

Fenómenos Homoclínicos

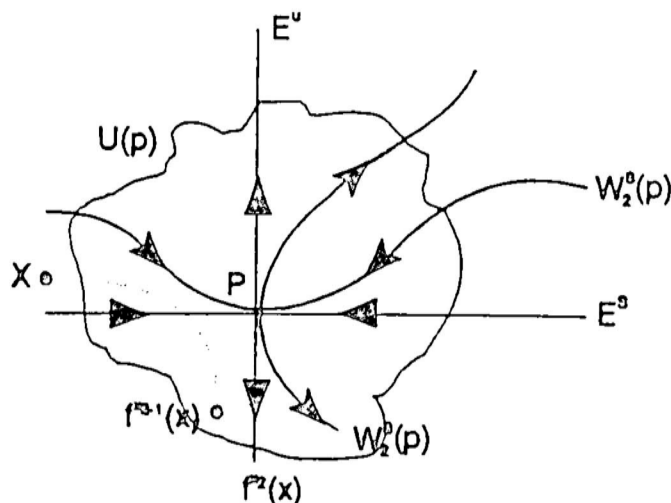
Felix Escalante Del Aguilla (*)

INTRODUCCION

La idea es ilustrar que si bien el comportamiento (Dinámica) de un difeomorfismo en la vecindad de un punto fijo hiperbólico, es bastante simple; esto no ocurre desde el punto de vista global.

Sea $f \in D_1 f^r(M)$, $r \geq 1$ $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de tipo silla (i.e. $\dim E^s \geq 1$ y $\dim E^u \geq 1$).

El teorema de Grobman - Hartman, asegura que f es localmente conjugado con df_p ; por lo tanto la dinámica de f en una vecindad $U(p)$ es bien entendida.



Esto es:

$$x \in W_\epsilon^u(p) \Rightarrow f^{-n}(x) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow +\infty$$

$$x \in W_\epsilon^s(p) \Rightarrow f^n(x) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow +\infty$$

$x \notin W_\epsilon^u(p) \cup W_\epsilon^s(p)$, entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$f^{-k_1}(x) \notin U(p), f^{k_2}(x) \notin U(p)$$

$$\text{pero } f^j(x) \in U(p) \quad \forall j \in \{-k_1+1, \dots, k_2-1\}$$

(*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemáticas.

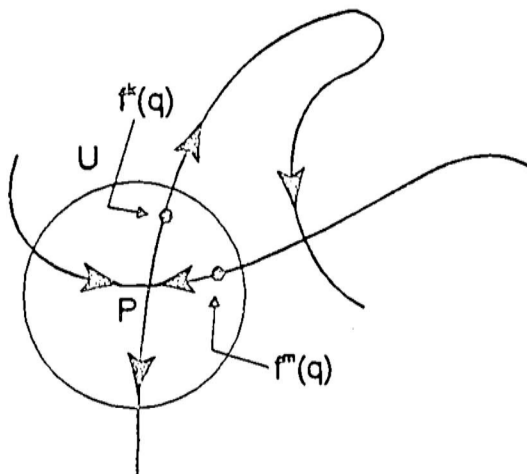
Surgen naturalmente varias preguntas:

- ¿Existen puntos en $U(p)$ que retornan después de un tiempo a U ?
- ¿Existen puntos periódicos $\neq p$ cuya órbita intercepta a U ?
- ¿Existen puntos no errantes en U ?

En efecto estas tres situaciones pueden ocurrir, cuando:

$$W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

Definición.- Si $q \in W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\})$, entonces q se denomina **punto homoclínico** asociado a p . Si $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son transversales en q , en este caso se dice que q es un punto homoclínico transversal; si no lo son entonces q es una tangencia homoclínica.



- $q \in W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\})$ implica que $f^k(q) \in W^u(p) \cap (W^s(p) \setminus \{p\})$ es decir también es homoclínico.
- Observemos que si q es un punto homoclínico asociado a p , entonces $\omega(q) = \alpha(q) = \{p\}$, y puesto que $W^s(p)$, $W^u(p)$ son f -invariantes, entonces $f^k(q)$ también es homoclínico para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, es evidente que la existencia de un punto homoclínico implica respuesta afirmativa a la primera pregunta.

