Una nueva aproximación para el problema de dos niveles

Pedro Canales
Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingenieria
E-mail: pcanales@uni.edu.pe

Eladio Ocaña
IMCA - Universidad Nacional de Ingenieria
E-mail: eocana@cust.univ-bpclermont.fr

Wilfredo Sosa
IMCA - Universidad Nacional de Ingenieria
E-mail: sosa@uni.edu.pe

Recibido el 09 de enero del 2006; aceptado el 30 de enero del 2006

Nuestro interés es formular el problema de dos niveles como un problema de optimizar sobre conjuntos eficientes débiles, porque de esta forma podemos aplicar, toda la teoría desarrollada para los conjuntos eficientes débiles, sobre los problemas de dos niveles. La conexión entre ambos problemas es el problema de equilibrio.

Palabras claves: Problemas de dos niveles, Problemas de Equilibrio, Mínimos Pareto.

We are interested in formulate the bilevel problem as an optimization problem over a weakly efficient set, because we can use the technology for weakly efficient sets into the bilevel problems. The connection between the two problems is the equilibrium problems.

Keywords: Bilevel problems, Equilibrium problems, Pareto minimizers

1. Introducción

El problema de programación de dos niveles (desde ahora PDN) es un problema matemático en el cual la región de restricciones es definida implícitamente por un problema de optimización.

La formulación original del problema PDN se inspiro en la teoria de juegos de H. Stackelberg (1952), pero fue en el trabajo de W. Candler y R. Norton (1977) que la denominación de Programación de dos niveles fue mencionado.

De modo general puede decirse que un problema PDN se caracteriza por:

- La estructura jerárquica entre sus niveles de decisión, pues el segundo ejecuta su decisión según la decisión del primer nivel.
- Los objetivos en los dos niveles pueden ser independientes y/o estar en conflicto.
- Cada nivel tiene control solo sobre ciertas variables y nunca sobre todas.

Por otro lado, un conjunto eficiente débil, es el conjuntos de todas las soluciones Pareto débiles de un problema de programación multiobjetivo. En este trabajo, para cada problema PDN, le asignamos un problema de de Programación Multiobjetivo (desde ahora PMO), donde la función objetivo del problema PMO es definida por las funciones objetivo de los dos niveles del problema PDN, es decir que el problema PMO asociado al problema PDN, minimizara dos funciones objetivos simultaneamente. Es en este contexto que definiremos tres clases de minimos Pareto, a los cuales llamaremos soluciones eficientes del problema PMO.

Para caracterizar a cada solución eficiente débil, utilizaremos el conocido problema de equilibrio (ver [1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7] para mas detalles sobre este problema), para esto transformaremos el problema de PMO en un problema de equilibrio de tal forma que ambos problemas tengan el mismo conjunto de soluciones.

El Problema de Equilibrio aparece por primera vez con este título en 1994 con el trabajo pionero de Werner Oettli y Eugen Blum [1]. En este trabajo Oettli y Blum, presentan al problema de equilibrio como un problema de unifica muchos problemas clásicos en la teoría de la optimización, tales como el problema de minimización, el problema de punto fijo, el problema de puntos silla, el problema de desigualdad variacional y el problema de programación multiobjetivo.

En la sección 2, haremos una introducción al orden parcial inducido por un cono y luego definir tres clases de minimizadores, mas información sobre este tema la pueden encontrar en [5] y [7]. En la sección 3, introducimos el problema PDN. En la sección 4, definimos el problema PMO asociado al problema PDN. En la sección 5, formularemos el problema PMO como un problema de equilibrio (ver [2, 5 y 7]), para caracterizar las soluciones eficientes débiles. Finalmente en la sección 6 introducimos un nuevo concepto de solución eficiente débil para el problema PDN y lo analizamos para el caso lineal.

2. Preliminares

Sabemos que un problema de programación multiobjetivo consiste en optimizar simultáneamente dos o más de dos funciones. En nuestro caso el problema de programación multiobjetivo consiste en minimizar dos funciones objetivos.

