Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI, REVCIUNI **9** (2)(2005) 47-51

# Controlabilidad y Observabilidad en Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Matriciales

Andres Collante Huanto, Fidel Jara Huanca
*Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Ingeniería*
*E-mail: andrescollante@yahoo.es, pcmaf_jar@hotmail.com*

Recibido el 15 de diciembre del 2005, aceptado el 25 de diciembre del 2005

Este trabajo presenta la teoría de la Solución Dinámica para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes matriciales, obteniendose resultados que van a ser usados en el desarrollo de la teoría de Controlabilidad y Observabilidad en Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Matriciales.

Palabras claves: Controlabilidad, Observabilidad.

This work present the theory of the dinamic solution of linear homogeneous differential equation with matrix coefficients, that obtaining results used in the development of the theory of controllability, observability linear homogeneous differential equation with matrix coefficients .

Keywords: Controllability, Observability.

## 1. Introducccion

En [2] se muestran modelos matemáticos de la forma

$$A_1\mathbf{q}^{''} + A_2\mathbf{q}^{'} + A_3\mathbf{q} = f(t) \qquad (1)$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{q(t)}$ es un vector que tiene n componentes, que varía con el tiempo y representa un desplazamiento de masas en el modelo.

Los vectores $\mathbf{q}^{''}$ y $\mathbf{q}^{'}$ representan las aceleraciones y velocidades respectivamente.

Los coeficientes $A_1$,$A_2$ y $A_3$ son matrices cuadradas de orden n cuyos elementos son constantes numéricas y representan diversos parámetros físicos del sistema.

Para analizar la controlabilidad y observabilidad de sistemas modelados por la ecuación (1), se lleva mediante un cambio de variable a una ecuación de la forma (2), teniendo como ecuación de salida (3).

Sean las ecuaciones:

$$\mathbf{x}^{'}(\mathbf{t}) = \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)} \qquad (2)$$

$$\mathbf{y(t)} = \mathbf{Cx(t)} + \mathbf{Du(t)} \qquad (3)$$

donde $\mathbf{x}$ vector de estado (dimensión $n$)
$\mathbf{y}$ vector de salida (dimensión $m$ donde $m \leq n$)
$\mathbf{u}$ vector de entrada algunas veces llamado señal de control (dimensión $r$)
$A$ matriz constante de orden $n \times n$
$B$ matriz constante de orden $n \times r$
$C$ matriz constante de orden $m \times n$
$D$ matriz constante de orden $m \times r$

El vector de estado $\mathbf{x}$ está formado por las variables $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, que se llaman variables de estado.

El vector de salida $\mathbf{y}$ está formado por las variables $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$, que se llaman variables de salida.

Aqui el trabajo surge como una inquietud de analizar la controlabilidad y observabilidad de sistemas modelados por (1) sin necesidad de llevarlo a la forma (2), para ello primero se desarrolla la teoria de solución dinámica.

Primeramente veamos algunos resultados que se tienen para las ecuaciones (2) y (3).

**Definición 1.** *Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (2) es* **completamente controlable** *o (por brevedad) controlable si a partir de cualquier estado inicial y final* $\mathbf{x(t_o)}$, $\mathbf{x(t_1)} \in \mathbb{R}^n$ *existe un vector de control* $\mathbf{u(t)}$, $t \in [t_0, t_1]$, *que lleva* $\mathbf{x(t_o)}$ *a* $\mathbf{x(t_1)}$, *es decir*

$$\mathbf{x(t_1)} = \mathbf{e^{(t_1-t_0)A}x(t_0)} + \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t_1}} \mathbf{e^{(t_1-\tau)A}Bu(\tau)d\tau}$$

**Teorema 1.** *El sistema descrito mediante la ecuación (2) es* **completamente controlable** *si y solo si la matriz*

$$[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B] \qquad (4)$$

*de orden $n \times nr$ es de rango $n$. La matriz dada en (4) se denomina por lo común,* **matriz de controlabilidad.**