Proposición

Sea $f \in D_1$, $f^r(M)$ y p un punto fijo (periódico) hiperbólico. Si q es un punto homoclínico asociado a p , entonces $q \in \Omega(f)$.

Este resultado es consecuencia directa del λ -Lema, que dice lo siguiente:

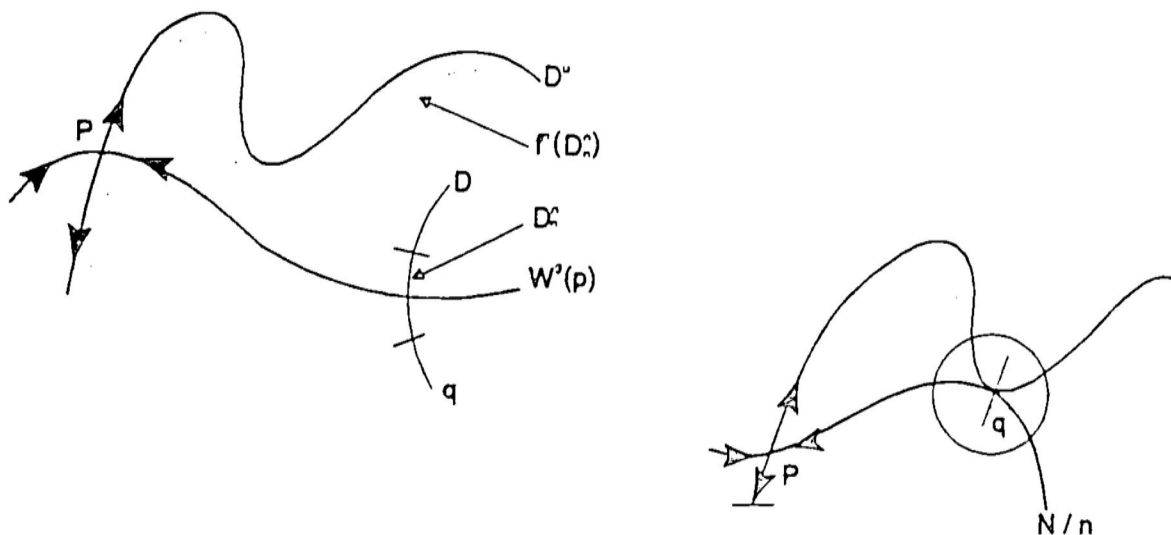
Proposición: (λ -Lema)

Sea $f \in D_1 f^r(M)$, p un punto fijo hiperbólico. Sea D un disco transversal a $W^s(p)$ en q , de dimensión igual al de E^u y D^u un disco compacto contenido en $W^u(p)$, con $p \in D^u$ y $\dim(D^u) = \dim(E^u)$.

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ existe un disco compacto $D_n \subseteq D$ con $q \in D_n$; satisfaciendo:

$$f^n(D_n) \text{ está } \varepsilon - c^1 - \text{próximo de } D^u$$

La siguiente figura ilustra el resultado.



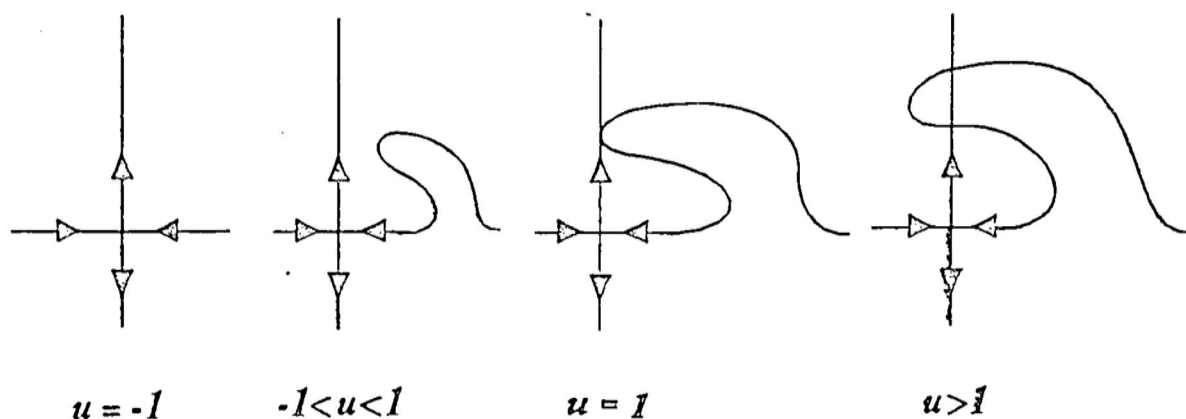
Prueba de la Proposición:

