

Sucesión Espectral de Grothendieck en Homología de Grupos

Felipe Clímaco Ccolque Taipe

Instituto de Matemática y Ciencias Afines. Facultad de Ciencias.

Universidad Nacional de Ingeniería;

ccolque@imca.edu.pe

Recibido el 3 de Febrero de 2020; aceptado 22 de Setiembre de 2020

En este artículo se demuestra la existencia de la sucesión espectral homológica de Grothendieck. Dados K un grupo y N un subgrupo normal de K se establece una relación entre los grupos de homología de K , N y K/N , utilizando estos resultados.

Palabras Claves: Grupos de homología, K -módulos, sucesión espectral homológica de Grothendieck, lema de herradura, resolución proyectiva de un objeto en una categoría abeliana.

In this article, the existence of the homological version of Grothendieck spectral sequence is demonstrated. Given K a group and N a normal subgroup of K , a relationship between the groups of homology of K , N and K/N is established, using these results.

Keywords: Homology groups, K -modules, Grothendieck homological spectral sequence, horseshoe lemma, projective resolution of an object in an abelian category.

1 Introducción

Las sucesiones espectrales fueron introducidas por Jean Leray en 1946. Las sucesiones espectrales son herramientas fundamentales en topología algebraica, geometría algebraica [1], álgebra homológica, teoría de números, variedades complejas [2] y K -teoría.

Grothendieck introdujo una sucesión espectral que relaciona los funtores derivados de un funtor compuesto de dos funtores, y los funtores derivados de los factores. En el contexto de cohomología este resultado es probado en [3], [4], [5] y [6].

En este artículo, modificando la prueba dada en [3] y considerando [7], se consigue la prueba del resultado en el contexto homológico.

Por otro lado en [3], se probó el resultado siguiente:

Teorema 9.5 (Lyndon-Hochschild-Serre) Dada la sucesión exacta corta de grupos

$N \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} Q$ y dado un K -módulo A , existe una sucesión espectral $E = \{E_n(A)\}$ tal que

$$E_1^{p,q} = H^p(Q, H^{q-p}(N, A)) \Rightarrow H^q(K, A). \quad (1)$$

Es decir, la sucesión espectral E converge finitamente al grupo graduado asociado al grupo de cohomología $\{H^q(K, A)\}$, filtrado adecuadamente.

Para la prueba se utilizó como herramienta la sucesión espectral cohomológica de Grothendieck, la definición de grupo de cohomología de grupos y propiedades de anillos de grupo con coeficientes enteros.

Teniendo en cuenta la sugerencia dada en [3], en observación ii), después de la prueba de theorem 9.5, se obtendrá la prueba de la versión homológica de la sucesión espectral de Lyndon-Hochschild-Serre.

Este artículo está organizado como sigue:

En la sección 2 se da una revisión de complejos dobles de cadenas. En la sección 3 se prueba la existencia de la sucesión espectral homológica de Grothendieck. En la sección 4 se establece la relación de los tres grupos de homologías de un grupo, de un subgrupo normal y grupo cociente correspondiente.

2 Complejos Dobles de Cadenas y Filtraciones de sus Complejos Totales

La existencia de la sucesión espectral homológica de Grothendieck y el problema de convergencia finita correspondiente están relacionados con el estudio de complejos dobles de cadenas y filtraciones de los complejos totales respectivos. El propósito de esta parte será mostrar resultados que permiten hallar los dos primeros términos de la sucesión espectral que se construye a partir de un complejo doble de cadenas con una filtración de su complejo total, y conseguir la convergencia finita en el caso en que el complejo doble de cadenas sea positivo.

Sea $(B, \partial', \partial'')$ un complejo doble de cadenas sobre alguna categoría abeliana \mathfrak{A} como el dado en [3, p 167]. Se tiene el diagrama siguiente anticonmutativo en \mathfrak{A}

$$\begin{array}{ccc} B_{r-1,s} & \xleftarrow{\partial'} & B_{r,s} \\ \downarrow \partial'' & & \downarrow \partial'' \\ B_{r-1,s-1} & \xleftarrow{\partial'} & B_{r,s-1} \end{array} \quad (2)$$

$\partial''\partial' + \partial'\partial'' = 0$ para cada $r, s \in \mathbb{Z}$; es conveniente reemplazar (2) por un diagrama conmutativo (4) y viceversa; esto se logra haciendo

$$d' = \partial', \quad d'' = (-1)^r \partial'' \quad \text{sobre } B_{rs} \quad (3)$$

Se sabe que el complejo total de B se define como $Tot B = \{(Tot B)_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$

donde $(Tot B)_n = \bigoplus_{r+s=n} B_{rs}$. Es conveniente subrayar

que $Tot B$ es un complejo de cadenas si el diferencial en $Tot B$ es dado por $\partial = \partial' + \partial'' : Tot B \rightarrow Tot B$.

Si se considera el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_{r-1,s} & \xleftarrow{d'} & B_{rs} \\ \downarrow d'' & & \downarrow d'' \\ B_{r-1,s-1} & \xleftarrow{d'} & B_{r,s-1} \end{array} \quad (4)$$

entonces d' , d'' se llaman el diferencial horizontal y vertical de B , respectivamente.

El complejo $Tot B$ puede ahora filtrarse en los si-

Definición 2.2. Se dice que el complejo doble B (Figura 1) es positivo si existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que (el desplazamiento hacia la derecha se considera positivo)

$$B_{r,s} = 0 \quad \text{si } r < n_0 \quad \text{o} \quad s < n_0 \quad (9)$$

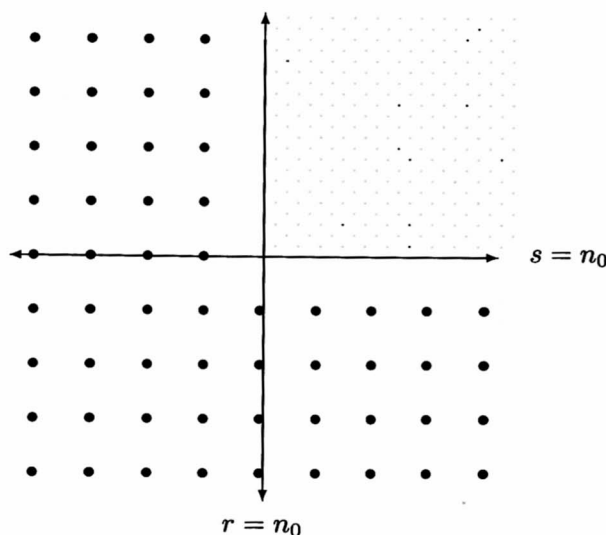


Figura 1. Cada punto marcado de la región no sombreada es $B_{rs} = 0$.

