El rol de la convexidad en elasticidad finita

Fabián Flores Bazán (*)

Resumen

En esta nota presentamos algunas consecuencias de la falta de convexidad en un problema de elasticidad finita, asociado con las deformaciones de un sólido elástico, incomprensible, homogéneo e isotrópico. Se presenta también un resultado de existencia de soluciones para un problema del Cálculo de Variaciones en ausencia de convexidad.

INTRODUCCION

El propósito de este artículo es, de algún modo, justificar el estudio de problemas de minimización de funcionales del tipo integral que no son semicontinuas inferiormente en la topología débil (dentro de un espacio de Banach), lo que equivale a decir que la funcional a ser minimizada no es convexa en la variable donde aparece la derivada de mayor orden de la función de estado.

Funcionales que satisfacen las condiciones anteriores aparecen, por ejemplo, en elasticidad finita: el estudio del desplazamiento en un problema de valor de frontera asociada con deformaciones del tipo "anti-plane shear" (ver la definición más abajo) de un sólido homogéneo, isotrópico, incompresible y elástico. En este caso, puesto que la energía no es convexa (en el argumento del gradiente), sucesiones minimizantes del funcional pueden converger a una función límite no necesariamente una solución. Sin embargo, tal función límite será una solución de algún problema variacional asociado al original (ver [E-T]). Para una descripción en detalle del fenómeno presentado en esta situación citamos los trabajos [Gur-T], [Er].

A groso modo, uno puede intuir que debido a la falta de convexidad, las soluciones, de existir, no podrían ser soluciones clásicas (regulares) de la ecuación de Euler-Lagrange asociada (asumiendo que ésta pueda ser escrita). Evidentemente la falta de convexidad de la función integrando en la variable del gradiente da lugar a que las soluciones posean gradiente discontínuo.

(*) UNI, Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemáticas.

UN MODELO EN ELASTICIDAD FINITA

A continuación presentamos a grandes rasgos un modelo en elasticidad finita. Consideremos un cuerpo $\Omega \subset R^3$ elástico, homogéneo, isotrópico e incompresible. A causa de la isotropía e incompresibilidad la energía de esfuerzo W debe reducirse a una función de los dos primeros invariantes:

$$I = TrB \qquad II = \frac{1}{2} [(\mathrm{Tr}\, B)^2 - \mathrm{Tr}\, B^2]$$

del tensor de esfuerzo izquierdo Cauchy-Green $B = FF^t$, donde F es el gradiente de deformación. Nos limitamos a materiales para los cuales W es independiente de II, *i.e.* $W(I, II) = W(I)$. Asumiremos que Ω es un cilindro con generatriz paralela al eje x_3 y con sección transversal $\mathcal{R}$ suficientemente regular.

Definición.- Una deformación $f : \Omega \to R^3$ de la forma $f(x) = (x_1, x_2, x_3 + u(x_1, x_2))$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ es llamada *"anti-plane shear"*.

El correspondiente gradiente de deformación es $F = \nabla f$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{x_1} & u_{x_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Así, det F = 1, $I = 3 + |\nabla u|^2$.

EL PROBLEMA VARIACIONAL

Asumiendo que el desplazamiento u es prescrito sobre la frontera de $\mathcal{R}$: $u = g$ sobre $\partial\mathcal{R}$, el problema variacional es $y = (x_1, x_2)$:

$$\min_{u \in W^{1,p}(R)} \int_R W(3 + |\nabla u(y)|^2)\, dy + \int_R c(y)\, u(y)\, dy,$$

donde W es como antes, c representa la fuerza externa actuando sobre las caras laterales del cilindro Ω y

$$W_g^{1,p}(\mathcal{R}) = \{ u \in L^p(\mathcal{R}): u_{x_1},\ u_{x_2} \in L^p(\mathcal{R}),\ u = g \ \ sobre\ \ \partial\mathcal{R} \},$$

p es un número real mayor que 1 e indica el grado de crecimiento -más que lineal- de la función W en el infinito. Tal hipótesis garantiza que la funcional sea coercivo, i.e. que las sucesiones minimizantes admitan puntos límites en la topología débil de $W^{1,p}(\mathcal{R})$, ver [Bre].

Resultados de existencia de mínimo de funcionales dependiendo del gradiente se pueden encontrar en [A-T1, A-T2, A-T3, Ma, C1, C-P].