Sea p punto fijo hiperbólico de f y q , un punto homoclínico asociado. Sea $V(q)$ una vecindad cualquiera de q ; y escojamos $D \subset V$ un pequeño disco transversal a $W^s(p)$ en $q \in D$; con $\dim(D) = \dim(E^u)$. Por el λ -Lema, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_0}(D) \cap V \neq \emptyset$. Como $D \subset V$, entonces existe $z \in V$ tal que $f^{m_0}(z) \in V$; lo que implica que: $f^{-m_0}(V) \cap V \neq \emptyset$. Como V fue arbitraria se sigue que q es no errante, esto es $q \in \Omega(f)$.

Comentario:

Es intuitivo que la creación de una tangencia homoclínica, impide la estabilidad estructural ya que el conjunto $\Omega(f)$ puede "explotar".

Es posible construir una familia a un parámetro de difeomorfismos f_u , $u \in \mathbb{R}$ tal que f_{-1} es lineal, $\Omega(f_u) = \{(0,0)\}$ para $u_0 < u < 1$ y $\Omega(f_u)$ no es finito para $u \geq u_0$. En estas condiciones es claro que f_{u_0} no puede ser estructuralmente estable.



Para evitar este tipo de situaciones se considera el siguiente subconjunto de difeomorfismos:

$KS^r(M) = \{f \in D_i f^r(M) : \text{ todos los puntos periódicos son hiperbólicos y } \forall p, q \in \text{Per}(f), W^s(p) \text{ y } W^u(q) \text{ son transversales}\}$

El conjunto $KS^r(M)$ se denomina **conjunto de difeomorfismos de Kupka - Smale**.

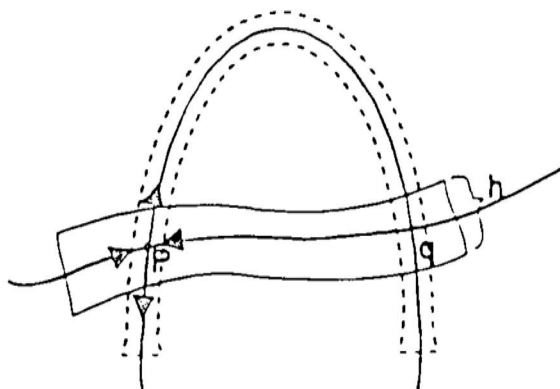
Teorema: (Kupka - Smale).- $KS^r(M)$ es C^r -residual en $D_i f^r(M)$; es decir es intersección de conjuntos abiertos y densos de $D_i f^r(M)$.

Finalmente observamos que si f es estructuralmente estable, entonces f es de Kupka - Smale.

El recíproco es falso; en efecto una rotación irracional en S^1 , R_α , $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un difeomorfismo de $K - S$, sin embargo no es estructuralmente estable. Veremos ahora que el caso de la existencia de un punto homoclínico transversal implica riqueza dinámica.

Sea p un punto fijo hiperbólico de f y q un punto homoclínico transversal asociado a p , como se muestra en la figura adjunta.

Sea \mathcal{R} un rectángulo, conteniendo el arco de variedad estable de p que une p con q , y digamos que tenga altura adecuada b .



Cuando iteramos \mathcal{R} por f obtenemos un rectángulo topológico cuya altura es muy superior a la de \mathcal{R} y cuyo ancho es muy inferior al de \mathcal{R} , después de un cierto número de iteraciones; esto es debido a la presencia del punto homoclínico transversal q y como consecuencia del λ - Lema.

Para un cierto k y para una altura suficientemente pequeña, obtenemos: $f^k(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ y obtenemos una situación presentada en la figura de arriba.

Nuestro objetivo, es entender la dinámica de f^k en el subconjunto maximal invariante $\Lambda \subset \mathcal{R}$; esto es el compacto $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-kn}(\mathcal{R})$.