Para poder minimizar dos funciones objetivos simultaneamente, se requiere de extender el orden total de $I\!R$ a $I\!R^2$, de esta forma nacen los ordenes parciales.

Sabemos que un orden parcial $\preceq$ en $I\!R^2$ es una relación que satisface:

1. Dado $u \in I\!R^2$: $u \preceq u$.
2. Dados u, $v \in I\!R^2$: $u \preceq v$ y $v \preceq u$ implica $u = v$.
3. Dados u, v, $w \in I\!R^2$: $u \preceq v$ y $v \preceq w$ implica $u \preceq w$

Comentario 0.1. *Observe que la diferencia entre un orden parcial y un orden total radica en el hecho que: en un orden total todos los elementos están relacionados, mientras que en un orden parcial no todos los elementos están relacionados. Esto implica que un orden total es un orden parcial, pero lo recíproco en general no es cierto.*

El siguiente resultado caracteriza a un orden parcial inducido por un cono no vacío.

Lema 0.2. *Sea $K \subset I\!R^2$ un cono no vacío y sea $\preceq$ una relación en $I\!R^2$ definida por:*

$$u \preceq v \quad (\text{ ó } \quad v \succeq u) \quad \text{si y solo si} \quad v - u \in K \qquad (1)$$

La relación $\preceq$ es un orden parcial en $I\!R^2$ si y solo si K es convexo y $K \cap (-K) = \{0\}$

Prueba:

$\Longrightarrow$ Para ver la convexidad, tomemos u, $v \in K$, luego para cada $t \in [0,1]$ se tiene que $tu \in K$, así como también $(1-t)v \in K$. Note que $tu = tu - 0$ y $0-(t-1)v = (1-t)v$, esto implica que $(t-1)v \preceq 0$ y $0 \preceq tu$, por la propiedad (3) del orden parcial tenemos que $(t-1)v \preceq tu$. Luego, $tu-(t-1)v = tu + (1-t)v \in K$, lo cual implica la convexidad de K. Es fácil ver que aplicando la condición (2) del orden parcial se tiene que $K \cap (-K) = \{0\}$.

$\Longleftarrow$ Para verificar las condiciones (1) y (2), utilizamos la hipótesis que $K \cap (-K) = \{0\}$. Finalmente la condición (3) es obtenida de la hipótesis de convexidad de K y de ser K también un cono.

$\square$

Dado un orden parcial $\preceq$ en $I\!R^2$ inducido por un cono K con interior no vacío, denotemos:

$$u \prec v \quad (\text{ or } v \succ u) \text{ if and only if } v - u \in int(K).$$

Ahora, basados en un orden parcial en $I\!R^2$, definiremos tres clases de minimizadores. En efecto:

Definición 0.3. *Sea I_C un subconjunto no vacío de $I\!R^2$*

a) $\bar{v} \in I_C$ *es un mínimo pareto fuerte de I_C si* $\bar{v} \preceq v$, $\forall v \in I_C$.

b) $\bar{v} \in I_C$ *es un mínimo pareto de I_C si* $v \not\preceq \bar{v}$, $\forall v \in (I_C \setminus \{\bar{v}\})$.

c) $\bar{v} \in I_C$ *es un mínimo pareto débil de I_C si* $v \not\prec \bar{v}$, $\forall v \in I_C$.

Comentario 0.4. *Note que en la Definición 0.3, se extiende de manera natural a los minimizadores de $I\!R$, es decir que si $K = [0, +\infty[$, entonces a), b) y c) en la Definición 0.3 son equivalentes y corresponde al valor mínimo de $I_C \subset I\!R$.*

Proposición 0.5. *Sea I_C un subconjunto no vacío de $I\!R^2$, $V = (I\!R^2 \setminus (-K)) \cup \{0\}$ y $W = I\!R^2 \setminus (-int(K))$.*

