Estabilidad de soluciones de una ecuación diferencial no-lineal

Armando Bernul (*)

Resumen

Estudiamos una ecuación diferencial ordinaria no-lineal. Esta ecuación posee n soluciones las cuales son alternadamente asintóticamente estables e inestables. La importancia de esta ecuación es que puede ser utilizada para modelar (i.e. interpretar, comprender) procesos en los cuales un aparato de medición interactua con un sistema físico cuyos parámetros característicos son funciones continuas y sin embargo el aparato detecta (i.e. mide) sólo valores discretos de estos parámetros.

Abstract

We study an ordinary non-linear differential equation. This equation possesses n solutions which are alternatively, asymptotically stable and unstable. The study of this equation is important because it can be used to simulate processes in which a measure device interacts with a physical system having continuous characteristic parameters, however the equipment detects only a set of discrete values.

INTRODUCCION

En este trabajo estudiamos el comportamiento del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial no-lineal. La principal característica de estas soluciones es que son alternadamente asintóticamente estables e inestables. Esta característica puede ser utilizada para entender procesos de interacción de sistemas físicos con aparatos de medición, resultando de la medición de cierta variable un conjunto discreto de valores, y sin embargo el modelo teórico prevee el caracter continuo de dicha variable.

La ecuación diferencial la obtenemos al derivar el determinante de una matriz $n_x n$. El número total de soluciones (asintóticamente estables e inestables) es n. Los cofactores del desarrollo de este determinante son los determinantes de las matrices de Vandermonde. Esta característica será usada para encontrar propiedades interesantes de las soluciones.

(*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Física.

La ecuación diferencial que estudiaremos es de la forma:

$$\alpha_1 (u - f_2)(u - f_3) \dots (u - f_n)(\dot{u} - \dot{f}_1) + \alpha_2 (u - f_1)(u - f_3) \dots (u - f_n)(\dot{u} - \dot{f}_2) + \dots$$

$$+ \alpha_n (u - f_1)(u - f_2) \dots (u - f_{n-1})(\dot{u} - \dot{f}_n) = \gamma \prod_{i=1}^{n} (u - f_i)$$

donde u = u(t) es la función incógnita de la ecuación, $\in [t_o, \infty>$ es la variable independiente, $f_1 = f_1$ (t) son funciones arbitrarias de t, α_i son constantes arbitrarias.

LA ECUACION DIFERENCIAL Y SUS SOLUCIONES

Sea la ecuación diferencial ($n \geq 3$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ \ln(u - f_1) & \ln(u - f_2) & \dots & \ln(u - f_n) \end{vmatrix} = \gamma \qquad (1)$$

donde $u = u(t)$, $f_i = f_i(t)$, $t \in [t_o, \infty>$ y $a_i \in \mathbb{R}$. Asumimos que:

$$a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \dots > a_2 > a_1 \qquad (2)$$

Si desarrollamos el determinante obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ \ln(u - f_1) & \dots & \ln(u - f_n) \end{vmatrix} = \sum_{j=i}^{n} \alpha_j (-1)^{j+1} \, ln\,(u - f_j) \qquad (3)$$

donde α_i son los cofactores de la matriz dada, o sea:

$$\alpha_j = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_{j-1} & a_{j+1} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_{j-1}^{n-2} & a_{j+1}^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Pero este determinante es el de la matriz de **Vandermonde**. En el apéndice I se demuestra que:

$$\alpha_j = \prod_{1 \le i < k \le n-1} (x_k - x_i) = \prod_{1 \le i < k \le n-1} (a_k - a_i) \Rightarrow \alpha_j > 0$$

usando la condición (2). Luego de (3):

$$\sum_{j=1}^{n} |u - f_i| \ \alpha_j (-1)^{j+1} = ln \ \{ \prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \} \qquad (4)$$

