

## La Matriz de Feynman del Oscilador Armónico

José Reyes Portales<sup>‡</sup>, Holger G. Valqui  
 Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería  
 E-mail: <sup>‡</sup>Pepemahatma@hotmail.com

Recibido el 10 abril del 2006; aceptado el 24 de abril del 2006

La ecuación de Schrödinger permite determinar el estado de un sistema físico, SF, en cualquier instante  $t$ , expresado por una función de onda  $\Psi_t$  cuando se conoce el estado  $\Psi_{t_0}$  del SF en un instante anterior  $t_0 < t$ . Feynman inventó otro camino para determinar  $\Psi_t$  a partir de un estado anterior  $\Psi_{t_0}$ , recurriendo al lagrangeano clásico del SF. Dicho lagrangeano clásico permite construir una matriz  $K(t, t_0)$ , de manera que  $\Psi_t = K(t, t_0)\Psi_{t_0}$ . La construcción de la matriz  $K(t, t_0)$ ; es decir, de sus elementos  $K(t, x; t_0, x_0) \equiv K(t, t_0)_{xx_0}$ , exige un proceso de integración muy especial que solamente es analíticamente realizable en contados casos, como son el de la partícula libre y el del oscilador armónico. Aquí, luego de consideraciones introductorias, presentamos los detalles del cálculo analítico de la matriz de Feynman para el oscilador armónico.

Palabras claves: Integrales por caminos de Feynman, propagador, función de Green, oscilador armónico.

The Schrödinger equation allows us to determine the state of a physical system, PS, at any time, expressed by a wave function  $\Psi_t$  when the state  $\Psi_{t_0}$  of the PS is known at previous time  $t_0 < t$ . Feynman invented another way to determine  $\Psi_t$  from a previous state  $\Psi_{t_0}$ , using the classic lagrangian of the PS. This classic lagrangian allows to build a matrix  $K(t, t_0)$ , such that  $\Psi_t = K(t, t_0)\Psi_{t_0}$ . The building of the matrix  $K(t, t_0)$ , this is, of its elements  $K(t, x; t_0, x_0) \equiv K(t, t_0)_{xx_0}$  demands a very special integration process that can only be analytically solved in few cases, like that of the free particle and the harmonic oscillator. Here, after introductory considerations, we present the details of the analytic calculus of the Feynman's matrix for the harmonic oscillator.

Keywords: Integrals by Feynman's paths, propagator, Green's function, harmonic oscillator.

Como es sabido, el estado  $\Psi_t$  de un sistema Físico, SF, en un instante  $t$ , queda determinado como solución de la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{-\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi_t + V \Psi_t + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi_t}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

La solución de  $\Psi_t$  queda determinada (por las condiciones de contorno del problema y) por el estado  $\Psi_{t_0}$  del SF en un instante anterior  $t_0$ .

La ecuación diferencial de Schrödinger puede ser transformada en una ecuación integral, para la cual existe una "función de Green",  $K(t, x; t_0, x_0)$  (donde ésta es cero para  $t < t_0$ ), tal que:

$$\Psi_t(x) = \int dx_0 K(t, x; t_0, x_0) \Psi_{t_0}(x_0) \quad (2)$$

Considerando que  $\Psi_t$  es un vector (de índice continuo) cuya  $x$ -ésima componente es  $\Psi_t(x)$ , entonces la función de Green puede considerarse como elemento  $(x, x_0)$ -ésimo de una matriz  $K(t, t_0)$ , de manera que la ecuación integral puede ser escrita simplemente como:

$$\Psi_t = K(t, t_0) \Psi_{t_0} \quad (3)$$

de donde para  $t_1 < t_2 < t_3$ , podemos escribir,

$$\Psi_{t_3} = K(t_3, t_2) \Psi_{t_2}$$

$$\Psi_{t_2} = K(t_2, t_1) \Psi_{t_1}$$

$$\Psi_{t_3} = K(t_3, t_1) \Psi_{t_1}$$

con lo cual se verifica que:

$$K(t_3, t_1) = K(t_3, t_2) K(t_2, t_1) \quad (4)$$

¿Cómo construir la matriz  $K(t, t_0)$ ? Para construir la matriz (3), Feynman postuló que sus elementos de matriz se obtenían de:

$$K(t, x; t_0, x_0) = \sum_q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q) \right\} \quad (5)$$

donde la suma es realizada considerando todas las posibles trayectorias matemáticas (continuas y diferenciables), que conectan los puntos crono-espaciales  $(t_0, x_0)$  y  $(t, x)$ , de manera que  $q(t_0) = x_0$ ,  $q(t) = x$ ; la funcional  $S(q)$  es la (integral de) Acción correspondiente a la trayectoria (matemática)  $q$ , es decir:

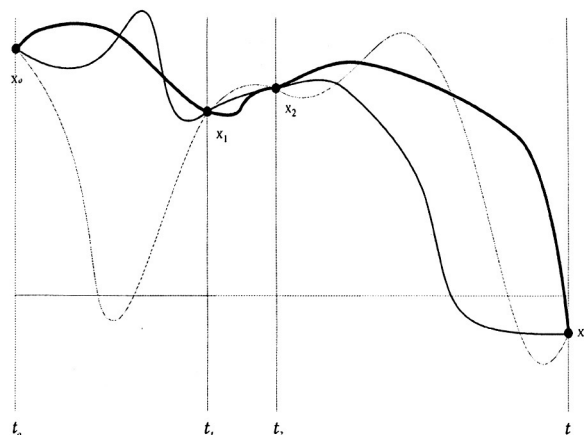


Figura 1. Se muestran 3 de las infinitas trayectorias que, conectando  $(t, x)$  con  $(t_0, x_0)$ , pasan por los puntos crono-espaciales interiores cualesquiera,  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$ .

$$S(q) = \int_{t_0}^t d\theta L(\theta, q(\theta), \dot{q}(\theta)) \quad (6)$$

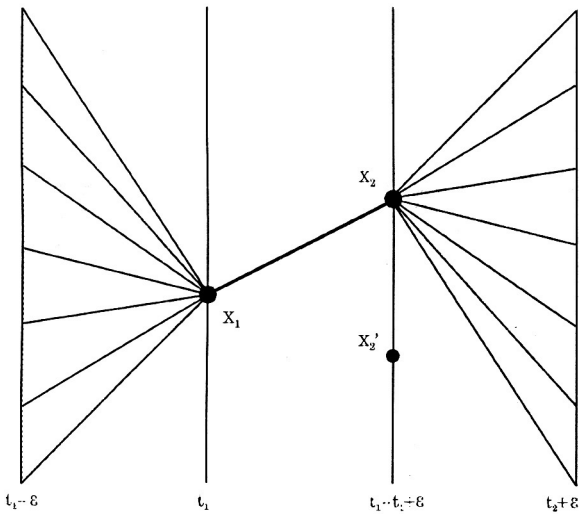
donde  $L$  es el campo lagrangeano del correspondiente SF. Nótese que en (5) se trata de una "suma" de números complejos unitarios; y que todos dichos números complejos aparecen con un mismo coeficiente igual a la unidad.

Es claro que entre todas las trayectorias también estará la trayectoria clásica que da a la Acción (clásica) un valor extremal; pero en (5) esta trayectoria clásica es tratada igual que cualquiera de las otras trayectorias. En la Figura 1 se muestran 3 de las (super)infinitas trayectorias que conectan los puntos crono-espaciales  $(t, x)$  y  $(t_0, x_0)$ . Si consideramos dos puntos crono-espaciales  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$ , con  $t_2 - t_1 = \varepsilon$ , suficientemente pequeño, y bajo las condiciones de que cada trayectoria es continua y diferenciable, podemos aproximar:

$$q(t^*) = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \dot{q}(t^*) = \frac{x_2 - x_1}{\varepsilon}$$

Para :

$$t^* = \frac{t_1 + t_2}{2}$$



**Figura 2.** De acuerdo con la aproximación según la cual, con  $t^* = (t_1 + t_2)/2$ , se realiza el siguiente reemplazo  $q(t^*) = (x_1 + x_2)/2$ ,  $\dot{q}(t^*) = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ . Entonces todas las trayectorias que pasan por los puntos crono-espaciales  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$  coincidirán en dicho tramo. Esto supone que la diferencia  $t_2 - t_1 = \varepsilon$  es suficientemente pequeña. Nótese que lo mismo sucederá, por ejemplo, con los puntos  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x'_2)$  donde  $x'_2$  es cualquier punto de la recta espacial construida para el instante  $t_2$ , como se muestra.

Como consecuencia de la aproximación anterior, todas las trayectorias que, conectando los puntos  $(t, x)$  y  $(t_0, x_0)$ , pasan por los puntos (muy vecinos temporalmente,  $\varepsilon \approx 0$ )  $(t_1, x_1)$  y  $(t_1 + \varepsilon, x_2)$ , coincidirán en dicho intervalo; lo cual deberá ser tenido en cuenta cuando

se requiera que las integrales (de la suma) sean convergentes.