1. *$\bar{v}$ es un mínimo Pareto fuerte de I_C si y solo si $I_C \subset (\bar{v} + K)$.*
2. *$\bar{v}$ es un mínimo Pareto de I_C si y solo si $I_C \subset (\bar{v} + V)$.*
3. *$\bar{y}$ es un mínimo Pareto débil de I_C si y solo si $I_C \subset (\bar{v} + W)$.*

Prueba:

1. $\bar{v} \in I_C$ es un mínimo Pareto fuerte de I_C si y solo si $v - \bar{v} \in K$ $\forall v \in I_C$ si y solo si $v \in \bar{v} + K$ $\forall v \in I_C$ si y solo si $I_C \subset \bar{v} + K$.
2. $\bar{v} \in I_C$ es un mínimo Pareto de I_C si y solo si $\bar{v} - v \notin K$ $\forall v \in I_C \setminus \{\bar{v}\}$ si y solo si $v - \bar{v} \notin -K$ $\forall v \in I_C \setminus \{\bar{v}\}$ si y solo si $v - \bar{v} \in (I\!R^2 \setminus (-K))$ $\forall v \in I_C \setminus \{\bar{v}\}$ si y solo si $v - \bar{v} \in V = (I\!R^2 \setminus (-K)) \cup \{0\}$ $\forall v \in I_C$ si y solo si $v \in \bar{v} + V$ $\forall v \in I_C$ si y solo si $I_C \subset \bar{v} + V$.
3. $\bar{v} \in I_C$ es un mínimo Pareto debil de I_C si y solo si $v - \bar{v} \notin -int(K)$ $\forall v \in I_C$ si y solo si $v - \bar{v} \in W = (I\!R^2 \setminus (-int(K))$ $\forall v \in I_C$ si y solo si $v \in \bar{v} + W$ $\forall v \in I_C$ si y solo si $I_C \subset \bar{v} + W$.

$\square$

Comentario 0.6. *Note que $K \subset V \subset W$. Esto implica que cada mínimo Pareto fuerte es un mínimo Pareto y cada mínimo Pareto es un mínimo Pareto débil. En general lo recíproco no es cierto, para tal efecto, consideremos por ejemplo en $I\!R^2$ los conjuntos:*

$$K = \{(x,y) : 0 \le y \le x\} \quad y$$
$$I_C = \{(x,0) : x \ge 0\} \cup \{(0,x) : x \ge 0\}.$$

Entonces, denotando

mpf$(I_C) \equiv$ *conjunto de mínimos pareto fuerte,*

mp$(I_C) \equiv$ *conjunto de mínimos pareto,*

mpd$(I_C) \equiv$ *conjunto de mínimos pareto débil,*

mpf$(I_C) = \emptyset$, *mp*$(I_C) = \{(0,x) : x \ge 0\}$ *y mpd*$(I_C) = I_C$.

3. El Problema PDN

El problema PDN consiste en:

$$\begin{array}{rll} \text{minimizar} & h(x,y) & \\ \text{sujeto a:} & h_1(x,y) \le 0 & \\ & y & \text{es una solución de} \\ & \text{minimizar} & g(x,y) \\ & \text{sujeto a:} & g_1(x,y) \le 0 \end{array} \qquad (2)$$

donde h, h_1, g y g_1 son funciones dadas.

Comentario 0.7. *El problema PDN, tal como su nombre lo indica se resuelve en dos niveles,*

El primer nivel, *llamado también el problema del líder consiste en minimizar*

$$\{h(x, y(x)) : h_1(x, y(x)) \leq 0\},$$

donde $y(x)$ es la solución del segundo nivel dado x.

El segundo nivel, *llamado también, el problema del seguidor y consiste en, dado x, minimizar $\{g(x, y) : g_1(x, y) \leq 0\}$. La solución en este nivel será denotada por $y(x)$.*

Ahora, consideremos algunas definiciones que nos serán de utilidad posteriormente.

Definición 0.8. *El conjunto de restricciones del problema PDN es definido como:*

$$R := \{(x, y) : h_1(x, y) \leq 0, \quad g_1(x, y) \leq 0\} \tag{3}$$

Definición 0.9. *El conjunto factible del problema del seguidor es definido como:*

$$V(x) := \{y : g_1(x, y) \leq 0\} \tag{4}$$

para cada x tal que $\{y : h_1(x, y) \leq 0\} \neq \emptyset$.