Usando (4) y (3) en (1):

$$[ln \ (\prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j})]^{o} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j}} \ \prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j})^{o} = \gamma \qquad (5)$$

y por lo tanto (ver apéndice II):

$$\{ \alpha_1 \frac{\dot{u} - \dot{f_1}}{u - f_1} + \alpha_2 \frac{\dot{u} - \dot{f_2}}{u - f_2} + \dots \alpha_n \frac{\dot{u} - \dot{f_n}}{u - f_n} \} = \gamma \qquad (6)$$

o equivalentemente:

$$\{ \alpha_1 (u - f_2) (u - f_3) \dots (u - f_n) (\dot{u} - \dot{f_1}) + \alpha_2 (u - f_1) (u - f_3) \dots (u - f_n) (\dot{u} - \dot{f_2}) + \dots$$

$$\dots + \alpha_n (u - f_1) (u - f_2) \dots (u - f_{n-1}) (\dot{u} - \dot{f_n}) \} = \gamma \prod_{i=1}^{n} (u - f_i) \qquad (7)$$

que fue la ecuación mencionada en la introducción.

PROPOSICIÓN 1. u = f_i son soluciones de (7).

Demostración. Probemos ahora que u = f_i es solución de la ecuación diferencial (7). Si u = f_i $\forall$ i = 1, . ., n, entonces u = f_i.

De este modo en (7) tenemos:

$$\{\alpha_1 . 0 + \alpha_2 . 0 + \ldots + \alpha_i (u - f_i)(u - f_2) \ldots (u - f_{i-1})(u - f_{i+1}) \ldots$$

$$\ldots (u - f_n)(\dot{u} - \dot{f}_i) + \ldots\} = 0$$

y por otro lado:

$$\gamma \prod_{j=1}^{n} (u - f_j) = 0$$

con lo cual se verifica que u = f_i es solución de (7) $\forall$ i.

Observando la ecuación (5) notamos que:

$$\dot{u} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{u - f_j} = \gamma + \sum_{j=1,}^{n} \frac{\alpha_j f_j}{u - f_j}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u} = \frac{\gamma + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j f_j}{u - f_j}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{u - f_j}} \tag{8}$$

ANALISIS DE LAS SOLUCIONES

Analicemos ahora las soluciones u_i = f_i. Integrando (5) obtenemos:

$$ln \{ \prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} \} = \gamma t + \beta , \; t_o = 0 \Rightarrow \prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1} \alpha_j} = A e^{\gamma t} \tag{9}$$

Primeramente haremos un análisis heurístico de dichas soluciones, luego haremos una demostración rigurosa de sus propiedades.

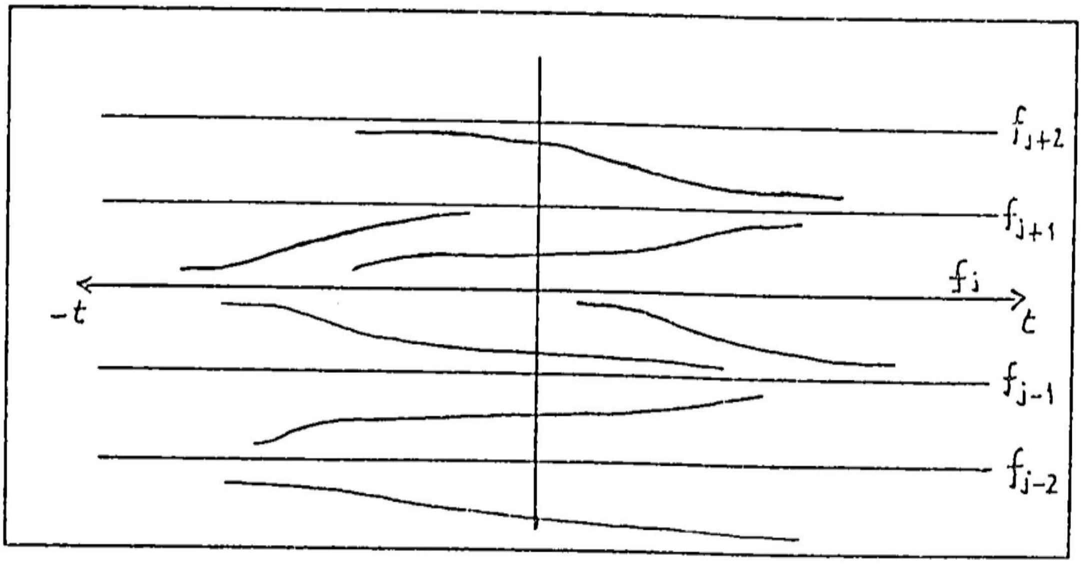
Supongamos en (9) que $\gamma < 0$; si $t \to \infty \Rightarrow A e^{\gamma t} \to 0$, entonces

