

Simulación Numérica del problema de cavitación en cilindros rotativos

Irla Mantilla N.[†], Salomé González, Christian Salazar, Joel Soto

Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Ingeniería

[†]irlamn@uni.edu.pe

Recibido el 10 de Setiembre del 2019; aceptado el 23 de Octubre del 2019

En el presente trabajo se propone un modelo matemático como alternativa para la simulación numérica de las cargas radiales a las que puede someterse un cojinete frente a un eje en forma de cilindro rotativo y un fluido lubricante que se desplaza por su interior, en la finalidad que no ocurra un contacto entre ambos componentes sólidos, de lo contrario se producirá otro fenómeno por efecto de la diferencia de presiones denominado cavitación. El desplazamiento del fluido en el interior del sistema eje-cojinete conduce a un problema de contorno asociado a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales, el cual mediante su formulación variacional, genera una ecuación variacional del tipo Reynolds para un régimen estacionario, el cual buscamos resolverlo, para llevar a la simulación numérica del fluido deslizante en el sistema rotativo eje - cojinete, de este modo ver como se comporta. Para ello asumimos que el fluido deslizante es un flujo incompresible e isoviscoso, considerando dos grados de libertad en su desplazamiento con el eje de rotación. Supongamos que el sistema se encuentra sometido a ciertas cargas radiales, para la evaluación del problema, una variable influyente es la presión, la cual queda expresada en términos de la inecuación variacional. Para obtener las isolíneas de presión del fluido se realiza la resolución numérica de las inecuaciones variacionales discretas y cuya existencia de solución depende del comportamiento del parámetro variable excentricidad. En su aproximación aplicamos el método de elementos finitos conformes. En los resultados computacionales se observa que para una determinada excentricidad, la variación de las isolíneas de presión en la superficie no dependen de las dimensiones del cilindro, es decir que al aumentar o disminuir las dimensiones del mismo, la presión muestra el mismo comportamiento de distribución del fluido, mientras que al variar la excentricidad, cambia el mapa espectral de la presión. De ello se puede concluir que en el comportamiento del sistema eje-Cojinete del modelo matemático estudiado, la excentricidad es un parámetro influyente en la variación de la presión.

Palabras Claves: Ecuación diferencial parcial de Reynolds, cavitación, excentricidad.

In the present work, the numerical simulation of the radial loads to which a bearing in the form of a rotating cylinder and a sliding lubricant in it can be subjected, which supposedly means that no contact between its solid components occurs, otherwise the phenomenon of cavitation occurs. This phenomenon is formulated by means of a mathematical model conformed by a contour problem associated to a system of Partial Differential Equations, which is taken to its variational formulation generating a problem equivalent to the initial one and that by means of the approximation of the variational inequality of Reynolds associated in a stationary regimen is sought to solve numerically. For this we suppose that the lubricant is considered as an incompressible and isoviscoso flow with two degrees of freedom in its displacement in the axis of rotation. The resulting behavior of the phenomenon is unknown once the system is burdened, this is the problem that is to be simulated, together with the determination of the pressure isolines in the lubricant. In its numerical resolution, the finite element method is applied, which is the main objective of this work. It is observed that for a certain eccentricity the distribution of the pressure on the surface is not dependent on the dimensions of the cylinder, that is to say that when increasing or decreasing the dimensions thereof, the pressure shows the same distribution, while changing the eccentricity, change the pressure map. From this it can be concluded that according to this studied model, eccentricity is the main factor that influences the dynamics of the system.

Keywords: Reynolds partial differential equation, cavitation, eccentricity.