El siguiente conjunto sera utilizado en la siguiente definición:

$$SN(x) := \text{argmin}\{g(x, w) : w \in V(x)\} \tag{5}$$

Definición 0.10. *Se define la región inducida (ó conjunto de soluciones viable del problema de dos niveles) como:*

$$RI := \{(x, y) : (x, y) \in R, \quad y \in SN(x)\} \tag{6}$$

Comentario 0.11. *Observe que el problema de dos niveles puede ser reformulado como:*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & h(x, y) \\ \textit{sujeto a} & (x, y) \in RI \end{array} \tag{7}$$

4. El Problema PMO asociado al problema PDN

Dado el problema PDN, definamos $F : R \to I\!R^2$ de la forma siguiente:

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} h(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Luego, el Problema Multi-Objetivo, PMO, asociado al Problema PDN, es como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & F(x, y) \\ \text{sujeto a} & (x, y) \in R \end{array} \tag{9}$$

Considerando el siguiente cono:

$$K = \{u \in I\!R^2 : \forall i \in \{1, 2\}, \ u_i \geq 0\} \tag{10}$$

y el siguiente conjunto:

$$I_C = \{F(x, y) : (x, y) \in R\} \tag{11}$$

entonces de acuerdo a la Proposición 0.5, se tiene que:

$$V \setminus \{0\} = \{u \in I\!R^2 : \exists i \in \{1, 2\}, \ u_i > 0\}$$

$$W = \{u \in I\!R^2 : \exists i \in \{1, 2\}, \ u_i \geq 0\}$$

Definición 0.12. *Consideremos el Problema PMO asociado al Problema PDN.*

a) $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente fuerte del Problema PMO si $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un minimizador Pareto fuerte de I_C.

b) $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente del Problema PMO si $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un minimizador Pareto de I_C.

c) $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente débil del Problema PMO si $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un minimizador Pareto débil de I_C

Proposición 0.13. *1. $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente fuerte del Problema PMO si y solo si se tiene que $h(x, y) \geq h(\bar{x}, \bar{y})$ y $g(x, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y})$ $\forall (x, y) \in R$.*

2. $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente del problema PMO si y solo si $\forall (x, y) \in R$, con $F(x, y) \neq F(\bar{x}, \bar{y})$, se tiene que $h(x, y) > h(\bar{x}, \bar{y})$ ó $g(x, y) > g(\bar{x}, \bar{y})$.

3. $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente débil del problema PMO si y solo si $\forall (x, y) \in R$ se tiene que $h(x, y) \geq h(\bar{x}, \bar{y})$ ó $g(x, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y})$.

Prueba:

1. $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente fuerte del problema PMO si y solo si $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un minimizador Pareto fuerte de I_C si y solo si $F(x, y) \in F(\bar{x}, \bar{y}) + K$ $\forall (x, y) \in R$ si y solo si $F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y}) \in K$ $\forall (x, y) \in R$ si y solo si $h(x, y) \geq h(\bar{x}, \bar{y})$ y $g(x, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y})$ $\forall (x, y) \in R$.

2. $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente del problema PMO si y solo si $F(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ es un minimizador Pareto de I_C si y solo si $I_C \subset F(\bar{x}, \bar{y}) + V$ si y solo si $F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y}) \in V$ $\forall (x, y) \in R$ si y solo si $\forall (x, y) \in R$ con $F(x, y) \in (I_C \setminus \{F(\bar{x}, \bar{y})\})$: $F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y}) \in V \setminus \{0\}$ si y solo si $\forall (x, y) \in R$, con $F(x, y) \neq F(\bar{x}, \bar{y})$, se tiene que $h(x, y) > h(\bar{x}, \bar{y})$ ó $g(x, y) > g(\bar{x}, \bar{y})$.

