

Movimiento de un elipsoide de revolución no homogéneo

Alejandra B. Altamirano Macetas [†] y Edgard Vidalón Vidalón [‡]

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería

E-mail: [†]abaltamirano@uni.edu.pe, [‡]ssshimmler@yahoo.es

Recibido el 14 octubre del 2005; aceptado el 16 de noviembre del 2005

En este trabajo se analizó el movimiento de un cuerpo rígido de forma elipsoidal, con semiejes a, b, c (donde $a = b \geq c$). Su centro de masa se ubica en la recta que contiene al semieje c . El movimiento fue sobre un plano horizontal sometido a la fuerza de gravedad. Se analizaron tres tipos de movimiento para el elipsoide: sin fricción, con fricción por deslizamiento y con fricción por rodadura pura. En todos los casos al aplicar las leyes de la mecánica se obtuvieron sistemas de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no lineales y acopladas*, las cuales fueron resueltas numéricamente por el método de Runge Kutta de orden 4.

Palabras claves: Dinámica del Cuerpo Rígido, Ángulos de Euler, Ecuaciones de Euler.

In this work we analyze the dynamics of a rigid body, of ellipsoidal form with semiaxis a, b and c (where $a = b \geq c$). Their center of mass, is located in the straight line that contains the semiaxis c . Its motion was on a horizontal plane subject to the force of gravity. Three types of motion were analyzed, for the ellipsoid: without friction, with friction for slip and with friction for pure rolling. In all the cases after applying the mechanics laws, systems of *Non Linear Coupled Differential Ordinary Equations* were obtained, which were solved numerically by the method of Runge Kutta of order 4.

Keywords: Dynamics of Rigid Bodies, Euler angles, Euler equation's.

1. Introduccción

Para estudiar el movimiento de un cuerpo rígido de forma elipsoidal y no homogéneo, se utilizará el sistema de basemodificado de Euler con el cual se simplifican las ecuaciones de movimiento.

El *Sistema Laboratorio o Sistema de Referencia Inercial*, cuyo centro se encuentra en O , según la Figura 1, tiene la siguiente base $B = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

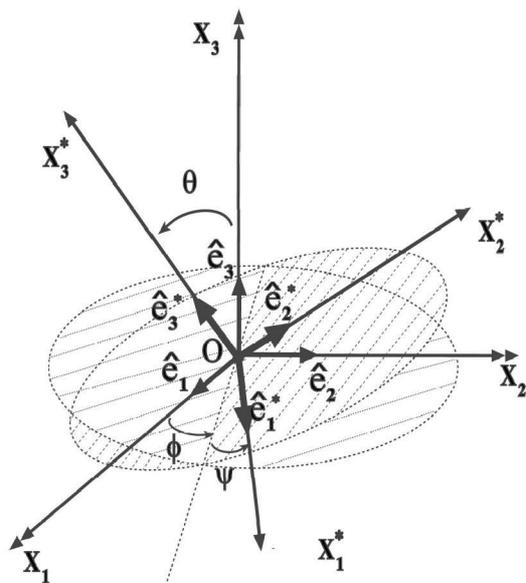


Figura 1. Relación entre la base B con la base B^* , con un centro común O .

La siguiente base $B^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$, esta ligada al cuerpo elipsoidal, con centro en G (centro de masa), fijo al elipsoide, lo cual implica que se moverá con él. Esta base fue construída a partir de la *matriz de Euler* $E(\theta, \phi, \psi)$ y mediante transformaciones de coordenadas.