Para hacer este estudio introducimos un modelo debido a Smale que describe un difeomorfismo en S^2 el cual es estructuralmente estable y tiene un número infinito de puntos periódicos.

HORSESHOE DE SMALE

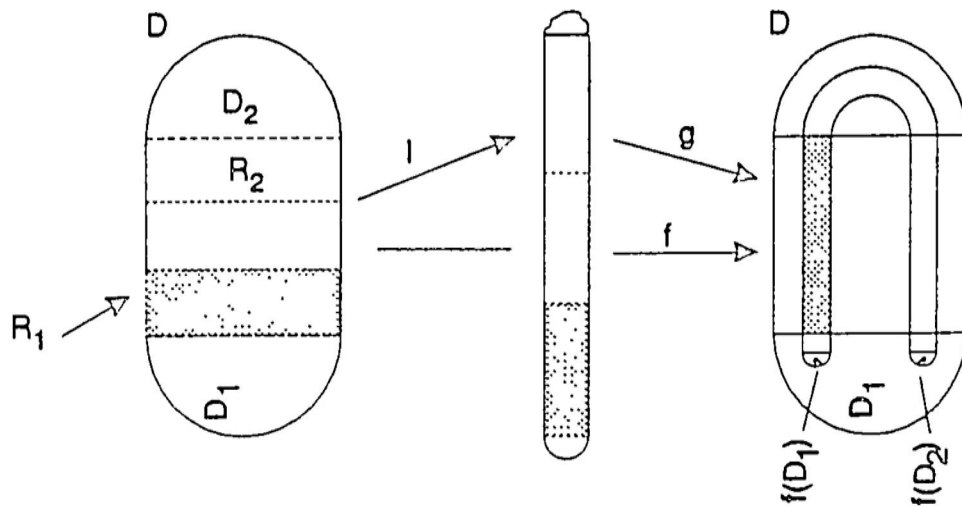
Vamos a describir $f: S^2 \rightarrow S^2$ difeomorfismo tal que el polo norte N sea una fuente hiperbólica, con $W^u(N) = \overline{H^+}$, es decir el hemisferio norte incluido el Ecuador.

Por lo tanto, si H_- representa el hemisferio sur, tendremos que $f(H_-) \subset H_-$.

Vamos entonces a describir f en H_- ; pero describir f en H_- , es equivalente a describir f en un disco topológico $D \subset \mathbb{R}^2$.

Sea $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / l(x,y) = (\lambda x, \mu y)$ donde $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, $\mu > 4$; entonces l es una contracción en las líneas horizontales y es una expansión en las líneas verticales.

Sea $g: D \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ que curva en U las líneas verticales; entonces $f = g \circ l$ transforma el disco D como se muestra en la figura:



Entonces observamos que $Q \cap f(Q)$ tiene dos componentes.

$$\text{Esto es: } Q \cap f(Q) = f(R_1) \cup f(R_2)$$

También es fácil ver $f|_{R_i}$ es afín (lineal), contrae horizontalmente en un factor $\lambda < \frac{1}{4}$ y expande verticalmente en un factor $\mu > \frac{1}{4}$.

Ahora en el disco $\hat{D}_1 = f(D_1)$ colocamos un punto fijo S hiperbólico atractor con $\hat{D}_1 \subset W^s(S)$.

Vamos ahora a analizar el conjunto $\Omega(f)$ de puntos no errantes de f .