Proposición 2.3. Si B es un complejo de cadenas doble positivo, entonces ambas la primera y la segunda sucesión espectral ${}_1E$ y ${}_2E$, de las cuales dos primeros términos se dan en (7) y (8), respectivamente; convergen finitamente al correspondiente objeto graduado asociado a la homología $\{H_n(Tot B)\}$, la cual es adecuada y finitamente filtrada.

guientes dos modos de manera natural:

$${}_1F_p(Tot B)_n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ r \leq p}} B_{r,s} \quad (5)$$

$${}_2F_p(Tot B)_n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ s \leq p}} B_{r,s} \quad (6)$$

Se referirá a la filtración (5) como la PRIMERA FILTRACIÓN de $Tot B$, y la filtración (6) como la SEGUNDA FILTRACIÓN de $Tot B$. Con estas filtraciones se obtienen dos sucesiones espectrales denotadas por ${}_1E$ y ${}_2E$.

Las pruebas de Proposiciones 2.1 y 2.3 se pueden encontrar en [3].

Proposición 2.1. Para la primera sucesión espectral asociada a la filtración (5) se tiene

$${}_1E_0^{p,q} = H_{q-p}(B_{p,*}; \partial''), \quad {}_1E_1^{p,q} = H_p(H_{q-p}(B, \partial''), \partial') \quad (7)$$

Para la segunda sucesión espectral asociada a la filtración (6) se tiene

$${}_2E_0^{p,q} = H_{q-p}(B_{*,p}; \partial'), \quad {}_2E_1^{p,q} = H_p(H_{q-p}(B, \partial'), \partial'') \quad (8)$$

3 Sucesión Espectral Homológica de Grothendieck

En esta sección se enuncia y se demuestra el teorema de sucesión espectral homológica de Grothendieck que relaciona a los funtores derivados izquierdos.

Existencia y Convergencia de la Sucesión Espectral de Grothendieck

La construcción de la sucesión espectral homológica de Grothendieck se hará usando un complejo doble de cadenas J de objetos proyectivos y este complejo para su construcción requiere de una herramienta llamada LEMA DE HERRADURA. En lo que sigue se abordará el lema mencionado y otros resultados previos que son necesarios para demostrar la existencia de la sucesión espectral homológica de Grothendieck.

Lema 3.1. Sean P_1 y P_2 objetos proyectivos en una categoría abeliana \mathcal{A} , entonces $P_1 \oplus P_2$ es proyectivo.

Prueba.- Sea $\alpha : P_1 \oplus P_2 \longrightarrow B$ un morfismo y $\varepsilon : A \longrightarrow B$ un epimorfismo, entonces existe un morfismo $\beta : P_1 \oplus P_2 \longrightarrow A$ tal que $\alpha = \varepsilon \circ \beta$.

En efecto, sean $\alpha_1 : P_1 \longrightarrow B$, $\alpha_2 : P_2 \longrightarrow B$ morfismos. Como P_1 y P_2 son objetos proyectivos, existen morfismos $\beta_1 : P_1 \longrightarrow A$, $\beta_2 : P_2 \longrightarrow A$ tales que $\alpha_1 = \varepsilon \circ \beta_1$, $\alpha_2 = \varepsilon \circ \beta_2$.

$$\begin{aligned} \text{Definiendo } \alpha(a, b) &= \varepsilon \circ \beta_1(a) + \varepsilon \circ \beta_2(b) \\ &= \varepsilon \circ (\beta_1, \beta_2)(a, b), \end{aligned}$$

existe un morfismo $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ tal que $\alpha = \varepsilon \circ \beta$ ■

Lema 3.2 (Lema de Herradura). Sea \mathcal{A} una categoría abeliana y $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta en \mathcal{A} . Si $\mathcal{P}' : 0 \leftarrow P'_0 \leftarrow P'_1 \leftarrow \dots$ y $\mathcal{P}'' : 0 \leftarrow P''_0 \leftarrow P''_1 \leftarrow \dots$ son resoluciones proyectivas de A' y A'' , respectivamente; entonces existe una resolución proyectiva \mathcal{P} de A tal que la sucesión de complejos de cadenas $0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$ es exacta y tal que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P''_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial''_1 \\ 0 & \longrightarrow & P'_0 & \xrightarrow{\iota_0} & P_0 & \xrightarrow{\pi_0} & P''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon'' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha} & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (10)$$

Prueba.- Sea $P_0 = P'_0 \oplus P''_0$. Como P'_0 y P''_0 son proyectivos, por Lema 3.1 P_0 es proyectivo.

Se define $\varepsilon : P_0 \rightarrow A$ por $\varepsilon(a, b) = \alpha\varepsilon'a + \psi_0b$. También se definen los morfismos $\iota_0 : P'_0 \rightarrow P_0$ por $\iota_0(a) = (a, 0)$ y $\pi_0 : P_0 \rightarrow P''_0$ por $\pi_0(a, b) = b$.

Se prueba que los dos cuadriláteros inferiores del diagrama (10) son conmutativos, verificando que $\varepsilon\iota_0 = \alpha\varepsilon'$ y $\varepsilon''\pi_0 = \beta\varepsilon$, como sigue:

Sea $a \in P'_0$, entonces $\varepsilon\iota_0(a) = \varepsilon(a, 0) = \alpha\varepsilon'a$.

Por otro lado, para $(a, b) \in P_0 = P'_0 \oplus P''_0$, $\varepsilon''\pi_0(a, b) = \varepsilon''(b) = \beta\psi_0b$ pues P''_0 es proyectivo y

$$\begin{aligned} \beta\varepsilon(a, b) &= \beta(\alpha\varepsilon'a + \psi_0b) \\ &= \beta\alpha\varepsilon'a + \beta\psi_0b, \text{ como } \beta\alpha = 0 : \\ &= \beta\psi_0b. \end{aligned}$$

Así, $\varepsilon''\pi_0 = \beta\varepsilon$.

Puesto que $\text{Im}(\iota_0) = P'_0 \times \{0\} = \text{Ker}(\pi_0)$, resulta que $0 \rightarrow P'_0 \xrightarrow{\iota_0} P_0 \xrightarrow{\pi_0} P''_0 \rightarrow 0$ es sucesión exacta de proyectivos. De la conmutatividad de los diagramas con filas exactas cortas, por ser ε' y ε'' epimorfismos, se sigue que ε es un epimorfismo.

HIPÓTESIS INDUCTIVA: Suponemos que existe sucesión exacta corta de proyectivos

$0 \longrightarrow P'_m \xrightarrow{\iota_m} P_m \xrightarrow{\pi_m} P''_m \longrightarrow 0$ para $0 \leq m < n$, donde $P_m = P'_m \oplus P''_m$, tal que el diagrama (10) hasta dicha sucesión exacta es conmutativo. Ponemos $P_n = P'_n \oplus P''_n$. Al igual que arriba construimos la sucesión exacta corta de proyectivos

$$0 \rightarrow P'_n \rightarrow P_n \rightarrow P''_n \rightarrow 0$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_n & \xrightarrow{\iota_n} & P_n & \xrightarrow{\pi_n} & P''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n \\ 0 & \longrightarrow & P'_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & P''_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (11)$$

