mu_1 x + \mu_1 Bcos\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccos\mu_2 y + Dsen\mu_2 y), && (9)\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= (-\mu^2 Acos\mu_1 x - \mu^2 Bsen\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccos\mu_2 y + Dsen\mu_2 y), \\ &= -\mu_1^2 w, && (10)\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= (Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x). \\ &\quad .(-\mu_2 Csen\mu_2 y + \mu_2 Dcos\mu_2 y), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= (Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x). \\ &\quad .(-\mu_2^2 Ccos\mu_2 y - \mu_2^2 Dsen\mu_2 y), \\ &= -\mu_2^2 w && (11) \end{aligned}$$

sumando la ecuación (10) y (11), tenemos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = -(\mu_1^2 + \mu_2^2)w + (\mu_1^2 + \mu_2^2)w = 0$$

por lo tanto w es solución.

ii) Verifiquemos ahora que

$w = (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x)(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y)$

con $\lambda = -\mu_1^2 - \mu_2^2$ es solución de la ecuación de Helmholtz

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= (A\mu_1 senh\mu_1 x + \mu_1 Bcosh\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y) && (12)\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \mu_1^2 w, && (13)\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x). \\ &\quad .(\mu_2 Csenh\mu_2 y + \mu_2 Dcosh\mu_2 y), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x). \\ &\quad .(\mu_2^2 Ccosh\mu_2 y + \mu_2^2 Dsenh\mu_2 y), \\ &= \mu_2^2 w && (14) \end{aligned}$$

sumando la ecuación (13) y (14), tenemos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = (\mu_1^2 + \mu_2^2)w + (-\mu_1^2 - \mu_2^2)w = 0$$

iii) Para el caso cuando $\lambda = -\mu_1^2 + \mu_2^2$

$$\begin{aligned} w &= (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x). \\ &\quad (Ccos\mu_2 y + Dsen\mu_2 y) && (15)\\ \frac{\partial w}{\partial x} &= (\mu_1 Asenh\mu_1 x + \mu_1 Bcosh\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccos\mu_2 y + Dsen\mu_2 y) && (16)\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= (\mu_1^2 Asenh\mu_1 x + \mu_1^2 Bcosh\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccos\mu_2 y + Dsen\mu_2 y) \\ &= \mu_1^2 w, && (17)\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x). \\ &\quad .(-\mu_2 Csen\mu_2 y + \mu_2 Dcos\mu_2 y), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x). \\ &\quad .(-\mu_2^2 Ccos\mu_2 y - \mu_2^2 Dsen\mu_2 y), \\ &= -\mu_2^2 w && (18) \end{aligned}$$

sumando la ecuación (17) y (18), tenemos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = (\mu_1^2 - \mu_2^2)w + (-\mu_1^2 + \mu_2^2)w = 0$$

iv) Para el caso cuando $\lambda = \mu_1^2 - \mu_2^2$

$$\begin{aligned} w &= (Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y) \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= (-\mu_1 Asen\mu_1 x + \mu_1 Bcos\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2) && (19)\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= (-\mu_1^2 Acos\mu_1 x - \mu_1^2 Bsen\mu_1 x). \\ &\quad .(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y) \\ &= -\mu_1^2 w, && (20)\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= (Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x). \\ &\quad .(\mu_2 Csen\mu_2 y + \mu_2 Dcosh\mu_2 y), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= (Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x). \\ &\quad .(\mu_2^2 Ccosh\mu_2 y + \mu_2^2 Dsenh\mu_2 y), \\ &= \mu_2^2 w && (21) \end{aligned}$$

sumando la ecuación (20) y (21), tenemos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = (-\mu_1^2 + \mu_2^2)w + (\mu_1^2 - \mu_2^2)w = 0$$

Ahora reunimos las condiciones para resolver la ecuación de Helmholtz homogénea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0,$$

usaremos el método analítico de variables separables: $u(x, y) = X(x)Y(y)$, derivando respecto a x

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= Y(y)\frac{\partial X(x)}{\partial x} && (22)\\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} &= Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} && (23) \end{aligned}$$

luego derivando respecto a y

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial Y(y)}{\partial y}X(x) && (24)\\ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}X(x) && (25) \end{aligned}$$

Sumando (22) y (24)

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \lambda X(x)Y(y) = 0$$

λ tiene más posibilidades si $\lambda = \mu_1^2 + \mu_2^2$ así tendríamos:

$$\begin{aligned} Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + & \\ +\mu_1^2 X(x)Y(y) + \mu_2^2 X(x)Y(y) &= 0\\ Y(y)\left[\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \mu_1^2 X(x)\right] + & \\ +X(x)\left[\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \mu_1^2 Y(y)\right] &= 0 \end{aligned}$$

entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \mu_1^2 X(x) &= 0\\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \mu_1^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

y el polinomio característico sería:

$$m^2 + \mu_1^2 = 0, \quad m = \pm\mu_1$$

luego

$$X(x) = e^{0x}(Aos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x)$$
$$Y(y) = e^{0x}(Ccos\mu_2 y + Dsen\mu_2 y)$$

entonces $w = X(x)Y(y)$.
Si $\lambda = \mu_1^2 - \mu_2^2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \mu_1^2 X(x) &= 0\\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \mu_1^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

luego $m^2 + \mu_1^2 = 0$, entonces

$$X(x) = e^{0x}(Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x)$$

y $m^2 - \mu_1^2 = 0$, entonces

$$Y(y) = e^{0x}(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y)$$

Por lo tanto $w = (Acos\mu_1 x + Bsen\mu_1 x)(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y)$
Si $\lambda = -\mu_1^2 + \mu_2^2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \mu_1^2 X(x) &= 0\\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \mu_1^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

luego $m^2 - \mu_1^2 = 0$, entonces

$$X(x) = Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x$$

y $m^2 + \mu_1^2 = 0$, entonces

$$Y(y) = Ccos\mu_2 y + Dsen\mu_2 y$$

Por lo tanto $w = (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x)(Ccos\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y)$
Si $\lambda = -\mu_1^2 - \mu_2^2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \mu_1^2 X(x) &= 0\\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \mu_1^2 Y(y) &= 0 \end{aligned}$$

el polinomio característico sería: $m^2 - \mu_1^2 = 0$, entonces

$$X(x) = Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x$$

y $m^2 - \mu_2^2 = 0$, entonces: $Y(y) = Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y$

Por lo tanto:

$$w = (Acosh\mu_1 x + Bsenh\mu_1 x)(Ccosh\mu_2 y + Dsenh\mu_2 y)$$

□

Observación:
Sin pérdida de generalidad podemos definir en particular las condiciones de Dirichlet-Newman para nuestro problema en estudio:

$$\begin{aligned} a_1 \le &\ x \le b_1\\ a_2 \le &\ y \le b_2\\ \nabla\mu\cdot\eta &= g(x)|_{\Gamma_1}\\ \nabla\mu\cdot\eta &= f(x)|_{\Gamma_3}\\ \mu &= 0|_{\Gamma_2=\Gamma_4} \end{aligned}$$

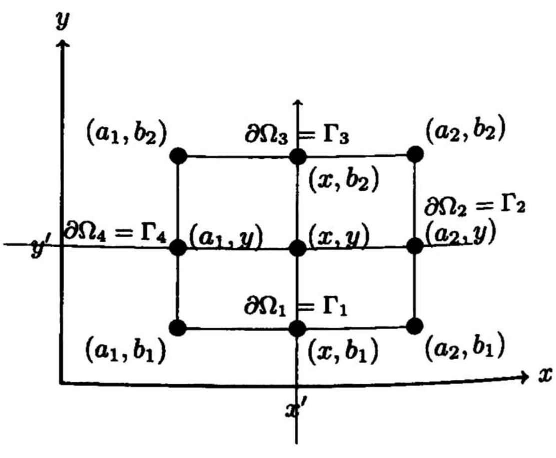

Figura 2. *Dominio rectangular y condiciones mixtas Dirichlet-Neumann variables.*

6 Conclusiones

1. Se ha obtenido la solución del problema de Helmholtz tipo estacionaria, la cual es una Ecuación del tipo elíptica. A esta ecuación se le asocia las condiciones de contorno mixtas Dirichlet-Neumann, no conocidas a priori.

2. Como se ha podido obervar, utilizando las técnicas de los campos armónicos y las ondas en tubos cilíndricos nos conducen ambas a la formulación del problema de Helmholtz en el caso estacionario, objetivos del trabajo realizado.

3. Una contribución muy importante en este trabajo es la obtención del potencial de polarización a través de la solución del problema de Helmholtz, puesto que de la obtención de esta función depende encontrar los campos eléctricos y magnéticos en el sistema Maxwell.

4. Existen antecedentes sobre la inestabilidad en el estudio directo de la propagación de ondas electromagnéticas gobernados por el sistema de Maxwell no estacionario, modelo muy importante en el análisis de diversos fenómenos físicos, por lo que recomendamos esta técnica basada en la resolución del problema de Helmholtz como una alternativa eficiente.

Agradecimientos

Este trabajo fue desarrollado en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica, LABOSIN-FC-UNI y es un primer resultado del proyecto de Investigación, patrocinado por la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería. Agradecemos por el apoyo brindado para la presentación de este trabajo a los Editores de la Revista REVCIUNI.

Villalba L. A., 2016, www.http://repositoriodigital.academica.mx/jspui/bitstream/987654321/183889/1/La Ionosfera y Las comunicaciones (E.M.T.).pdf

2. Kirsch A. and Hettlich F., The Mathematical Theory of Maxwell's Equations, 2014.

3. Tijonov A. N. y Samarsky A. A.. Ecuaciones de la física Matemática, 1983.