Extensiones no ramificadas y ligeramente ramificadas

Ronald Mas Huamán[†]
Escuela Profesional de Matemática. Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
[†]*rmash@uni.edu.pe*

Recibido el 09 de Octubre del 2019; aceptado el 02 de Diciembre del 2019

En el presente artículo clasificamos las extensiones algebraicas de un cuerpo henseliano, es decir dado un cuerpo base K que es henseliano con respecto a una valuación no arquimediana v, cada extensión algebraica L/K puede ser clasificada a partir de su índice de ramificación (e) y su grado de clases residuales (f). Para mostrar el comportamiento de cada extensión algebraica clasificada, presentamos algunos ejemplos de extensiones algebraicas del cuerpo base $\mathbb{Q}_p$, que permiten analizar el comportamiento algebraico de cada una de ellas.
Palabras Claves: Cuerpos Henselianos, Extensiones algebraicas no ramificadas y ligeramente ramificadas, Extensiones algebraicas totalmente ramificadas y salvajemente ramificadas.

In this article we classify the algebraic extensions of a Henselian field, that is to say given a base field K that is henselian with respect to a non-archimedean valuation v, each algebraic extension L/K can be classified from its ramification index (e) and its degree of residual classes (f). To show the behavior of each classified algebraic extension, we present some examples of algebraic extensions of the base field $\mathbb{Q}_p$, which allow to analyze the algebraic behavior of each of them.
Keywords: Henselian field, unramified and tamely ramified extensions, totally and wildly ramified extensions.

1 Introducción

Es bien sabido, que cada extensión algebraica L/K con K un cuerpo henseliano proviene del cuerpo de descomposición de un polinomio y a la vez se tiene información del comportamiento algebraico de las raíces de dicho polinomio [1],[2].

La mayoría de los resultados en cuerpos valuados completos pueden ser derivados solo del lema de Hensel. Este lema es válido para un conjunto muy grande de cuerpos valuados no arquimedianos. Por ejemplo, sea (K,v) un cuerpo valuado no arquimediano y $(\widehat{K},\widehat{v})$ su compleción. Al considerar la clausura separable K_v de K en $\widehat{K}$ y el anillo de valuación $\mathcal{O}_v \subseteq K_v$ con ideal maximal ρ_v, que esta asociado a la restricción de $\widehat{v}$ en K_v,

$$K \subseteq K_v \subseteq \widehat{K},\ \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_v \subseteq \widehat{\mathcal{O}}.$$

El lema de Hensel se cumple tanto en el anillo $\mathcal{O}$ como en el anillo $\widehat{\mathcal{O}}$ siempre que K_v no sea completa. Si K_v es algebraicamente cerrado en $\widehat{K}$, por ejemplo si $car(K) = 0$ se tiene que:

$$\mathcal{O}/\rho = \mathcal{O}_v/\rho_v = \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\rho},$$

y si el polinomio primitivo $f(x) \in \mathcal{O}_v[x]$ se descompone sobre $\mathcal{O}_v/\rho_v$ en factores primos relativos $\overline{g}(x), \overline{h}(x)$ entonces por el lema de Hensel se tiene una factorización en $\widehat{\mathcal{O}}$

$$f(x) = g(x)h(x)$$

tal que $g \equiv \overline{g}\, mod\, \widehat{\rho}$, $h \equiv \overline{h}\, mod\, \widehat{\rho}$, $deg(g) = deg(\overline{g})$.

El cuerpo K_v es llamado la **henselización** del cuerpo K con respecto a v [3]. Este ofrece propiedades algebraicas relevantes de la compleción $\widehat{K}$.

En adelante K denota un cuerpo henseliano con respecto a una valuación no arquimediana v.

2 Extensiones no ramificadas

Una extensión L/K es **no ramificada** si la extensión l/k de cuerpos residuales es separable y $[L:K] = [l:k]$. En caso L/K sea una extensión infinita, esta es no ramificada si es unión de subextensiones finitas de K no ramificadas.

Se cumple que:

i) Dados L/K y M/K con $L, M \subset \overline{K}$. Si L/K es no ramificada entonces LM/M es no ramificada.

ii) La composición de dos extensiones no ramificadas de K es no ramificada.

Ejemplo 1: Sea $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})/\mathbb{Q}_2$, veamos que es no ramificada.

$$|a + b\sqrt{5}|_L = |N_{L/\mathbb{Q}_2}(a + b\sqrt{5})|_2^{1/2} = \text{máx}\{|a|_2, |b|_2\}.$$

Luego

$$\mathcal{O}_L = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}_2\} \text{ y } \rho_L = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in 2\mathbb{Z}_2\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} l &= \{a + b\sqrt{5} + \rho_L : a, b \in \mathbb{Z}_{\not{2}}\} \\ &= \{[0], [1], [\sqrt{5}], [1 + \sqrt{5}]\} \\ &\cong F_4 \end{aligned}$$

Por tanto $\mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$ es una extensión no ramificada de $\mathbb{Q}_2$ [4].

3 Extensiones ligeramente ramificadas

Sea L/K algebraica, la composición T/K de todas las subextensiones no ramificadas es llamada **subextensión máximal no ramificada** de L/K. Una extensión L/K

algebraica es **ligeramente ramificada si** l/k es separable y $([L:T],p)=1$ con $p=car(k)$.

En caso L/K sea infinita, cada subextensión finita L/T debe ser coprimo con p.

Se cumple que:

i) Dados L/K y M/K con $L, M \subset \overline{K}$. Si L/K es ligeramente ramificada entonces LM/M es ligeramente ramificada.

ii) La composición de dos extensiones ligeramente ramificadas de K es ligeramente ramificada.