donde $\partial_n(a, b) = \iota_{n-1}\partial'_na + \psi_nb$, es conmutativo. Además $\text{Im}(\partial_n) = \text{Ker}(\partial_{n-1})$, lo cual se verifica mostrando que $H_{n-1}(\mathcal{P}) = 0$ para $n-1 \geq 0$. Para ello, se considera el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\partial'_n) & \longrightarrow & \text{Ker}(\partial_n) & \longrightarrow & \text{Ker}(\partial''_n) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P'_n & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P''_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n \\ 0 & \longrightarrow & P'_{n-1} & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & P''_{n-1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Coker}(\partial'_n) & \longrightarrow & \text{Coker}(\partial_n) & \longrightarrow & \text{Coker}(\partial''_n) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por [3, Lema III.5.1], las sucesiones de las filas superior e inferior son exactas. Según [3, Lema IV.2.2]:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n-1}(\mathcal{P}') & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathcal{P}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathcal{P}'') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Coker}(\partial'_n) & \longrightarrow & \text{Coker}(\partial_n) & \longrightarrow & \text{Coker}(\partial''_n) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \widetilde{\partial'_{n-1}} & & \downarrow \widetilde{\partial_{n-1}} & & \downarrow \widetilde{\partial''_{n-1}} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\partial'_{n-2}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\partial_{n-2}) & \longrightarrow & \text{Ker}(\partial''_{n-2}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H_{n-2}(\mathcal{P}') & \longrightarrow & H_{n-2}(\mathcal{P}) & \longrightarrow & H_{n-2}(\mathcal{P}'') \end{array}$$

Por [3, Lema III.5.1] $H_{n-1}(\mathcal{P}') \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{P}) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{P}'')$ es exacta. Pero $H_{n-1}(\mathcal{P}') = H_{n-1}(\mathcal{P}'') = 0$,

luego $H_{n-1}(\mathcal{P}) = 0$.

Por el principio de inducción, existe un complejo de cadenas $\mathcal{P} : 0 \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots$, donde cada P_n es proyectivo, \mathcal{P} es acíclico ($H_n(\mathcal{P}) = 0$, $\forall n \geq 1$) y $H_0(\mathcal{P}) \cong A$. Así, \mathcal{P} es una resolución proyectiva de A

tal que $0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$ es sucesión exacta de complejos de cadenas pues $0 \rightarrow \mathcal{P}'_n \rightarrow \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}''_n \rightarrow 0$ es exacta para cada $n = 0, 1, \dots$. Además el diagrama (10) es conmutativo ■

Lema 3.3. Sea \mathfrak{C} una categoría abeliana con suficientes proyectivos.

Sean $0 \xleftarrow{\partial_0} F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_r} F_r \xleftarrow{\partial_{r+1}} \dots$ un complejo de cadenas en \mathfrak{C} , $Z_{r+1} = \text{Ker}(\partial_{r+1})$ y $B_r = \text{Im}(\partial_{r+1})$ para $r = 0, 1, \dots$; entonces existe una resolución proyectiva de

$$F_0 \leftarrow B_0 \leftarrow F_1 \leftarrow Z_1 \leftarrow B_1 \leftarrow F_2 \leftarrow \dots \quad (12)$$

expresada como el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ J_{01} & \leftarrow L_{01} & \leftarrow J_{11} & \leftarrow K_{11} & \leftarrow L_{11} & \leftarrow J_{21} & \leftarrow \dots & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ J_{00} & \leftarrow L_{00} & \leftarrow J_{10} & \leftarrow K_{10} & \leftarrow L_{10} & \leftarrow J_{20} & \leftarrow \dots & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ F_0 & \leftarrow B_0 & \leftarrow F_1 & \leftarrow Z_1 & \leftarrow B_1 & \leftarrow F_2 & \leftarrow \dots & & \end{array} \quad (13)$$

donde cada columna es una resolución proyectiva completa del objeto que aparece en su pie y $L_{rs} \leftarrow J_{r+1,s} \leftarrow K_{r+1,s}$ es exacta.

Prueba .- La sucesión $F_0/B_0 \leftarrow F_0 \leftarrow B_0$ es exacta corta. Como \mathfrak{C} tiene suficientes proyectivos, se puede asumir existen resoluciones proyectivas Q_0 de F_0/B_0 , y L_0 de B_0 . Por el lema de herradura, se obtiene una resolución proyectiva J_0 de F_0 tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ Q_{01} & \leftarrow J_{01} & \leftarrow L_{01} & & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ Q_{00} & \leftarrow J_{00} & \leftarrow L_{00} & & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ F_0/B_0 & \leftarrow F_0 & \leftarrow B_0 & & & & \end{array} \quad (14)$$

Escogiendo las resoluciones proyectivas L_1 de B_1 y Q_1 de Z_1/B_1 , se obtiene una resolución proyectiva K_1 de Z_1

tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ Q_{11} & \leftarrow K_{11} & \leftarrow L_{11} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ Q_{10} & \leftarrow K_{10} & \leftarrow L_{10} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ Z_1/B_1 & \leftarrow Z_1 & \leftarrow B_1 & & \end{array} \quad (15)$$

Con las resoluciones proyectivas L_0 de B_0 , K_1 de Z_1 , aplicando Lema de herradura se obtiene la resolución proyectiva J_1 de F_1 tal que el diagrama siguiente conmuta :

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ L_{01} & \leftarrow J_{11} & \leftarrow K_{11} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ L_{00} & \leftarrow J_{10} & \leftarrow K_{10} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ B_0 & \leftarrow F_1 & \leftarrow Z_1 & & \end{array} \quad (16)$$

Acoplando los diagramas (14), (15) y (16) se obtiene una parte importante del diagrama (13).

Repitiendo el procedimiento anterior se obtiene la resolución proyectiva J_2 de F_2 de tal modo que el diagrama (13) conmuta, donde cada columna es resolución proyectiva completa del objeto que aparece en su pie y que $L_{rs} \leftarrow J_{r+1,s} \leftarrow K_{r+1,s}$ es exacta ■

Proposición 3.4. *Del diagrama (13) se obtiene el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ J_{01} & \leftarrow & J_{11} & \leftarrow & J_{21} & \leftarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ J_{00} & \leftarrow & J_{10} & \leftarrow & J_{20} & \leftarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ F_0 & \leftarrow & F_1 & \leftarrow & F_2 & \leftarrow & \dots \end{array} \quad (17)$$

donde cada fila es un complejo de cadenas y la r -ésima columna es una resolución proyectiva completa de F_r ; $r = 0, 1, \dots$

Prueba .- La conmutatividad del diagrama (17) se obtiene de la conmutatividad del diagrama (13).

La fila base del diagrama (17) por hipótesis es un complejo de cadenas. Del hecho que

$L_{rs} \leftarrow J_{r+1,s} \leftarrow K_{r+1,s}$ es exacta, se sigue que

$J_{rs} \leftarrow J_{r+1,s} \leftarrow J_{r+2,s}$ es el morfismo nulo. Así, cada fila del diagrama (17) es un complejo de cadenas. Por Lema 3.3, $J_r = J_{r,*}$ es una resolución proyectiva de F_r para $r = 0, 1, \dots$ ■

El siguiente complejo doble de cadenas se denotará por D :

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C_{01} & \leftarrow & C_{11} & \leftarrow & C_{21} & \leftarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C_{00} & \leftarrow & C_{10} & \leftarrow & C_{20} & \leftarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A_0 & \leftarrow & A_1 & \leftarrow & A_2 & \leftarrow & \dots \end{array} \quad (18)$$

Proposición 3.5. *Si las homología de las columnas de D se anulan, entonces el complejo total de D tiene homología nula.*

Prueba .- Sea $D_j =_1 F_j(Tot D)$ subcomplejo de $(Tot D)$ y C_j columna j -ésima de D , entonces

$C_j = D_j/D_{j-1}$. Así, la sucesión de complejos de cadenas $D_{j-1} \twoheadrightarrow D_j \twoheadrightarrow C_j$ es exacta.