**Prueba:** Ver [10]

Al investigar una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta con considerar el sistema descrito mediante las ecuaciones

$$\mathbf{x}^{'}(\mathbf{t}) = \mathbf{Ax(t)} + \mathbf{Bu(t)} \qquad (5)$$

$$\mathbf{y(t)} = \mathbf{Cx(t)} \qquad (6)$$

**Definición 2.** *Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (5) y (6) es* **completamente observable** *o (por brevedad) observable si, para cualquier estado inicial* $\mathbf{x(0)} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$, *existe un tiempo $t_1$ tal que conociendo* $\mathbf{u(t)}$ *e* $\mathbf{y(t)}$ *donde $t \in [0, t_1]$ asi como también las matrices constantes $A$,$B$ y $C$ son suficientes para determinar* $\mathbf{x(0)}$.

**Teorema 2.** *El sistema descrito mediante la la ecuación (5) y (6) es* **completamente observable** *si y solo si la matriz*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

*de orden $mn \times n$ es de rango $n$. La matriz dada en (7) se denomina por lo común,* **matriz de observabilidad.**

## 2. Solución Dinámica

Sea la ecuación diferencial de orden $m$

$$u^{(m)}(t) = A_1 u^{(m-1)}(t) + A_2 u^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1}u'(t) + A_m u(t) \tag{8}$$

considerando que $t \in \mathbb{R}$, $A_j \quad j = 1, 2, \ldots, m$ son matrices cuadradas reales de orden $n$, y

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

un vector columna.

Llevemos (8) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left.\begin{array}{rcl} Z_1 & = & u(t) \\ Z_2 & = & u'(t) \\ Z_3 & = & u''(t) \\ & \vdots & \\ Z_m & = & u^{(m-1)}(t) \end{array}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \\ \vdots \\ Z_{m-1}' \\ Z_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \cdots & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{m-1} \\ Z_m \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$Z'_{mn\times 1}(t) = \mathcal{A}_{mn\times mn} Z_{mn\times 1}(t) \tag{11}$$

donde $\mathcal{A}$ la llamaremos **matriz compañera** y $Z(t)$ es una función real con valores en $\mathbb{R}^{mn\times 1}$ .

La solución general del sistema homogéneo (11) es de la forma

$$Z = e^{\mathcal{A}t} W \tag{12}$$

donde:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

es un vector constante cualquiera en $\mathbb{R}^{mn\times 1}$ y $W_1, W_2, \ldots, W_m$ son vectores columna que tienen $n$ componentes.

Se prueba que

$$e^{\mathcal{A}t} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & C_2'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & C_2''(t) & \cdots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & C_2^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{14}$$

además

$$\begin{array}{rcl} C_0^{(m)} & = & A_m C_0 + A_{m-1}C_0' + \cdots + A_1 C_0^{(m-1)} \\ C_1^{(m)} & = & A_m C_1 + A_{m-1}C_1' + \cdots + A_1 C_1^{(m-1)} \\ \vdots & & \\ C_{m-1}^{(m)} & = & A_m C_{m-1} + A_{m-1}C_{m-1}' + \cdots + A_1 C_{m-1}^{(m-1)} \end{array} \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} C_0(0) = \mathbb{I} & C_0'(0) = \mathbb{O} & \cdots & C_0^{(m-1)}(0) = \mathbb{O} \\ C_1(0) = \mathbb{O} & C_1'(0) = \mathbb{I} & \cdots & C_1^{(m-1)}(0) = \mathbb{O} \\ C_2(0) = \mathbb{O} & C_0'(0) = \mathbb{O} & \cdots & C_2^{(m-1)}(0) = \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m-1}(0) = \mathbb{O} & C_{m-1}'(0) = \mathbb{O} & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(0) = \mathbb{I} \end{array}\right\} \tag{16}$$

$$C_j^{(k)}(0) = \delta_{jk}\mathbb{I} \tag{17}$$

**Notación**

La solución $C_{m-1}(t)$ se denotada por $D(t)$ y será llamada solución dinámica de (8).