Estas relaciones las vemos en la ecuación (1).

$$\begin{aligned} \hat{e}_1^* &= (\cos \phi \cos \psi - \text{sen} \phi \cos \theta \text{sen} \psi) \hat{e}_1 \\ &\quad + (\cos \phi \cos \theta \text{sen} \psi + \cos \psi \text{sen} \phi) \hat{e}_2 \\ &\quad + \text{sen} \psi \text{sen} \theta \hat{e}_3, \\ \hat{e}_2^* &= (-\cos \phi \text{sen} \psi - \text{sen} \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{e}_1 \\ &\quad + (\cos \phi \cos \theta \cos \psi - \text{sen} \psi \text{sen} \phi) \hat{e}_2 \\ &\quad + \cos \psi \text{sen} \theta \hat{e}_3, \\ \hat{e}_3^* &= \text{sen} \phi \text{sen} \theta \hat{e}_1 - \cos \phi \text{sen} \theta \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Finalmente se tiene la base *modificada de Euler* $B_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$, dada por el sistema de ecuaciones (2), allí se muestra las relaciones entre las tres bases.

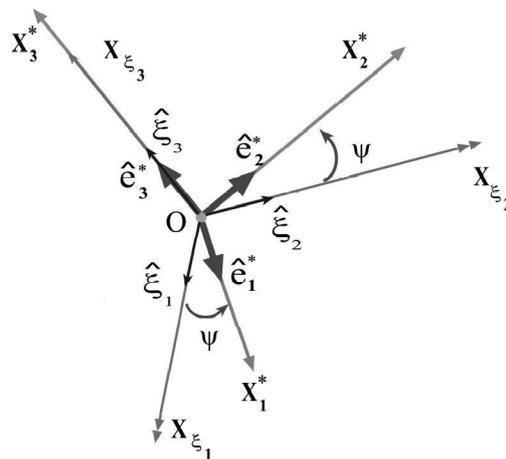


Figura 2. Una vista general de las bases B_ξ y B^* , consideradas en este trabajo. Además mostramos los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ .

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &\equiv \frac{\hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*}{|\hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*|}, \\ \hat{\xi}_2 &\equiv \hat{e}_3^* \times \hat{\xi}_1, \\ \hat{\xi}_3 &\equiv \hat{e}_3^*. \end{aligned} \quad (2)$$

En la Figura 3, se muestra la orientación de las bases B y B^* y B_ξ , en el elipsoide no homogéneo. Notamos el punto de contacto C , el centro geométrico C_0 y el centro de masa G .

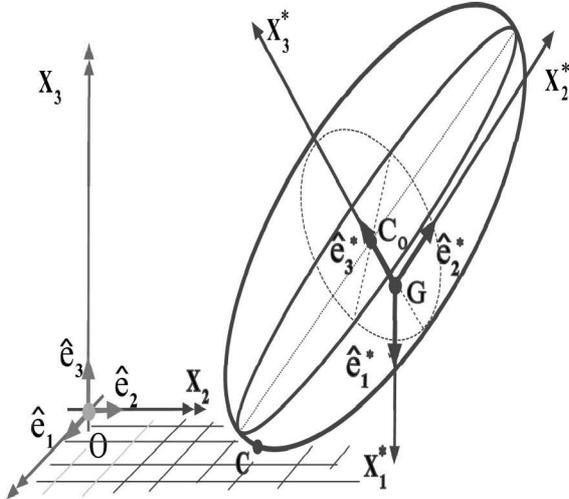


Figura 3. Elipsoide no homogéneo, donde se muestra la relación entre B y B^* . No se consideró graficar la base B_ξ para no confundir.

2. Movimiento del elipsoide sin fricción

Un punto de partida para el estudio del elipsoide no homogéneo, es obtener las ecuaciones de movimiento cuando sólo se encuentra presente la fuerza de gravedad (peso, \vec{P}) y la reacción normal (\vec{R}). Además la velocidad angular \vec{W} del cuerpo, pasa por el punto $Q=G$ (es decir, el eje de rotación pasa por G).

Planteamos las ecuaciones de movimiento en la base modificada de Euler, para ello se consideran las bases B , B^* y B_ξ y finalmente al resolver las ecuaciones de movimiento se obtendrán los ángulos de Euler (θ, ϕ, ψ) y sus respectivas derivadas temporales $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ que nos darán la información necesaria para saber como se mueve el elipsoide no homogéneo.