Por [3, Teorema IV.2.1], la sucesión larga de homología siguiente es exacta

$$\dots \rightarrow H_q(D_{j-1}) \rightarrow H_q(D_j) \rightarrow H_q(C_j) \rightarrow H_{q-1}(D_{j-1}) \rightarrow H_{q-1}(D_j) \rightarrow H_{q-1}(C_j) \rightarrow \dots$$

Puesto que $H_q(C_j) = 0$ para todo q, j , y $H_q(D_{-1}) = 0$, se prueba por inducción que $H_q(D_j) = 0$ para todo q, j . Pero $(D_j)_q = (Tot D)_q$ para $q < j$, luego $H_q(Tot D) = H_q(D_{q+2}) = 0$, como se quería probar ■

Se va a considerar tres categorías abelianas \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} y dos funtores covariantes aditivos

$F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$. Además, se considera que \mathfrak{A} y \mathfrak{B} tienen suficientes proyectivos; esto significa que todos los objetos en \mathfrak{A} y \mathfrak{B} tienen resoluciones proyectivas. Así es posible construir los funtores derivados izquierdos de F , G y $G \circ F$. El teorema siguiente establece una relación entre estos funtores derivados mediante una sucesión espectral.

Definición 3.6. *Se dice que un objeto B de \mathfrak{B} es G -acíclico (izquierdo) si*

$$L_q G(B) = \begin{cases} G(B), & q = 0 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

Teorema 3.7 (Sucesión Espectral Homológica de Grothendieck). *Sean $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ y $G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ funtores covariantes aditivos de categorías abelianas, donde \mathfrak{A} y \mathfrak{B} tienen suficientes proyectivos. Si para cada objeto proyectivo P de \mathfrak{A} se tiene que $F(P)$ es G -acíclico, entonces para cada objeto A de \mathfrak{A} existe una sucesión espectral $E = \{E^n(A)\}$ tal que*

$$E_{pq}^1 = (L_p G)(L_{q-p} F)(A) \Rightarrow L_q(GF)(A). \quad (20)$$

Es decir, la sucesión espectral E converge finitamente al objeto graduado asociado a $\{L_q(GF)(A)\}$, filtrado adecuadamente.

Prueba.- Puesto que $A \in |\mathfrak{A}|$ y \mathfrak{A} tiene suficientes proyectivos, existe una resolución proyectiva \mathcal{P} de A escrita como

$$\mathcal{P} : 0 \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots \leftarrow P_n \leftarrow \dots \quad (21)$$

donde P_n es proyectivo para $n = 0, 1, \dots$
Luego

$$F\mathcal{P} : 0 \xleftarrow{\partial_0} FP_0 \xleftarrow{\partial_1} FP_1 \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{\partial_{q-p}} FP_{q-p} \xleftarrow{\partial_{q-p+1}} \dots \quad (22)$$

$$\text{Así, } L_{q-p} F(A) = H_{q-p}(F\mathcal{P}) = \frac{\text{Ker}(\partial_{q-p})}{\text{Im}(\partial_{q-p+1})} = \frac{Z_{q-p}}{B_{q-p}} \quad (23)$$

Del Lema 3.3 se obtiene

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 J_{01} & \leftarrow L_{01} & \leftarrow J_{11} & \leftarrow K_{11} & \leftarrow L_{11} & \leftarrow J_{21} & \leftarrow \dots & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 J_{00} & \leftarrow L_{00} & \leftarrow J_{10} & \leftarrow K_{10} & \leftarrow L_{10} & \leftarrow J_{20} & \leftarrow \dots & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 FP_0 & \leftarrow B_0 & \leftarrow FP_1 & \leftarrow Z_1 & \leftarrow B_1 & \leftarrow FP_2 & \leftarrow \dots & &
 \end{array} \quad (24)$$

donde cada columna es una resolución proyectiva completa del objeto que aparece en su pie y la sucesión $L_{rs} \leftarrow J_{r+1,s} \leftarrow K_{r+1,s}$ es exacta. Como $\frac{Z_{q-p}}{B_{q-p}} \in |\mathfrak{B}|$ y \mathfrak{B} tiene suficientes proyectivos, este objeto tiene como resolución proyectiva $\frac{K_{q-p}}{L_{q-p}}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 (L_p G) \left(\frac{Z_{q-p}}{B_{q-p}} \right) &= H_p \left(G \left(\frac{K_{q-p}}{L_{q-p}} \right) \right) \\
 &= \frac{\text{Ker} \left(G \left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}} \right) \longrightarrow G \left(\frac{K_{q-p,p-1}}{L_{q-p,p-1}} \right) \right)}{\text{Im} \left(G \left(\frac{K_{q-p,p+1}}{L_{q-p,p+1}} \right) \longrightarrow G \left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}} \right) \right)} \quad (25)
 \end{aligned}$$

De la Proposición 3.4 obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 J_{01} & \leftarrow J_{11} & \leftarrow J_{21} & \leftarrow \dots & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 J_{00} & \leftarrow J_{10} & \leftarrow J_{20} & \leftarrow \dots & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 FP_0 & \leftarrow FP_1 & \leftarrow FP_2 & \leftarrow \dots & & &
 \end{array} \quad (26)$$

donde cada fila es un complejo de cadenas y la r -ésima columna es una resolución proyectiva completa de FP_r ; $r = 0, 1, \dots$.

Consideramos

$$\begin{array}{ccccc}
 J_{r,s+2} & & & & \\
 \downarrow \partial_{r,s+2}^j & & & & \\
 J_{r,s+1} & \xleftarrow{d_{r+1,s+1}^j} & J_{r+1,s+1} & & \\
 \downarrow \partial_{r,s+1}^j & & \downarrow \partial_{r+1,s+1}^j & & \\
 J_{rs} & \xleftarrow{d_{r+1,s}^j} & J_{r+1,s} & \xleftarrow{d_{r+2,s}^j} & J_{r+2,s}
 \end{array}$$

Como G es funtor covariante aditivo, se tiene:

- a) $G(d_{r+1,s}^j) G(d_{r+2,s}^j) = 0$;
- b) $G(\partial_{r,s+1}^j) G(\partial_{r,s+2}^j) = 0$;

$$c) G(\partial_{r,s+1}^j) G(d_{r+1,s+1}^j) = G(d_{r+1,s}^j) G(\partial_{r+1,s+1}^j).$$

