

Los puntos de de Boor de una curva seccionalmente polinómica

Juan Dueñas Béjar^()*

RESUMEN

*Un resultado clásico en matemática es que los polinomios de una sola variable de grado p son equivalentes a aplicaciones p -afines simétricas [Ramshaw '87]. Ramshaw aplicó este principio a la teoría de las curvas y superficies de Bézier y B-splines y a la aplicación p -afín simétrica de un polinomio de grado p lo llamó **blossom**.*

En este trabajo se representará una curva seccionalmente polinómica mediante los B-splines determinando los puntos de de Boor en función de los blossoms.

Introducción

El Diseño geométrico asistido por computadora (CAGD) está relacionado con la representación, manipulación y el diseño de objetos por computador tales como: curvas, superficies y sólidos.

Las herramientas matemáticas del CAGD son principalmente el análisis matemático, el análisis numérico, cálculo variacional, geometría

^(*) Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Escuela Profesional de Matemática.

diferencial, etc. Las principales aplicaciones se encuentran donde se necesitan métodos para describir matemáticamente los objetos que van a ser manufacturados por máquinas controladas por computador, como por ejemplo: en la industria aérea (diseño de alas, fuselajes de un avión, etc.), automotriz (diseño de las partes de un auto), etc. Otras aplicaciones se encuentran en los gráficos por computador, visualización científica (para describir los fenómenos físicos, geológicos, médicos, etc.).

En las aplicaciones del diseño de una curva o superficie a menudo se define especificando interactivamente un conjunto de puntos, denominados puntos de control o manejadores, los cuales nos determinan la forma de dicha curva o superficie de tal manera que dichas curvas o superficies se ajustan y se editan mediante los puntos de control. Estos elementos se tratan matemáticamente como entidades del tipo Bézier, B-splines, etc.

El objetivo de este trabajo es encontrar los puntos de control de una curva seccionalmente polinómica.

1. Curvas B-splines

Definición 1.1

La curva B-spline de grado p con respecto a un vector nodo $T = (t_1, \dots, t_{m+p+1})$, tal que $t_i < t_{i+p+1}$ es una curva polinomial por tramos y está definido:

$$F(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(u), \quad u \in [t_{p+1}, t_{m+1}], \quad d_i \in \mathbb{R}^d$$

$d = 1, 2, 3.$

Los puntos d_i se llaman *puntos de de Boor* o puntos de control. [Hoscket '93]

El polígono de *de Boor* es aquel polígono que se obtiene al unir los puntos de control consecutivos mediante segmentos.

Las funciones $N_i^p(u)$ son polinomios y se llaman *B-splines normalizados de grado¹ p sobre el vector nodo T* y se definen recursivamente:

¹ orden = $p + 1$.

$$N_i^0(u) := \begin{cases} 1 & ; \quad t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$N_i^r(u) := \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u), \quad 1 \leq r \leq p$$

Convención: $0/0 \equiv 0$

Ejemplo 1: Una curva B-spline cúbica sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$ cuyos puntos de control son: $d_1 = (6, 3)$, $d_2 = (7, 8)$, $d_3 = (12, 5)$, $d_4 = (9, 0)$, $d_5 = (1, 0)$, $d_6 = (0, 6)$, $d_7 = (3, 8)$, $d_8 = (4, 4)$ (ver figura 1).

Ejemplo 2: Una curva B-spline cúbica sobre el vector nodo $T = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ cuyos puntos de control son: $d_1 = (0, 0)$, $d_2 = (3, 9)$, $d_3 = (6, 3)$, $d_4 = (9, 6)$ (ver figura 2).