1 Introducción

Cualquier máquina o mecanismo, ya sea simple o compleja, está constituida por elementos o piezas unidas entre

sí de forma fija o móvil Segun [1] pero asociadas unas a otras. Entre las partes móviles encontramos ejes y árboles, que necesariamente van apoyados y necesitan una superficie que les soporte. Al existir un movimiento

relativo entre el eje y la superficie de apoyo, se producen fuerzas de rozamiento o fricción que ocasionan pérdidas de energía. Existen dos formas de tratar de evitar el problema: la primera sería colocar un fluido lubricante [2] entre las superficies en contacto y la segunda utilizar cojinetes [3]. Los cojinetes se definen como elementos de máquinas que simultáneamente permiten a un eje girar libremente y soportar cargas [4]. Es decir, son puntos de apoyo de ejes y árboles para sostener su peso y guiarlos en sus movimientos reduciendo las pérdidas de energía por fricción y el desgaste entre las superficies en contacto con ese movimiento relativo. Existe una amplia gama de cojinetes y se clasifican en dos tipos, el primero donde su movimiento se ve facilitado por el deslizamiento[5] de una capa o película lubricante y otros en los que el movimiento se ve facilitado por una combinación entre el movimiento de rotación y la lubricación, los denominados cojinetes antifricción de rodamientos rotativos cilíndricos.



Figura 1: Sistema eje-cojinete en un motor de barco.

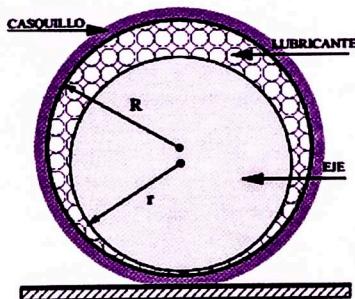


Figura 2: Componentes del cojinete deslizante.

Según [6] un cojinete deslizante es un dispositivo de antifricción en el que un eje cilíndrico, al que se llama muñón, se apoya en una pieza estacionaria, a la que se llama cojinete. Se utilizan para llevar cargas radiales, por ejemplo, para soportar un eje giratorio. Un cojinete simple consta de dos cilindros rígidos. El cilindro exterior (cojinete) envuelve el muñón interno giratorio (eje). Normalmente, la posición del centro del muñón es excéntrico con el centro del rodamiento. Un lubricante llena el pequeño espacio anular u holgura entre el muñón y el rodamiento. El valor de excentricidad en la rotación está relacionada con la presión que se genera en el cojinete para equilibrar la carga radial.

2 Conceptos Preliminares

A continuación presentamos las definiciones y conceptos físicos usados a lo largo del presente trabajo.

2.1 Nociones de Lubricación en cilindros

El desgaste es la mayor causa de pérdida de materiales, por lo que cualquier reducción del mismo puede aportar grandes beneficios. La fricción o rozamiento es una de las principales causas de disipación de energía, por lo que su control puede traducirse en un importante ahorro energético. La lubricación es el modo más efectivo de reducir la fricción y controlar el desgaste [6]. El propósito de la lubricación o engrase es el interponer una película de un material fácilmente cizallable, de modo que el deslizamiento se realice en su seno, entre movimiento de máquinas con movimiento relativo y cargados.

2.2 Excentricidad

La excentricidad se define como la no coincidencia entre el eje de rotación y el eje de simetría. La excentricidad puede tener lugar en diferentes tipos de elementos mecánicos, como son las poleas, las ruedas dentadas y en el posicionamiento relativo entre dos piezas concéntricas, caso del rotor y el estator de un motor. Matemáticamente se define por la ecuación de Euler [7], en particular consideramos un parámetro constante que consideramos mas adelante en la obtención de los resultados.

2.3 Ecuación de Reynolds.

Las variaciones de la velocidad pueden concebirse como las desviaciones de la velocidad con respecto a su valor medio temporal; de tal manera que las variaciones de la velocidad se vean como una variable aleatoria de media nula. En tanto la presión, también, puede descomponerse en una forma similar, ecuación (1). Esta variable aleatoria es estacionaria, en amplio sentido, porque su media o esperanza matemática es constante, independiente de su parámetro índice, el tiempo; y la función de correlación depende sólo de las variaciones de este parámetro,

$$\partial v_i = \bar{v}_i - v_i, \quad \partial p_i = \bar{p}_i - p_i. \quad (1)$$