Aplicando G a la parte J del diagrama (26) y definiendo $\partial' = Gd$ y $\partial'' = (-1)^r G\partial$ morfismos que toman valores en GJ_{rs} ; con los items a), b) y c) se obtiene el complejo doble de cadenas $B = GJ$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 GJ_{02} & \xleftarrow{\partial'} GJ_{12} & \xleftarrow{\partial'} GJ_{22} & \xleftarrow{\partial'} \dots & & & \\
 \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' \\
 GJ_{01} & \xleftarrow{\partial'} GJ_{11} & \xleftarrow{\partial'} GJ_{21} & \xleftarrow{\partial'} \dots & & & \\
 \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' & \downarrow \partial'' \\
 GJ_{00} & \xleftarrow{\partial'} GJ_{10} & \xleftarrow{\partial'} GJ_{20} & \xleftarrow{\partial'} \dots & & &
 \end{array} \quad (27)$$

El complejo doble de cadenas GJ es positivo, pues existe $n_0 = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $GJ_{rs} = 0$ si $r < 0 \vee s < 0$. Por Proposición 2.3 existe una sucesión espectral ${}_2E = {}_2E(A)$ asociado al complejo de cadenas filtrado $Tot\ GJ$, cuya filtración es dada por

$${}_2F_p(Tot\ GJ)_n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ s \leq p}} GJ_{rs},$$

dicha sucesión converge finitamente al objeto graduado asociado a la homología $\{H_q(Tot\ GJ)\}$ la cual es adecuadamente filtrada. Esto se simboliza por

$${}_2E_{pq}^1 \Rightarrow H_q(Tot\ GJ). \quad (28)$$

Para finalizar la prueba, falta calcular los dos objetos ${}_2E_{pq}^1$ y $H_q(Tot\ GJ)$.

Proposición 2.1 da las fórmulas siguientes:

${}_2E_{pq}^0 = H_{q-p}(GJ_{*,p}; \partial')$, ${}_2E_{pq}^1 = H_p(H_{q-p}(GJ, \partial'), \partial'')$ para $B = GJ$, que permiten calcular ${}_2E_{pq}^1$, en los pasos d) y e), como sigue:

$$\begin{aligned} d) \quad 2E_{pq}^0 &= H_{q-p}(GJ_{*,p}; \partial') \\ &= \frac{\text{Ker}(\partial'_{q-p,p})}{\text{Im}(\partial'_{q-p+1,p})}. \end{aligned} \quad (29)$$

Observando el diagrama (24) se tiene $K_{rs} \leftarrow L_{rs} \leftarrow J_{r+1,s} \leftarrow K_{r+1,s}$.

Como $J_{r+1,s} = L_{rs} \oplus K_{r+1,s}$ y $K_{rs} = Q_{rs} \oplus L_{rs}$ (ver diagramas (15), (16)), aplicando el funtor covariante aditivo G se obtiene

$$GK_{rs} \leftarrow GL_{rs} \leftarrow GJ_{r+1,s} \leftarrow GK_{r+1,s}$$

Tomando $(r, s) = (q - p - 1, p)$ se tiene

$$\begin{array}{ccccc} & GK_{q-p,p} & \xrightarrow{\partial'_{q-p,p}} & GJ_{q-p,p} & \\ & \searrow & & \downarrow a & \\ GJ_{q-p-1,p} & \xleftarrow{n} & GK_{q-p-1,p} & \xleftarrow{m} & GL_{q-p-1,p} \end{array}$$

luego se deduce que $\text{Ker} \partial'_{q-p,p} = GK_{q-p,p}$, pues

$$\begin{aligned} &\text{Ker} \partial'_{q-p,p} \\ &= \{x \in GJ_{q-p,p} / n \circ m \circ a(x) = 0\} \\ &= \{x \in GJ_{q-p,p} / a(x) = 0\}, \quad n \circ m \text{ es monic} \\ &= GK_{q-p,p}, \quad GJ_{q-p,p} = GL_{q-p-1,p} \oplus GK_{q-p,p}. \end{aligned}$$

Utilizando el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & & GJ_{q-p+1,p} & \\ & & \searrow \partial'_{q-p+1,p} & & \downarrow b \\ GJ_{q-p,p} & \xleftarrow{i} & GK_{q-p,p} & \xleftarrow{j} & GL_{q-p,p} \end{array}$$

se obtiene que $\text{Im}(\partial'_{q-p+1,p}) = \text{Im}(ijb) = GL_{q-p,p}$.

$$\text{Por lo tanto, por (29), } 2E_{pq}^0 = \frac{GK_{q-p,p}}{GL_{q-p,p}} \quad (30)$$

Puesto que $GK_{q-p,p} = GQ_{q-p,p} \oplus GL_{q-p,p}$ donde $Q_{q-p,p} = K_{q-p,p}/L_{q-p,p}$, resulta que

$$\frac{G(K_{q-p,p})}{G(L_{q-p,p})} = G\left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}}\right).$$

$$\text{Luego, } 2E_{pq}^0 = G\left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}}\right). \quad (31)$$

e) Efectuando cálculos

$$\begin{aligned} 2E_{pq}^1 &= H_p(H_{q-p}(GJ, \partial'), \partial'') \\ &= \frac{\text{Ker}\left(H_{q-p}(GJ_{*,p}; \partial') \xrightarrow{\partial''} H_{q-p}(GJ_{*,p-1}; \partial')\right)}{\text{Im}\left(H_{q-p}(GJ_{*,p+1}; \partial') \xrightarrow{\partial''} H_{q-p}(GJ_{*,p}; \partial')\right)} \\ &= \frac{\text{Ker}\left(2E_{pq}^0 \xrightarrow{\partial''} 2E_{p-1,q-1}^0\right)}{\text{Im}\left(2E_{p+1,q+1}^0 \xrightarrow{\partial''} 2E_{pq}^0\right)}, \text{ por (31) :} \\ &= \frac{\text{Ker}\left(G\left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}}\right) \xrightarrow{\partial''} G\left(\frac{K_{q-p,p-1}}{L_{q-p,p-1}}\right)\right)}{\text{Im}\left(G\left(\frac{K_{q-p,p+1}}{L_{q-p,p+1}}\right) \xrightarrow{\partial''} G\left(\frac{K_{q-p,p}}{L_{q-p,p}}\right)\right)}, \text{ por (25) :} \\ &= L_p G\left(\frac{Z_{q-p}}{B_{q-p}}\right) \\ &= (L_p G)(L_{q-p} F)(A) \text{ por (23),} \end{aligned} \quad (32)$$

Se completa los cálculos, hallando $H_q(\text{Tot } GJ)$, del siguiente modo:

Como $G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ es un funtor covariante aditivo, entonces $L_q G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ es el q -ésimo funtor derivado izquierdo de G y $L_q G(FP_r) = H_q(GJ_r)$ para $r = 0, 1, \dots$, donde $FP_r \in |\mathfrak{B}|$ y J_r es una resolución proyectiva de FP_r según (26).

Para cada objeto proyectivo P_r de \mathfrak{A} , por hipótesis FP_r es G -acíclico, luego se obtiene que

$$L_q G(FP_r) = \begin{cases} G(FP_r), & q = 0 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases} \quad (33)$$

Así, las homología de las columnas del complejo doble de cadenas, D , obtenido de (26) aplicando G y haciendo anticonmutativo el diagrama conmutativo, se anulan.