Caracterización:

Una extensión L/K es ligeramente ramificada si y sólo si L/T es generado por radicales. Es decir, $L=T(\sqrt[m_1]{a_1}, \sqrt[m_2]{a_2}, ..., \sqrt[m_r]{a_r})$ tal que $(m_i,p)=1$.

Ejemplo 2: Sea $L=\mathbb{Q}_3(\sqrt{3})/\mathbb{Q}_3$, veamos que es ligeramente ramificada.

$$w(\sqrt{3})=\frac{1}{2}v_3(N_{L/\mathbb{Q}_3}(\sqrt{3}))=\frac{1}{2}.$$

Luego $e=(w(L^*):v(K^*))=2$ y $f=1$. Es decir $T=\mathbb{Q}_3$, por tanto $\mathbb{Q}_3(\sqrt{3})$ es una extensión ligeramente ramificada de $\mathbb{Q}_3$ [4].

4 Extensiones totalmente ramificadas y salvajemente ramificadas

Sea L/K algebraica, la composición V/K de todas las subextensiones ligeramente ramificadas es llamada **subextensión máximal ligeramente ramificada**.

Una extensión L/K algebraica es llamada **totalmente ramificada** si $T=K$ y **salvajemente ramificada** si no es ligeramente ramificada, es decir $V \neq L$ [5], [6] .

Si ξ es raíz primitiva p^m-ésima de la unidad, se cumple que:

i) $\mathbb{Q}_p(\xi)/\mathbb{Q}_p$ es totalmente ramificada de grado $\varphi(p^m)$.

ii) $Gal(\mathbb{Q}_p(\xi)/\mathbb{Q}_p \cong (\frac{\mathbb{Z}}{p^m\mathbb{Z}})^*$

Por otro lado, si $f(x)=x^2-a \in \mathbb{Q}_2[x]$ con $a \not\equiv 0\,(m\acute{o}d\,4)$. Entonces en $\mathbb{Q}_2$ el polinomio f tiene:

iii) Ninguna solución si $a \equiv 0\,(m\acute{o}d\,2)$; caso contrario

iv) dos soluciones cuando a es congruente a 1 módulo 8 y ninguna si no lo es.

Ejemplo 3: Hay un hecho adicional que es imperativo resaltar. Si bien las extensiones $\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$ y $\mathbb{Q}_2(\sqrt{7})$ son por derecho propio totalmente ramificadas, ello no ocurre con $L=\mathbb{Q}_2(\sqrt{3},\sqrt{7})=\mathbb{Q}_2(\sqrt{3}+\sqrt{7})$, extensión de grado 4. En efecto, de $\sqrt{3},\sqrt{7}\in L$ obtenemos $\sqrt{21}\in L$, lo cual a su vez implica $\mathbb{Q}_2(\sqrt{21})\subset L$. Recordar que

$$\mathbb{Q}_p(\sqrt{d_1})=\mathbb{Q}_p(\sqrt{d_2})\,\text{si y sólo si}\,\frac{d_1}{d_2}\in\frac{\mathbb{Q}_p^*}{\mathbb{Q}_p^{*2}}.$$

Luego, $\frac{5}{21}\sim 105$ y como $105\equiv 1\,mod\,8$ se tiene

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{5})=\mathbb{Q}_2(\sqrt{21})\subset L.$$

Esto muestra en particular que el cuerpo residual crece, es decir tenemos $f=f(L,\mathbb{Q}_2)>1$. Por otro lado, un cálculo directo conduce a

$$|1+\sqrt{3}|=|(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})|^{1/2}=|1-3|^{1/2}=2^{-1/2},$$

con lo cual aparece ramificación en L; es decir, tenemos $e=e(L,\mathbb{Q}_2)>1$. Como se debe tener $[L:Q_2]=4=ef$, concluimos la igualdad $e=f=2$, por tanto L es una extensión salvajemente ramificada de $\mathbb{Q}_2$ [4].

5 Conclusiones

1. Si L/K es una extensión algebraica no ramificada entonces $L=T$. Por tanto, toda extensión algebraica no ramificada es ligeramente ramificada.

2. Las extensiones algebraicas L/K se clasifican en extensiones ligeramente ramificadas y salvajemente ramificadas, por la conclusión anterior toda extensión no ramificada no es una extensión salvajemente ramificada.

3. Las composición de extensiones no ramificadas (respectivamente extensiones ligeramente ramificadas) es una extensión no ramificada (respectivamente es una extensión ligeramente ramificada), ello no ocurre con la composición de extensiones totalmente ramificadas como muestra el Ejemplo 3.

Agradecimientos

Este trabajo muestra resultados de la tesis de Maestría realizada en la PUCP y estudios de Doctorado en el IMCA. Agradezco a la facultad de ciencias de la UNI por permitir presentar mi trabajo de investigación.

1. Condori, Factorización de los polinomios sobre los número p-ádicos, Tesis de Maestria, Pontificia Universidad Católica del Perú (2001).
2. Lang, Teoría de números algebraicos, Addinson-Wesley (1970).
3. Jürgen Neukirch, Algebraic Number Theory (1999).
4. Ronald Mas, Raíces p-ádicas de la unidad, Tesis de Maestria, Pontificia Universidad Católica del Perú (2015).
5. Darrin Doud, Wild ramication in number field extensions of prime degree, Brigham Young University (2005).
6. Takeshi Saito, Wild ramification of schemes and sheaves, University of Tokyo (2010).