El Movimiento Browniano con Reflexión como un Problema de Martingala

Herberth Paucar Romero, Gonzalo Panizo García †
IMCA, Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, Calle Los Biólogos 245 Urb. San Cesar, La Molina, Lima 12, Perú
†*gonzalo.panizo@gmail.com*

Recibido el 10 de Abril del 2018; aceptado el 10 de Mayo del 2018

Este trabajo aborda el problema de la construcción del Movimiento Browniano Reflejado (RBM) en $[0, 1]$, inicio de caminos aleatorios reflejados reescalados. Usando el método del problema de Martingala, se demuestra que tales procesos convergen débilmente a RBM.

Palabras claves: RBM, problema de Martingala, caminos aleatorios.

This work addresses the question of the construction of the Reflected Brownian Motion (RBM) in $[0, 1]$, begining of rescaled reflected random walks. Using the Martingale Problem method it is proved that such processes converge weakly to RBM.

Keywords: RBM, Martingala problem, random walks.

1 Preliminares.

El Movimiento Browniano (MB) es uno de los procesos estocásticos más conocidos y con más aplicaciones en la investigación técnica y científica [1][2][3]. Para dar una descripción de su naturaleza, comenzamos mencionando que el MB es un proceso de Markov y puede ser descrito tanto por un generador infinitesimal $\mathcal{L} : C^2(\Re^d) \to C^1(\Re^d)$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

así como por un Kernel $(P_t)_{t\geq 0}$

$$E(f(X_t)|\Gamma_s) = P_{t-s}f(X_s) \ t \geq s \geq 0. \tag{2}$$

Ambas funciones están relacionadas, y puede hallarse una a partir de la otra usando la ecuación

$$\mathcal{L}f = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t f - f).$$

Existen varias formas de estudiar el Movimiento Browniano, entre los que están

- **Método de ecuaciones diferenciales parciales [4].**
  Como el proceso cuyo kernel es solución de la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial s}P(s,x) + \mathcal{L}P(s,x) = 0 \tag{3}$$

- **Método del problema de Martingala [5].**
  Como el proceso que satisface que la siguiente expresión es una martingala para todo $f \in C_0^2(\Re)$.

$$f(X_t) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)ds \tag{4}$$

El Movimiento Browniano con Reflexión (MBR) presenta una dificultad adicional, que es el comportamiento en el borde de un conjunto acotado. Los métodos mencionados arriba no abordan esa posibilidad, por lo cual es necesario trabajar con una técnica más general. Para tal fin en el presente artículo se usará el método del Problema de Submartingala [6], que es propicio para estudiar procesos que se desarrollan en subconjuntos limitados, en cuyos bordes pueden haber absorciones o reflexiones.

En primer lugar se definirán los dos métodos que se usan en el presente trabajo:

Sea Ω es el espacio $C([0,\infty[,\Re^d)$, $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ la filtración canónica.

Definición 1.0.1. *Dadas las funciones medibles y acotadas $a : [0,\infty[\times\Re^d \to S_d$ y $b : [0,\infty[\times\Re^d \to \Re^d$ y*

$$L_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

*Dado $x \in \Re^d$, una solución al **Problema de Martingala** para L_t(o para a y b) es una probabilidad P_x en (Ω, Γ) que satisface*

1. $P_x(X_0 = x) = 1,$
2. $f(X_t) - \int_0^t L_s f(X_s)ds$ *es una P_x- martingala para todo $f \in C_0^\infty(\Re^d)$.*

La definición anterior es muy útil porque permite construir procesos de Markov y procesos de difusión, pero presenta algunos problemas al estudiar procesos en regiones acotadas, especialmente en los bordes, es por ello que se suele definir un método menos exigente, cuyo planteamiento es el siguiente:

Definición 1.0.2. *Sea $\Omega = C([0,\infty[,\Re^d)$, $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ la filtración canónica y G un subconjunto abierto no vacío de $\Re^d$ al que asociamos una función $\phi : \Re^d \to \Re$ de manera que*

1. $\phi \in C_b^2(\Re^d)$,
2. $G = \{x \in \Re^d : \phi(x) > 0\}$ *y* $\partial G = \{x \in \Re^d : \phi(x) = 0\}$,
3. $|\nabla\phi(x)| \geq 1$ *en* ∂G.

Sean también las funciones

1. $a : [0,\infty[\times G \to S_d^+$ *continua y acotada,*
2. $b : [0,\infty[\times G \to \Re^d$ *medible y acotada,*
3. $\gamma : [0,\infty[\times \partial G \to \Re^d$ *continua, acotada y satisface* $\langle\gamma(t,x), \nabla\phi(x)\rangle \geq \beta > 0$ *en todo su dominio,*
4. $\rho : [0,\infty[\times\partial G \to [0,\infty[$ *continua y acotada.*

Definimos los operadores

$$L_u = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(u,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(u,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

y

$$J_u = \sum_{i}^{d} \gamma_i(u,x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Se dice que una probabilidad P en (Ω,Γ) resuelve el ***Problema de submartingala*** *en G para los coeficientes a, b, γ y ρ si :*

1. $P(X_t \in \overline{G}) = 1$ *para* $t \geq 0$,
2. $M_f(t) = f(t,X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_G(f_u + L_u f)(u,X_u)]du$ *es una $P-$submartingala para cualquier* $f \in C_0^{1,2}([0,\infty[\times\Re^d)$ *que satisface* $\rho f_t + J_t f \geq 0$ *en* $[0,\infty[\times\partial G$.

2 Fundamentación teórica.

Cuando el proceso se desarrolla en una región con frontera es conveniente empezar a analizar dicho proceso con el Problema de submartingala, ya que considera su comportamiento en el borde. Partiendo de la verificación del problema de submartingala, hay una forma de conseguir un resultado similar al Problema de martingala:

Theorem 2.1. *Sea P la solución del problema de submartingala. Existe una única función $\xi_0 : [0,\infty[\times\Omega \to [0,\infty[$ continua, no decreciente y no anticipante tal que $\xi_0(0) = 0$, $E(\xi_0(t)) < \infty$,*

$$\xi_0(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\partial G}(X_u)d\xi_0(u) \tag{5}$$

y

$$\begin{aligned} f(t,X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_G(Kf)(u,X_u)]du - \\ \int_0^t (\rho f_u + J_u f)(u,X_u)d\xi_0(u) \end{aligned} \tag{6}$$

es una $P-$martingala para todo $f \in F$. En particular si $f \in C_b^{1,2}([0,\infty[\times\Re^d)$ y $\rho f_u + J_u f \geq 0$ en $[0,\infty[\times\partial G$ entonces

$$\begin{aligned} f(t,X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_G(f_u + L_u f)(u,X_u)]du - \\ \int_0^t (\rho f_u + J_u f)(u,X_u)d\xi_0(u). \end{aligned} \tag{7}$$

es una $P-$martingala.

Proof. Ver [6] □

El análisis de procesos de difusión suele iniciar construyendo procesos en tiempo discreto (con saltos de estado en múltiplos de un $h > 0$) a los que se asocia funciones que asemejen los coeficientes de arrastre y de difusión de un proceso en tiempo continuo.

Definición 2.0.1. *Sea $(P^h)_{h>0}$ una familia de procesos con saltos en múltiplos de h, se definen los siguientes coeficientes(de error, difusión y arrastre.)*

$$\Delta^h(jh,x) = \frac{1}{h}\int \|y-x\|^{2+\alpha}\Pi_j^h(x,dy) \quad \alpha > 0.$$

$$a^h(jh,x) = \frac{1}{h}\int (y-x)\otimes(y-x)\Pi_j^h(x,dy)$$

$$b^h(jh,x) = \frac{1}{h}\int (y-x)\Pi_j^h(x,dy)).$$

Se extiende la definición anterior para cualquier tiempo $t \in [0,T]$

$$\Delta^h(t,x) = \frac{1}{h}\int \|y-x\|^{2+\alpha}\Pi_j^h(x,dy)$$

$$\textit{para } jh \leq t < (j+1)h.$$

$$a^h(t,x) = \frac{1}{h}\int (y-x)\otimes(y-x)\Pi_j^h(x,dy)$$

$$\textit{para } jh \leq t < (j+1)h.$$

$$b^h(jh,x) = \frac{1}{h}\int (y-x)\Pi_j^h(x,dy))$$

$$\textit{para } jh \leq t < (j+1)h.$$

Si dichos coeficientes cumplen adecuadas condiciones, se prueba que existen subsucesiones de dichos procesos que convergen débilmente a algún proceso:

Theorem 2.2. *Si se verifican las condiciones:*

1. *Sea* $\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\overline{G}}\Delta^h(t,x) = \Delta(h)$. *Si* $h \to 0$ *entonces* $\Delta(h) \to 0$,
2. *Existen constantes* $M < \infty$ *y* $c > 0$ *tal que* $\|b^h(t,x)\| > M \to \langle\nabla\phi(x), b^h(t,x)\rangle \geq c\|b^h(t,x)\|$,

3. *Para todo $\delta > 0$ existe una constante $M_\delta < \infty$ tal que $\|b^h(t,x)\| > M_\delta \to \phi(x) < \delta$,*

4. *Existe una constante $M < \infty$ tal que $\sup_{0\le t\le T}\sup_{x\in\overline{G}} a^h(t,x) \le M$.*

Entonces para cualquier compacto $K \subset \overline{G}$ la colección $\{P_x^h, h > 0 x \in \overline{G}\}$ es relativamente compacta. Además cualquier límite débil está concentrado en $C([0,T],\overline{G}) \subset D([0,T],\overline{G})$.

Proof. Ver [6]. □

Si ya se tiene probada la existencia de un proceso límite, y las funciones a, b, γ y ρ (las dos últimas solo actuan en la frontera) se relacionan adecuadamente, entonces se obtiene el problema de submartingala.

Proposition 2.3. *Si se cumplen las condiciones*

1. *$a^h \to a$ y $b^h \to b$ uniformemente en compactos de $[0,T]\times G$, con a y b coeficientes continuos de difusión y arrastre ,*

2. *Existen una función continua acotada $\rho(t,x) \ge 0$ y una función vectorial continua $\gamma(t,x)$ en $[0,T]\times\partial G$ tal que $\langle\gamma(t,y),\nabla\phi(y)\rangle = 1$. Sean $J_0 = \{(t,y) : \rho(t,y) = 0\}$, $J_1 = \{(t,y) : \rho(t,y) > 0\}$, ρ y γ están relacionadas con a^h y b^h de la forma:*

   (a) Dado $(t,y) \in J_1$ y $\epsilon > 0$ existen $h_0, \delta_0 > 0$ tal que si $|x-y| < \delta_0$, $|s-t| < \delta_0$, $h < h_0$ y $\langle\nabla\phi(x), a^h(s,x)\nabla\phi(x)\rangle < \delta_0 \to \|a^h(s,x)\| < \epsilon$ y $\|b^h(s,x) - \dfrac{\gamma(t,y)}{\rho(t,y)}\| < \epsilon$,

   (b) Dado $(t,y) \in J_1$ existen $\delta_0 > 0$ $M_0 < \infty$ tal que si $|x-y| < \delta_0$, $|s-t| < \delta_0 \to \|b^h(s,x)\| \le M_0$ $\forall h$,

   (c) Dados $(t,y) \in J_0$ y $M < \infty$ existen $h_0, \delta_0 > 0$ tal que si $|x-y| < \delta_0$, $|s-t| < \delta_0$, $h < h_0$ y $\langle\nabla\phi(x), a^h(s,x)\nabla\phi(x)\rangle < \delta_0 \to \|b^h(s,x)\| \ge M$,

   (d) Dados $(t,y) \in J_0$ y $\epsilon > 0$ existen $h_0, \delta_0 > 0$ y $N_0 < \infty$ de tal manera que si $|x-y| < \delta_0$, $|s-t| < \delta_0$, $h < h_0$ y $\|b^h(s,x)\| > N_0 \to \|\dfrac{b^h(s,x)}{\langle b^h(s,x),\nabla\phi(x)\rangle} - \gamma(t,y)\| < \epsilon$

y si además $h_n \to 0$, $x_n \to x$ y $P_{x_n}^{h_n} \Rightarrow P$. Entonces P tiene las siguientes propiedades

1. *$P(X_0 = x) = 1$*

2. *Para toda función f en $C_0^{1,2}([0,T]\times\overline{G})$ con $\rho\dfrac{\partial f}{\partial t} + \langle\gamma,\nabla f\rangle \ge 0$ en $[0,T]\times\partial G$, la expresión $f(t,X_t) - \int_0^t (f_s + L_s f)(s,X_s)\mathbb{1}_G(X_s)ds$ es una submartingala, donde $L_s f = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^d \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.*

Proof. Ver [6]. □

3 Construcción del MBR.

Sea un camino aleatorio η^n con transiciones en tiempos enteros y espacio de estados $\{0,1,...,n\}$, definido de manera que si el camino está en un estado i del subespacio $\{1,2,...,n-1\}$ entonces podrá saltar a los estados $i-1$ e $i+1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ en ambos casos, si está en el estado 0 podrá saltar al estado 1 con probabilidad 1 y si se encuentra en n saltará al estado $n-1$ también con probabilidad 1. A partir de este camino aleatorio se construye un proceso en tiempo continuo:

$$X^n : (\Omega,\Gamma,Q) \to D([0,T],\{0,1,2,...,n\}) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (8)$$

mediante la relación

$$X_t^n = \eta_k^n \text{ si } k \le t < k+1 \;,\; \forall\, k \ge 0,$$

con distribuciones

$$P^n = Q(X^n)^{-1} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

La matriz de transición de dicho proceso X^n es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y su generador L_n actua en las funciones $f : \{0,1,...,n\} \to \Re$ como:

$$(L_n f)(j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(j+1) - f(j)) + \frac{1}{2}(f(j-1) - f(j)) \\ \quad si\ j \in \{1,2,...,n-1\}; \\ f(1) - f(0)\ si\ j = 0; \\ f(n-1) - f(n)\ si\ j = n. \end{cases}$$

Haciendo un reescalamiento espacial del proceso anterior se obtiene

$$Y_t^n = \frac{X_t^n}{n},$$

con espacio de estados $E_n = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\}$.
Si además se reescala el tiempo en el factor n^2 se tiene el proceso

$$Y_{tn^2}^n, \quad (10)$$

cuyo generador $\mathcal{L}_n$ aplicado a las funciones $g : \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\} \to \Re$ da

$$(\mathcal{L}_n g)(x) = \begin{cases} n^2[\frac{1}{2}(g(x+\frac{1}{n}) - g(x)) + \\ \quad \frac{1}{2}(g(x-\frac{1}{n}) - g(x))]\ si\ x \in \{\frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\}; \\ n^2[g(\frac{1}{n}) - g(0)]\ si\ x = 0; \\ n^2[g(1-\frac{1}{n}) - g(1)]\ si\ x = 1. \end{cases}$$

De la colección de procesos $(Y^n)_{n\ge 0}$ seleccionamos la subcolección $(Y^{2^n})_{n\ge 0}$ debido a que nos permite construir una sucesión de procesos con espacios de estados crecientes y encajados

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq ....$$

Dados $G =]0,1[$ y $\partial G = \{0,1\}$, se verifica que la función

$$\begin{aligned} \phi \colon [0,1] &\to \Re \\ x &\mapsto x(1-x) \end{aligned}$$

determina bien la región $[0,1]$, en el sentido de que cumple:

$$]0,1[=\phi^{-1}(]0,\infty[),$$

$$\{0,1\}=\phi^{-1}(\{0\}),$$

$$|\phi'(0)|=|\phi'(1)|=1.$$

Debido a que para el proceso Y^{2^n} el espacio fue reescalado en el factor 2^n, se debe reescalar el tiempo en el factor $\frac{1}{h_n}=2^{2n}$ y se define la función de transición como:

$$\Pi_j^{h_n}(x,x+\frac{1}{2^n})=\Pi_j^{h_n}(x,x-\frac{1}{2^n})=\frac{1}{2}$$
$$si\ x\in\{\frac{1}{2^n},...,\frac{2^n-1}{2^n}\},$$

$$\Pi_j^{h_n}(0,\frac{1}{2^n})=1,$$

$$\Pi_j^{h_n}(1,\frac{2^n-1}{2^n})=1.$$

Luego se hallan los coeficientes de error, difusión y arrastre de los procesos en tiempo discreto (Definición 2.0.1):

$$\Delta^{h_n}(hj,x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\alpha n}} & \text{si } x\in\{\frac{1}{2^n},...,\frac{2^n-1}{2^n}\};\\ \frac{1}{2^{\alpha n}} & si\ x=0;\\ \frac{1}{2^{\alpha n}} & si\ x=1.\end{cases}$$

$$a^{h_n}(jh,x)=\begin{cases}1\ si\ x\in\{\frac{1}{2^n},...,\frac{2^n-1}{2^n}\};\\ 1\ si\ x=0;\\ 1\ si\ x=1.\end{cases}$$

$$b^{h_n}(jh,x)=\begin{cases}0\ si\ x\in\{\frac{1}{2^n},...,\frac{2^n-1}{2^n}\};\\ 2^n\ si\ x=0;\\ -2^n\ si\ x=1.\end{cases}$$

De ahora en adelante se simplificará la notación escribiendo $a^n(.,.)$ en lugar de $a^{h_n}(.,.)$ y de igual manera para b^{h_n} y Δ^{h_n}.
Se verifica que los coeficientes anteriores satisfacen las condiciones del Teorema 2.2:

1. $\Delta(n)=\sup_{0\le t\le T}\sup_{x\in[0,1]}\Delta^n(t,x)=\frac{1}{2^{\alpha n}}$ por lo tanto $\Delta(n)\to 0$ cuando $n\to\infty$,
2. Sean $c=M=1$ tal que si $\|b^n(t,x)\|>1$ (entonces $x\in\{0,1\}$) y por ello para $x=0$ tenemos $(1)(2^n)\ge(1)(2^n)$ y para $x=1$ $(-1)(-2^n)\ge(1)(2^n)$,
3. Para cualquier δ elijamos $M_\delta=1$ de manera que si $\|b^n(t,x)\|>1$ entonces $x\in\{0,1\}$ y $\phi(x)=0<\delta$,
4. Eligiendo $M=1$
obtenemos $\sup_{0\le t\le T}\sup_{x\in[0,1]}a^n(t,x)\le 1$.

Por lo tanto la colección de procesos $(Y^{2^n})_{n\ge 0}$ es relativamente compacta en $D([0,T],[0,1])$ y cualquiera de sus límites débiles está concentrado en $C([0,T],[0,1])$,es decir $\exists(k_n)\subseteq\mathbb{N}$ y $Y:(\Omega,\Gamma,Q)\to D([0,T],[0,1])$ tal que

$$Y^{2^{k_n}}\Rightarrow Y$$

con la distribución $P=QY^{-1}$ concentrada en $C([0,T],[0,1])$.
A continuación se comprueba que los coeficientes cumplen las condiciones de la Proposición 2.3:

1. Como $a^n=1$ y $b^n=0$ en $]0,1[$ la primera condición se cumple,
2. Sean $\rho=0$ y $\gamma(t,0)=1,\gamma(t,1)=-1$ funciones en $[0,T]\times\{0,1\}$ que cumplen la igualdad $\langle\gamma(t,y),\nabla\phi(y)\rangle=1$. Los conjuntos J_0 y J_1 serían respectivamente $[0,T]\times\{0,1\}$ y $\emptyset$
   (a) Se cumple pues $J_1=\emptyset$,
   (b) Se cumple pues $J_1=\emptyset$,
   (c) Se sabe que $(\phi'(x))^2=(1-2x)^2$, si elegimos $\delta_0\le\frac{1}{100}$ entonces los x para los que $|y-x|<\delta_0$ y $\langle\nabla\phi(x),a^h(s,x)\nabla\phi(x)\rangle<\delta_0$ deben estar a una distancia menor a $\frac{1}{100}$ de los bordes y pertenecer a $]\frac{9}{20},\frac{11}{20}[$, cosa que no se cumple. Por lo tanto por defecto se verifica el item,
   (d) Si $N_0=1$ con lo que $x\in\{0,1\}$ y por ello $\|\frac{b^h(s,x)}{\langle b^h(s,x),\nabla\phi(x)\rangle}-\gamma(t,y)\|=0$ cumpliéndose la condición.

Por lo tanto para todo f en $C_0^{1,2}([0,T]\times[0,1])$ con $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\ge 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(t,1)\le 0$, $t\ge 0$, la expresión

$$f(t,X_t)-\int_0^t(f_s+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(s,X_s)\mathbb{1}_{]0,1[}(X_s)ds \qquad (11)$$

es una $P-$ submartingala.

Como P está concentrada en $C([0,T],[0,1])$ la expresión (11) es una submartingala para $f\in C_0^{1,2}([0,T]\times\Re)$. Además una función $f\in C_0^{1,2}([0,\infty[\times\Re)$ restringida al dominio $[0,T]\times\Re$ pertenece a $C_0^{1,2}([0,T]\times\Re)$, por lo que para $t\in[0,T]$ (11) es una submartingala para $f\in C_0^{1,2}([0,\infty[\times\Re)$, y por ello P resuelve el problema de submartingala.

Observación. En el presente trabajo se eligió $\rho=0$ y $\gamma(0)=1$, $\gamma(1)=-1$, hecho que puede ser interpretado asegurando que el campo de velocidades en 0 es $+\infty$ y en 1 es $-\infty$, lo que explicaría el hecho de que en los bordes el proceso es reflejado inmediatamente. Si $\frac{\gamma}{\rho}$ fuera finito cabría la posibilidad que el proceso se quedara pegado un lapso en la frontera. Por ello, como los caminos o trayectorias son continuos, tocarán la frontera en tiempos aislados y por lo tanto una cantidad contable de veces hasta un tiempo finito T .

Debido al teorema 2.1 se puede hallar una función ξ_0 que solo aumenta cuando el proceso toca el borde $\{0,1\}$, de manera que

$$f(t,X_t) - \int_0^t [\mathbb{1}_{]0,1[}(f_u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(u,X_u)]du - \int_0^t J_u f(u,X_u) d\xi_0(u)$$

es una $P-$martingala para $f \in C_0^{1,2}([0,\infty[\times\Re)$.

Observación. Nótese que ya no se requieren ni $\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) \geq 0$ ni $\frac{\partial f}{\partial x}(t,1) \leq 0$, $t \geq 0$.

Fijando un $\omega \in C([0,\infty[\times[0,1])$, como ξ_0 es continua, no decreciente y solo puede aumentar en un conjunto contable de tiempos aislados (ver Observaciones precedentes), $\xi_0(.,\omega)$ es constante. Por ello, con f bajo las mismas condiciones que arriba se obtiene que

$$f(t,X_t) - \int_0^t [(f_u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(u,X_u)]du$$

es una $P-$martingala.

Hasta ahora se ha usado la teoría general, pero como el proceso se construyó a partir de procesos en tiempo discreto homogéneos (sus matrices de transición no dependen del tiempo), los resultados se pueden adaptar de manera que se obtiene que

$$f(X_t) - \int_0^t [(\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2})(X_u)]du$$

es una $P-$martingala para $f \in C_0^2(\Re)$.

Por lo tanto P es un proceso de Markov, mas aun es una difusión con generador $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$, que corresponde a un Movimiento Browniano, y se mueve en el intervalo $[0,1]$, reflejándose inmeditamente al tocar el borde $\{0,1\}$.

1. A.S.Sznitman. *Papers of Brownian Motion and Stochastic Calculus(ETH).* spring 2010.
2. D.Revuz, M.Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer Verlag, 1991.
3. G.A.Pavliotis. *Applied Stochastic Processes.* Imperial College London Press, 2009.
4. L.C.G.Rogers, D.Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales.* John Wiley & Sons, 1994.
5. D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan. *Multidimensional Difusion Processes.* Springer,1979.
6. D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan. *Diffusion Processes with boundary conditions.* Communications on pure and applied mathematics, XXIV 147-225, 1971.