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ GJ_{01} & \leftarrow & GJ_{11} & \leftarrow & GJ_{21} & \leftarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ GJ_{00} & \leftarrow & GJ_{10} & \leftarrow & GJ_{20} & \leftarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ GFP_0 & \leftarrow & GFP_1 & \leftarrow & GFP_2 & \leftarrow & \dots \end{array} \quad (34)$$

Por la Proposición 3.5, la homología del complejo total de D se anula; es decir,

$$H_n(\text{Tot } D) = 0, \quad \forall n. \quad (35)$$

Sea D_1 el complejo $\text{Tot } GJ$ visto como subcomplejo de $\text{Tot } D$. Entonces se tiene la sucesión exacta corta $GF(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Tot } D \rightarrow D_1$ de complejos de cadenas, donde $(\text{Tot } D)/GF(\mathcal{P}) = D_1$.

El [3, Teorema IV.2.1] asegura que la sucesión larga de homología siguiente es exacta

$$H_0(D_1) \leftarrow H_0(\text{Tot } D) \leftarrow H_0(GF\mathcal{P}) \leftarrow H_1(D_1) \leftarrow H_1(\text{Tot } D) \leftarrow H_1(GF\mathcal{P}) \leftarrow H_2(D_1) \leftarrow H_2(\text{Tot } D) \leftarrow \dots$$

Por (35) se tiene $H_n(\text{Tot } D) = 0$ para todo $n = 0, 1, \dots$. Así, de la sucesión anterior se obtiene $0 \leftarrow H_0(GF\mathcal{P}) \xleftarrow{\sim} H_1(D_1) \leftarrow 0 \leftarrow H_1(GF\mathcal{P}) \xleftarrow{\sim} H_2(D_1) \leftarrow 0 \leftarrow \dots$

Como $H_n(D_1) \cong H_{n-1}(\text{Tot } GJ)$ para $n = 1, 2, \dots$, se obtiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} L_0(GF)(A) &= H_0(GF\mathcal{P}) \cong H_1(D_1) \cong H_0(\text{Tot } GJ); \\ L_1(GF)(A) &= H_1(GF\mathcal{P}) \cong H_2(D_1) \cong H_1(\text{Tot } GJ). \end{aligned}$$

$$\text{En general, } H_q(\text{Tot } GJ) = L_q(GF)(A). \quad (36)$$

En consecuencia, reemplazando en (28) los valores hallados en (32) y (36), se concluye que para cada objeto A de \mathfrak{A} , existe una sucesión espectral $E = {}_2E(A)$, satisfaciendo las condiciones requeridas; es decir, tal que $E_{pq}^1 = (L_p G)(L_{q-p} F)(A) \Rightarrow L_q(GF)(A)$ ■

4 Grupo de Homología con Sucesiones Espectrales.

En esta sección, utilizando la sucesión espectral homológica de Grothendieck se obtiene la versión homológica de Theorem 9.5 de Lyndon-Hochschild-Serre[3], que permite calcular el grupo de homología.

Sea G un grupo escrito multiplicativamente con identidad e . Se denotará

$$\mathbb{Z}G = \{r \mid r = \sum_{x \in G} m_r(x)x, \text{ para alguna función}$$

$m_r : G \rightarrow \mathbb{Z}$ con $m_r(x) = 0$ excepto para un número finito de elementos x de $G\}$.

Sea $\iota : G \rightarrow \mathbb{Z}G$ la aplicación definida por

$$\iota(g) = \sum_{x \in G} m_g(x)x,$$

donde para cada $g \in G$, $m_g(x) = \begin{cases} 1, & g = x \\ 0, & g \neq x \end{cases}$

La aplicación $\iota : G \rightarrow \mathbb{Z}G$ se llama LA INMERSIÓN y claramente $\iota G \subseteq \mathbb{Z}G$, luego $\mathbb{Z}G \neq \emptyset$.

Ahora, considerando $r = \sum_{x \in G} m_r(x)x$ y $s = \sum_{x \in G} m_s(x)x$ se define la suma $r + s$ y el producto rs en $\mathbb{Z}G$, respectivamente, por

$$r + s = \sum_{x \in G} [m_r(x) + m_s(x)]x \quad (37)$$

$$rs = \sum_{x, y \in G} [m_r(x)m_s(y)]xy \quad (38)$$

Proposición 4.1. Dado un grupo G , $\mathbb{Z}G$ con las operaciones dadas en (37) y (38) es un anillo unitario.

El anillo de la proposición anterior se llama ANILLO DE GRUPO CON COEFICIENTES ENTEROS y se caracteriza por la propiedad universal siguiente.

Proposición 4.2. Sea G un grupo, $\iota : G \rightarrow \mathbb{Z}G$ la inmersión y R un anillo. Para cualquier función $f : G \rightarrow R$ con $f(xy) = f(x)f(y)$ y $f(e) = 1_R$ (elemento unitario del anillo R) existe un único morfismo de anillos $f' : \mathbb{Z}G \rightarrow R$ tal que $f'\iota = f$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & R \\ \downarrow \iota & \nearrow f' & \\ \mathbb{Z}G & & \end{array}$$

Prueba.- Se define $f' \left(\sum_{x \in G} m(x)x \right) = \sum_{x \in G} m(x)f(x)$. Entonces f' es el único morfismo de anillos tal que $f'\iota = f$ ■

Definición 4.3. Un G -módulo derecho es un grupo abeliano A provisto de un morfismo $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ de grupos, definido por $\sigma(x)(a) = ax$, $\forall x \in G$, $\forall a \in A$.

Cada grupo aditivo abeliano A es un G -módulo derecho (trivial) bajo el morfismo trivial de grupos $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ dado por $\sigma(g) = id_A$ para todo $g \in G$.

Proposición 4.4. Sea G un grupo. Entonces A es un G -módulo derecho si y sólo si A es $\mathbb{Z}G$ -módulo derecho.

Proposición 4.5. Sea G un grupo y $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (-) : \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}G}^l \rightarrow \mathfrak{Ab}$ dado por $A \mapsto \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (A)$. Entonces $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (-)$ es un funtor covariante aditivo.

Prueba.- Como el grupo aditivo abeliano \mathbb{Z} es un G -módulo derecho, por Proposición 4.4 \mathbb{Z} es un $\mathbb{Z}G$ -módulo derecho. Para $\Lambda = \mathbb{Z}G$, por la [3, Proposición III.7.1] se sabe que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (-)$ es un funtor covariante; luego de [3, Proposición II.9.5] y [3, Proposición III.7.3] se deduce que el funtor covariante $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (-)$ es aditivo ■

Proposición 4.6. Sea $\varphi : H \rightarrow G$ un morfismo de grupos, entonces $\mathbb{Z}\varphi : \mathbb{Z}H \rightarrow \mathbb{Z}G$ es un morfismo de anillos definido por $\mathbb{Z}\varphi \left(\sum_{x \in H} m(x)x \right) = \sum_{x \in H} m(x)\varphi(x)$.

Prueba.- Se verifica que $\mathbb{Z}\varphi$ preserva la suma y el producto ■

Corolario 4.7. Sea N un subgrupo de un grupo K . Si A es un K -módulo, entonces A es un N -módulo.