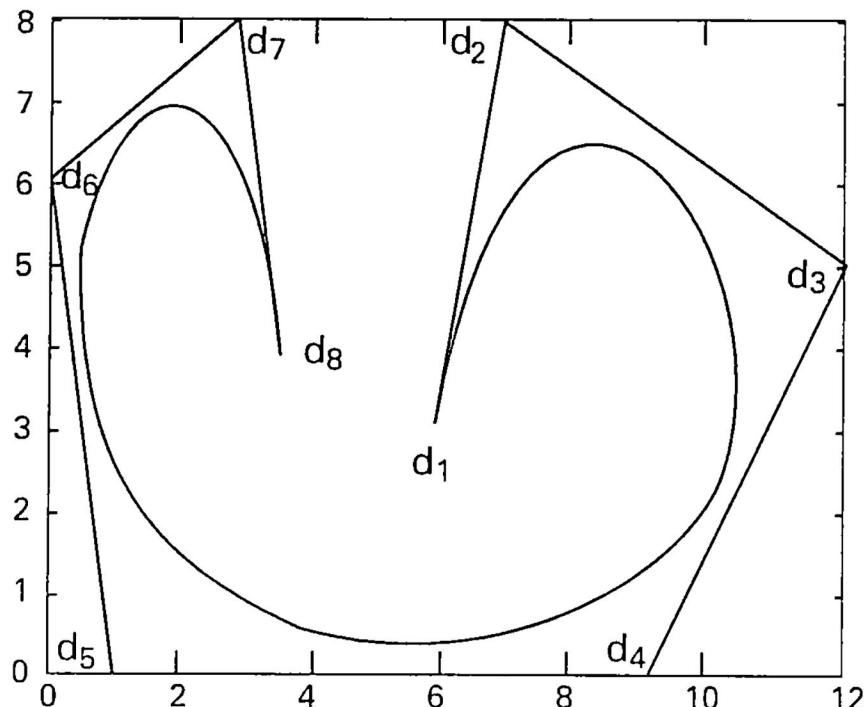


Figura 1.

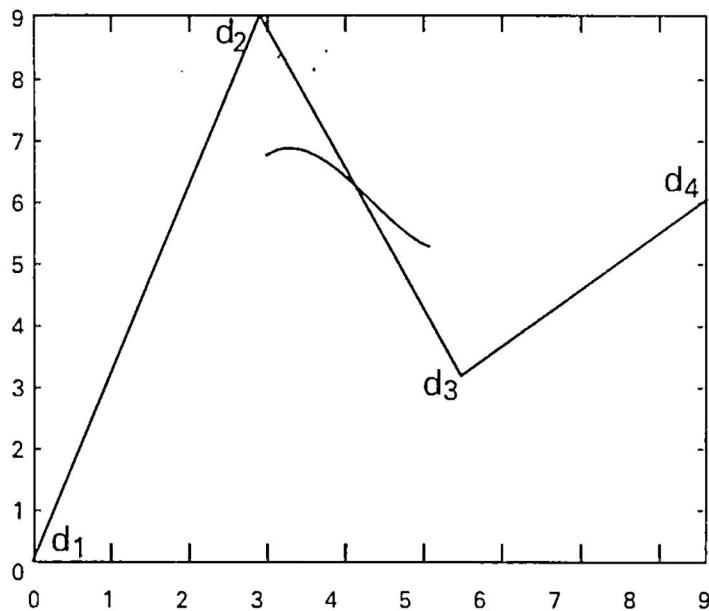


Figura 2.

Observación:

- 1) Si $t_1 = \dots = t_{p+1}$ entonces el primer lado del polígono es tangente a la curva en $t = t_1$. Además el punto d_1 está en la curva.
- 2) Si $t_{m+1} = \dots = t_{m+p+1}$ entonces el último lado polígono es tangente a la curva en $t = t_{m+1}$. Además, el punto d_m está en la curva.

2. Los blossoms

Teorema 2.1 (*Principio de los blossoms*)

Si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un polinomio de grado n definido por $F(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$ entonces existe una única función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que:

- i) f es multiafín, es decir:

Sean $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_m \in \mathbb{R}$:

$$f(u_1, \dots, u_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_i t_i, u_{j+1}, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^n a_i f(u_1, \dots, u_{j-1}, t_i, u_{j+1}, \dots, u_m)$$

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}: \sum_{i=1}^n a_i = 1$$

ii) f es simétrica, es decir:

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \quad \forall i, j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq m.$$

iii) $F(t) = \underbrace{f(t, \dots, t)}_{n \text{ veces}}$.

A la función f se dice forma polar o **blossom** de F .

La función F es la **forma diagonal** de f .

Al proceso de encontrar la forma polar se conoce como **blossoming** [Ramshaw '87].

Nota: Un teorema conocido en álgebra lineal es: Para cada forma cuadrática $F: V \rightarrow \mathbf{R}$ sobre un espacio vectorial V existe una única forma bilineal simétrica $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $F(v) = f(v, v)$. Este teorema es análogo al teorema 2.1 para polinomios de la forma:

$$F(v) = \sum_{i=1}^n c_{ii}^2 x_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_{ij} x_i x_j$$

donde $v = (x_1, \dots, x_n) \in V \subset \mathbf{R}^n$, $c_{ij} \in \mathbf{R}$, es decir polinomios multivariantes homogéneos de grado 2.

Teorema 2.2 (Determinación de los puntos de de Boor)

Sea $\mathbf{F}(u) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(u)$ una curva B-spline de grado p sobre el vector nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i = 1, \dots, m$. Sea \mathbf{F}_j la restricción \mathbf{F} en el intervalo no vacío $I_j := [t_j, t_{j+1}]$ y \mathbf{f}_j el blossom de \mathbf{F}_j . Entonces los puntos de *de Boor* \mathbf{d}_k están dados por:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{f}_j(t_{k+1}, \dots, t_{k+p}), \quad k = j - p, \dots, j.$$

Prueba: Ver [Dueñas '96]

Ejemplo de aplicación:

Sea la curva B-spline de grado 3, $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^8 \mathbf{d}_i N_i^p(t)$ sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6)$. Determinaremos los puntos de de Boor en términos de los blossoms.

Para $t_4 = 0 < t_5 = 1$ tenemos

$$d_k = f_4(t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}); \quad k = 4 - 3, \dots, 4$$

$$d_1 = f_4(t_2, t_3, t_4) = f_4(0, 0, 0),$$

$$d_2 = f_4(t_3, t_4, t_5) = f_4(0, 0, 1),$$

$$d_3 = f_4(t_4, t_5, t_6) = f_4(0, 1, 2),$$

$$d_4 = f_4(t_5, t_6, t_7) = f_4(1, 2, 4),$$

Para $t_8 = 5 < t_9 = 6$ tenemos

$$d_k = f_8(t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}); \quad k = 8 - 3, \dots, 8$$

$$d_5 = f_8(t_6, t_7, t_8) = f_8(2, 4, 5),$$

$$d_6 = f_8(t_7, t_8, t_9) = f_8(4, 5, 6),$$

$$d_7 = f_8(t_8, t_9, t_{10}) = f_8(5, 6, 6),$$

$$d_8 = f_8(t_9, t_{10}, t_{11}) = f_8(6, 6, 6).$$

Para determinar los puntos sobre la curva B-spline tenemos que usar la relación de recurrencia de los B-splines básicos. El algoritmo de *de Boor* es otra alternativa que nos permite determinar las coordenadas de un punto sobre la curva B-spline sin usar los B-splines básicos.

Teorema 2.3 (Algoritmo de *de Boor*)

Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(t)$ una curva B-spline de grado p sobre el vector

nodo

$T = (t_1, \dots, t_{k-p} \leq \dots \leq t_k < t_{k+1} \leq \dots \leq t_{k+p+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que:

- i) $t_i < t_{i+p+1}$, $i = 1, \dots, m$,
- ii) $p + 1 \leq m$.

Para $t \in [t_k, t_{k+1})$ consideramos la siguiente recurrencia:

$$d_i^0(t) = d_i, \quad i = k - p, \dots, k,$$

$$(*) \quad d_i^r(t) = w_i^r d_{i-1}^{r-1} + (1 - w_i^r) d_{i-1}^{r-1}, \quad r = 1, \dots, p, \quad i = k - p + r, \dots, k,$$

$$\text{donde } w_i^r(t) := \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i} & \text{si } t_i \neq t_{i+p-r+1} \\ 0 & \text{si } t_i = t_{i+p-r+1} \end{cases}$$

Entonces el valor de la función $F(t)$ se determina como:

$$F(t) = d_k^p(t).$$

Prueba:

Afirmamos que:

$$d_k^r = f_k(t_{i+1}, \dots, \underbrace{t_k, t, \dots, t}_r, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}), \quad r = 1, \dots, p, \quad (1)$$

donde f_k es el blossom de F_k (F_k es la restricción de F en el intervalo $I_k = [t_k, t_{k+1})$), satisface (*).

En efecto:

a) Como $t_k < t_{k+1}$ tenemos por el teorema 2.2 que:

$$d_i = f_k(t_{i+1}, \dots, t_{i+p}), \quad i = k - p, \dots, k,$$

$$d_i = \underbrace{f_k(t_{i+1}, \dots, t_{i+p})}_{d_i^0}, \quad i = k - p, \dots, k,$$

$$d_i = d_i^0, \quad i = k - p + 0, \dots, k.$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) = \\
 & \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} t_i + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} t_{i+p-r+1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \\
 & \stackrel{\downarrow}{=} \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_i, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \\
 & + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{i+p-r+1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r})
 \end{aligned}$$

(pues \mathbf{f}_k es afín)

$$\begin{aligned}
 & \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_i, t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \\
 & + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{k+1}, \dots, t_{k+p-r}, t_{i+p-r+1}) \\
 & = \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1} \\
 & = (1 - \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i}) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1} = \mathbf{d}_i^r.
 \end{aligned}$$

Luego obtenemos de (a) y (b):

$$\mathbf{d}_i^r = \mathbf{f}_k(t_{i+1}, \dots, t_k, t, \dots, t, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \text{ lo que verifica (*).}$$

$$\text{Por lo tanto: } \mathbf{d}_i^p = \mathbf{f}_k(t, \dots, t) = \mathbf{F}_k(t) = \mathbf{F}(t).$$

Ejemplo de aplicación:

Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{d}_i N_i^2(t)$ sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 2)$

donde: $\mathbf{d}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{d}_2 = (2, 3)$, $\mathbf{d}_3 = (4, 3)$, $\mathbf{d}_4 = (3, 1)$.

Calculamos $\mathbf{F}(0,8)$.

Tenemos: $t_3 = 0 < 0,8 < 1 = t_4$. En este caso es $k = 3$ y $p = 2$.

$$\mathbf{d}_i^0 = \mathbf{d}_i, \quad i = k - p, \dots, k.$$

$$\mathbf{d}_i^0 = \mathbf{d}_i, \quad i = 1, \dots, 3.$$

$$\mathbf{d}_i^r := \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+2+r} - t_i} \right) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+2+r} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1}, \quad k - p + r \leq i \leq k$$

$$\mathbf{d}_i^r := \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+3-r} - t_i} \right) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+3-r} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1}, \quad 1 + r \leq i \leq 3$$

$r = 1$:

$2 \leq i \leq 3$:

$$\mathbf{d}_2^1 = 0,2 \mathbf{d}_1^0 + 0,8 \mathbf{d}_2^0 = 0,2(2, 3) + 0,8(2, 3) = (1,8, 2,6)$$

$$\mathbf{d}_3^1 = 0,6 \mathbf{d}_2^0 + 0,4 \mathbf{d}_3^0 = 0,6(2, 3) + 0,4(4, 3) = (2,8, 3,0)$$

$r = 2$:

$$\mathbf{d}_3^2 = 0,2 \mathbf{d}_2^1 + 0,8 \mathbf{d}_3^1 = (2,6, 2,92).$$

Definición 2.1 Sea $\{e_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \mathbf{R}$ una sucesión estrictamente creciente tal que: $a = e_1 < \dots < e_{k+1} = b$. Una función $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ se dice función **seccionalmente polinómica de grado p** sobre $[a, b]$ respecto a $\{e_i\}_{i=1}^{k+1}$ si $F(t)$ es de la forma:

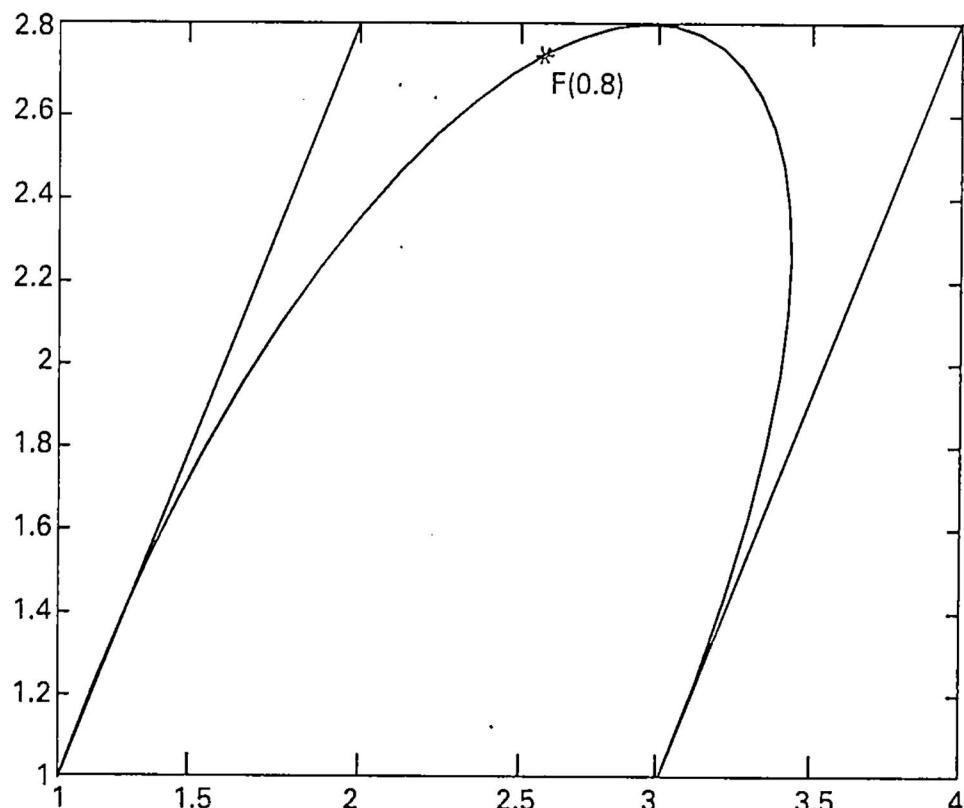


Figura 3.

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t); e_1 \leq t < e_2 \\ F_2(t); e_2 \leq t < e_3 \\ \vdots \\ F_k(t); e_k \leq t \leq e_{k+1} \end{cases} \quad \text{donde } F_i \text{ son funciones polinómicas de grado no mayor que } p$$

Cada e_i , $i = 1, \dots, k + 1$, se conoce como punto de quiebre de $F(t)$.

Nota: A las funciones seccionalmente polinómicas también se conocen como *spline*.

Definición 2.2 Sea $T = (e_1 < e_2 < \dots < e_k < e_{k+1})$. Definiremos $S_p^{[e_1, e_{k+1}], T}$ como el espacio vectorial de todas las funciones seccionalmente polinómicas de grado p tal que:

$F : [e_1, e_{k+1}] \rightarrow \mathbf{R}$ sea $(p - u_i)$ - veces continuamente diferenciable en los puntos de quiebre e_i , donde $i = 2, \dots, k$.

Teorema 2.4 (Curry-Schoenberg)

Sea el vector nodo $T = (e_1, \underbrace{\dots, e_1}_{p+1}, \dots, e_i, \underbrace{\dots, e_i}_{u_i}, \dots, e_{k+1}, \underbrace{\dots, e_{k+1}}_{p+1})$

donde:

i) u_i es la multiplicidad del nodo e_i tal que $u_i \leq p + 1$ donde $i = 1, \dots, k + 1$.

ii) $m = p + 1 + \sum_{j=2}^k u_j$.

Entonces el espacio vectorial $S_T^p = \{\sum_{i=1}^m d_i N_i^p / d_i \in \mathbf{R}\}$ de los B-spline

de grado p sobre el vector nodo T coincide con $S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$.