Por tanto, cuando la velocidad y la presión se descomponen en la media más las desviaciones, para luego expandir la ecuación de Navier-Stokes, y tamizarla con el promedio temporal sobre la base de la hipótesis ergódica, entonces se obtienen las ecuaciones de Reynolds,

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{v}_i v_j \rangle \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{p} + \rho \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \bar{v}_i - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \partial v_i \partial v_j \rangle. \quad (2)$$

En la construcción del modelo se supone que la velocidad angular es constante, se desprecian los efectos de la tensión superficial y se asume que el aire se comporta

como un gas perfecto, en el sentido de que la densidad es proporcional a la presión localizada o estática, la misma que determina el grado de cohesión molecular del fluido en su desplazamiento a través de la superficie. Se considera que la anchura de la capa del fluido es muy pequeña comparada con las otras dimensiones. Además, se desprecian las fuerzas iniciales comparadas con las fuerzas debidas a la viscosidad.

2.4 Cavitación

La cavitación o aspiraciones en vacío es un efecto hidrodinámico que se produce cuando el agua o cualquier otro fluido en estado líquido pasa a gran velocidad por una arista afilada, produciendo una descompresión del fluido debido a la conservación de la constante de Bernoulli. Puede ocurrir que se alcance la presión de vapor del líquido de tal forma que las moléculas que lo componen cambian inmediatamente a estado de vapor, formándose burbujas o, más correctamente, cavidades. Las burbujas formadas viajan a zonas de mayor presión e implotan (el vapor regresa al estado líquido de manera súbita, "aplastándose" bruscamente las burbujas) produciendo una estela de gas y un arranque de metal de la superficie en la que origina este fenómeno. La implosión causa ondas de presión que viajan en el líquido. Estas pueden disiparse en la corriente del líquido o pueden chocar con una superficie. Si la zona donde chocan las ondas de presión es la misma, el material tiende a debilitarse metalúrgicamente y se inicia una erosión que, además de dañar la superficie, provoca que ésta se convierta en una zona de mayor pérdida de presión y por ende de mayor foco de formación de burbujas de vapor. Si las burbujas de vapor se encuentran cerca o en contacto con una pared sólida cuando implosionan, las fuerzas ejercidas por el líquido al aplastar la cavidad dejada por el vapor dan lugar a presiones localizadas muy altas, ocasionando picaduras sobre la superficie sólida. El fenómeno generalmente va acompañado de ruido y vibraciones, dando la impresión de que se trata de grava que golpea en las diferentes partes de la máquina.

3 Definición del Modelo Matemático

El objetivo principal de esta sección es estudiar y representar mediante un sistema de ecuaciones diferenciales la distribución de la presión producida por una película de lubricante ubicada en un cilindro en rotación con determinados parámetros físicos definidos (dimensiones del cilindro, viscosidad dinámica y grosor de la película del lubricante).

3.1 Modelo Físico

La presión en el lubricante (SAE 10 a 70°C.) se rige por la ecuación de Reynolds. Para un fluido incompresible

con condición de ausencia de deslizamiento, la ecuación de Reynolds estacionaria en el rango continuo está dada por:

$$\nabla_T \cdot \left(\frac{-\rho h^3}{12\eta} \nabla_T p + \frac{\rho h}{2} (v_a + v_b) \right) - \rho (\nabla_T b \cdot v_b - \nabla_T a \cdot v_a) = 0. \quad (3)$$