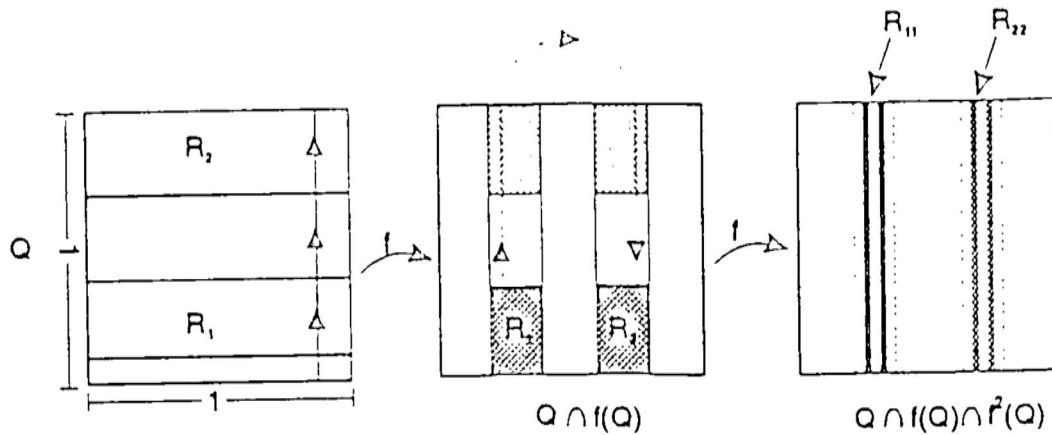
Si $x \in \bar{H}_+ \setminus \{N\}$, entonces x es errante, pues x está en la variedad inestable de una fuente.

Si $x \in \hat{D}_1 \setminus \{S\}$, entonces x es también errante; pues pertenece a la variedad estable de un pozo.

Si $x \in D_1 \Rightarrow f(x) \in \hat{D}_1$, luego x es errante. También, si $x \in D_2 \Rightarrow f(x) \in D_1$, luego otra vez x es errante.

Por lo tanto concluimos que si $x \in H_- \setminus \{S\}$, entonces x será no-errante (puede ser no errante) si la órbita de x , $O(x) \subset Q$. Así que si $x \in \Omega \setminus \{N, S\}$ entonces $x \in \Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$.

Descripción del Conjunto $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$.



Como $Q \cap f(Q)$ tiene 2 componentes rectangulares, vemos que $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ tiene 4 componentes rectangulares; y así sucesivamente.

Esquemáticamente tenemos:

$$Q; Q \cap f(Q) = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2; Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = \mathcal{R}_{11} \cup \mathcal{R}_{12} \cup \mathcal{R}_{21} \cup \mathcal{R}_{22}$$

Los índices son colocados de la siguiente manera:

$$f(\mathcal{R}_1) \cap Q = \mathcal{R}_{11} \cup \mathcal{R}_{12} \text{ y } \mathcal{R}_{11} \subset \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_{12} \cap \mathcal{R}_1 = \phi$$

Análogamente:

$$f(\mathcal{R}_2) \cap Q = \mathcal{R}_{21} \cup \mathcal{R}_{22} \text{ donde } \mathcal{R}_{22} \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{R}_2 = \phi$$

Esto es:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{11} &= \mathcal{R}_1 \cup f(\mathcal{R}_1), \mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_2 \cup f(\mathcal{R}_1) \\ \mathcal{R}_{12} &= \mathcal{R}_1 \cup f(\mathcal{R}_2), \mathcal{R}_{22} = \mathcal{R}_2 \cup f(\mathcal{R}_2) \end{aligned}$$

En general, dado cualquier sucesión $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N$ de unos (1) y dos (2) tenemos:

$$\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} = \mathcal{R}_{\sigma_1} \cap f(\mathcal{R}_{\sigma_2}) \cap \dots \cap f^N(\mathcal{R}_{\sigma_N})$$

(Está constituido de 2^N bandas verticales de ancho λ^N).

Afirmamos que $\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N}$ forma una sucesión anidada de intervalos cerrados no vacíos cuando $N \rightarrow \infty$.

Notemos también que:

$$\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} = \mathcal{R}_{\sigma_1} \cap f(\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N})$$

Por inducción podemos asumir que $\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N}$ es un sub-rectángulo no vacío, así que $f(\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N})$ consiste de dos rectángulos cerrados, uno en \mathcal{R}_1 y el otro en \mathcal{R}_2 . Luego $\mathcal{R}_{\sigma_1} \cap f(\mathcal{R}_{\sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_N})$ es un simple rectángulo cerrado.

Estos rectángulos son anidados, porque:

$$\mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} = \mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-1}} \cap f^N(\mathcal{R}_{\sigma_N}) \subset \mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-1}}$$

Por tanto concluimos que:

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{R}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N} \neq \emptyset$$

Sea ahora α cualquier línea horizontal tal que $\alpha \cap Q = \emptyset$. Denotemos por $[a, b] = \alpha \cap Q$.