Reacción normal \vec{R}

Las únicas fuerzas que actúan en el cuerpo elipsoidal no homogéneo son el peso (\vec{P}) y la reacción normal (\vec{R}), sea \vec{F} la fuerza resultante

$$\vec{F} = \vec{R} + \vec{P}. \quad (3)$$

De la Segunda ley de Newton se tiene

$$\vec{F} = m\vec{a}_G. \quad (4)$$

Para las componentes de la aceleración tenemos que $\ddot{x}_{G1} = \ddot{x}_{G2} = 0$, y $\ddot{x}_{G3} \neq 0$, entonces de la tercera ecuación se obtiene una expresión, que se empleará más adelante para hallar el módulo de la reacción normal R

$$m\ddot{x}_{G3} = R - mg, \quad (5)$$

despejando R de la ecuación (5)

$$R = m(\ddot{x}_{G3} + g). \quad (6)$$

En la ecuación (6) tenemos expresada el módulo de la reacción normal, pero se tiene la dificultad de no conocer \ddot{x}_{G3} , para poder encontrarlo hacemos uso de la geometría del sistema.

En la Figura 4 se muestran los parámetros tomados en cuenta para el estudio de este caso:

- C_0 : Centro del elipsoide .
- G : Centro de gravedad .
- D_1 : Distancia entre el punto C_0 y la superficie de apoyo del elipsoide (plano X_1X_2) .
- θ : Ángulo que forma \hat{e}_3 y \hat{e}_3^* .
- D_2 : Distancia entre el punto C_0 y G .

D_1 está relacionada con D_2, θ, x_{G3} mediante la ecuación

$$D_1 = D_2 \cos \theta + x_{G3}. \quad (7)$$

De otro lado se encontró,

$$D_1 = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}, \quad (8)$$

donde a y c son los semiejes del elipsoide, con $a \geq c$.

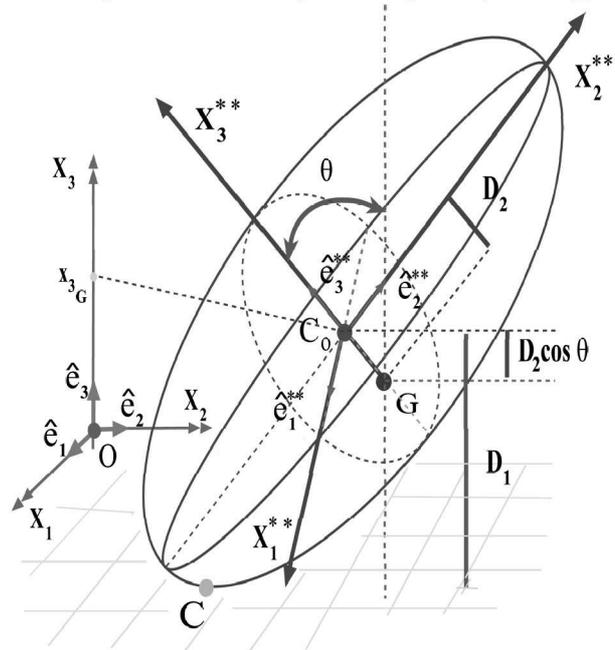


Figura 4. Visualización de parámetros considerados para hallar el módulo de la reacción normal en el elipsoide no homogéneo.

De la ecuación (6) y con la ayuda de las ecuaciones (7) y (8) podemos encontrar una expresión para \ddot{x}_{G3} . Finalmente se obtiene

$$R = m(F + \ddot{\theta}H), \quad (9)$$

donde se introdujo F y H para simplificar la ecuación (9), y se definen en las siguientes ecuaciones

$$F \equiv g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} + D_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta, \quad (10)$$

$$H \equiv \sin \theta \left\{ \left(\frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + D_2 \right\}. \quad (11)$$

Torque $\vec{T}_G^{\vec{R}}$ externo.

Se considera el torque con respecto al punto G , de allí que solo tenemos el torque con respecto a la reacción normal porque el torque del peso es cero

$$\vec{T}_G^{\vec{R}} \equiv \vec{GC} \times \vec{R}, \quad (12)$$

donde \vec{GC} es

$$\vec{GC} = \left(\frac{-a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_2 + \left(D_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_3. \quad (13)$$

Aplicación de las ecuaciones modificadas de Euler

Para hallar las ecuaciones de movimiento hacemos uso de las *ecuaciones modificadas de Euler* en la base $B_\xi = \{ \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3 \}$ y del torque hallado.

Además se considera $I_1 = I_2 \equiv I$.

$$\ddot{\theta} = \frac{m F C - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta - (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta}{I - m C H}. \quad (14)$$

Si $\theta \neq 0, \pi$

$$\ddot{\phi} = \frac{-(2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta} \dot{\psi} I_3}{I \sin \theta}. \quad (15)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta - \left(\frac{-(2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta} \dot{\psi} I_3}{I \sin \theta} \right) \cos \theta. \quad (16)$$

Estas ecuaciones son no lineales y acopladas, más adelante las resolveremos numéricamente y obtendremos su posición y su velocidad para un cierto intervalo.

3. Movimiento del elipsoide con fricción por deslizamiento

En esta sección se considera la fricción por deslizamiento, sobre el piso donde se mueve el elipsoide. Hallaremos las ecuaciones diferenciales de movimiento, empleando nuevamente las *ecuaciones modificadas de Euler*. En la Figura 5 se muestran las fuerzas que ahora se consideran para estudiar el movimiento del cuerpo rígido.

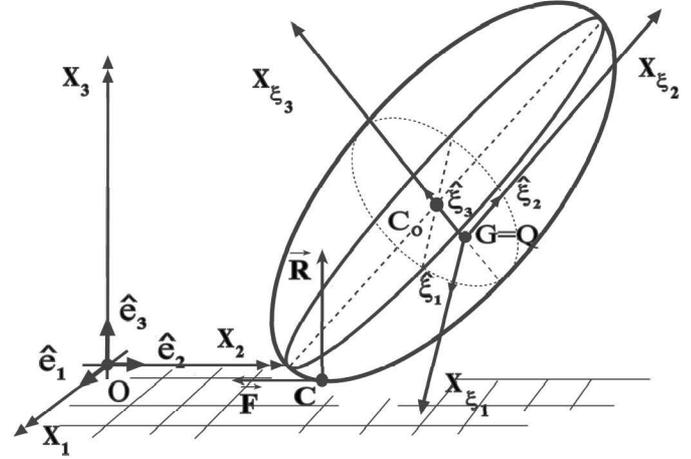


Figura 5. Bases consideradas para el estudio del elipsoide no homogéneo, cuando hay fricción por deslizamiento.

Para este caso se obtienen cinco ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas un poco más complicadas que en la sección anterior, debido a que ahora consideramos la fricción por deslizamiento.

Se considera la velocidad del punto de contacto C

$$\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{GC}. \quad (17)$$

La expresión para \vec{v}_G en la base B_ξ ,

$$\begin{aligned} \vec{v}_G = & (\dot{x}_{G1} \cos \phi + \dot{x}_{G2} \sin \phi) \hat{\xi}_1 \\ & + \{ \cos \theta (-\dot{x}_{G1} \sin \phi \\ & + \dot{x}_{G2} \cos \phi) + \dot{x}_{G3} \sin \theta \} \hat{\xi}_2 \\ & + \{ \sin \theta (\dot{x}_{G1} \sin \phi - \dot{x}_{G2} \cos \phi) \\ & + \dot{x}_{G3} \cos \theta \} \hat{\xi}_3. \end{aligned} \quad (18)$$

El producto vectorial de $\vec{\omega} \times \vec{GC}$, es

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\xi}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{\xi}_3. \quad (19)$$

Además la fuerza de fricción (\vec{F}_d), entre el plano $X_1 X_2$ (piso) y el cuerpo elipsoidal no homogéneo es

$$\vec{F}_d \equiv -\frac{\mu R}{|\vec{v}_C|} \vec{v}_C. \quad (20)$$

Las fuerzas que producen torques con respecto al centro de masa G , son la fuerza de fricción \vec{F}_d y la fuerza de la reacción normal \vec{R} ,

donde

$$\vec{T}_G = \vec{T}_G^{\vec{F}_d} + \vec{T}_G^{\vec{R}}, \quad (21)$$

$$T_{\xi_1} = T_{\xi_1}^{\vec{R}} + T_{\xi_1}^{\vec{F}_d}, \quad (25)$$

donde $\vec{T}_G^{\vec{F}_d}$ es el torque debido a la fuerza de fricción, $\vec{T}_G^{\vec{R}}$ (ecuación (12)) es el torque debido a la fuerza de reacción normal.

$$I_3 \ddot{\phi} \sin \theta + (2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} I_3 = T_{\xi_2} \quad (26)$$

El torque $\vec{T}_G^{\vec{F}_d}$ es

$$\vec{T}_G^{\vec{F}_d} = \vec{GC} \times \vec{F}_d, \quad (22)$$

considerando

$$T_{\xi_2} = T_{\xi_2}^{\vec{F}_d} \quad (27)$$

la ecuación (22) se puede simplificar considerando las ecuaciones (13) y (20)

$$\vec{T}_G^{\vec{F}_d} = T_{\xi_1}^{\vec{F}_d} \hat{\xi}_1 + T_{\xi_2}^{\vec{F}_d} \hat{\xi}_2 + T_{\xi_3}^{\vec{F}_d} \hat{\xi}_3, \quad (23)$$

$$I_3 \ddot{\phi} \cos \theta - I_3 \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + I_3 \ddot{\psi} = T_{\xi_3}, \quad (28)$$

donde

$$T_{\xi_3} = T_{\xi_3}^{\vec{F}_d}. \quad (29)$$

Ecuaciones Modificadas de Euler

Aplicando las ecuaciones modificadas de Euler y recordando que sólo consideramos el torque \vec{R} y \vec{F} se consigue

De las ecuaciones (24) y (25) se obtienen

$$I \ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = T_{\xi_1}, \quad (24)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{D}{E'}, \quad (30)$$

para simplificar las ecuación (30) se definen

$$D \equiv \left\{ mF \left(C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left(\frac{-a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_3}} - \left(D_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_2}} \right\} \right) - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta - (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right\}, \quad (31)$$

$$E' \equiv \left\{ I - mH \left(C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left(\frac{-a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_3}} - \left(D_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_2}} \right\} \right) \right\}. \quad (32)$$

Considerando que $\theta \neq 0, \pi$ y despejando $\ddot{\phi}$ de las ecuaciones (26) y (27)

$$\ddot{\phi} = \frac{M}{N}, \quad (33)$$

donde

$$M \equiv - \left\{ \frac{\mu m (\mathbf{F} + \ddot{\theta} \mathbf{H})}{|\vec{v}_C|} \right\} \left\{ \left(D_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_1}} \right\} - (2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + I_3 \dot{\theta} \dot{\psi}, \quad (34)$$

$$N \equiv I \sin \theta. \quad (35)$$

Finalmente de las ecuaciones (28) y (29) obtenemos

$$\ddot{\psi} = - \left\{ \frac{\mu m (\mathbf{F} + \ddot{\theta} \mathbf{H})}{I_3 |\vec{v}_C|} \right\} \left\{ \left(\frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_1}} \right\} - \ddot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta. \quad (36)$$

También se obtienen las ecuaciones de traslación del elipsoide; no se considera \ddot{x}_{G_3} porque es una ecuación de

ligadura;

$$\ddot{x}_{G_1} = - \left\{ \frac{\mu (\mathbf{F} + \ddot{\theta} \mathbf{H})}{|\vec{v}_C|} \right\} v_{C_1}, \quad (37)$$

$$\ddot{x}_{G_2} = - \left\{ \frac{\mu (F + \dot{\theta}H)}{|\vec{v}_C|} \right\} v_{C_2}. \quad (38)$$

Al resolver las ecuaciones (30), (32), (36), (37) y (38) conoceremos como es el movimiento de un elipsoide no homogéneo con fricción por deslizamiento.

4. Movimiento del elipsoide con fricción por rodadura pura

Cuando se estudia el movimiento del elipsoide con fricción por rodadura pura, se considera que el eje de rotación del elipsoide pase por el centro geométrico C . Esto lo hacemos para facilitar la solución de las ecuaciones. Los vectores \hat{e}_k^{**} están fijos al cuerpo rígido. La condición de rodadura pura, es $\vec{v}_C = \vec{0}$. Además

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C_0} + \vec{\omega} \times \overline{C_0 C}, \quad (39)$$

donde $\vec{\omega}$, en la base B es:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = & (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi) \hat{e}_1 \\ & + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi) \hat{e}_2 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (40)$$

Además

$$\overline{C_0 C} = \left[\frac{(a^2 - c^2) \sin(2\theta) \sin \phi}{2 \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right] \hat{e}_1$$

$$\begin{aligned} K = & \frac{m}{2} \left\{ [c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta] [\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta] + \left[\frac{(a^2 - c^2)^2 \sin^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \{ \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \} \right. \\ & + (\dot{\psi} \dot{\phi} + \dot{\psi}^2 \cos \theta) (a^2 - c^2) \sin(2\theta) \sin \theta \left. \right\} + m D_2 \left\{ \left[\frac{(a^2 - c^2) \sin(2\theta) \sin \theta}{2 \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right] [\dot{\phi}^2 + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta] \right. \\ & - \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} [\dot{\theta}^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} \sin^2 \theta] + \dot{\theta}^2 \left. \left[\frac{(a^2 - c^2) \sin(2\theta) \sin \theta}{2 \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta) \right\} \end{aligned}$$

La energía potencial, ($U = m g x_{G_3}$)

$$U = m g (\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} - D_2 \cos \theta). \quad (43)$$

La forma general está dada por $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$.

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{(a^2 - c^2) \sin(2\theta) \cos \phi}{2 \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right] \hat{e}_2 \\ & - \left[\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} \right] \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (41)$$

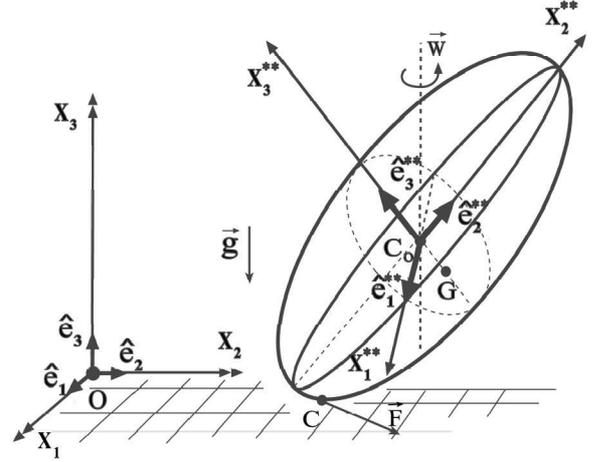


Figura 6. Elipsoide no homogéneo considerando rodadura pura.

Usando la condición de rodadura pura $\vec{v}_C = \vec{0}$,

$$\vec{v}_{C_0} = -\vec{\omega} \times \overline{C_0 T}. \quad (42)$$

Una manera de verificar que nuestros cálculos están bien, es hallar la energía mecánica del sistema, esto lo veremos en la sección de análisis y resultados donde se muestra la tabla de energía mecánica halladas para este caso.

Considerando las variables $q_1 = \theta$, $q_2 = \phi$, $q_3 = \psi$. Para el caso en estudio se tiene como primera ecuación

$$A \ddot{\theta} + B = C', \quad (44)$$

donde

$$A \equiv I + m \left\{ \left[\frac{[a^4 + c^4 + (-a^4 + c^4) \cos(2\theta)]}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] - \left[\frac{2c^2 D_2 \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right] \right\}, \quad (45)$$

$$B \equiv 2\dot{\theta}^2 m \left\{ \frac{c^2 D_2 \sin \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] + \left[\frac{(a^2 - c^2) a^2 c^2 \sin(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\}, \quad (46)$$