En esta ecuación, ρ es la densidad en $\frac{Kg}{m^3}$, h es el espesor de lubricante (m), η es la viscosidad ($Pa \cdot s$), p es la presión (Pa), a es la ubicación (m) de la base del canal, v_a es la velocidad tangencial ($\frac{m}{s}$) de la base del canal, b es la ubicación (m) de la pared sólida, y v_b es la velocidad tangencial ($\frac{m}{s}$) de la pared sólida. Aquí el muñón giratorio se considera que es la pared sólida. La figura siguiente se muestra la pared del cojinete y el muñón (eje) giratorio en el que se aplica la ecuación de Reynolds. Debido a que la presión localizada es constante a través del espesor de la película lubricante, si se utiliza la proyección tangencial del operador gradiente, el término $\rho(\nabla_T b \cdot v_b - \nabla_T a \cdot v_a)$ es igual a cero, esto hace que se simplifique la ecuación (1.1) la misma cual queda expresada por:

$$\nabla_T \cdot \left(\frac{-\rho h^3}{12\eta} \nabla_T p + \frac{\rho h}{2} (v_a + v_b) \right) = 0. \quad (4)$$

El espesor de lubricante, h , se define como:

$$h = c(1 + \varepsilon \cos \theta)$$

Donde $c \equiv R_B - R_J$ es la diferencia entre el radio del cojinete(rodamiento) y radio del muñón(eje), ε es la excentricidad, y θ es la coordenada polar angular de un punto sobre el lubricante.

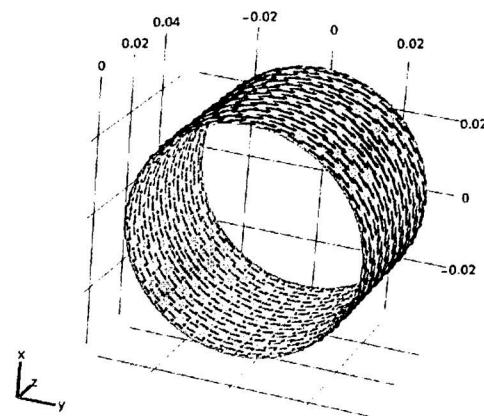


Figura 3: Geometría (muñón cilíndrico) que muestra la dirección de la velocidad (con flechas negras).

Modelo Matemático

Las propiedades físicas, geometría del dominio y condiciones de frontera del problema definiremos a continuación:

Definición del Dominio y condiciones de frontera:

Consideremos un cilindro de altura H y radio R con su base centrada en el punto $(0,0,0)$, con una excentricidad de 0.3 mm, la cual variaremos en la experiencia computacional, para mostrar cuando existe un problema de cavitación y observar como influye la excentricidad, en los resultados y su importancia en la simulación numérica del problema. La presión en los extremos del muñón cilíndrico se asume que es similar a la presión del ambiente. Por lo tanto, las condiciones de frontera son:

$$p = 0 \quad \text{para} \quad z=0,L. \quad (5)$$

Donde L es la longitud del muñón cilíndrico. Así también se asume que éste gira a una velocidad angular de 50π rad/s.

Características del fluido: Consideremos un fluido incompresible con una viscosidad dinámica de $0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ y una densidad de 860 Kg/m^3 .

4 Resolución Numérica del problema de cavitación

Para abordar la resolución numérica del problema con el Método de Elementos finitos, primeramente realizamos su formulación variacional, luego una discretización del problema variacional mediante el método de características combinado con elementos finitos y formulamos un esquema basado en algoritmos numéricos del Algebra matricial y Optimización en la finalidad de obtener una aproximación eficiente de su solución.

4.1 Formulación Variacional

La formulación variacional del denominado problema de lubricación consiste en encontrar $p \in V_a$ tal que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\gamma h^2 \nabla p + h^3 p \nabla p) \nabla \varphi + \\ & \eta \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (ph) \varphi + 6\eta \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} (ph) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in V_a. \end{aligned} \quad (6)$$

Donde $\Omega = (0, H) \times (0, H)$, representa el dominio rectangular bidimensional de nuestro problema y los espacios y conjuntos funcionales son:

$$V_a = \{\varphi \in H^1(\Omega) / \varphi = p_a \text{ en } \partial\Omega\}.$$

$$V = \{\varphi \in H^1(\Omega) / \varphi = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Bajo ciertas hipótesis, se puede probar la existencia y unicidad de solución del problema hidrodinámico, así como la existencia de cotas de la misma [1].