**Definición 3.** *La solución matricial del problema de valor inicial*

$$\left.\begin{array}{l} D^{(m)}(t) = A_1 D^{(m-1)}(t) + A_2 D^{(m-2)}(t) + \cdots \\ \quad + A_m D(t) \\ D(0) = \mathbb{O} \quad D'(0) = \mathbb{O} \cdots D^{(m-1)}(0) = \mathbb{I} \end{array}\right\} \tag{18}$$

*se llama solución dinámica asociada a la ecuación (8) donde $A_j$ $j = 1, 2, \ldots, m$ son matrices dadas en (8), donde $\mathbb{I}$ , $\mathbb{O}$ son la matriz identidad y la matriz cero de orden $n$.*

### 2.1 Solución Dinámica como serie de potencia

De (14) y

$$e^{\mathcal{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k \frac{t^k}{k!}$$

tenemos

$$e^{\mathcal{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & \cdots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{19}$$

La potencia $k$-ésima de la matriz compañera $\mathcal{A}$ se puede escribir como:

$$\mathcal{A}^k = \begin{pmatrix} C_{k,0} & C_{k,1} & \cdots & C_{k,m-1} \\ C_{k_1,0} & C_{k_1,1} & \cdots & C_{k_1,m-1} \\ C_{k_2,0} & C_{k_2,1} & \cdots & C_{k_2,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{k_{m-1},0} & C_{k_{m-1},1} & \cdots & C_{k_{m-1},m-1} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Tomando en cuenta todo lo señalado arriba podemos escribir la solución dinámica como

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{t^k}{k!} \tag{21}$$

donde

$$D_k = D^{(k)}(0) = C_{k,m-1} \tag{22}$$

llamado, **coeficientes de la solución dinámica**.

### 2.2 Los coeficientes $D_k$ de la Solución Dinámica

**Lema 1.** *Si $j = 0, 1, \ldots, m-1$ tenemos*

$$C_{k,j} = \sum_{i=0}^{j} D_{k-j-1+i} A_{m-i} \quad k \geq m \tag{23}$$

*donde los coeficientes $D_k$ de la solución dinámica satisfacen*

$$D_{k+m} = \sum_{j=1}^{m} A_j D_{k+m-j} = \sum_{j=1}^{m} D_{k+m-j} A_j \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

$$D_0 = D_1 = D_2 = \cdots = D_{m-2} = \mathbb{O} \qquad D_{m-1} = \mathbb{I}$$

**Prueba:** Ver [10]

## 3. Controlabilidad

Sea el sistema

$$u^{(m)}(t) + A_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + A_{m-1} u'(t) + A_m u(t) = G\overline{u}(t) \tag{25}$$

donde:

$A_i$ : matriz cuadrada constante de orden $n$

$u$ : vector $n \times 1$ que depende de $t$

$G$ : matriz constante de orden $n \times r$

$\overline{u}$ : vector $r \times 1$, que depende de $t$

**Definición 4.** *Diremos que el sistema descrito por (25) es* **completamente controlable** *si a partir de cualquier estado inicial $z(0)$ ( $\{u(0), u'(0), \cdots, u^{(m-1)}(0)\}$), existe un vector de control $\overline{u}(t)$ donde $t \in [0, t_1]$, que lleva $z(0)(\{u(0), u'(0), \cdots, u^{(m-1)}(0)\})$ al origen $\theta$ ($\{\bar{0}, \bar{0}, \cdots, \bar{0}\}$) donde $\bar{0}$ es un vector o matriz cero de orden $n \times 1$.*

### 3.1. La matriz de Controlabilidad

Sea la matriz

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} D_0 G & D_1 G & \cdots & D_{mn-2} G & D_{mn-1} G \\ D_1 G & D_2 G & \cdots & D_{mn-1} G & D_{mn} G \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{m-2} G & D_{m-1} G & \cdots & D_{m+mn-4} G & D_{m+mn-3} G \\ D_{m-1} G & D_m G & \cdots & D_{m+mn-3} G & D_{m+mn-2} G \end{pmatrix} \tag{26}$$

que esta formada por matrices por bloques $D_i G$ que son de orden $n \times r$, donde la matriz $D_i$ esta definida como $D_i = D^{(i)}(0)$.

**Teorema 3.** *El sistema (25) es* **completamente controlable** $\Longleftrightarrow$ *$rango(\mathcal{C}) = mn$.*

**Prueba:** Ver [10]

## 4. Observabilidad

Sea el sistema

$$u^{(m)}(t) + A_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + A_{m-1} u'(t) + A_m u(t) = G\overline{u}(t) \tag{27}$$

$$Y(t) = \phi_1 u(t) + \phi_2 u'(t) + \cdots + \phi_m u^{(m-1)}(t) \tag{28}$$

$A_i$ : matriz cuadrada constante de orden $n$

$u$ : vector $n \times 1$ que depende de $t$

$G$ : matriz constante de orden $n \times r$

$\overline{u}$ : vector $r \times 1$, que depende de $t$

$Y$ : vector $k \times 1$ que depende de t (vector de salida) donde $k \leq mn$.

$\phi_i$ : matriz constante de orden $k \times n$ $i = 1, 2, \ldots, m$

**Definición 5.** *El sistema descrito por las ecuaciones (27) y (28) es* **completamente observable** *o (por brevedad) observable si para cualquier estado inicial $z(0) \in \mathbb{R}^{mn}$ ($\{u(0), u'(0), \ldots, u^{m-1}(0)\}$) $\exists$ $t_1 > 0/$ conociendo $\overline{u}(t)$ y $Y(t)$ $t \in [0, t_1]$ asi como también las matrices constantes $A_i$ y $\phi_i$ $i = 1, \ldots, m$ son suficientes para determinar $z(0)(\{u(0), u'(0), \ldots, u^{(m-1)}(0)\})$.*

**La Matriz de Observabilidad**

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H_{1\,1} & H_{1\,2} & \cdots & H_{1\,m} \\ H_{2\,1} & H_{2\,2} & \cdots & H_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{mn\,1} & H_{mn\,2} & \cdots & H_{mn\,m} \end{bmatrix} \tag{29}$$

donde $H_{j\,p}$ es una matriz de orden $k \times n$

$$H_{j\,p} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \phi_i \Big( D_{m+i-2+(j-1)-(p-1)} + \\ \sum_{k=1}^{m-1-(p-1)} D_{m+i-k-2+(j-1)-(p-1)} A_k \Big) & p \neq m \\ \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{i+j-2} & p = m \end{cases} \tag{30}$$

**Teorema 4.** *El sistema (27) asociado con (28) es completamente observable si, y sólo si, $rango(\mathcal{O}) = mn$*

**Prueba:** Ver [10]

## 5. Aplicación

### 5.1. Monorriel de dos carros

La **Figura 1** muestra un monorriel de dos carros. Sean $M_1$ la masa del carro de máquinas y $B_1$ sus fricciones debido al aire y al rodamiento. La fuerza lineal equivalente para mover el proceso se designa como $\hat{u}(t)$. Los dos carros poseen masas $M_2$ y $M_3$ respectivamente, y están sujeto a fricciones $B_2$ y $B_3$. Los carros se acoplan uno al otro con dispositivos no rígidos(resortes) que poseen constantes $k_{23}$ y $k_{12}$ y dispositivos amortiguadores de constantes $B_{23}$ y $B_{12}$. Las coordenadas de posición se designan como $x_1$, $x_2$ y $x_3$.