Entonces $[a, b] \cap f(Q)$ es dos intervalos cerrados que es obtenido de $[a, b]$ removiendo tres (3) segmentos disjuntos.

Cuando hacemos $[a, b] \cap f(Q) \cap f^2(Q)$, el resultado es remover 3 segmentos disjuntos de cada subintervalo de $[a, b] \cap f(Q)$, y así sucesivamente. Entonces $[a, b] \cap \bigcap_{n \geq 0} f^n(Q)$ es un conjunto de Cantor K_1 .

Luego $\Lambda_+ = K_1 \times I$, donde I es un intervalo vertical.

Procediendo del mismo modo, iterando negativamente Q , obtenemos: $Q \cap f^{-1}(Q)$ es un conjunto constituido de dos rectángulos horizontales de ancho 1 y altura λ . De igual modo la imagen por f^{-1} , de cualquier rectángulo de altura d y ancho 1 (banda horizontal) da origen a dos bandas horizontales de altura $\lambda \cdot d$. De donde se desprende que $Q \cap f^{-1}(Q) \cap \dots \cap f^{-n}(Q)$ está constituido por 2^n bandas horizontales de altura λ^n .

Luego procedemos como en el caso anterior, y obtenemos similarmente que:

$$\Lambda_- = H \times K_2$$

donde H es un intervalo horizontal y K_2 es un conjunto de Cantor.

Por tanto $\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$ es un conjunto no vacío.

Es claro que $f(\Lambda) = \Lambda$ i.e Λ es f -invariante.

Ahora, a cada punto de Λ asociamos una sucesión infinita de $1'$ y $2'$, $\{a_n\}$ del siguiente modo:

$$a_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^n(x) \in \mathcal{R}_1 \\ 2 & \text{si } f^n(x) \in \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

Denotemos por $\Sigma(2) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in \{1, 2\}\} = \prod_{-\infty}^{\infty} \{1, 2\}$ esto es

$\Sigma(2)$ es el espacio $\prod \{1, 2\}$ con la topología producto; esta topología es metrizable, definiendo la métrica:

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|+1}} \delta_{a_n, b_n}$$

donde $\delta_{a_n, b_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n = b_n \\ 0 & \text{si } a_n \neq b_n \end{cases}$

Con esta métrica, $\Sigma(2)$ es un espacio compacto, perfecto y totalmente desconexo; esto es $\Sigma(2)$ es un conjunto de Cantor.

Hay un automorfismo natural "Shift" en $\Sigma(2)$ el cual es dado por:

$$\sigma : \Sigma(2) \rightarrow \Sigma(2)$$

$$(\sigma(a_n))_k = a_{k+1}$$

Teorema.- Por otro lado, la asignación

$$\pi : \Lambda \rightarrow \Sigma(2)$$

$$x \rightarrow (a_{n(x)})$$

es un homeomorfismo; además el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f|_{\Lambda}} & \Lambda \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Sigma(2) & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma(2) \end{array}$$

i.e. $\pi \circ (f|_{\Lambda}) = \sigma \circ \pi$, luego π es una conjugación entre $f|_{\Lambda}$ y σ . Por lo tanto, conociendo la dinámica de σ conoceremos la dinámica de $f|_{\Lambda}$.

Que π es un homeomorfismo resulta del hecho siguiente:

Si $x, y \in \Lambda$ y $d(\pi(x), \pi(y)) < \left(\frac{1}{2}\right)^k$, entonces $\pi(a_j(x)) = \pi(a_j(y))$, $\forall j \in \{-k, \dots, k\}$ lo que implica que x e y están en la misma banda horizontal de ancho λ^k ; de donde se deduce que $d(x, y) \leq \sqrt{2} \lambda^k$.

Corolario

Toda vecindad de p contiene infinitos puntos periódicos para f , puesto que esto sucede para σ .

REFERENCIAS

- [1] Jacob Palis / Welington de Melo "Introdução aos Sistemas Dinamicos".
- [2] Jacob Palis / Floris Takeus "Homoclinic Bifurcations and Hiperbolic Dynamics".
- [3] Z. Nizecki "Differentiable Dynamics".
- [4] W. Szlenk "An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems".