Resolución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales del tipo Hiperbólico con término fuente mediante la Fórmula de D'Alembert

Irla Mantilla N.† y Isaac Suaña Bellido‡
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Perú
†*irlamn@uni.edu.pe*, ‡*ysuanab@uni.pe*

Recibido el 2 de Diciembre del 2016; aceptado el 16 de Diciembre del 2016

En el presente trabajo se estudia una Ecuación Diferencial Parcial Hiperbólica con término fuente no homogéneo de segundo orden, su forma canónica, su resolución mediante la fórmula de D'Alembert y el Teorema de Green. Para la resolución de este problema solo se requiere las condiciones iniciales mixtas. Existen diversos problemas físicos que conducen a este tipo de modelo matemático, por lo cual esta técnica de resolución contribuye al conocimiento de encontrar soluciones explícitas de problemas como por ejemplo tipo onda bidimensional sometidos a fuerzas exteriores. Dentro de los resultados se genera la solución explícita de tres casos: respecto a la homogeneidad y no homogeneidad de las condiciones iniciales y del término fuente, desde el punto de vista de solución analítica para funciones de clase C^2.
Palabras claves: Ecuación diferencial parcial hiperbólico con término fuente y condiciones iniciales no homogéneas, fórmula de D'Alembert, Teorema de Green.

In the present work, we study a non-homogeneous second-order partial hyperbolic differential equation, its canonical form, its resolution using D'Alembert's formula and Green's theorem. Only mixed initial conditions that are not homogeneous are required to solve this problem. There are several physical problems that lead to this type of mathematical model, so this technique of resolution contributes to the knowledge of finding explicit solutions of problems such as two-dimensional wave type. Within the results the explicit solution of three cases is generated: regarding the homogeneity and non-homogeneity of the initial conditions and the term source, from the point of view of analytical solution for continuous functions.
Keywords: Partial differential equation of hyperbolic type with term source non homogeneous, D'Alembert's formula, Green's theorem.

1 Introducción

Los fenómenos oscilatorios de diferente naturaleza ya sean vibraciones de cuerdas, membranas, oscilaciones acústicas, desplazamiento del gas en tuberías, oscilaciones electromagnéticas son descritas en términos de Ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico con término fuente no homogéneas, para el caso de una dimensión, dos y tres dimensiones espaciales respectivamente como se muestra a continuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + G(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + G(x,t).$$

Siendo x, y, z las coordenadas espaciales y t la temporal.

En el caso que se desee agrandar la variable espacial a una dimensión mayor, uno de los problemas frecuentes y complejos es su resolución. Un caso es el de vibraciones u oscilaciones de membranas que conducen a este tipo de problema con valores de frontera y de valor inicial, el cual usualmente se resuelve en sentido homogéneo.

En el presente trabajo se propone la aplicación del método de la fórmula D'Alembert, a un modelo matemático de vibraciones ampliado en el término fuente no homogéneo, previa demostración de la fórmula, y el principio de superposición con lo que se obtiene la solución final del problema.

En la literatura estos modelos muy poco tratados, son muy importantes puesto que resultan de los diversos fenómenos físicos mencionados anteriormente, cuando son impulsados por fuerzas externas al fenómeno, por tanto su estudio contribuye al conocimiento.

2 Clasificación de las EDP's de segundo orden

Sean u, G funciones de clase C^2, x e y son las variables dependientes,en este caso esquematizaremos EDP de variables independientes donde además $A, B, C, D, E,$ son constantes en $\mathbb{R}$.

Sea la EDP de segundo orden de dos variables in dientes [1]:

$$A\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2u(x,y)}{\partial y^2}+ \\ D\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+E\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+F.u(x,y)=G(x,y) \quad (1)$$

Cuando $G(x,y)\equiv 0$, la EDP es homogénea; caso contrario, es no homogénea.

Para las siguientes ecuaciones representaremos a la variable y como la variable temporal t.

En una cierta región $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ (plano OXY). Según [2]

i) Hiperbólica en Ω, si $\Delta=B^2-4AC>0$

ii) Parabólica en Ω, si $\Delta=B^2-4AC=0$

iii) Elíptica en Ω, si $\Delta=B^2-4AC<0$

Nos vamos a centrar al estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales Hiperbólicas (EDPLH) de segundo orden con término fuente no homogénea, pero antes haremos una breve introducción de la aplicación de la fórmula de D'Alembert para las homogéneas.

Ecuaciones de tipo hiperbólico:

Usualmente a los fenómenos físicos que conducen a señales oscilatorias se describen por las ecuaciones del tipo hiperbólico, tales como la ecuación de la onda homogénea que se describe a continuación:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\qquad u=u(x,t) \quad (2)$$

Siendo x la coordenada espacial unidimensional, t la temporal y $a\neq 0$. A semejantes ecuaciones pueden reducirse un gran número de diferentes problemas físicos.

3 Método de D'Alembert para las EDPLH

Puede resumirse en las siguientes etapas para una ecuación homogénea en primer lugar:

- Mediante un cambio de variables se obtienen todas las soluciones de la nueva ecuación.
- Se determina una solución que satisfaga las condiciones iniciales.
- Se comprueba que hay una única solución.

La idea del cambio de variable a realizar viene sugerida por una sencilla observación.

Si suponemos que la función $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, se tiene la composición [1]

$$u_{tt}-u_{xx}=(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x})\circ(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x})u \quad (3)$$

Modelo matemático:

La idea es considerar nuevas variables $\overline{x}$, $\overline{t}$ de forma que se verifique:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\overline{x}}=(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x})\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\overline{t}}=(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x})\end{cases}$$

Con lo que la ecuación (3) se convierta en

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{t}}u\right)=u_{\overline{t}\overline{x}} \quad (4)$$

Solución del problema de Cauchy (problema inicial)

Problema de valor inicial de una onda móvil, descrito de la siguiente forma, será resuelto usando la solución de D'Alembert

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \quad (5)$$

$$u(x,0)=f(x)\quad x\in\mathbb{R} \quad (6)$$

$$u_t(x,0)=g(x)\quad x\in\mathbb{R} \quad (7)$$

Donde suponemos los datos con regularidad suficiente para que podamos efectuar todos los cálculos.

Aquí $u(x,t)$ es el desplazamiento de los puntos de la cuerda respecto a la posición de equilibrio en el momento de tiempo t.

Para cada valor fijo de la t la gráfica de la función $u=u(x,t)$ da la forma de cuerda en el momento de tiempo t.
Hagamos el cambio de variable siguiente:

$$\xi=x-at$$

$$\eta=x+at$$

Entonces la ecuación en las nuevas variables adopta la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}.\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}.\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\eta}.\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)=a\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-2a^2\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}+a^2\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2} \quad (9)$$

Al reemplazar con nuestras nuevas variables, considerando las ecuaciones (7),(9) y (8), concluimos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \qquad (10)$$

En la ecuación canónica (10), denotando de una manera más simple $u_{\eta\xi} = 0$, se puede integrar respecto a las variables ξ y η,

$$u_\eta(\xi) = w_1(\eta) \to u(\xi,\eta) = w_2(\xi) + \int^\eta w_1(s)ds,$$

asignando a $w_2(\xi) = \theta_1(\xi)$ y $\int^\eta w_1(s)ds = \theta_2(\eta)$.
Se obtiene que $u(\xi,\eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$, y regresando a las variables originales:

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \qquad (11)$$

Siendo la ecuación (11) la solución general de la ecuación (10) representada en las variables originales.

El problema de Cauchy formulado en las ecuaciones (5), (6), (7), donde $u(x,t) \in C^2(R2)$ y cuya solución está dada por (11), involucran dos funciones, las cuales se requieren determinar, para ello utilizamos las condiciones iniciales (6) y (7)
Sean

$$u(x,0) = \theta_1(x) + \theta_2(x) = f(x) \qquad (12)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = g(x)$$

Donde $\theta_1'(x) - \theta_2'(x) = -\frac{1}{a}g(x)$.

Integrando con respecto a x, se tiene:

$$\int_0^x [\theta_1'(\alpha) - \theta_2'(\alpha)]d\alpha = -\frac{1}{a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha + C, \qquad C := cte$$

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha + C. \qquad (13)$$

Entonces de (12) y (13) se tiene:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha + \frac{C}{2} \qquad (14)$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x g(\alpha)d\alpha - \frac{C}{2} \qquad (15)$$

De la ecuación (11) y las expresiones obtenidas en (14) y (15) se obtiene:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{1}{2}f(x - at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} g(\alpha)d\alpha \\ & + \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} g(\alpha)d\alpha \end{aligned}$$

$$u(x,t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\alpha)d\alpha \qquad (16)$$

A la que se denomina Fórmula de D'Alembert para la EDPLH homogénea.

4 Casos particulares de la condición inicial según la fórmula de D'Alembert

Estudiemos dos casos particulares que permiten figurar el comportamiento de la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en el caso general.[3]

- **Caso primero:** Sea $g(x) = 0$. Sin pérdida de generalidad y para simplificar consideremos que $a = 1$. Entonces la fórmula de D'Alembert adopta la expresión

$$u(x,t) = \frac{f(x - t) + f(x + t)}{2}$$

Donde $f(x) \neq 0$ es un dato del problema dado.

- **Caso Segundo:** Sean:

$$f(x) \equiv 0, \qquad g(x) = \begin{cases} 1, |x| \le \frac{1}{2} \\ 0, |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

y sigamos considerando $a = 1$.

Entonces se presenta lo siguiente:

- La onda tiene solo un impulso inicial y la expresión para $t > 0$ toma la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\alpha)d\alpha$$

- Para cada x fijo la solución $u(x,t)$ será igual a cero hasta que la interseccion de los intervalos $]x-t, x+t[$ y $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sea no vacío.

- $u(x,t)$ varía respecto a x mientras $]x-t, x+t[$ cubra cada vez mayor parte del intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

- Después de que el intervalo $]x-t, x+t[$ tendrá en su interior el intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $u(x,t)$ permanecerá invariable respecto a x y variable respecto a t, es decir:

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}-t} g(\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}-t} 1d\alpha = \frac{1}{2}(1 - 2t); \quad \forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

5 Método de D'Alembert para las EDPLH con término fuente no homogénea de segundo orden

Si se considera a los fenómenos física que conducen a señales oscilatorias sometidas a fuerzas externas, estas conducen a modelos de EDPLH con término fuente no homogéneo y condiciones iniciales mixtas. Este tipo de ecuaciones es un caso particular de 29733la ecuación (1) cuando $G(x, y) \neq 0$.

- El término fuente no homogéneo en una EDPLH de segundo orden, aparece debido a que en la práctica describe los efectos de las fuentes de onda en el medio que las porta o en el caso de vibraciones sometidas a fuerzas externas.[4]

Siguiendo nuestra notación para una EDPLH de segundo orden, representaremos a ésta en el caso no homogéneo por el siguiente problema de valor inicial, asignándole a $G(x, t)$ como fuente a la función $s(x, t) \neq 0$, de clase $C^2(\mathcal{R}_D)$.

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s(x,t) \qquad (17)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (18)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (19)$$

Para hallar una solución a (17), el área que necesita ser considerada es la que abarque a todos los puntos que podrían afectar el punto que se está considerando.

Designando el área que afecta causalmente al punto (x, t) como $\mathcal{R}_D$.

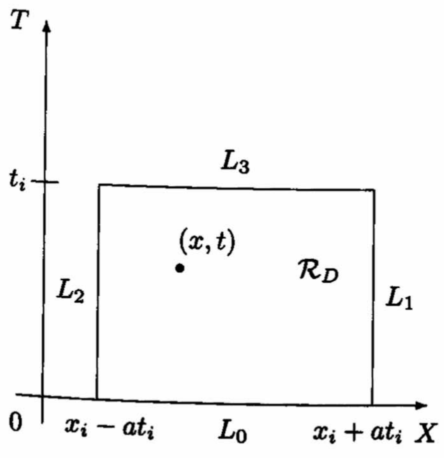

Figura 1. *Área $\mathcal{R}_D$ que afecta causalmente al punto (x,t).*

$$\iint_{\mathcal{R}_D} (a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2})dxdt = \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Recordar el **Teorema de Green**, aquel que enuncia

Sea C una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en el plano $R2$ y sea $\mathcal{R}_D$ la unión de la región interior a C con la propia curva C. Sea $F = (P, Q) : \mathcal{R}_D \to R2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces se tiene que [5]

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{R}_D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (20)$$

Mediante el uso del teorema de Green al lado izquaproximado mathierdo, obtenemos para

$$P = -a^2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad y \quad Q = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

Sea $L = L_0 + L_1 + L_2 + L_3$:

$$\int_L (-a^2 u_x(x,t)dt - u_t(x,t)dx) = \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt \quad (21)$$

La parte izquierda es ahora la suma de cuatro integrales de línea a lo largo de la frontera de la región de causalidad. Estas resultan ser bastante fáciles de calcular para L_0, L_3

$$\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} -u_t(x,0)dx = -\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} g(x)dx \qquad (22)$$

En (21) el término a ser integrado con respecto al tiempo desaparece, debido a que la variación de u respecto la variable temporal es constante en los intervalos L_0 y L_3, de este modo se tiene que $dt = 0$.
Para los otros dos lados de la región, cabe señalar que $x \pm at$ es una constante, renombrada $x_i \pm at_i$, donde el signo se escoge adecuadamente.
aproximado math
De este modo, podemos obtener la relación $dx \pm adt = 0$, escogiendo de nuevo el signo positivo $(+)$:

$$\int_{L_1} (-a^2 u_x(x,t)dt - u_t(x,t)dx) =$$

$$\int_{L_1} (au_x(x,t)dx + au_t(x,t)dt)$$

29733

$$= a\int_{L_1} du(x,t) = au(x_i, t_i) - af(x_i + at_i)$$

De forma similar para el último segmento de frontera

$$\int_{L_2} (-a^2 u_x(x,t)dt - u_t(x,t)dx) =$$

$$-\int_{L_2} (au_x(x,t)dx + au_t(x,t)dt)$$

$$= -a\int_{L_2} du(x,t) = -a(f(x_i + at_i) - u(x_i, t_i))$$

$$= au(x_i, t_i) - af(x_i - at_i)$$

Sumando los tres resultados juntos y poniéndolos de vuelta en la integral original

$$-\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} g(x)dx + au(x_i, t_i) -$$

$$af(x_i + at_i) + au(x_i, t_i) - af(x_i - at_i) = \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Obteniendo

$$2au(x_i, t_i) - \int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} g(x)dx -$$

$$a(f(x_i + at_i) + f(x_i - at_i)) = \iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Al despejar $u(x,t)$ obtenemos la solución de D'Alembert adicionada a la solución con término fuente y por el principio de superposición se tiene:

$$u(x_i, t_i) = \frac{f(x_i + at_i) + f(x_i - at_i)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} g(x)dx + \frac{1}{2a}\iint_{\mathcal{R}_D} s(x,t)dxdt$$

Por lo que afirmamos que $u(x_i, t_i)$ es la solución de (17), para regiones del plano convenientes expresaremos la solución de la siguiente forma:

$$u(x_i, t_i) = \frac{f(x_i + at_i) + f(x_i - at_i)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} g(x)dx + \frac{1}{4a}\int_0^{t_i}\int_{x_i - at_i}^{x_i + at_i} s(x,t)dxdt$$

6 Resultados obtenidos

Para ambos casos, la función término fuente estará dada por $s(x,t) = xt$, considerando $a = 1$.

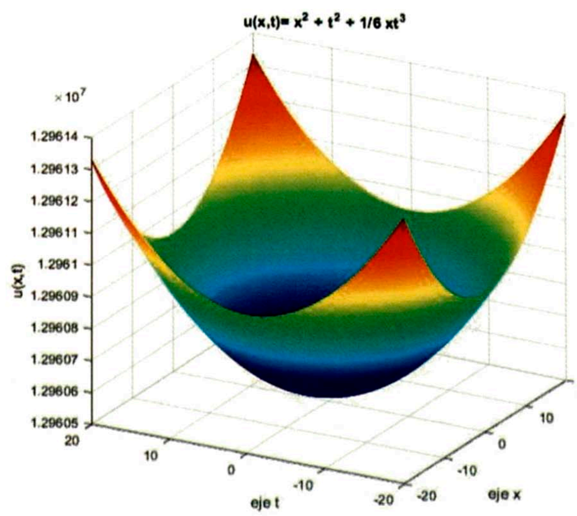

Figura 2. *u(x,t) para* $x \in [-20, 20]$ *y* $t \in [-20, 20]$. [1]

I) Sea $g(x) = 0$ y $f(x) = x^2$, obteniendo como solución

$$u(x,t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} + \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-t}^{x+t} (pq)dpdq$$

$$u(x,t) = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2} + \frac{1}{6}xt^3$$

$$u(x,t) = x^2 + t^2 + \tfrac{1}{6}xt^3$$

II) Sea $g(x) = -sen(x)$ y $f(x) = 0$, obteniendo como solución

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\eta)d\eta + \frac{1}{4a}\int_0^t \int_{x-at}^{x+at} s(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -sen(\eta)d\eta + \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-t}^{x+t} \xi\tau d\xi d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[cos(x+t) - cos(x-t)] + \frac{1}{6}xt^3$$

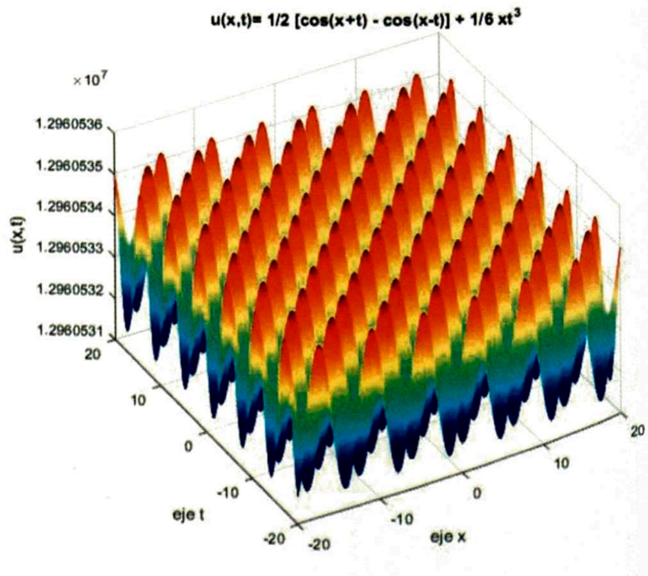

Figura 3. *u(x,t) para* $x \in [-20, 20]$ *y* $t \in [-20, 20]$

III) Sea $g(x) = cos(x)$ y $f(x) = sen(x)$, obteniendo como solución

[1] Los gráficos fueron realizados en Matlab 2016Ra

$$u(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\eta)d\eta + \frac{1}{4a}\int_0^t \int_{x-at}^{x+at} s(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{sen(x+t)+sen(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} cos(\eta)d\eta + \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x-t}^{x+t} \xi\tau d\xi d\tau$$

$$u(x,t) = \frac{sen(x+t)+sen(x-t)}{2} + \frac{1}{2}[sen(x+t)-sen(x-t)] + \frac{1}{6}xt^3$$

$$u(x,t) = sen(x+t) + \frac{1}{6}xt^3$$

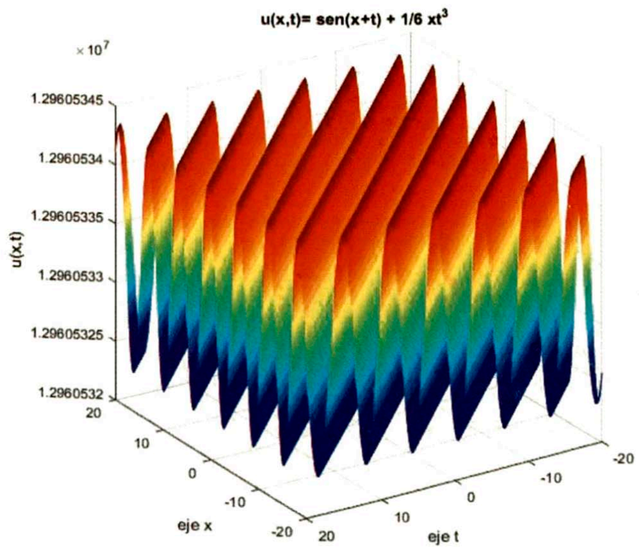

Figura 4. *u(x,t) para* $x \in [-20, 20]$ *y* $t \in [-20, 20]$.

7 Conclusiones

1. Usualmente la Fórmula de D'Alembert se aplica a problemas de EDPL del tipo Hiperbólico homogéneo, en este trabajo se ha contribuido con la aplicación en la resolución de EDPL del tipo Hiperbólico no homogéneo, como una técnica alternativa en combinación con el Teorema de Green.

2. Dentro de los resultados se presentan tres casos como se puede observar en las figuras 1,2 y 3 con condiciones mixtas, donde se consideran las condiciones iniciales de manera alternada; es decir, cuando se conoce el valor de la función u en $t = 0$ y la variación de ésta respecto a t en $t = 0$.

3. La ventaja de usar esta técnica en la resolución de problemas tipo onda asociados a fuerzas externas es que llegamos a determinar la solución del problema en forma explícita.

4. Así mismo con esta técnica solo se requiere que el problema esté definido en base a las condiciones iniciales, sin embargo también se puede aplicar a problemas del tipo onda que tienen ambas condiciones iniciales y de contorno.

5. En el caso del problema hiperbólico no homogéneo de segundo orden, además de la técnica exacta presentada también se pueden usar apriximaciones numéricas como el método de diferencias finitas o elementos finitos [6].

8 Agradecimientos

Este trabajo fue desarrollado en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica, LABOSIN-FC-UNI y fue expuesto en el CIMAC 2016, patrocinado por la SPMAC-PERÚ y la Facultad de Ciencias. Agradecemos por el apoyo brindado para la presentación de este trabajo al Instituto General de Investigación de la UNI y de la Facultad de Ciencias quienes colaboraron en la realización de este evento.

1. Romero S., Moreno, F. J. y Rodríguez, I. M.. Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Servicio de Publicaciones. Universidad de Huelva, Spain (2001)
2. Polyanin, A. D., Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, Chapman & Hall/CRC (2002).
3. Iório Júnior R. - de Magalhães Iório V., Ecuacões Diferenciais Parciais: Uma Introducão, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1988).
4. Lawrence C. E., Partial Differential Equations. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island (1997).
5. Tijonov A., Samarsky A., Editorial MIR, Primera Edición. Moscú (1972).
6. Mantilla I. y Munguia J., TECNIA, ISSN N° 2309-0413,pag-35-44, Vol 22, Nro. 12, (2012).