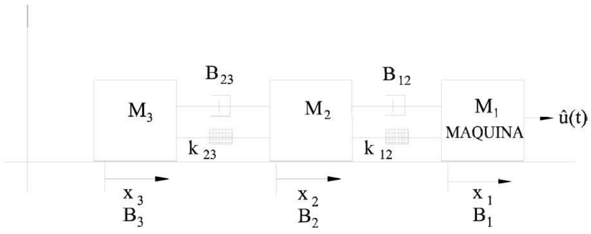


**Figura** 1. *Proceso monorriel de dos carros más un carro de máquinas.*

MODELO MATEMÁTICO

Consideremos el siguiente modelo

$$M\ddot{x}(t) = C_1\dot{x}(t) + C_2x(t) + H\hat{u}(t) \qquad (31)$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -k_{12} & k_{12} & 0 \\ k_{12} & -(k_{12}+k_{23}) & k_{23} \\ 0 & k_{23} & -k_{23} \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -(B_{12}+B_1) & B_{12} & 0 \\ B_{12} & -(B_{23}+B_{12}+B_2) & B_{23} \\ 0 & B_{23} & -(B_{23}+B_3) \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la inversa de la matriz $M$(i.e $M^{-1}$) a la ecuación (31), se tiene:

$$\ddot{x} = A_1\dot{x} + A_2x + G\hat{u}(t) \qquad (32)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= M^{-1}C_1 \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{(B_{12}+B_1)}{M_1} & \frac{B_{12}}{M_1} & 0 \\ \frac{B_{12}}{M_2} & -\frac{(B_{23}+B_{12}+B_2)}{M_2} & \frac{B_{23}}{M_2} \\ 0 & \frac{B_{23}}{M_3} & -\frac{(B_{23}+B_3)}{M_3} \end{pmatrix} \\ A_2 &= M^{-1}C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{k_{12}}{M_1} & \frac{k_{12}}{M_1} & 0 \\ \frac{k_{12}}{M_2} & -\frac{(k_{12}+k_{23})}{M_2} & \frac{k_{23}}{M_2} \\ 0 & \frac{k_{23}}{M_3} & -\frac{k_{23}}{M_3} \end{pmatrix} \\ G &= M^{-1}H = \begin{pmatrix} \frac{1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ECUACIÓN DE SALIDA

$$y(t) = \phi_1 x(t) + \phi_2 \dot{x}(t)$$

donde

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Considerando los siguientes valores

$$M_2 = M_3 = 2M_1 = 2600kg$$

$$k_{23} = k_{12} = 100,000\frac{N}{m}$$

$$B_2 = B_3 = 2B_1 = 10000\frac{N}{m} \qquad \alpha = 1$$

donde el orden de la ecuación diferencial es 2, el orden de las matrices $A_1$ , $A_2$, es 3 y $r = 1$.

Utilizando (26), tenemos que la matriz de controlabilidad es

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} D_0G & D_1G & D_2G & D_3G & D_4G & D_5G \\ D_1G & D_2G & D_3G & D_4G & D_5G & D_6G \end{pmatrix}$$

$$D_0 = 0 \qquad D_1 = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{k+2} = \sum_{j=1}^{2} A_j D_{k+2-j}$$

Con las matrices obtenidas construimos la matriz de controlabilidad

$\mathcal{C} =$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0008 | -0.0033 | -0.0453 | 0.4645 | 3.6007 |
| 0 | 0 | 0.0001 | 0.0283 | -0.2651 | -2.7093 |
| 0 | 0 | 0 | 0.0000 | 0.0110 | 0.9932 |
| 0.0008 | -0.0033 | -0.0453 | 0.4645 | 3.6007 | 3.6007 |
| 0 | 0.0001 | 0.0283 | -0.2651 | -2.7093 | -2.7093 |
| 0 | 0 | 0.0000 | 0.0110 | 0.9932 | 0.9932 |

El $rango(\mathcal{C}) = 6$, por el **Teorema 3.1** el sistema es controlable. Utilizando (29) tenemos que la matriz de observabilidad es

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \\ H_{41} & H_{42} \\ H_{51} & H_{52} \\ H_{61} & H_{62} \end{pmatrix}$$