UN PROBLEMA VARIACIONAL DONDE APARECE EL OPERADOR DE LA LAPLACE

Las secciones anteriores fueron dedicadas a la descripción de un modelo de elasticidad finita, la cual justifica, matemáticamente, el estudio de las mismas. Entonces, se trata de encontrar condiciones suficientes a fin que el problema de minimización (no-convexo) admita soluciones. En esta dirección, sin presentar un modelo concreto, se enunciará un resultado de existencia de mínimo para el caso de una funcional con simetría radial y dependiente del laplaciano. Aquí $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

Hipótesis (H). Sea $I = [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. La función $c : \bar{I} \to R$ es tal que $r \to r^{n-1} c(r)$ está $L^{p'}(\underline{I})$ con p' siendo el exponente conjugado de $p > 1$. La función $b : \bar{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica

(h_1) b es $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - medible;
(h_2) $\xi \to b(r, \xi)$ es semicontinua inferiormente para casi todo r en I;
(h_3) Existe una constante positiva γ, tal que
$b(r, \xi) \geq \gamma |\xi|^p - \beta(r)$ donde la función $r \to r^{n-1} \beta(r)$ está en $L^1(I)$.

Teorema. *([C-F])* Sea b y c funciones que satisfacen la hipótesis (H) y sea λ no-negativo. Asuminos que la funcional $\int_\Omega b(|x|, \Delta u(x) - \lambda u(x))\, dx$ tiene un valor finito para algún u en $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ sobre $\partial\Omega$. Entonces el problema

$$\left.\begin{array}{l} \min \displaystyle\int_\Omega c(|x|)\, u(x)\, dx + \int_\Omega b(|x|, \Delta u(x) - \lambda u(x))\, dx \\ u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad on\ \partial\Omega \end{array}\right\} (P)$$

admite al menos una solución radialmente simétrica.

La demostración de este teorema se deduce demostrando que el problema convexificado (P^{**}) (que es el problema (P) con h^{**} en lugar de h, ver [E-T] admite al menos una solución radialmente simétrica. Entonces, de la solución radial encontrada de (P^{**}), nosotros construimos una función radial usando el teorema de Liapunov (ver [ce]) sobre el rango de una medida vectorial, que será una solución a nuestro problema.

Resultados de otro tipo pueden ser encontrados en [F1, F2, Ra, R1, R2, R3].

REFERENCIAS

[A-T1] G. Aubert, R. Tabraoui, *Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations ..., J. Diff. Eq., 33 (1979), 1-15.*

[A-T2] G. Aubert, R. Tabraoui, *Théorèmes d'existence en Optimisation non Convexe, Applicable Analysis, 18 (1984), 75-100.*

[A-T3] G. Aubert, R Tabraoui, *Sur une classe de problèmes différentiels non linéaires par une méthode variationnelle, Bolletino U.M.I., 7 3-B (1989), 739-757.*

[Bre] H. Brézis, *"Analyse Fonctionnelle", Masson, 1987.*

[C1] A.Cellina, *On minima of a functional of the gradient: sufficient conditions, Nonlinear Analysis: Theory Method and Applications, 20 Nº 4 (1993), 343-347.*

[C-F] A. Cellina, F. Flores, *Radially Symmetric Solutions of a class of problems of the Calculus of Variations without Convexity assumptions, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 9 Nº 4 (1992), 465-478.*

[C-P] A. Cellina, S. Perrota, *On Minima of Radially Symmetric Functionals of the Gradient, Preprint SISSA 1992.*

[Ce] L. Cesari, *"Optimization - Theory and Applications", Springer-Verlag, New York, 1983.*

[Er] J. L. Ericksen, *Equilibrium of bars, Journal of Elasticity, 5 (1975), 191-201.*

[E-T] I. Ekeland, R. Teman, *"Convex Analysis and Variational Problems", North-Holland, Amsterdam, 1976.*

[F1] F. Flores, *Existence theorems for a class of non convex problems in the Calculus of Variations, Journal of Optimization Theory and Applications, 78 Nº 1, (1993), 31-48.*

[F2] F. Flores, *On radial solutions for non-convex variational problems, Applicable Analysis, to appear.*

[F3] F. Flores, *The lack of lower semicontinuity implies non-existence of minimizer, Non-linear analysis: Theory Method and Applications, to appear.*

[Gur-T] M.E. Gurtin, R. Teman, *On the anti-plane shear problem in finite elasticity*, Journal of Elasticity, 11 (1981), 197-206.

[Ma] P. Marcellini, *A relation between existence of minima for non convex integrals and uniqueness for non strictly convex integrals of the Calculus of Variations*, in "Mathematical Theories of Optimization", Springer Lectures Notes in Mathematics, 979 (1983), 216-231.

[Ra] P. J. Rabier, *New Existence results for some nonconvex optimization problems*, Commun. in Partial Diff. Equa. 14 Nº 6 (1989), 699-740.

[R1] J. P. Raymond, *Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions en Calcul des Variations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 4 Nº 2 (1987), 169-202.

[R2] J. P. Raymond, *Existence Theorems in Optimal Control Problems without Convexity Assumptions*, Journal of Opti. Theory and Appl., 67 Nº 1 (1990), 109-132.

[R3] J.P. Raymond, *Existence theorems without convexity assumptions for optimal control problems governed by parabolic and elliptic systems*, Applied Mathematics and Optimization, 26 (1992), 36-62.