$$\prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1}\alpha_j} \to 0 \Rightarrow |u - f_j| \to 0 \quad \text{siempre que} \quad (-1)^{j+1}\alpha_j > 0.$$

Como por definición $\alpha_j > 0$ entonces debemos tener que $(-1)^{j+1} > 0$, de lo cual se deduce que $|u - f_j| \to 0$ siempre que j sea impar.

Entonces las soluciones $u = f_j$ con j impar son asintóticamente estables para $t > 0$. Si $t \to -\infty \Rightarrow A e^{\gamma t} \to \infty$ entonces $\prod_{j=1}^{n} |u - f_j|^{(-1)^{j+1}\alpha_j} \to \infty$ entonces $|u - f_j|^{(-1)^{j+1}\alpha_j} \to 0$ si $(-1)^{j+1}\alpha_j < 0 \Rightarrow (-1)^{j+1} < 0$, debiendo j ser par entonces $|u - f_j| \to 0 \Rightarrow u = f_j$ con j par son asintóticamente estables para $t < 0$.

Geométricamente tenemos:



Resumiendo:

Para $t > 0$, $u = f_j$, j impar y $t < 0$, $u = f_j$, j par son asintóticamente estables.
Para $t > 0$, $u = f_j$, j par y $t < 0$, $u = f_j$, j impar son asintóticamente inestables.

Probemos esto más rigurosamente; para ello hagamos uso de las definiciones de estabilidad asintótica e inestabilidad según Liapunov.

Definición 1. Sea un sistema dado de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{y}_i = g_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

donde $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_k}$, i, k = 1, 2, . . ., n, existen y son continuas. Sea además $\phi_i(t)$ la solución de este sistema que para $t = t_o$ satisface:

$$\phi_i(t_o) = \phi_i^o, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

La solución $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, del sistema de ecuaciones diferenciales se dice que es **estable** según Liapunov si para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists$ un $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que para cualquier solución $y_i(t)$ del sistema dado, cuyos valores en $t = t_o$ son tales que:

$$|y_i(t_o) - \phi_i| < \delta(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

obtenemos que: $|y_i(t) - \phi_i(t)| < \varepsilon, \forall\, t \geq t_o$ (es decir que las soluciones que son próximas según los valores iniciales permanecen próximas para todo $t \geq t_o$).

Si además la solución $\varphi_i(t)$, i = 1, 2, . . ., n satisface:

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0$$

entonces la solución $\varphi_i(t)$ es llamada **asintóticamente estable**.

Si en cambio, para cualquier $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño no se cumple que:

$$|y_i(t) - \phi_i(t)| < \varepsilon$$

al menos para alguna solución $y_i(t)$, entonces la solución $\varphi_i(t)$, i= 1, 2, . . ., n es llamada **inestable**.

PROPOSICIÓN 2. Si $\gamma < 0$, $t > 0$, $t_0 = 0$, j impar, $\alpha_j > 0$, entonces $u = f_j$, j = impar, es una solución asintóticamente estable.

Demostración. Supongamos que $|u - f_j| < \delta_e$ entonces como:

$$f_j > f_{j-1} \ \forall \ j, \Rightarrow |u - f_1| < \delta_e + |f_j - f_1| \tag{9}$$

$$\Rightarrow |u - f_j|^{\alpha_j} = \frac{A\, e^{\gamma t}}{|u - f_1|^{\alpha_k} \ldots |u - f_{j-1}|^{\alpha_{j-1}} \, |u - f_{j+1}|^{\alpha_{j+1}} \ldots |u - f_n|^{\alpha_n}}$$

$$< \frac{A}{\prod_{k=1}^{n} |u - f_k|^{\alpha_k}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{A}{|u - f_k|^{\alpha_k}}, \ k \neq j$$

$\forall$ j =impar.