Ahora formemos la matriz de observabilidad

$\mathcal{O} =$

```
1.0e+006 *

       0         0         0    0.0000         0         0
       0         0         0         0    0.0000         0
       0         0         0         0         0    0.0000
 -0.0001    0.0001         0   -0.0000    0.0000         0
  0.0000   -0.0001    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
       0    0.0000   -0.0000         0    0.0000   -0.0000
  0.0003   -0.0004    0.0000   -0.0001    0.0001    0.0000
 -0.0002    0.0003   -0.0002    0.0000   -0.0001    0.0000
  0.0000   -0.0002    0.0002    0.0000    0.0000   -0.0000
  0.0074   -0.0102    0.0028    0.0006   -0.0007    0.0000
 -0.0051    0.0088   -0.0037   -0.0003    0.0006   -0.0003
  0.0014   -0.0037    0.0023    0.0000   -0.0003    0.0003
 -0.0730    0.1006   -0.0276    0.0047   -0.0070    0.0026
  0.0503   -0.0868    0.0365   -0.0035    0.0060   -0.0022
 -0.0138    0.0365   -0.0227    0.0013   -0.0022    0.0012
 -0.6310    1.0013   -0.3703   -0.0941    0.1327   -0.0394
  0.5006   -0.8161    0.3155    0.0663   -0.1138    0.0466
 -0.1851    0.3155   -0.1304   -0.0197    0.0466   -0.0278
```

El $rango(\mathcal{O}) = 5 \neq 6$, por el **Teorema 4.1** sistema no es observable.

## 6. Conclusiones

En la ingeniería se aplica los conceptos de la Controlabilidad y Observabilidad para sistemas gobernados por las ecuaciones (2) y (3), donde el primero es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

El objetivo de este trabajo es aplicar la teoría de Controlabilidad y Observabilidad a modelos descritos en (1), es por ello que se da definiciones de Controlabilidad y Observabilidad para ecuaciones diferenciales lineales de orden $m$ con coeficientes matriciales el cual es una generalización de aquella presentada en [5], donde se da definiciones de Controlabilidad y Observabilidad para ecuaciones diferenciales lineales de orden dos con coeficientes matriciales de orden $n$.

Cabe señalar que para obtener la matriz de Controlabilidad y Observabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes matriciales de la forma (27) que tiene como ecuación de salida (28), en primer lugar dichas ecuaciones se llevan a la forma (2) y (3) para luego formar la matriz Controlabilidad y Observabilidad en la forma (4) y (7).

El análisis de la Controlabilidad y Observabilidad se realiza utilizando los coeficientes de la solución dinámica, aquella que esta relacionada con la solución de una ecuación diferencial matricial homogénea con coeficientes matriciales descritos en (18).

Luego en la última sección se ilustra un ejemplo en donde se determina la Controlabilidad y Observabilidad bajo los conceptos dados anteriormente.

1. Clayssen, J.C.R., Tsukazan T. Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. Quarterly of Applied Mathematics, vol XLVIII, N°1, 1990
2. Inman, D.J. *Vibration with Control, Measurement and Stability.* Prentice Hall, 1989.
3. Murray R. Spiegel. *Transformadas de Laplace.* McGraw-Hill, 1970.
4. Arthur A. Hauser, JR. *Variable Compleja. Fondo Educativo* Interamericano, S.A. 1973.
5. Clayssen, J.C.R., German Canahualpa, Claudio Jung. A direct approach to Second-order matriz Non-classical Vibrating equations. Applied Numerical Mathematics 30. 1999.
6. Rojas M. Arturo. *Control Avanzado Diseño y Aplicaciones en tiempo real.* Editorial Maguiña Uni 2001.
7. Canales R. Roberto, Barrera R. Renato. *Análisis de Sistemas dinámicos y Control automático.* Editorial Limusa, S.A. 1976.
8. J. Grantham Walter, L. Vincent Thomas. *Sistemas de Control moderno análisis y diseño.* Editorial Limusa, S.A. 1998.
9. Katsuhiko O. *Ingeniería de Control Moderna.* Prentice Hall, 1998.
10. Collanta H. Andres. Controlabilidad y Observabilidad en Ecuaciones Diferenciales Lineales con Coeficientes Matriciales. Tesis de Licenciatura en Ciencias con mención en Matemática. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima-Perú. 2005.