3. $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ es una solución eficiente débil del problema PMO si y solo si $F(\bar{x}, \bar{y})$ es un minimizador Pareto débil de I_C si y solo si $I_C \subset f(\bar{x}, \bar{y}) + W$ si y solo si $F(x, y) - F(\bar{x}, \bar{y}) \in W$ $\forall (xy) \in R$ si y solo si $h(x, y) \geq h(\bar{x}, \bar{y})$ ó $g(x, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y})$ $\forall (x, y) \in R$.

□

5. Caracterización de las soluciones eficientes del Problema PMO

En esta sección caracterizaremos las soluciones del problema PMO, usando el formato de los problemas de equilibrio.

El problema de equilibrio consiste en:

$$\text{Hallar} \quad x \in C \quad \text{tal que} \quad f(x,y) \geq 0 \quad \text{para cada } y \in C \tag{12}$$

donde C es un conjunto dado y $f : C \times C \to I\!R$ es una función dada. Es decir que un problema de equilibrio esta completamente definido por la función f y el conjunto C, por lo tanto $PE(f,C)$ denotara al problema 12.

Antes de caracterizar las diferentes soluciones, consideremos algunas definiciones previas.

$$D := \{x \in K : \sum_{i=1}^{2} x_i = 1\} \tag{13}$$

$$\psi : I\!R^2 \to I\!R \ \text{ tal que } \ \psi(y) = \max_{z \in D} z^T y \tag{14}$$

$$\varphi : I\!R^2 \to I\!R \ \text{ tal que } \ \varphi(y) = \min_{z \in D} z^T y \tag{15}$$

Lema 0.14. *Sean (x,y) and (w,z) dos puntos cualesquiera en R.*

1. *$F(x,y) \prec F(w,z)$ si y solo si $\psi(F(x,y) - F(w,z)) < 0$.*
2. *$F(x,y) \preceq F(w,z)$ si y solo si $\varphi(F(w,z) - F(x,y)) \geq 0$.*
3. *$F(x,y) \preceq F(w,z)$ si y solo si $\psi(F(x,y) - F(w,z)) \leq 0$.*

Prueba: La demostración es una consecuencia directa de las definiciones del orden parcial y de las funciones ψ y φ. $\square$

Teorema 0.15. *Consideremos el Problema PMO asociado al Problema PDN y consideremos también las funciones φ y ψ definidas anteriormente.*

1. *$\bar{u} = (\bar{x},\bar{y}) \in R$ es una solution eficiente fuerte del Problema PMO si y solo si $\bar{u} = (\bar{x},\bar{y}) \in R$ es una solución de $PE(f,R)$, donde f es definida por $f(u,v) := \varphi(F(v) - F(u)) \geq 0 \ \forall u := (x,y)$, $v := (w,z) \in R$.*
2. *$\bar{u} = (\bar{x},\bar{y}) \in R$ es una solution eficiente del Problema PMO si y solo si $\bar{u} = (\bar{x},\bar{y}) \in R$ es una solución de $PE(f,R)$ tal que $f(\bar{u},v) > 0 \ \forall v = (w,z) \in R$ para $F(v) \neq F(\bar{u})$, donde f es definida como $f(u,v) := \psi(F(v) - F(u))$ con $(u,v) \in R \times R$.*
3. *$\bar{u} = (\bar{x},\bar{y}) \in R$ es una solution eficiente débil del Problema PMO si y solo si $\bar{u} \in R$ es solución de $PE(f,R)$, donde f es definida como $f(u,v) := \psi(F(v) - F(u))$ con $(u,v) \in R \times R$.*

Más aún, si F es continua sobre R, entonces f satisface las siguientes propiedades:

1. *$f(u,u) = 0, \ \forall u \in R$;*
2. *f es continua sobre $R \times R$;*

Prueba: 1. Para demostrar que $f(\bar{u},v) := \varphi(F(v) - F(\bar{u})) \geq 0 \ \forall v \in R$ use el item 2 del Lema 0.14 y la definición de φ.
2. $f(\bar{u},v) := \psi(F(v)-F(\bar{u})) > 0 \, \forall v \in R$ con $F(v) \neq F(\bar{u})$ si y solo si $F(v) \not\preceq F(\bar{u}) \ \forall v \in R$ con $F(v) \neq F(\bar{u})$ (por el item 3 del Lema 0.14) si y solo si $F(\bar{u})$ es un minimizador Pareto de I_C (por el item b de la Definición 0.3) si y solo si $\bar{u}$ es una solución eficiente del Problema PMO.
3. $\bar{u} \in R$ es una solución eficiente del Problema PMO si y solo si $F(\bar{u})$ es un minimizador Pareto de I_C (por el item c de la Definición 0.12) si y solo si $F(v) \not\prec F(\bar{u})$, $\forall v \in R$ (por el item c de la Definición 0.3) si y solo si $\psi(F(v) - F(\bar{u})) \geq 0, \forall v \in R$ (por el item 1 del Lema 0.14) si y solo si $f(\bar{u},v) \geq 0, \forall v \in R$.
La primera propiedad de f es evidente de la definición de f.
Para la segunda propiedad, tomemos $\{(u^k,v^k)\}_{k \in I\!N} \subset R \times R$ *tal que* $u^k \to \bar{u}$ *y* $v^k \to \bar{v}$. *Puesto que D es com*pacto, entonces existe $\bar{z} \in D$ y $\{z^k\}_{k \in I\!N} \subset D$ tal que $f(\bar{u},\bar{v}) = \bar{z}^T(F(\bar{u}) - F(\bar{v}))$ y $f(u^k,v^k) = (z^k)^T(v^k - u^k)$, $\forall k \in I\!N$. Sea $\hat{z}$ algún punto de acumulación de $\{z^k\}$, entonces existe $I \subset I\!N$ tal que $z^k \to \hat{z}$ cuando $k \to +\infty$ con $k \in I$. Así

$$\begin{aligned} & (z^k)^T(F(\bar{v}) - F(\bar{u})) - (z^k)^T(F(v^k) - F(u^k)) \\ \leq \ & f(\bar{u},\bar{v}) - f(u^k,v^k) \\ \leq \ & (\bar{z})^T(F(\bar{v}) - F(\bar{u})) - (\bar{z})^T(F(v^k) - F(u^k)). \end{aligned}$$

Esto implica que, $[f(\bar{u},\bar{v}) - f(u^k,v^k)] \to 0$ cuando $k \to +\infty$ con $k \in I$. $\square$

Comentario 0.16. *El Teorema 0.15 nos dice que las soluciones (eficientes fuertes, eficientes y eficientes débiles) del Problema PMO son también soluciones de problemas de equilibrio y viceversa.*

A partir de ahora denotemos por: EF al conjunto de soluciones eficientes fuertes, E al conjunto de soluciones eficientes y ED al conjunto de eficientes débiles del Problema PMO asociado al Problema PDN.

Corolario 0.17. *Los conjuntos EF y ED son cerrados.*

Teorema 0.18. *Sea $(\bar{x},\bar{y}) \in R$ una solución del siguiente problema:*

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & h(x,y) \\ \textit{sujeto a} & (x,y) \in EF \end{array} \tag{16}$$

entonces, $(\bar{x},\bar{y}) \in R$ es una solución del Problema PDN.

Comentario 0.19. *El Teorema anterior nos dice que EF es una cota inferior para el conjunto de soluciones del Problema PDN. Por otro lado, sabemos que $EF \subset E \subset ED$. Por lo tanto podemos pensar que el conjunto ED podría ser una aproximación al conjunto de soluciones del Problema PDN.*

El siguiente Teorema presenta nuevas caracterizaciones para las soluciones eficientes débiles del problema PMO y se basan sobre la función f del problema de Equilibrio.