En virtud de Proposición 4.5, dado un grupo G , $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (-) : \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}G}^l \rightarrow \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo, luego para $n \geq 0$ los funtores derivados izquierdos de $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (-)$ son

$$\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -) = L_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} (-)) : \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}G}^l \rightarrow \mathfrak{Ab}.$$

Por consiguiente está definido $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ para todo $A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}G}^l$.

Lema 4.8. Sea $N \xrightarrow{\iota} K \xrightarrow{p} Q$ una sucesión exacta corta de grupos y A un K -módulo, entonces $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A)$ y $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}K} A$ son \mathbb{Z} -módulos izquierdos isomorfos.

Prueba.- Primero probemos que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A)$ y $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}K} A$ son \mathbb{Z} -módulos izquierdos.

Recordemos que \mathbb{Z} se considera como $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial izquierdo (derecho) para todo grupo G . En particular, \mathbb{Z} se considera como $\mathbb{Z}K$ -módulo trivial derecho.

Puesto que A es un $\mathbb{Z}K$ -módulo izquierdo, para el morfismo de anillos unitarios $\varepsilon_K : \mathbb{Z}K \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por

$$\varepsilon_K \left(\sum_{x \in K} m(x)x \right) = \sum_{x \in K} m(x) \text{ (en [3, (VI.1.2)])},$$

por [3, (IV.12.4)] sabemos que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}K} A$ es un \mathbb{Z} -módulo izquierdo. Similarmente, se prueba que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A$ es un \mathbb{Z} -módulo izquierdo. Así, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A$ es un grupo abeliano. Puesto que A es un K -módulo, existe un morfismo de anillos $\rho : \mathbb{Z}K \rightarrow \text{End}(A)$. Luego

$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} \rho : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} \mathbb{Z}K \rightarrow \text{End}(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A)$ es un morfismo de anillos. Pero $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} \mathbb{Z}K \cong \mathbb{Z}Q$ (ver [8, página 29]), luego $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A$ es un $\mathbb{Z}Q$ -módulo izquierdo. Si consideramos el grupo cociente $Q = K/N$ y el morfismo de anillos unitarios $\varepsilon_Q : \mathbb{Z}Q \rightarrow \mathbb{Z}$, resulta que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A)$ es un \mathbb{Z} -módulo izquierdo.

Ahora, definamos $\varphi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A) \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}K} A$ por

$$\varphi \left(\sum_{i \in I} z_i \otimes (y_i \otimes a_i) \right) = \sum_{i \in I} (z_i y_i) \otimes a_i, \text{ donde } I \text{ es finito;}$$

$\psi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A)$ por

$$\psi \left(\sum_{j \in J} z_j \otimes a_j \right) = \sum_{j \in J} z_j \otimes (1 \otimes a_j), \text{ donde } J \text{ es finito.}$$

Sean $b, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A)$ y $\lambda \in \mathbb{Z}$, entonces

$$i) \varphi(\lambda b) = \lambda \varphi(b),$$

$$ii) \varphi(b_1 + b_2) = \varphi(b_1) + \varphi(b_2).$$

$$\text{En efecto, } \varphi(\lambda b) = \varphi \left(\sum_{i \in I} (\lambda z_i) \otimes (y_i \otimes a_i) \right) = \sum_{i \in I} ((\lambda z_i) y_i) \otimes a_i = \lambda \varphi(b);$$

$$\begin{aligned} \varphi(b_1 + b_2) &= \varphi \left(\sum_{i \in I} z_i \otimes (y_i \otimes a_i) + \sum_{j \in J} z_j \otimes (y_j \otimes a_j) \right) \\ &= \varphi \left(\sum_{k \in K} z_k \otimes (y_k \otimes a_k) \right), \quad K = I \cup J \text{ finito.} \\ &= \sum_{k \in K} (z_k y_k) \otimes a_k = \sum_{i \in I} (z_i y_i) \otimes a_i \\ &\quad + \sum_{j \in J} (z_j y_j) \otimes a_j = \varphi(b_1) + \varphi(b_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es un morfismo de \mathbb{Z} -módulos.

Similarmente, se prueba que ψ es un morfismo de \mathbb{Z} -módulos. Por el hecho que $\psi\varphi = id$ y $\varphi\psi = id$, φ es un isomorfismo de \mathbb{Z} -módulos, como se quería probar ■

Definición 4.9. Sea G un grupo, A un G -módulo. El n -ésimo grupo de homología de G con coeficientes en A denotado por $H_n(G, A)$ se define como

$$H_n(G, A) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A),$$

donde \mathbb{Z} es visto como un G -módulo derecho trivial.

El \mathbb{Z} -módulo graduado $H_*(G, A) = \{H_n(G, A)\}$ se llama la homología de G con coeficientes en A .

“Un resultado análogo a [3, Proposición IV.5.3] es la siguiente:”

Proposición 4.10. Sea $G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas, donde \mathfrak{B} tiene suficientes proyectivos y sea $Q \in |\mathfrak{B}|$ proyectivo, entonces $L_n GQ = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ y $L_0 GQ \cong GQ$.

Teorema 4.11 (Lyndon-Hochschild-Serre). Dada la sucesión exacta corta de grupos

$N \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} Q$ y dado un K -módulo A , existe una sucesión espectral $E = \{E^n(A)\}$ tal que

$$E_{pq}^1 = H_p(Q, H_{q-p}(N, A)) \Rightarrow H_q(K, A). \quad (39)$$

Es decir, la sucesión espectral E converge finitamente a la homología $\{H_q(K, A)\}$, filtrada adecuadamente.

Prueba.- Se realiza aplicando el teorema de la sucesión espectral homológica de Grothendieck, por lo que se verifica las hipótesis correspondientes y esto se hace en los dos ítems siguientes:

i) Se va a considerar funtores $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ y

$G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ covariantes aditivos entre categorías abelianas, donde \mathfrak{A} y \mathfrak{B} tengan suficientes proyectivos.

Sean \mathfrak{A} la categoría de K -módulos, \mathfrak{B} la categoría de Q -módulos y \mathfrak{C} la categoría de grupos abelianos, entonces $\mathfrak{A} = \mathbf{m}_{\mathbb{Z}K}^I$, $\mathfrak{B} = \mathbf{m}_{\mathbb{Z}Q}^I$ y $\mathfrak{C} = \mathbf{m}_{\mathbb{Z}}^I$. Por [5, p 425] se sigue que las categorías \mathfrak{A} , \mathfrak{B} y \mathfrak{C} son abelianas; por otro lado, [3, Proposición I.4.3] indica que las categorías \mathfrak{A} y \mathfrak{B} tienen suficientes proyectivos.

Según Proposición 4.5 para $G = N$ se tiene que $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} (-) : \mathbf{m}_{\mathbb{Z}N}^I \rightarrow \mathfrak{Ab}$ es un funtor covariante aditivo. Pero Corolario 4.7 proporciona la inclusión $\mathbf{m}_{\mathbb{Z}K}^I \subseteq \mathbf{m}_{\mathbb{Z}N}^I$, luego definiendo $F = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} (-)|_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{Ab}$, se nota que para cada $A \in |\mathfrak{A}|$, $F(A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N}(A)$ es un grupo aditivo abeliano, luego $F(A)$ es un Q -módulo trivial y así $F(A) \in |\mathfrak{B}|$. Por lo tanto $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas.