En el presente trabajo tiene como objetivo aplicar el Método de Elementos Finitos en la construcción del esquema de resolución numérica de la inecuación variacional se puede ver en [7] y para la simulación numérica

del problema, donde se supone que las cargas radiales a las que puede someterse un cojinete deslizante por efecto de lubricación el cual no debe permitir un contacto directo entre sus componentes sólidos y en caso contrario se consideraría una posible ocurrencia del fenómeno de cavitación. El alcance de esta hipótesis se limita a un régimen estacionario y se contemplan únicamente dos grados de libertad en la función de holgura h . Respecto a la densidad con la presión en los lubricantes más usuales su variación es muy pequeña, se asume que se trata de un fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$). Además, si se tratase de un lubricante isoviscoso, debido a la fina película de aceite que se supondría par estos dispositivos, al hacer esta suposición, es irrelevante y no considerable la pérdida en cuanto a la precisión de los resultados [2, pág. 25]. Así mismo se consideran que las superficies sólidas del cojinete deslizante están sin rugosidades así y con un régimen de lubricación hidrodinámica.

4.2 Resultados Numéricos

Veamos los resultados para los siguientes parámetros $R=0.03\text{m}$ y $H=0.05\text{m}$, utilizando esos parámetros y considerando el siguiente mallado sobre la superficie del cojinete de geometría cilíndrica:

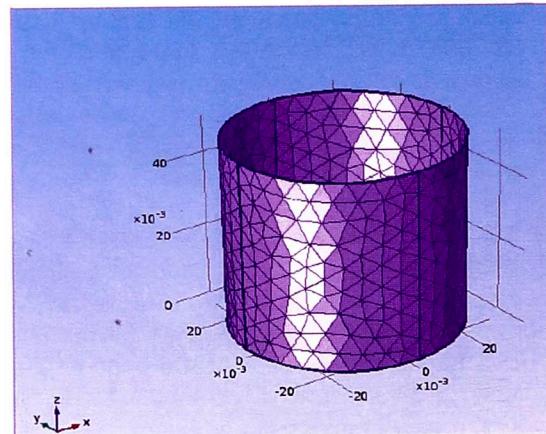


Figura 4: Mallado por elementos triangulares sobre el cojinete cilíndrico.

A partir de aquel mallado mediante una aproximación con elementos finitos se obtiene:

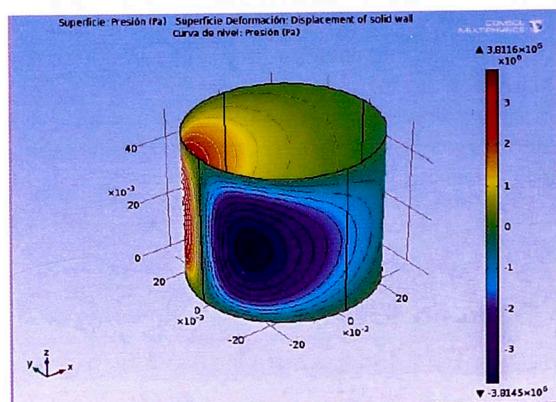


Figura 5: Comportamiento de la presión localizada sobre la superficie lateral del cojinete cilíndrico para un radio $R=0.03$, $h=0.05$, $\epsilon = 0.3$.

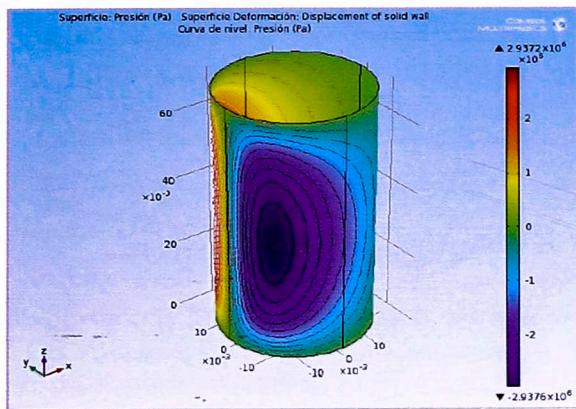


Figura 6: Comportamiento de la presión sobre la superficie lateral del cilindro para $R=0.02$, $h=0.07$, ($\epsilon = 0.3$).

Ahora si consideramos variar la altura del espesor de lubricante(h) y el radio(R) del cilindro observaremos que su comportamiento es similar al caso anterior, es decir, la distribución de la presión a lo largo de la superficie presenta el mismo patrón con dos regiones en lados adyacentes de máximo y mínima presión.

Como se observa para $R=0.02$, $h=0.07$.

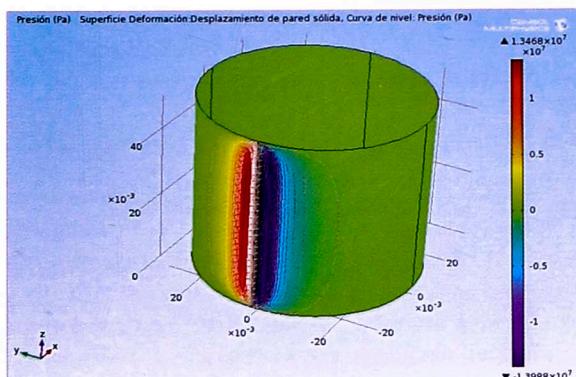


Figura 7: Comportamiento de la presión localizada sobre la superficie lateral del cilindro, $\epsilon = 0.99$.

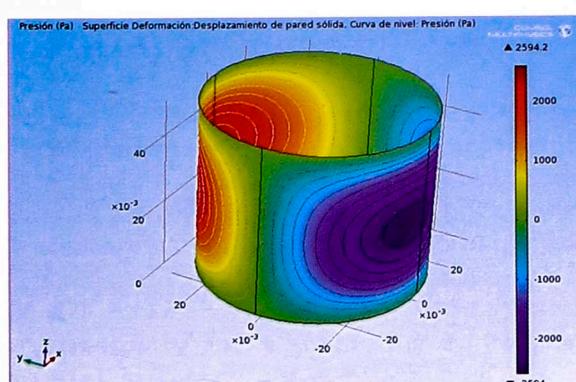


Figura 8: Comportamiento de la presión localizada sobre la superficie lateral del cilindro, $\epsilon = 0.3$.

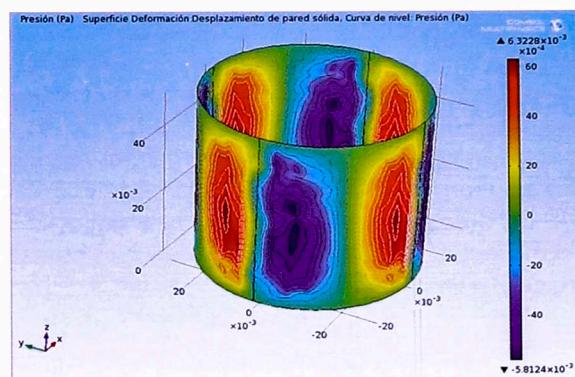


Figura 9: Comportamiento de la presión sobre la superficie lateral del cilindro, $\epsilon = 0.01$.

Claramente el comportamiento de la solución es el mismo en los dos cilindros solo que estos se expanden o contrae según la dimensión del cilindro. Pero veremos que ese comportamiento difiere un poco si variamos el parámetro de excentricidad(ϵ) considerando como el caso original $R=0.03$, $h=0.05$ y para este caso ϵ variando desde 0 hasta 0.99 se observara como cambia el comportamiento de la presión a lo largo se la superficie del cilindro: Empecemos con una excentricidad de 0.99 y luego la iremos disminuyendo gradualmente hasta llegar a 0.