Si ahora partimos el intervalo  $(t_0, t)$  en  $N$  sub-intervalos de igual longitud,  $(t_{k-1}, t_k)$ , con

$$t_k - t_{k-1} = \varepsilon = \frac{t - t_0}{N},$$

entonces en cada sub-intervalo (para  $N$  muy grande ó  $\varepsilon \approx 0$ ) las trayectorias pueden ser reemplazadas por segmentos de rectas, como se muestra en la Figura 2. Consecuentemente, las trayectorias que conectan a los puntos  $(t, x)$  y  $(t_0, x_0)$  quedan aproximadas por trayectorias poligonales (sin que, en la integración, tengan mayor incidencia los puntos en los que la velocidad es discontinua). Así podemos escribir:

$$\begin{aligned} S(q) &= \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\theta L(\theta, q(\theta), \dot{q}(\theta)) \\ &\approx \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} d\theta L\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}, \frac{x_k + x_{k-1}}{2}, \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}\right) \\ &\approx \sum_{k=1}^N \varepsilon L\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}, \frac{x_k + x_{k-1}}{2}, \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Con lo cual obtendremos:

$$K_N(t, x; t_0, x_0) \equiv \sum_q \exp \left[ -\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{k=1}^N L\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}, \frac{x_k + x_{k-1}}{2}, \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}\right) \right] \quad (7)$$

donde, si existe el límite indicado, deberá cumplirse que:

$$K_N(t, x; t_0, x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} K(t, x; t_0, x_0) \quad (8)$$

Téngase presente que en la suma (7) las trayectorias  $q$  son poligonales, y que:

$$\{N \rightarrow \infty\} \Leftrightarrow \{\varepsilon \rightarrow 0\}$$

A continuación procederemos a expresar lagrangeanos del tipo:

$$L(\theta, x, v) = Av^2 + Bx^2,$$

donde  $A, B$  son ciertas constantes, como suma de dos lagrangeanos. Sobre una trayectoria  $q$  tendremos que:

$$l(\theta) = L(\theta, q(\theta), \dot{q}(\theta)) = A\dot{q}(\theta)^2 + Bq(\theta)^2$$

Si  $q_{cla}$  es la trayectoria clásica (donde la funcional de Acción toma un valor extremal), definimos una trayectoria desplazada:

$$\eta(\theta) = q(\theta) - q_{cla}(\theta)$$

Siendo así, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} l(\theta) &= A[\dot{\eta}(\theta) + \dot{q}_{cla}(\theta)]^2 + B[\eta(\theta) + q_{cla}(\theta)]^2 \\ &= A\dot{q}_{cla}^2(\theta) + Bq_{cla}^2(\theta) + A\dot{\eta}^2(\theta) + B\eta^2(\theta) \\ &\quad + 2A\dot{\eta}(\theta)\dot{q}_{cla}(\theta) + 2B\eta(\theta)q_{cla}(\theta) \end{aligned}$$

Definiendo:

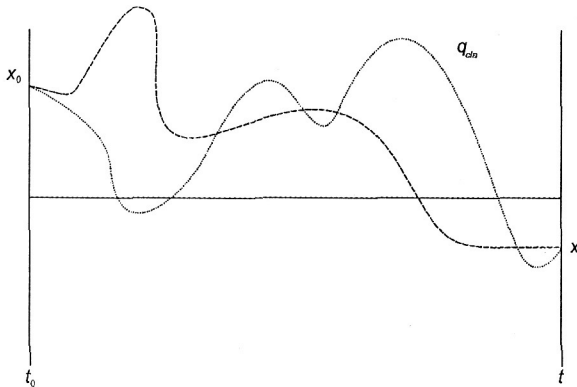
$$\begin{aligned} L_{cla}(\theta, q_{cla}(\theta), \dot{q}_{cla}(\theta)) &= A \dot{q}_{cla}^2(\theta) + B q_{cla}^2(\theta) \\ L_{tras}(\theta, \eta(\theta), \dot{\eta}(\theta)) &= A \dot{\eta}^2(\theta) + B \eta^2(\theta) \\ r(\theta) &= 2 A \dot{\eta}(\theta) \dot{q}_{cla}(\theta) \\ s(\theta) &= 2 B \eta(\theta) q_{cla}(\theta) \end{aligned} \quad (9)$$