Pero de (9): $\delta_e < |u - f_1| < \delta_e + |f_j - f_1| \Rightarrow \dfrac{1}{|u - f_1|} < \dfrac{1}{\delta_e} < \prod_{k=1}^{n} A \cdot \dfrac{1}{\delta_e^{\alpha_k}}$

$= A \cdot \dfrac{1}{\delta_e^{\Sigma' \alpha_k}}$, pero $\sum_{k \neq j} \alpha_k = -\alpha_j$ (ver apéndice III)

$$= \frac{A}{\delta_e^{-\alpha_j}} = A\, \delta_e^{\alpha_j} \Rightarrow |u - f_j| < A^{1/\alpha_j}\, \delta_e \tag{10}$$

Podemos normalizar, o sea poner A = 1. Entonces basta definir $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ y así para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists \ \ \delta_e = \varepsilon > 0$ de modo tal que si:

$|u - f_j| < \delta_e \ \Rightarrow \ |u - f_j| < \varepsilon$ para todo j impar, de acuerdo a (10).

Pero además, como $|u - f_j| = \dfrac{e^{\gamma t/\alpha_j}}{\left(\prod_{k-1}^{n} |u - f_k|^{\alpha_k} \right)^{\alpha_j}}$ $k \neq j$, $\forall$ j impar, $\alpha_j > 0$

entonces $\lim\limits_{t \to \infty} |u(t) - f_j(t)| = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{e^{\gamma t/\alpha_j}}{\left(\prod_{k=1}^{n} |u - f_k|^{\alpha_k} \right)^{\alpha_j}} = 0 \ \ \forall \ \ j$ impar, $\gamma < 0$

pues el denominador siempre es finito y no nulo.

Luego $u = f_j$, j impar, $\gamma < 0$, $\forall$ j impar es una solución de (1) **asintóticamente estable**.

PROPOSICIÓN 3. Si $\gamma < 0$, $t > 0$, $t_o = 0$ y j par: $\alpha_j < 0$, entonces $u = f_j$, j = par es una solución inestable.

Demostración. Supongamos que $|u - f_j|_{t_o} < \delta_\epsilon$, veamos si $|u - f_j|$ permanece acotada $\forall$ $t > t_o$.

$$|u - f_j|^{\alpha_j} = \frac{A\, e^{\gamma\, t}}{\prod\limits_{k=1}^{n} |u - f_k|^{\alpha_k}} \Rightarrow |u - f_j| = e^{\gamma\, t/\alpha_j} . \prod_{k=1}^{n} |u - f_k|^{-\alpha_k/\alpha_j}, \quad \forall \quad k \neq j, \ \forall \ j$$

par tal que $\alpha_j < 0$.

Como $\gamma < 0$, $\alpha_j < 0 \Rightarrow \gamma\, t/\alpha_j > 0$ el producto es dominado por la función exponencial que siempre crece, luego:

$$|u - f_j| \geq \prod_{k=1}^{n} |u - f_k|_{t_o}^{-\alpha_k/\alpha_j} \quad \forall \quad k \neq j, \text{ j par, } \alpha_j < 0$$

Luego, para $\delta_\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, $\exists$ $\varepsilon > 0$ tal que $|u(t) - f_j(t)|$ sea acotado, es decir $|u(t) - f_j(t)| < \varepsilon$, que u (t) esté tan cerca como se quiera de f_j (t) $\forall$ $t > t_o$ con j par.

Luego $u = f_j$, $\forall$ j par, $\gamma < 0$ es una solución de (1) **inestable**.