Nuevamente, si se define $G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (-) : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$, aplicando Proposición 4.5 para $G = Q$, se deduce que $G : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ es un funtor covariante aditivo entre categorías abelianas.

ii) Si $P \in |\mathbf{m}_{\mathbb{Z}K}^I|$ es proyectivo, entonces

$$F(P) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N}(P) \text{ es } G\text{-acíclico.}$$

Por la Proposición 4.10 debemos demostrar que

$$F(P) \in |\mathbf{m}_{\mathbb{Z}Q}^I| \text{ es proyectivo siempre que}$$

$$P \in |\mathbf{m}_{\mathbb{Z}K}^I| \text{ es proyectivo.}$$

Sea $\varphi : \mathbb{Z}N \rightarrow \mathbb{Z}$ morfismo de anillos tal que

$$r = \sum_{x \in N} m_r(x)x \mapsto \sum_{x \in N} m_r(x).$$

Si $U = U_\varphi : \mathbf{m}_{\mathbb{Z}}^I \rightarrow \mathbf{m}_{\mathbb{Z}N}^I$ es funtor de cambio de anillos, se sabe que $F : \mathbf{m}_{\mathbb{Z}N}^I \rightarrow \mathbf{m}_{\mathbb{Z}}^I$ dado por $F(A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N}(A)$ es su adjunto izquierdo. Como U preserva epimorfismos (pág. 319[3]), por Theorem 12.1[3] F preserva proyectivos. Puesto que $P \in |\mathbf{m}_{\mathbb{Z}K}^I|$ es proyectivo, se sigue que $F(P) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N}(P)$ es proyectivo. Luego, por la Proposición 4.10 se obtiene

$$L_q G(FP) = \begin{cases} G(FP), & q = 0 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases} \quad (40)$$

Por lo tanto, $F(P)$ es G -acíclico.

De i), ii) se ve que se satisfacen las hipótesis del teorema 3.7, entonces para el objeto dado A de \mathfrak{A} existe una sucesión espectral (homológica de Grothendieck) $E = \{E^n(A)\}$ tal que

$$E_{pq}^1 = (L_p G)(L_{q-p} F)(A) \Rightarrow L_q(GF)(A). \quad (41)$$

Es decir, la sucesión espectral E converge finitamente al objeto graduado asociado a $\{L_q(GF)(A)\}$, filtrado adecuadamente. Se completa la prueba, calculando valores de E_{pq}^1 y $L_q(GF)(A)$ en los ítems iii) y iv):

iii) Puesto que $F(A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A$ se tiene
 $(L_{q-p}F)(A) = \text{Tor}_{q-p}^{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A) = H_{q-p}(N, A)$, luego
 $E_{pq}^1 = (L_pG)(L_{q-p}F)(A)$
 $= (L_pG)(H_{q-p}(N, A))$
 $= \text{Tor}_p^{\mathbb{Z}Q}(\mathbb{Z}, H_{q-p}(N, A)) = H_p(Q, H_{q-p}(N, A))$.
 Por lo tanto $E_{pq}^1 = H_p(Q, H_{q-p}(N, A))$. (42)

iv) Del Lema 4.8 obtenemos que
 $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}K} A$, de modo que

$$\begin{aligned} L_q(GF)(A) &= L_q(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}Q} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}N} A)) \\ &= L_q(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}K} A) \\ &= \text{Tor}_q^{\mathbb{Z}K}(\mathbb{Z}, A) = H_q(K, A). \end{aligned}$$

$$\text{Luego } L_q(GF)(A) = H_q(K, A). \quad (43)$$

Reemplazando (42) y (43) en (41), se garantiza la existencia de una sucesión espectral $E = \{E^n(A)\}$ tal que $E_{pq}^1 = H_p(Q, H_{q-p}(N, A)) \Rightarrow H_q(K, A)$ ■

Tener una sucesión exacta corta de grupos $N \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} Q$ significa tener un subgrupo normal N de K y un grupo cociente $Q = K/N$.

En consecuencia, el grupo de homología $H_*(K, A) = \{H_q(K, A)\}$ de un grupo K con coeficientes en K -módulo A , puede ser aproximado por una sucesión espectral cuyos términos envuelven grupos de homología del grupo cociente Q y del subgrupo normal N .

5 Conclusiones

1) Por definición, el n -ésimo grupo de homología $H_n(G, A) = \text{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) = L_n(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G})(A)$ de G con coeficientes en A es el valor del satélite izquierdo $\text{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -)$ del funtor aditivo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G}(-)$ en un G -módulo A .

2) Por [3, Exercise IV.5.8] un funtor exacto derecho es un funtor aditivo. En consecuencia, la prueba de Teorema 3.7 da una nueva prueba de [5, Corollary 5.8.4].

3) Se puede plantear como materia de nueva investigación que, siguiendo el método aplicado en este artículo, es posible dar una forma de la sucesión espectral de Grothendieck (Teorema 3.7) para funtores \mathcal{E} -derivados izquierdos.

Dados \mathcal{A} , \mathcal{B} categorías abelianas, \mathcal{E} una clase proyectiva de epimorfismos en \mathcal{A} . Sea $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor aditivo. Entonces [3, Theorem IX.1.3] garantiza que está bien definido $L_n^{\mathcal{E}}T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sobre objetos y morfismos, $n = 0, 1, \dots$, donde $L_n^{\mathcal{E}}T$ es llamado n -ésimo funtor \mathcal{E} -derivado izquierdo. Usando [3, Lemma IX.2.2] y Lema 3.2, se puede establecer lema de herradura para una sucesión \mathcal{E} -exacta corta en una categoría $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$.

4) Se encuentra en [9] la extensión de Teorema 3.7 para funtores no aditivos o categorías no abelianas.

Agradecimientos

El presente trabajo es el desarrollo del aspecto homológico de la tesis de maestría del autor y está relacionado con su proyecto de tesis doctoral que está elaborando en IMCA-UNI.

El autor agradece a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno por la oportunidad dada para enseñar cursos de álgebra en la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas; al Instituto de Matemática y Ciencias Afines por las condiciones adecuadas que le ofrece para realizar con éxito el doctorado en Matemática.

1. P. Belmans, Spectral Sequences : examples in algebra and algebraic geometry. Lecture Notes in ANAGRAMS Seminar in Spectral Sequences, 2014.
2. D. Popovici, International Journal of Mathematics, **27**(14), 1650111, 2016.
3. P.J. Hilton & U. Stambach, *A Course in Homological Algebra*, Springer - Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971.
4. A. Grothendieck, Tôhoku Math. J. , **9**(2), 119-221, 1957.
5. C.A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.
6. J.J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Springer 1, 2009.
7. G. Tochi, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2014.
8. C.A. Hurtado, Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2016.
9. D. Blanc & C. Stover, "A Generalized Grothendieck Spectral Sequence", in N. Ray and G. Walker, eds., Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, Vol. 1, Lond. Math. Soc. Lec. Notes Ser. 175, Cambridge U. Press Cambridge, 145-161, 1992.