

# Modelo post-newtoniano de la radiación cuadрупolar de un sistema binario

---

Jorge Alcántara Gavidia y Armando Bernui<sup>(\*)</sup>

## RESUMEN

*Se desarrolla una aproximación post-newtoniana (APN) del tensor momento cuadрупolar de la distribución de masa de un sistema binario, usando la aproximación de campo débil de las ecuaciones de Einstein. Para aplicar la APN se asume que las órbitas elípticas cerradas se contraen "instantáneamente" al final de cada período. Las fórmulas obtenidas son válidas para un observador bastante alejado del sistema binario de cuerpos cuyos tamaños, además, deben ser pequeños comparados con su separación, ya que aquí se asumen masas puntuales.*

## ABSTRACT

*A post-newtonian approach (APN) of the quadrupole moment tensor of the mass distribution for a binary system in terms of the weak-field approach of Einstein's equations, is developed. For applying the APN, bound elliptical orbits, which shrink "instantaneously" at the end of each period, are assumed. The obtained formulae are valid for observers that are quite distant from the binary system of bodies, whose sizes are small compared with their separation, since point masses are assumed here.*

---

(\*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima - Perú.

## Introducción

Según la Teoría de la Relatividad de Einstein, una masa orbitando alrededor de otra (sistema binario) debe irradiar energía en forma de ondas gravitacionales [5]. Esta pérdida de energía se refleja en una reducción uniforme y lenta del período orbital de dicha masa. P. C. Peters y J. Mathews (1963) obtuvieron las primeras fórmulas que daban cuenta del fenómeno, de allí en adelante muchos otros han continuado la labor. Sin embargo, no es hasta 1974 que se pueden someter a prueba las conclusiones de dichos trabajos, cuando se descubre un sistema binario fácil de estudiar: el pulsar PSR 1913 + 16. La designación indica que se trata de un pulsar radioemisor situado en los mapas astronómicos a la ascensión recta de 19 horas 13 minutos y a la declinación de + 16 grados. De esta manera el pulsar binario se encuentra en la constelación de El Aguila.

En este artículo utilizamos la APN de primer orden (o Newtoniana-Relativista) e inesperadamente obtenemos resultados casi iguales (0,46% de diferencia) a los de Peters [3]. Sin embargo, nuestro trabajo difiere sustancialmente del de Peters, ya que: (a) nuestros cálculos se basan en la APN, esto es, el tensor momento cuadrupolar (véase (35)) se define relativísticamente, mientras que Peters usa una relación pre-relativista, y (b) la definición de luminosidad es diferente (compárese (32) con (65)). En nuestros cálculos numéricos utilizamos el PSR 1913 + 16 porque conocemos sus parámetros medidos desde 1975 por Hulse y Taylor [6]. En ese año su período orbital era de 7 horas 45 minutos 7 segundos (27907 segundos ó  $8,3721 \times 10^{12}$  metros), su semieje mayor era aproximadamente 2,81 radios solares, su excentricidad 0,617 y ambas estrellas tenían masas aproximadamente iguales a 1,43 masas solares (2,1 km). Además la variación de su período orbital por unidad de tiempo observado por Taylor y Weisberg en 1975 resultó  $-2,422 \times 10^{-12}$ . En este trabajo utilizamos las unidades en las cuales  $c = G = 1$ .

## Fuerzas centrales

Según la mecánica clásica una masa  $m$  sometida a una fuerza central conserva su momentum angular

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r} \times \vec{e}_r) F(r) = \vec{0} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

$$\vec{L} = cte, \quad m r^2 \dot{\theta} = L \quad (1)$$

Así, la ecuación diferencial de su movimiento es:

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F(r), \quad (2)$$

ó

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} F(1/u), \quad u = \frac{1}{r}. \quad (3)$$