De modo semejante, si j es par, $\alpha_j < 0$, para $t < t_o = 0$ se prueba que las soluciones: $u = f_j$ son soluciones asintóticamente estables del sistema (1) pues $|u - f_j|$ es proporcional a $e^{\gamma\, t/\alpha_j}$, $\gamma\, t/\alpha_j < 0$ y dado que la función exponencial es predominante una solución u cerca de f_j en t_o permanecerá siempre cerca para cualquier $t > t_o$. Igualmente se prueba que si j es impar, $\alpha_j > 0$ y para $t < t_o = 0$ las soluciones $u = f_j$ son soluciones inestables del sistema dado (1).

Demostremos la relación para el determinante de Vandermonde:

$$\Pi\ (x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Por inducción, para u = 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 \text{ se cumple.}$$

Supongamos que se cumple para n:

$$\Pi\ (x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(x_{n+1} - x_1)\,(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n)} \begin{vmatrix} (x_1 - x_{n+1}) & (x_2 - x_{n+1}) & \dots \\ x_1\,(x_1 - x_{n+1}) & x_2\,(x_2 - x_{n+1}) & \dots \\ x_1^2\,(x_1 - x_{n+1}) & x_2^2\,(x_2 - x_{n+1}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}\,(x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}\,(x_2 - x_{n+1}) & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{(x_{n+1} - x_1)\,(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \dots & x_j - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} & 0 \\ x_1 (x_1 - x_{n+1}) & x_2 (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n (x_n - x_{n+1}) & 0 \\ x_1^2 (x_1 - x_{n+1}) & x_2^2 (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^2 (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^2 (x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_1^{n-1} (x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1} (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^{n-1} (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1} (x_n - x_{n+1}) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{2n}}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 - x_{n+1} & x_2 - x_{n+1} & \dots & x_j - x_{n+1} & \dots & x_n - x_{n+1} & 0 \\ x_1 (x_1 - x_{n+1}) & x_2 (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n (x_n - x_{n+1}) & 0 \\ x_1^2 (x_1 - x_{n+1}) & x_2^2 (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^2 (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^2 (x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_1^{n-1} (x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1} (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^{n-1} (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1} (x_n - x_{n+1}) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & x_{n+1} \\ x_1 (x_1 - x_{n+1}) & x_2 (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n (x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_1^{n-1} (x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1} (x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^{n-1} (x_j - x_{n+1}) & \dots & x_n^{n-1} (x_n - x_{n+1}) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x_{n+1} - x_1)\dots(x_{n+1} - x_n)}$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & x_{n+1} \\
x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_j^2 & \dots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\
x_1^2(x_1 - x_{n+1}) & x_2^2(x_2 - x_{n+1}) & \dots & x_j^2(x_j - x_{n-1}) & \dots & x_n^2(x_n - x_{n+1}) & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{(x_{n+1} - x_1)\dots(x_{n+1} - x_n)}
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} \\
x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x_{n+1}^n
\end{vmatrix}
= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)
$$

Vemos que se satisface para n + 1, luego está probado.

APÉNDICE II

Demostrar que:

$$\frac{d(ln\ |x|)}{dt} = \frac{d(ln\, x)}{dt}$$

$$x^2 = |x|^2 \Rightarrow 2\,x\,\frac{dx}{dt} = 2\,|x|\,\frac{d(|x|)}{dt} \Rightarrow x\,\frac{dx}{dt} = |x|\,\frac{d|x|}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{x\dot{x}}{x^2} = \frac{|x|\,|\dot{x}|}{|x|^2} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = \frac{|\dot{x}|}{|x|} \Rightarrow \frac{d\,ln|x|}{dt} = \frac{d\,ln\,x}{dt}$$

l.q.q.d.

Sea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = c_{n1} + c_{n2} + \dots + c_{nn} = \sum_{j=1}^{n} c_{nj} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

Pero este determinante tiene dos filas iguales, luego:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1,\, k\neq j}^{n} \alpha_k = -\alpha_j$$

REFERENCIAS

[1] Valqui, H., *Apuntes del Seminario de Física Teórica', Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingenería, 1980.*

[2] Krasnov, Kiseliov, Makarenko, *Variable Compleja y Teoría de la Estabilidad, Ed. MIR.*

[3] Brauer & Nobel; *Differential Equations, Wiley, 1980.*