Teorema 0.20. *Sea $\bar{u} \in R$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\bar{u} \in ED$.
2. $\bar{u}$ *es una solución de EP.*
3. *Si existe* $v \in R$ *tal que* $F(v) \preceq F(\bar{u})$, *entonces* $f(\bar{u}, v) = 0$.
4. $\{v \in R : F(v) \preceq F(\bar{u})\} = \{v \in R : f(\bar{u}, v) = 0\}$.

Prueba:

1) $\Longrightarrow$ 2) Por el Teorema 0.15, tenemos que (1) implica (2).

2) $\Longrightarrow$ 3) Tomemos $v \in R$ tal que $F(v) \preceq F(\bar{u})$. Esto implica que $f(\bar{u}, v) \leq 0$. Pero, como $\bar{u}$ es una solución de EP, entonces $f(\bar{u}, v) \geq 0$. Así $f(\bar{u}, v) = 0$.

3) $\Longrightarrow$ 4) Tome $v \in \{w \in R : F(w) \preceq F(\bar{u})\}$. Esto implica que $F(w) \preceq F(\bar{u})$. Así, $f(\bar{u}, v) = 0$. Para la recíproca, tomemos $v \in \{w \in R : f(\bar{u}, w) = 0\}$, then $z^T(F(w) - F(\bar{u}) \leq 0\, \forall z \in D$. Esto implica que $(F(\bar{u}) - F(w)) \in K$ y por lo tanto $F(v) \preceq F(\bar{u})$.

4) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que $\bar{u}$ no es una solución de EP. Entonces existe $v \in R$ tal que $f(\bar{u}, v) = \sup_{z \in D} z^T(F(v) - F(\bar{u})) < 0$. Como D es compacto, se tiene que $F(v) \prec F(\bar{u})$. Esto implica que $F(v) \preceq F(\bar{u})$, luego $f(\bar{u}, v) = 0\}$. Lo cual es una contradicción, por lo tanto $\bar{x}$ es una solución of EP.

□

Finalmente, introducimos un nuevo tipo de solución para el Problema PDN, al cual llamaremos solución eficiente débil.

Definición 0.21. *Se dice que* $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ *es una solución eficiente débil del problema de dos niveles si* $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$ *es un minimizador de* h *sobre el conjunto de soluciones eficientes débiles del Problema PMO asociado al Problema PDN.*

Teorema 0.22. *Si* R *es compacto y las funciones* h *y* g *son continuas en* R*, entonces el Problema PDN admite soluciones eficientes débiles.*

Prueba: Sabemos que si las funciones h y g son continuas, entonces ED es cerrado. Como $ED \subset R$, entonces ED es compacto. Finalmente, por Weiestrass, h alcanza su minimo en ED. □

6. Conclusiones

El Problema PDN, es un problema muy dificil, incluso para el caso lineal. En este trabajo introducimos una clase de soluciones aproximadas para este problema. Decimos aproximadas, porque esta aproximación es basada en el hecho que toda solución eficiente fuerte es solución del Problema PDN y toda solución eficiente débil es una aproximación al conjunto de soluciones eficientes fuertes. En los subsiguientes trabajos trataremos el caso lineal y el caso cuadrático, para finalmente tratar el caso non lineal.

1. Blum, E., and Oettli, W., *From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems*, The Mathematics Student, **63** (1994) 123–145.
2. A.N. Iusem, W. Sosa, *New existence results for equilibrium problems*, Nonlinear Analysis **52** (2003) 621-635.
3. A. N. Iusem, G. Kassay and W. Sosa, *On certain condictions for the existence of solutions of equilibrium problems*, To appears in Mathematical Programming.
4. Raupp, F. M. P., and Sosa, W., *An analytic center cutting plane algorithm for finding equilibrium points.* To appears in RAIRO.
5. W. Sosa and Fernanda M. P. Raupp, *A new approach to multicriteria optimization problems*, Numerical Algorithms, **35** (2004) 233-247.
6. J. E. Martinez Legaz and W. Sosa, *Duality for Equilibrium Problems*, To appears in Journal of Global Optimization.
7. Raupp, F. M. P., and Sosa, W., *Optimization over weak efficient sets*, To appears in Optimization