Prueba: Ver [Dueñas '96]

Observación: Este teorema nos indica que cualquier spline de grado p , es decir cualquier función seccionalmente polinómica de grado p sobre $e_1 < e_2 < \dots < e_{k+1}$ tal que es v_i veces continuamente en e_i , $i = 2, \dots, k$, puede representarse como un B-spline único de grado p sobre el vector nodo: $T = (e_1, \underbrace{\dots, e_1}_{p+1}, \dots, e_i, \underbrace{\dots, e_i}_{p-v_i}, \dots, e_{k+1}, \underbrace{\dots, e_{k+1}}_{p+1})$ donde cada nodo

interior e_i aparece con multiplicidad $u_i = p - v_i$.

Ejemplo:

Sea $F(t) = \begin{cases} (t, t^2) & , t \in [0, 1] \\ (t, t^3) & , t \in [1, 2] \text{ un spline de grado 3.} \\ (t, 12t - 16) & , t \in [2, 3] \end{cases}$

Expresaremos F como un B-spline.

Vemos: F es una función de grado 3 que está definida sobre $e_1 = 0 < e_2 = 1 < e_3 = 2 < e_4 = 3$ y es continua en $t = 1$ y es continuamente diferenciable en $t = 2$.

Luego por el teorema 2.4 el vector nodo será:

$$T = (0, 0, 0, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{3-0}, \underbrace{2, \dots, 2}_{3-1}, 3, 3, 3, 3),$$

$$T = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3).$$

Los puntos de *de Boor* son:

$$0 = t_4 < t_5 = 1: d_i = f_4(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}), \text{ si } 4 - 3 \leq i \leq 4.$$

Pero $F_4(t) = F|_{[t_4, t_5]} = (t, t^2)$. Luego su blossom es:

$$f_4(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, \frac{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}{3} \right)$$

$$d_1 = f_4(t_2, t_3, t_4) = f_4(0, 0, 0) = (0, 0),$$

$$d_2 = f_4(t_3, t_4, t_5) = f_4(0, 0, 1) = (1/3, 0),$$

$$d_3 = f_4(t_4, t_5, t_6) = f_4(0, 1, 1) = (2/3, 1/3),$$

$$d_4 = f_4(t_5, t_6, t_7) = f_4(1, 1, 1) = (1, 1).$$

$$1 = t_7 < t_8 = 2: d_i = f_7(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}), \text{ si } 7 - 3 \leq i \leq 7,$$

Pero $F_7(t) = F|_{[t_7, t_8]} = (t, t^3)$. Luego su blossom es:

$$f_7(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, t_1 t_2 t_3 \right)$$

$$d_4 = f_7(t_5, t_6, t_7) = (1, 1)$$

$$d_5 = f_7(t_6, t_7, t_8) = f_7(1, 1, 2) = (4/3, 2)$$

$$d_6 = f_7(t_7, t_8, t_9) = f_7(1, 2, 2) = (5/3, 4)$$

$$d_7 = f_7(t_8, t_9, t_{10}) = f_7(2, 2, 3) = (7/3, 12).$$

$$2 = t_9 < t_{10} = 3: d_i = f_9(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}), \text{ si } 9-2 \leq i \leq 9$$

Pero $F_9(t) = F|_{[t_9, t_{10}]} = (t, 12t - 16)$. Luego su blossom es:

$$f_9(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, 4[t_1 + t_2 + t_3] - 16 \right)$$

$$d_8 = f_9(t_9, t_{10}, t_{11}) = f_9(2, 3, 3) = (8/3, 16)$$

$$d_9 = f_9(t_{10}, t_{11}, t_{12}) = f_9(3, 3, 3) = (3, 20)$$

$$\text{Entonces } F(t) = \sum_{i=1}^9 d_i N_i^3(t).$$

REFERENCIAS

- /1/ **Dueñas, J.** (1996). *Curvas de Bézier y B-spline mediante los blossoms. Tesis de Licenciatura en Ciencias con mención en Matemática. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú.*
- /2/ **Farin, G.** (1993). *Curves and surfaces for computer aided geometric design. Academic Press Inc., San Diego.*
- /3/ **Hoschek, J., Lasser D.** (1993). *Fundamentals of computer aided geometric design. A K Peters Ltd. Wellesley, Massachusetts.*
- /4/ **Ramshaw, L.** (1987). *Bézier and B-splines as multiaffine maps in: Theoretical Foundation of Computer Graphics and CAD. Springer, New York. 757-776.*