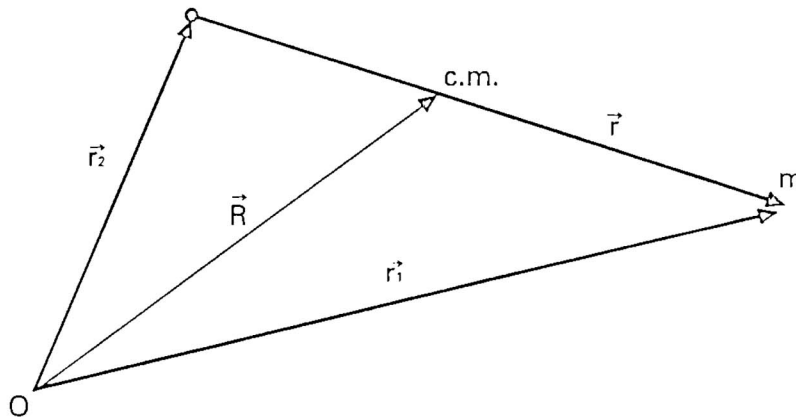
Para una interacción del tipo gravitacional se tiene:

$$u = \frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0),$$

$$A = \sqrt{\frac{m^2 K^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}}, \quad K = -Mm. \quad (4)$$

La ecuación orbital de la masa  $m$  (denominado movimiento kepleriano) es<sup>1</sup>:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (5)$$



**Figura 1.** Problema de los dos cuerpos.

---

<sup>1</sup>  $a$  es el semieje mayor y  $\varepsilon$  la excentricidad de la elipse.

Las relaciones de los parámetros obtenidos a partir de (4) y (5) son:

$$a = \frac{K}{2E}, \quad (6)$$

$$L^2 = -Kma(1 - \varepsilon^2). \quad (7)$$

## El problema de los dos cuerpos en mecánica newtoniana

Si dos cuerpos  $M$  y  $m$  (ver fig. 1) están sometidos a las fuerzas de interacción gravitacional  $F_1$  y  $F_2$  tendremos:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \quad m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 \quad (8)$$

$$M \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2.$$

De la figura 1, observamos que:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R} = \frac{m \vec{r}_1 + M \vec{r}_2}{m + M}. \quad (9)$$

Después de algunos cálculos algebraicos se obtiene

$$(M + m) \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{0}, \quad (10)$$

$$Mm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (M + m) \vec{F}_1. \quad (11)$$

Entonces

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_1. \quad (12)$$



donde

$$\mu \equiv \frac{Mm}{M+m}. \quad (13)$$

Así, el movimiento de la masa  $\mathbf{m}$  es visto por la masa  $\mathbf{M}$  como si la masa  $\mathbf{m}$  orbitase a su alrededor con masa  $\mu$  (llamada masa reducida) y estuviera sometida sólo al potencial central debido a  $\mathbf{M}$ .

## Radiación gravitacional

Las ecuaciones del campo gravitacional (conocidas como ecuaciones de Einstein), son:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}. \quad (14)$$

Estas satisfacen las identidades de Bianchi (que encierran las leyes de conservación local de energía y momentum):

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (15)$$

donde  $;$  representa la derivada covariante. El tensor energía-momentum para nuestro sistema binario viene dado por:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^{\mu} U^{\nu}, \quad (16)$$

donde

$$\vec{U} \rightarrow (1, 0, 0, 0) \quad (17)$$

En la aproximación de campo débil,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (18)$$

con

$$|h_{\alpha\beta}| < 1 \quad \text{y} \quad (\eta_{\alpha\beta}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (19)$$

Conviene definir:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (20)$$

así, las ecuaciones de Einstein (14) en esta aproximación se convierten en [2]:

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \quad (21)$$

donde  $t^{\mu\nu}$  son los componentes del *pseudotensor energía-momentum para el campo gravitacional* y resultan del cambio de derivada covariante en (14) a derivada parcial en (21). Las ecuaciones de Einstein (21) implican:

$$(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0, \quad (22)$$

donde  $_{,\nu}$  representa la derivada parcial con respecto a  $x^\nu$ . Es importante notar que estas ecuaciones incluyen derivadas parciales en vez de derivadas covariantes - hecho que permite la aplicación de la ley de Gauss - y que  $t^{\mu\nu}$  dependen para su definición y existencia de la elección de las coordenadas; es decir, no son componentes de un tensor (y como tal independientes de un sistema de coordenadas).

Las ecuaciones de Einstein (21) son equivalentes a las ecuaciones integrales

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, x^j) = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}]_{\text{ret}}}{|x - x'|} d^3 x', \quad (23)$$

donde

$$|x - x'| \equiv \left[ \sum_j (x^j - x'^j)^2 \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$$d^3 x' \equiv dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}$$

y el subíndice "ret" significa que la cantidad debe ser evaluada en un punto retardado del espaciotiempo

$$(t' = t - |x - x'|, x'^j).$$

Si el origen de coordenadas está dentro de la fuente, podemos definir (ver fig. 2): (a) La fuente material (región de tamaño  $R$ , donde  $T^{\mu\nu} \neq 0$ ); (b) La fuente gravitacional (región de tamaño  $L$ , donde  $t^{\mu\nu}$  contribuye significativamente en la integral (23)); (c) La zona cercana (región comprendida entre  $R$  y  $\lambda/2\pi$  [longitud de onda reducida de la radiación gravitacional]); y (d) La zona de radiación (región lejana de  $\lambda/2\pi$ ). Para sistemas de

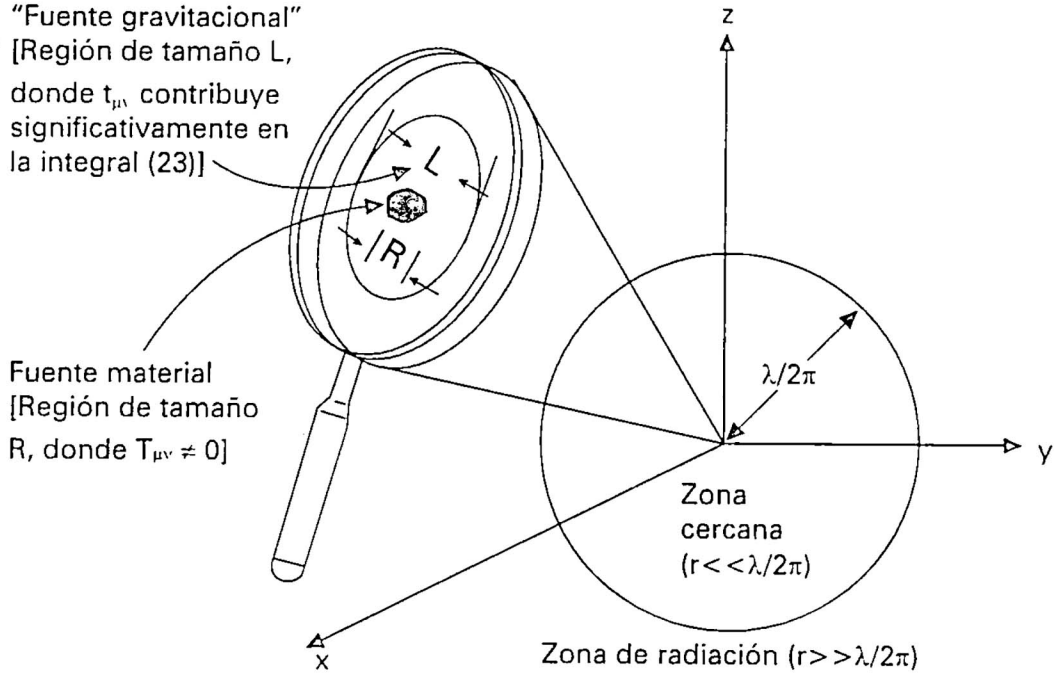


Figura 2. Fuente de movimiento lento irradiando ondas gravitacionales. El origen de coordenadas está localizado dentro de la fuente.

movimiento lento, las únicas contribuciones significativas en las integrales retardadas (23) vienen del interior de la zona cercana (región de tamaño  $L \sim R \ll \lambda/2\pi$ ). Podemos entonces prestar atención a los puntos de observación  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) alejados de la región fuente, es decir

$$|x| \equiv r \gg L \geq |x'|,$$

y luego expandir (23) en potencias de  $x'/r$ :

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu}(t, x) = & \frac{4}{r} \int [T^{\mu\nu}(t-r, x') + t^{\mu\nu}(t-r, x')] d^3 x' \\ & + O \left\{ \frac{2\pi x^j}{r^2 \lambda} \int x'^j [T^{\mu\nu}(t-r, x') + t^{\mu\nu}(t-r, x')] d^3 x' \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

De los diez componentes de  $\bar{h}^{\mu\nu}$ , sólo los seis espaciales son de interés ya que únicamente ellos interesan en la calibración TT [5].

Utilizando (22) obtenemos:

$$\int (T^{jk} + t^{jk}) d^3 x = \frac{1}{2} \frac{d^2 I^{jk}}{dt^2}, \quad (26)$$

donde

$$I^{jk}(t) \equiv \int [T^{00}(t, x) + t^{00}(t, x)] x^j x^k d^3 x, \quad (27)$$

relaciones conocidas como el *teorema del virial tensorial* [1].

Luego, usando (25) (para los componentes espaciales):

$$\bar{h}^{jk}(t, x) = \frac{2}{r} \ddot{I}^{jk}(t). \quad (28)$$

Definiendo

$$\Xi_{jk} \equiv I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I^1_1, \quad (29)$$

( $\Xi_{ij} = \Xi_{ij}(t)$ ) denominado tensor momento cuadrupolar reducido o sin traza, podemos expresar los  $\bar{h}^{jk}$  de (28) como (en la calibración TT):

$$\bar{h}^{TT}_{xx} = -\bar{h}^{TT}_{yy} = \frac{1}{r} [\ddot{\Xi}_{xx} - \ddot{\Xi}_{yy}] \quad (30)$$

$$\bar{h}^{TT}_{xy} = \frac{2}{r} \ddot{\Xi}_{xy}.$$

Luego, para órbitas cerradas la variación de la energía del sistema por unidad de tiempo (llamada luminosidad del sistema), promediada en un período, es [2]:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = - \frac{r^2}{32\pi} \int \left\langle \frac{\partial \bar{h}^{TT}_{jk}}{\partial t} \frac{\partial \bar{h}^{TT}_{jk}}{\partial t} \right\rangle d\Omega, \quad (31)$$

y luego de algunas simplificaciones:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = - \frac{1}{5} \left\langle \ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij} \right\rangle. \quad (32)$$

Similarmente, la variación del momentum angular en la dirección  $j$ , promediada en un período, resulta [2]:

$$\left\langle \frac{dL_j}{dt} \right\rangle = - \frac{2}{5} \epsilon^{jki} \left\langle \ddot{\Xi}_{ki} \ddot{\Xi}^i_l \right\rangle \quad (33)$$

## Aproximación post-newtoniana

Ahora consideramos una fuente para la cual la gravedad contribuye sólo en una pequeña fracción de la energía total (denominada *nearly Newtonian source*) [2]:

$$t^{00} \sim M^2/R^2 \sim (M/R) T^{00} \ll T^{00} \quad (34)$$

luego,

$$I^{jk}(t) = \int T^{00}(t, x) x^j x^k d^3x, \quad (35)$$

donde  $T^{00} = \rho$  de acuerdo a (16) y (17); y  $\rho$  es la densidad de masa-energía del sistema. Así, la integral (35) es lo que se conoce como el *tensor momento cuadrupolar de la distribución de masa*. En nuestro caso, para describir el movimiento newtoniano (i.e. lento) de una partícula de masa en reposo  $\mu$ , tendremos:  $\rho(t, x) = \mu \delta(x - X(t))$ , donde  $X(t)$  es la trayectoria de la masa  $\mu$ .

Vamos a considerar al sistema binario contenido en el plano  $xy$  (de ese modo, el momentum angular tiene la dirección del eje  $z$ ) describiendo órbitas elípticas cerradas que van a reducirse inmediatamente después de completar un período orbital. Esto lo hacemos para manejar fácilmente el tensor momento cuadrupolar de la distribución de masa  $I^{jk}$ . Además, durante el proceso de cálculo tendremos en cuenta los resultados clásicos: es decir, el sistema binario puede ser descrito como si tuviéramos solamente una masa  $\mu$  (i.e. la masa reducida) sometida a una fuerza central, cuyo momentum angular se conserva y es directamente proporcional a ella (ver (1)). En coordenadas polares  $(r, \theta)$  las variables cartesianas son:

$$x = r(t) \cos\theta(t), \quad y = r(t) \sin\theta(t). \quad (36)$$

Además sabemos que la conservación del momentum angular aplicado a  $\mu$  implica que:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}. \quad (37)$$

Utilizando las ecuaciones (37) y (5) tenemos para  $r$ :

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon L \sin \theta}{\mu a (1 - \varepsilon^2)}. \quad (38)$$

Usando  $T^{00} = \rho = \mu \delta(x - r \cos \theta) \delta(y - r \sin \theta)$  en (35), obtenemos:

$$I_{xx} = \mu r^2 \cos^2 \theta, \quad (39)$$

$$I_{xy} = \mu r^2 \cos \theta \sin \theta, \quad (40)$$

$$I_{yy} = \mu r^2 \sin^2 \theta. \quad (41)$$

Luego, usando (29),

$$\Xi_{xx} = \frac{\mu r^2}{6} + \frac{\mu r^2}{2} \cos 2\theta, \quad (42)$$

$$\Xi_{xy} = \frac{\mu r^2}{2} \sin 2\theta, \quad (43)$$

$$\Xi_{yy} = \frac{\mu r^2}{6} - \frac{\mu r^2}{2} \cos 2\theta, \quad (44)$$

derivando (42), (43) y (44) con respecto al tiempo tendremos:

$$\dot{\Xi}_{xx} = \frac{\varepsilon L r \sin \theta}{3a(1 - \varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon L r \cos 2\theta \sin \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} - L \sin 2\theta, \quad (45)$$

$$\dot{\Xi}_{xy} = \frac{\varepsilon L r \sin \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} \sin 2\theta + L \cos 2\theta, \quad (46)$$

$$\dot{\Xi}_{yy} = \frac{\varepsilon L r \sin \theta}{3a(1 - \varepsilon^2)} - \frac{\varepsilon L r \cos 2\theta \sin \theta}{a(1 - \varepsilon^2)} + L \sin 2\theta. \quad (47)$$

La segunda derivada de ellos nos da:

$$\begin{aligned} \ddot{\Xi}_{xx} = & \frac{\varepsilon L^2}{3\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} [\varepsilon + \cos \theta] + \frac{\varepsilon L^2}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \\ & [\varepsilon \cos 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta - 2 \sin \theta \sin 2\theta - \\ & \varepsilon \frac{1 - \cos 4\theta}{2}] - \frac{2L^2 \cos 2\theta}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\ddot{\Xi}_{xy} = \frac{L^2}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} [\varepsilon^2 \operatorname{sen} 2\theta - 3 \varepsilon \cos \theta \operatorname{sen} 2\theta + 2 \varepsilon \operatorname{sen} \theta \cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{sen} 4\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta - 2 \varepsilon^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} 2\theta], \quad (49)$$

$$\ddot{\Xi}_{yy} = \frac{\varepsilon L^2 (\varepsilon + \cos \theta)}{3 \mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon L^2}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} [\varepsilon \cos 2\theta + \cos \theta \cos 2\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta - \frac{\varepsilon}{2} (1 - \cos 4\theta)] + \frac{2 L^2 \cos 2\theta}{\mu a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2. \quad (50)$$

Finalmente, la tercera derivada será:

$$\dddot{\Xi}_{xx} = \frac{L^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)^4} \left[ -\frac{\varepsilon}{3} \operatorname{sen} \theta - \varepsilon \operatorname{sen} \theta \cos 2\theta + 4 \varepsilon \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta + 4 \operatorname{sen} 2\theta \right], \quad (51)$$

$$\dddot{\Xi}_{xy} = \frac{L^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)^4} [-4 \cos 2\theta - \varepsilon \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta - 4 \varepsilon \cos \theta \cos 2\theta], \quad (52)$$

$$\dddot{\Xi}_{yy} = \frac{L^3 (1 + \varepsilon \cos \theta)^2}{\mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)^4} \left[ -\frac{\varepsilon}{3} \operatorname{sen} \theta + \varepsilon \operatorname{sen} \theta \cos 2\theta - 4 \varepsilon \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta - 4 \operatorname{sen} 2\theta \right]. \quad (53)$$

No es difícil demostrar que:

$$\dddot{\Xi}_{ij} \dddot{\Xi}^{ij} = (\dddot{\Xi}_{xx})^2 + 2 (\dddot{\Xi}_{xy})^2 + (\dddot{\Xi}_{zz})^2. \quad (54)$$

Así, reemplazando (51), (52) y (53) en (54) para obtener  $\dddot{\Xi}_{ij} \dddot{\Xi}^{ij}$  en función de  $\varepsilon$ ,  $\theta$ ,  $\mu$  y  $L$ :

$$\dddot{\Xi}_{ij} \dddot{\Xi}^{ij} = \frac{L^6 (1 + \varepsilon \cos \theta)^4}{\mu^4 a^8 (1 - \varepsilon^2)^8} \left[ \frac{154}{9} \varepsilon^2 + \frac{134}{9} \varepsilon^2 \cos 2\theta + 64 \varepsilon \cos \theta + 32 \right]. \quad (55)$$

Calculemos ahora

$$\langle \ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij}) dt, \quad (56)$$

donde el período T viene dado por:

$$T = \frac{2\mu}{L} \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2}. \quad (57)$$

Así, usando (55) en (56):

$$\langle \ddot{\Xi}_{ij} \ddot{\Xi}^{ij} \rangle = \frac{32 \mu^2 (m+M)^3}{a^5 (1 - \varepsilon^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{437}{144} \varepsilon^2 + \frac{221}{576} \varepsilon^4 \right). \quad (58)$$

Reemplazando (58) en (32) obtenemos:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^3}{a^5 (1 - \varepsilon^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{437}{144} \varepsilon^2 + \frac{221}{576} \varepsilon^4 \right). \quad (59)$$

Por otro lado, después de algunos cálculos algebraicos, obtenemos ( $x^3 = z$ ):

$$\varepsilon^{3ki} \langle \ddot{\Xi}_{ki} \ddot{\Xi}^i_l \rangle = 16 \frac{\mu^2 (m+M)^{5/2}}{a^{7/2} (1 - \varepsilon^2)^2} \left( 1 + \frac{7}{8} \varepsilon^2 \right). \quad (60)$$

Reemplazando (60) en (33) obtenemos:

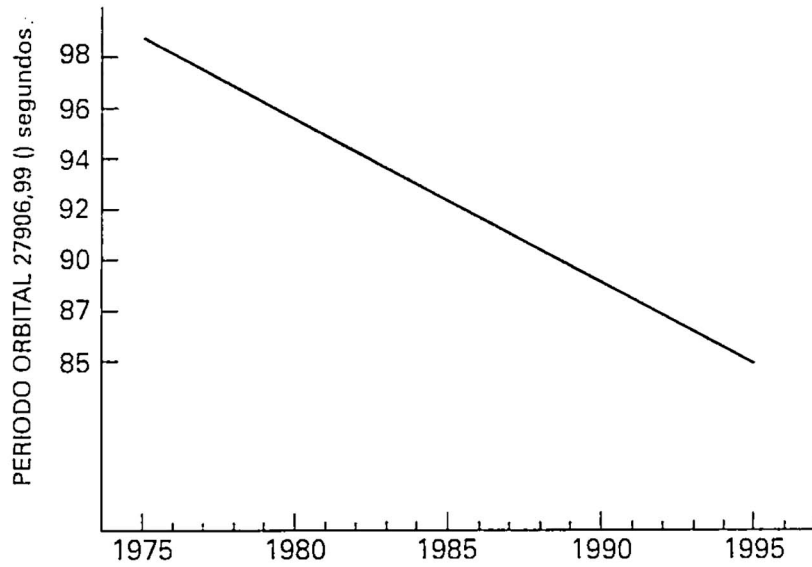
$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{\mu^2 (m+M)^{5/2}}{a^{7/2} (1 - \varepsilon^2)^2} \left( 1 + \frac{7}{8} \varepsilon^2 \right) \quad (61)$$

$\langle d\varepsilon/dt \rangle$  y  $\langle da/dt \rangle$  los obtenemos a partir de (6), (7), (59) y (61):

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = -\frac{182}{9} \frac{\mu (m+M)^2 \varepsilon}{a^4 (1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \left( 1 + \frac{145}{364} \varepsilon^2 \right), \quad (62)$$

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{\mu (m+M)^2}{a^3 (1 - \varepsilon^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{437}{144} \varepsilon^2 + \frac{221}{576} \varepsilon^4 \right) \quad (63)$$





*Figura 3. Variación del período orbital del sistema binario respecto al tiempo en la Tierra. Los numeros en el eje de las ordenadas indican aquellos que irían entre los parentesis.*

Y finalmente, a partir de (57) obtenemos:

$$\left\langle \frac{dT}{dt} \right\rangle = - \frac{192 \pi \mu (m + M)^{3/2}}{5a^{5/2} (1 - \epsilon^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{437}{144} \epsilon^2 + \frac{221}{576} \epsilon^4 \right). \quad (64)$$

## Resultados

Utilizando el método de Euler se resuelven las ecuaciones diferenciales (59), (62), (63) y (64) (esto se hizo usando Turbo Pascal 7.0). Los parámetros empleados fueron los del pulsar PSR 1913 + 16 medidos en 1975. La figura 3 muestra el período orbital  $T$  en función de la variable tiempo  $t$ : es evidente la reducción del período orbital respecto al tiempo. El resultado es que este período decrece a razón de  $7,6 \times 10^{-3}$  segundos por año aproximadamente.

## Conclusiones

Los resultados (59), (62), (63) y (64) son similares a los obtenidos por P.C. Peters (1964), quien usó para la luminosidad del sistema, la relación siguiente:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{5} \left\langle \frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 I_{ij}}{dt^3} - \frac{1}{3} \frac{d^3 I_{ii}}{dt^3} \frac{d^3 I_{jj}}{dt^3} \right\rangle. \quad (65)$$

En cambio nosotros usamos la relación (32), y se puede observar que no son equivalentes.

## REFERENCIAS

- [1] Landau & Lifshitz. *Mechanics*. Pergamon Press. 1960.
- [2] Misner & Thorne & Wheeler. *Gravitation*. Freeman, San Francisco 1973.
- [3] Peters P.C. *Gravitational radiation and the motion of two point masses*. *Physical Review* 1964.
- [4] Peters P.C. & Mathews J. *Gravitational radiation from point masses in a keplerian orbit*. *Physical Review* 1963.
- [5] Schutz B. F. *General relativity*. Cambridge University Press. 1984.
- [6] Smarr & Blandford. *The binary pulsar: Physical processes, possible companions, and evolutionary histories*. *The Astrophysical Journal* 1976.
- [7] Taylor J. H. *Pulsar timing and relativistic gravity*. *Class Quantum Grav.* 1993.
- [8] Taylor & Weisberg & Fowler. *Ondas gravitatorias procedentes de un pulsar orbital*. *Investigación y Ciencia*. Diciembre 1981.