Tendremos que:

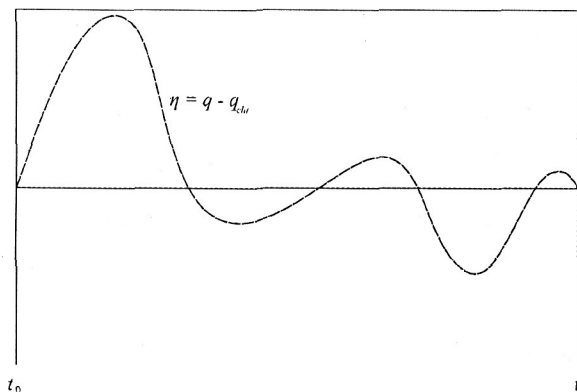
$$L = L_{cla} + L_{tras} + r + s. \quad (10)$$

Como se muestra en [4], (pág. 60), y en el Apéndice B, la suma de las integrales de  $r$  y  $s$  es nula. Esto permite que la función lagrangeana se pueda escribir como la suma de *dos lagrangeanos independientes* y, correspondientemente, la funcional de Acción se pueda escribir como la suma de dos funcionales independientes.

a)



b)



**Figura 3.** En a) se muestra a la función  $\eta = \eta(\theta)$  y  $q_{cla} = q_{cla}$  respectivamente. Luego, en b) se tiene a la función resultante  $\eta = q - q_{cla}$ ; es decir,  $\eta(\theta) = q(\theta) - q_{cla}(\theta)$ , para  $t_0 \leq \theta \leq t$ ; la cual debe satisfacer lo siguiente:  $\{q(t_0) = x_0, q(t) = x\} \iff \{\eta(t_0) = 0, \eta(t) = 0\}$

Este último hecho permitirá, a su vez, que los elementos de la matriz  $K(t, t_0)$  se puedan escribir como el producto de dos factores, lo que simplificará el cálculo de dichos elementos de matriz. Así, a partir de:

$$L = L_{cla} + L_{tras}$$

obtenemos enseguida que:

$$S(q) = S(q_{cla}) + S_{tras}(\eta)$$

Luego, podemos escribir:

$$\begin{aligned} K(t, x; t_0, x_0) &= \sum_q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q) \right\} \\ &= \sum_\eta \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cla}(q) + \frac{i}{\hbar} S_{tras}(\eta) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q_{cla}; t, t_0) \right\} \sum_\eta \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{tras}(\eta; t, t_0) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Si, para  $x_1 = q_{cla}(t_1) + y_1$ ,  $x_2 = q_{cla}(t_2) + y_2$ , definimos:

$$J(t_2, x_2; t_1, x_1) = \sum_\eta \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{tras}(\eta; t_2, t_1) \right\}$$

entonces podemos verificar que:

$$\text{i } K(t_2, x_2; t_1, x_1) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q_{cla}; t_2, t_1) \right\} J(t_2, y_2; t_1, y_1)$$

$$\text{ii } K(t, x; t_0, x_0) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q_{cla}; t, t_0) \right\} J(t, 0; t_0, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{iii } \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 K(t_3, x_3; t_2, x_2) K(t_2, x_2; t_1, x_1) &= \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q_{cla}; t_3, t_1) \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 J(t_3, y_3; t_2, y_2) J(t_2, y_2; t_1, y_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv } \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \prod_{k=1}^N K(t_k, x_k; t_{k-1}, x_{k-1}) &= \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q_{cla}; t, t_0) \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 dy_2 \dots dy_{N-1} \prod_{k=1}^N J(t_k, y_k; t_{k-1}, y_{k-1}) \end{aligned}$$

Por otra parte, las funciones  $\eta$ , que se anulan en los extremos,  $\eta(t_0) = \eta(t) = 0$ , pueden ser desarrolladas en el intervalo  $(t_0, t)$  como una serie de senos:

$$\eta(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{sen}(k\pi\theta/T), \text{ donde } T = t - t_0 \quad (12)$$

Es decir, en el espacio de las funciones continuas y diferenciables en el intervalo  $(t_0, t)$ , cada función queda caracterizada por el (conjunto ordenado) vector infinito-dimensional  $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ ; y para obtener todas las funciones  $\eta$  debemos considerar todos los posibles vectores, es decir, todos los posibles valores de cada  $a_k$ , donde  $-\infty < a_k < \infty$ . También tendremos:

$$\dot{\eta}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (k/T) a_k \cos(k\pi\theta/T) \quad (13)$$