En la figura se muestra claramente que la distribución de la presión a lo largo de la superficie depende de la excentricidad del cojinete en deslizamiento y a su vez ésta delimita el espesor del grosor de la película del lubricante distribuido en el cilindro; produciendo este grosor una distribución en superficie similar a lo mostrado por la presión ejercida sobre el metal; como queda expresado en la siguiente figura.

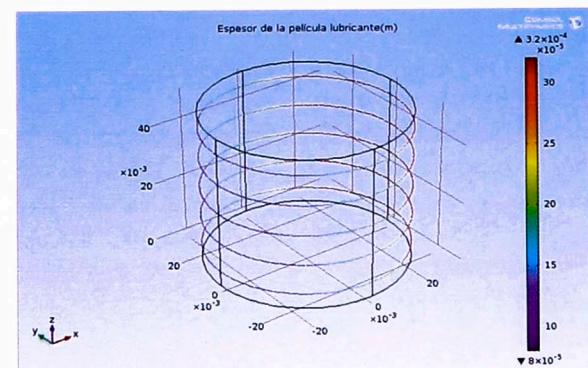


Figura 10: Espesor de la película del lubricante para $R=0.03$, $h=0.05$ y $\epsilon = 0.6$.

5 Conclusiones

1. El problema tratado se resuelve bajo las condiciones de una geometría cilíndrica con la condición de presión nula sobre la frontera de las bases del cilindro, considerando al lubricante como un fluido incompresible.

2. El problema que se aborda es un problema no lineal, lo cual se supera al pasar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales a su formulación débil. La función h , el espesor de la película del lubricante, simplifica la formulación débil debido a la forma explícita discreta en cada elemento triangular del dominio mallado donde se encuentra definida la Ecuación en Derivadas Parciales y Variacionales respectivamente.
3. Se generó un mallado con 712 elementos triangulares, 100 elementos de aristas y 8 elementos de vértice.
4. La variable a calcular en la ecuación de Reynolds es p (presión) y ésta depende directamente del valor de la excentricidad ($\epsilon \in [0, 1]$).
5. El tipo de excentricidad que posee el problema es dinámica debido a que el centro de giro del motor no concuerda con el centro geométrico.
6. Como la presión inicial sobre la superficie del cilindro es nula, la solución hallada representa la presión

generada solamente por el movimiento del sistema y como se ve, está influenciada por la presencia de la película lubricante al momento de disminuir el desgaste.

7. Los valores de presión disminuyen gradualmente en intensidad cuando los valores de ϵ tienden a cero, esto implica que a medida que el eje de rotación coincide con el eje de simetría la presión estática generada sobre la superficie del cilindro tiende a ser menor.

Agradecimientos

Este trabajo fue desarrollado en el Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica, LABOSIN-FC-UNI y se realizó como Proyecto de Investigación 2019. Agradecemos al Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias, por el apoyo brindado para la ejecución de esta investigación en la Universidad Nacional de Ingeniería, de Lima, Perú.

-
1. Hassán Lombera Rodríguez, Simulación Numérica de un Cojinete Deslizante Radial con Desplazamiento Desconocido, Servicio de Publicaciones. Universidad de Huelva, España, 2001.
 2. Hannukainen, Petri, Non-linear journal bearing model for analysis of superharmonic vibrations of rotor systems, Tesis doctoral, University of Technology, Lappeenranta, Finland, 2008.
 3. Andrei D. Polyanin, Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, Chapman & Hall/CRC, 2002.
 4. Dowson, D., Higginson, G. R, Elasto-Hydrodynamic Lubrication, pp. 409-430 Printed in Great Britain, 1983.
 5. Pinkus, O., Sternlicht, B., Theory of Hydrodynamic Lubrication, McGraw Hill Book Company, pp. 41 -46-New York, 1961.
 6. Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
 7. Irla Mantilla, Salomé González, Simulación numérica de la cavitación en cojinetes mediante elementos finitos y el algoritmo de Uzawa, UPGC- España, 2010.