Por otra parte, teniendo presente que :

$$\int_0^T d\theta \operatorname{sen}(j\pi\theta/T) \operatorname{sen}(k\pi\theta/T) = \int_0^T d\theta \cos(j\pi\theta/T) \cos(k\pi\theta/T) = (T/2)\delta_{jk}$$

Entonces para  $\eta^2$  y  $\dot{\eta}^2$  obtenemos:

$$\int_{t_0}^t d\theta \eta^2(\theta) = (T/2) \sum_k a_k^2$$

$$\int_{t_0}^t d\theta \dot{\eta}^2(\theta) = (T/2) \sum_k (k\pi/T)^2 a_k^2$$

Esto, con (9), nos permite escribir:

$$S_{tras}(\eta, t, t_0) = \int_{t_0}^t d\theta \{A\dot{\eta}^2(\theta) + B\eta^2(\theta)\}$$

$$= (T/2) \sum_k \{B + A(k\pi/T)^2\} a_k^2 \quad (14)$$

Para construir  $J(t, 0; t_0, 0)$  debemos considerar todas las funciones  $\eta$ , según (14) tendremos:

$$J(t, 0; t_0, 0) = \sum_{\eta} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{tras}(\eta; t, t_0) \right\}$$

$$= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)} \exp \left\{ \left( \frac{iT}{2\hbar} \right) \sum_k \left[ B + A \left( \frac{k\pi}{T} \right)^2 a_k^2 \right] \right\}$$

Es decir, puesto que los coeficientes  $a_k$  representan a números reales, tendremos:

$$J(t, 0; t_0, 0) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int da_1^* da_2^* \dots da_M^* \times$$

$$\times \exp \left\{ \left( \frac{iT}{2\hbar} \right) \sum_{k=1}^M \left[ \left\{ B + A \left( \frac{k\pi}{T} \right)^2 \right\} a_k^2 \right] \right\}$$

donde  $a_k^* = r_k a_k$ , siendo los  $r_k$  ciertos coeficientes que, como veremos más adelante, garantizan la existencia del límite indicado. Entonces, con:

$$J_M \equiv \prod_{k=1}^M \left[ r_k \int da_k \exp \left\{ \left( \frac{iT}{2\hbar} \right) \left[ B + A \left( \frac{k\pi}{T} \right)^2 \right] a_k^2 \right\} \right]$$

Podemos escribir:

$$J(t, 0; t_0, 0) = \lim_{M \rightarrow \infty} J_M \quad (15)$$

Calculemos :

$$I_k = \int da_k \exp \left\{ \left( \frac{iT}{2\hbar} \right) \left[ B + A \left( \frac{k\pi}{T} \right)^2 \right] a_k^2 \right\}$$

$$= \left[ \left( \frac{iT}{2\hbar} \right) B + A \left( \frac{k\pi}{T} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

que, en el caso particular,

$$A = m/2$$

$$B = -mw^2/2 \rightarrow B/A = -w^2$$

toma la forma:

$$I_k = \left[ \left( \frac{iTA}{2\hbar} \right) - \left\{ w^2 + \left( \frac{k\pi}{T} \right)^2 \right\} \right]^{-1/2}$$

$$= \left[ \left( \frac{iA\pi}{2\hbar T} \right) k^2 \left\{ 1 - \left( \frac{wT}{k\pi} \right)^2 \right\} \right]^{-1/2}$$

$$= \left( \frac{im\pi}{4\hbar T} \right)^{1/2} k \left\{ 1 - (wT)^2 (k\pi)^2 \right\}^{-1/2}$$

Con lo cual podemos escribir:

$$J_M = \prod_{k=1}^M (r_k I_k) = \prod_{k=1}^M r_k k \left( \frac{im\pi}{4\hbar T} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{wT}{k\pi} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (16)$$

Para hallar la forma de  $r_k$ , tengamos presente que para el propagador  $K_o$  de la partícula libre se tiene lo siguiente:

$$K_0(t, x; t_0, x_0) = \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_0(q_{cl}; t, t_0) \right\}$$

Es decir, también debería cumplirse que:

$$J_0(t, 0; t_0, 0) = \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^M \left\{ r_k k \left( \frac{im\pi}{4\hbar T} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{wT}{k\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

con  $w = 0$ . Por tanto, deberá cumplirse que:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^M \left[ r_k k \left( \frac{im\pi}{4\hbar T} \right)^{1/2} \right] = \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right]^{1/2}$$

Lo anterior, indica que conviene elegir:

$$r_k = \left( \frac{1}{k} \right) \left[ \left( \frac{4\hbar T}{im\pi} \right)^{1/2} \right] \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right]^{1/2M}$$

Reemplazando en (16) la expresión exigida para los coeficientes  $r_k$ , tendremos:

$$J_M = \prod_{k=1}^M \left( \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2M} \left[ 1 - \left( \frac{wT}{k\pi} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$J_M = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2} \prod_{k=1}^M \left[ 1 - \left( \frac{wT}{k\pi} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

de donde:

$$J(t, 0; t_0, 0) = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2} \left[ \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^M \left\{ 1 - \left( \frac{wT}{k\pi} \right)^2 \right\}^{-1/2} \right] \quad (17)$$

Con el objeto de calcular el último corchete de la ecuación (17), consideremos que la función

$$g(z) = \text{sen}(z)/z$$

satisface las condiciones mencionadas en el apéndice A, y sus ceros simples se encuentran en los puntos  $-j\pi$  y  $j\pi$  para  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Además  $g(0) = 1$ ,  $g'(0) = 0$ ; entonces podemos escribir:

$$\left(\frac{\text{sen}(z)}{z}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{z}{j\pi}\right) \exp\left(-\frac{z}{j\pi}\right) \right] \times \left[ \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) \exp\left(\frac{z}{j\pi}\right) \right] = \prod_{j=1}^{\infty} \left[ 1 - \left(\frac{z}{j\pi}\right)^2 \right]$$

Aplicando el teorema mencionado tendremos:

$$J(t, 0; t_0, 0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T}\right)^{1/2} \left[\frac{\text{sen}(wT)}{wT}\right]^{-1/2} = \left(\frac{mw}{2\pi i \hbar \text{sen}(wT)}\right)^{1/2}$$

que reemplazado en (ii) da el propagador buscado:

$$K(t, x; t_0, x_0) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(q_{cl}; t, t_0)\right\} \left(\frac{wT}{\text{sen}(wT)}\right)^{1/2}$$

Por otra parte se tiene que el valor extremal de la acción (Apéndice D) para el oscilador armónico, viene dado por:

$$S(q_{cl}; t, t_0) = \left(\frac{mw}{2\text{sen}(wT)}\right) [(x^2 + x_0^2) \cos(wT) - 2x_0x] \quad (18)$$

Entonces finalmente:

$$K(t, x; t_0, x_0) = \left(\frac{mw}{2\pi i \hbar \text{sen}(wT)}\right)^{1/2} \times \exp\left[\left(\frac{imw}{2\hbar \text{sen}(wT)}\right) \{(x^2 + x_0^2) \cos(wT) - 2x_0x\}\right] \quad (19)$$

Para verificar numéricamente la validez de la expresión obtenida (19) consideramos lo siguiente:

a) La función

$$\Psi(t, x) = \exp\left\{-\frac{mw x^2}{2\hbar} + i\frac{wt}{2}\right\}$$

satisface la ecuación de Schrödinger para el caso del potencial  $V(x) = (m/2)w^2 x^2$ .

b) La ecuación de Schrödinger transforma la función  $\Psi(0, x)$  en la función  $\Psi(t, x)$ . Este mismo resultado

deberá obtenerse usando el correspondiente propagador de Feynman,

$$\Psi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 K(t, x; 0, x_0) \Psi(0, x_0) \approx \int_{-a}^a dx_0 K(t, x; 0, x_0) \Psi(0, x_0)$$

donde  $(-a, a)$  es un intervalo fuera del cual los valores de  $\Psi(0, a)$  son insignificantes; y, posteriormente, los valores de la función resultante,  $\Psi(t, x)$  también son insignificantes. Es decir, en el cálculo numérico deberá tenerse cuidado que el intervalo  $(-a, a)$  sea lo suficientemente amplio.

## CONCLUSIONES

Debido a que:

$$\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^T dt \dot{q}_{cl}(t) \dot{\eta}(t) - \left(\frac{mw^2}{2}\right) \int_0^T dt q_{cl}(t) \eta(t) = 0$$

para  $\eta(t) = \text{sen}(\lambda wt)$ , se pudo escribir el propagador como suma de productos, donde uno de los factores, como se ve en (11), es una función exponencial de la Acción Clásica del oscilador.

La existencia del límite en la expresión (15) ha exigido la introducción de factores de convergencia  $r_k$ , cuyas formas se determinan aprovechando que el propagador de la partícula libre es conocido.

La fórmula (19), obtenida para el oscilador armónico ha sido numéricamente verificada comparando el resultado de aplicar las expresiones (2) y (19), con el conocido resultado que se obtiene de la ecuación de Schrödinger.

El propagador es, en realidad un elemento de una matriz continua  $K(t_0, t_1)$ , que transforma la función de estado inicial  $t_0$  en la función de estado en el instante posterior  $t$ ,  $\Psi_t = K(t, t_0) \Psi_{t_0}$ .

## APENDICE A

En la referencia [3] (pag. 368), podremos encontrar el teorema del análisis complejo que dice: Sea  $g(z)$  una función analítica en todo el plano complejo, con ceros simples en  $z_j$ . Si  $g(z)$  cumple que:

$$\lim \left(\frac{g'(z)}{z}\right) \times g(z) \rightarrow 0 \text{ cuando } |z| \rightarrow \infty$$

entonces se puede escribir:

$$g(z) = g(0) \exp\left\{\left(\frac{z g'(0)}{g(0)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) + \frac{z}{z_k}\right]\right\} = g(0) \exp\left\{\frac{z g'(0)}{g(0)}\right\} \times \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\frac{z}{z_k}\right)\right]$$

**Tabla 1.** Cuadro comparativo entre las funciones de onda del oscilador armónico obtenida mediante la ecuación de Schrödinger y el propagador de Feynman, las cuales corresponden a  $m = 1\text{kg}$ ,  $w = 1\text{rad/s}$ ,  $t = 1\text{s}$ .

x (m)	Parte real Schrödinger	Parte real Feynman	Parte compleja Schrödinger	Parte compleja Feynman
1.0 E-17	5.4630150950E-01	5.4697296063 E-01	-2.9844587485 E-01	-2.9881269027E-01
0.9 E-17	5.9778492887E-01	5.9851965750 E-01	-3.2657139503 E-01	-3.2697277911 E-01
0.8 E-17	6.4794838370E-01	6.4874476756 E-01	-3.5397581536 E-01	-3.5441088180 E-01
0.7 E-17	6.9569478617E-01	6.9654985430 E-01	-3.8005979386 E-01	-3.8052691974 E-01
0.6 E-17	7.3991183598E-01	7.4082125070 E-01	-4.0421567826 E-01	-4.0471249379 E-01
0.5 E-17	7.7951430399E-01	7.7847239351 E-01	-4.2585060514 E-01	-4.2637401183 E-01
0.4 E-17	8.1348788860E-01	8.1448773456 E-01	-4.4441045900 E-01	-4.4495667734 E-01
0.3 E-17	8.4093220011 E-01	8.4196577700 E-01	-4.5940335471 E-01	-4.5996800059 E-01
0.2 E-17	8.6100341720 E-01	8.6215870700 E-01	-4.7042126068 E-01	-4.7099944851 E-01
0.1 E-17	8.7343266358 E-01	8.7450618600 E-01	-4.7715843882 E-01	-4.7774490722 E-01
0.0 E+00	8.7758256189 E-01	8.7866118560 E-01	-4.7942553860 E-01	-4.8001479346 E-01

**APENDICE B**

A partir de :  $\frac{d}{dt}(\dot{q}\eta) = \dot{q}\dot{\eta} + \ddot{q}\eta$  y  $\eta(0) = \eta(T) = 0$  obtendremos que:

$$\int_0^T dt \dot{q}\dot{\eta} = - \int_0^T dt \ddot{q}\eta$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \int_0^T q_{cla}\dot{\eta}(t) - \frac{mw^2}{2} \int_0^T dt q_{cla}(t)\eta(t) = \\ = - \frac{m}{2} \int_0^T dt [q_{cla}\ddot{\eta}(t) + w^2 q_{cla}(t)\eta(t)] \eta(t) = 0 \end{aligned}$$

**APENDICE C**

Con respecto a la **tabla 1**, cabe recordar que la función de onda de Schrödinger para el oscilador es de la forma:

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) = [\cos(\frac{wt}{2}) \exp(-\alpha x^2)] + \\ + i \left[ \text{sen}\left(\frac{wt}{2}\right) \exp(-\alpha x^2) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\alpha = mw/2\hbar$ . Por otro lado, vía caminos de Feynman se tiene que:

$$\Psi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz K(t, x, 0, z)\Psi(0, z) \quad (21)$$

donde:

$$\Psi(0, z) = \exp(-\alpha z^2)$$

$$K(t, x, 0, z) = A \exp \{ iB [(z^2 + x^2)\cos(wt) - 2zx] \}$$

$$A = \left[ \frac{mw}{2i\hbar \text{sen}(wT)} \right]^{1/2}$$

$$B = \left[ \frac{mw}{2\hbar \text{sen}(wT)} \right]$$

Es importante resaltar el hecho de que la función inicial  $\Psi(0, x)$  es del tipo gaussiana, y ésta es diferente de cero sólo para cierto dominio simétrico,

$$[-1,00E - 16; 1,00E - 16] \quad (22)$$

con respecto al origen. Entonces si a esta última se le multiplica por la función oscilante respecto al eje  $x$ , tal como  $K(t, x, 0, z)$ , resulta hábil reemplazar los límites de integración  $< -\infty, \infty >$  de la expresión (21) por (22).

Justamente bajo estas consideraciones se efectuó la integración numérica requerida, las cuales aparecen en la tabla 1.

**APENDICE D**

Valor extremal de la acción clásica para el oscilador armónico simple: Para la acción tenemos,

$$S(q; t, t_0) = \int_{t_0}^t dt L(q, \dot{q}, t)$$

en donde, la trayectoria  $q : R \rightarrow R^n$  que conecta a los puntos cronoespaciales  $(t_0, x_0)$  y  $(t, x)$  previamente fijados. Entre todas las trayectorias posibles  $q(t)$ , la trayectoria clásica,  $q_{cla}$ , que da un valor extremal a la Acción, resulta ser de la forma:

$$q_{cla} = M \cos(wt + \delta) \quad (23)$$

donde se exige como antes, que ésta curva pase por los puntos crono-espaciales  $(t_0, x_0)$  y  $(t, x)$ ; esto es,

$$q_{cla}(t) = x = \cos(wt + \delta) \quad (24)$$

$$q_{cla}(t_0) = x_0 = \cos(wt_0 + \delta)$$

Así, la Acción queda expresada por:

$$\begin{aligned} S(q_{cla}; t, t_0) = \\ = \int_0^T dt \left[ \left( \frac{-mw^2 M^2}{2} \right) \right] [\cos^2(wt + \delta)] \\ = \left[ \left( \frac{-mw^2 M^2}{2} \right) \right] [\text{sen}(wT)] [\cos(wt + wt_0 + 2\delta)] \end{aligned} \quad (25)$$

donde,  $T = t - t_0$ . A partir de la expresión (24) se obtiene:

$$\cos(\omega t + \omega t_0 + 2\delta) = \left[ \frac{x^2 + x_0^2}{M^2 \cos(\omega T)} \right] - \left[ \frac{1}{\cos(\omega T)} \right] \quad (26)$$

Reemplazando (26) en (25):

$$S(q_{cl}; t, t_0) = \left[ -\frac{m\omega}{2} \sin(\omega T) \right] \left[ \frac{x^2 + x_0^2}{\cos(\omega T)} \right] + \left[ \frac{m\omega^2 M^2}{2 \sin(\omega T) \cos(\omega T)} \right] \quad (27)$$

Ahora, a partir de (24) podemos conseguir una expresión explícita para  $M^2$ :

$$x_0 = M \cos(\omega t_0) \cos(\delta) - M \sin(\omega t_0) \sin(\delta)$$

$$x = M \cos(\omega t) \cos(\delta) - M \sin(\omega t) \sin(\delta)$$

de donde:

$$x_0 \sin(\omega t) - x \sin(\omega t_0) = M \sin(\omega T) \cos(\delta)$$

$$x_0 \cos(\omega t) - x \cos(\omega t_0) = M \sin(\omega T) \sin(\delta)$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro se obtiene:

$$M^2 = \left[ \frac{1}{\sin(\omega T)} \right]^2 [x^2 + x_0^2 - 2x_0 x \cos(\omega T)] \quad (28)$$

Finalmente, insertando (28) en (27) :

$$S(q_{cl}; t, t_0) = \left[ \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} \right] [(x^2 + x_0^2) \cos(\omega T) - 2x_0 x] \quad (29)$$

1. R. Feynman A. Hibbs, quantum Mechanics and Path Integral Mc Graw-Hill, 1965.
2. H.G. Valqui, El problema de la integral de Feynman, Revci-

- uni, volumen 1, número 1, junio 1995.
3. Arfken, Mathematical Methods for Physicists.
4. R.P. Feynman, Statistical Mechanics a set of lectures.