$$C' \equiv m \dot{\theta}^2 \left\{ \left[\frac{\sin(2\theta) c^2 a^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^2} \right] + \frac{\sin \theta c^2 D_2}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\}$$

$$\dot{\phi}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin(2\theta) (I - I_3) + \frac{(a^2 - c^2)^2 m \sin(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left[\cos(2\theta) - \frac{(a^2 - c^2) \sin^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right.$$

$$\left. + (a^2 - c^2) \frac{D_2 m \sin \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[\cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{(a^2 - c^2) \sin^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} + \dot{\psi}^2$$

$$\left\{ \frac{a^4 c^2 m \sin(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right\} + \dot{\phi} \dot{\psi} \left\{ -I_3 \sin \theta + \frac{a^2 D_2 m \sin(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right.$$

$$\left. \left[1 - \frac{(a^2 - c^2) \sin^2 \theta}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \sin \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right.$$

$$\left. \left[\cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\sin(2\theta)^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} - g m \sin \theta \left[D_2 + \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right]. \quad (47)$$

La segunda ecuación de Lagrange es

$$J \ddot{\phi} + F' \ddot{\psi} + H' = 0, \quad (48)$$

donde

$$J \equiv I_3 \cos^2 \theta + I \sin^2 \theta + m \sin(2\theta) (a^2 - c^2) \left[\frac{D_2 \sin \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} + \frac{\sin(2\theta) (a^2 - c^2)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right], \quad (49)$$

$$F' \equiv I_3 \cos \theta + \frac{a^2 D_2 m \sin^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \sin \theta \sin(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)}, \quad (50)$$

$$H' \equiv \dot{\phi} \dot{\theta} \left\{ \sin(2\theta) (I - I_3) + \frac{2 D_2 (a^2 - c^2) m \sin \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[\cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\sin^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right.$$

$$\left. \frac{m (a^2 - c^2)^2 \sin(2\theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left[\cos(2\theta) - \frac{\sin^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} + \dot{\psi} \dot{\theta} \left\{ \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \sin \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right.$$

$$\left. \left[\cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\sin^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] + \frac{a^2 D_2 m \sin(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right.$$

$$\left. - I_3 \sin \theta \right\}. \quad (51)$$

La última ecuación diferencial de Euler-Lagrange es

$$N \ddot{\phi} + G' \ddot{\psi} + E'' = 0, \quad (52)$$

donde

$$N \equiv I_3 \cos \theta + \frac{a^2 D_2 m \sin^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \sin \theta \sin(2\theta)}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)}, \quad (53)$$

$$G' \equiv I_3 + \frac{a^4 m \sin^2 \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)}, \quad (54)$$

$$E'' \equiv \dot{\psi} \dot{\theta} \left\{ \frac{a^4 m \sin(2\theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} + \dot{\phi} \dot{\theta} \left\{ -I_3 \sin \theta + \frac{a^2 D_2 m \sin(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right. \\ \left. \left[1 - \frac{(a^2 - c^2) \sin^2 \theta}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \sin \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left[\cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\sin^2(2\theta)(a^2 - c^2)}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\}. \quad (55)$$

Además se halló las EDO

$$\dot{x}_{C_{0_1}} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} \left[\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi \right] - \left[\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \frac{\sin(2\theta) \cos \phi (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right], \quad (56)$$

$$\dot{x}_{C_{0_2}} = - \left\{ \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} \left[\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi \right] + \left[\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \frac{\sin(2\theta) \sin \phi (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right] \right\}, \quad (57)$$

$$\dot{x}_{C_{0_3}} = \dot{\theta} \left[\frac{\sin(2\theta) (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right]. \quad (58)$$

5. Resultados y Análisis

Para estudiar el movimiento de un elipsoide no homogéneo se analizaron los siguientes casos:

a) Movimiento sin fricción,

b) Movimiento con fricción por deslizamiento,
c) Movimiento con fricción por rodadura pura,
donde se obtuvieron las correspondientes *ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y acopladas*, cuyas soluciones analíticas no son conocidas.

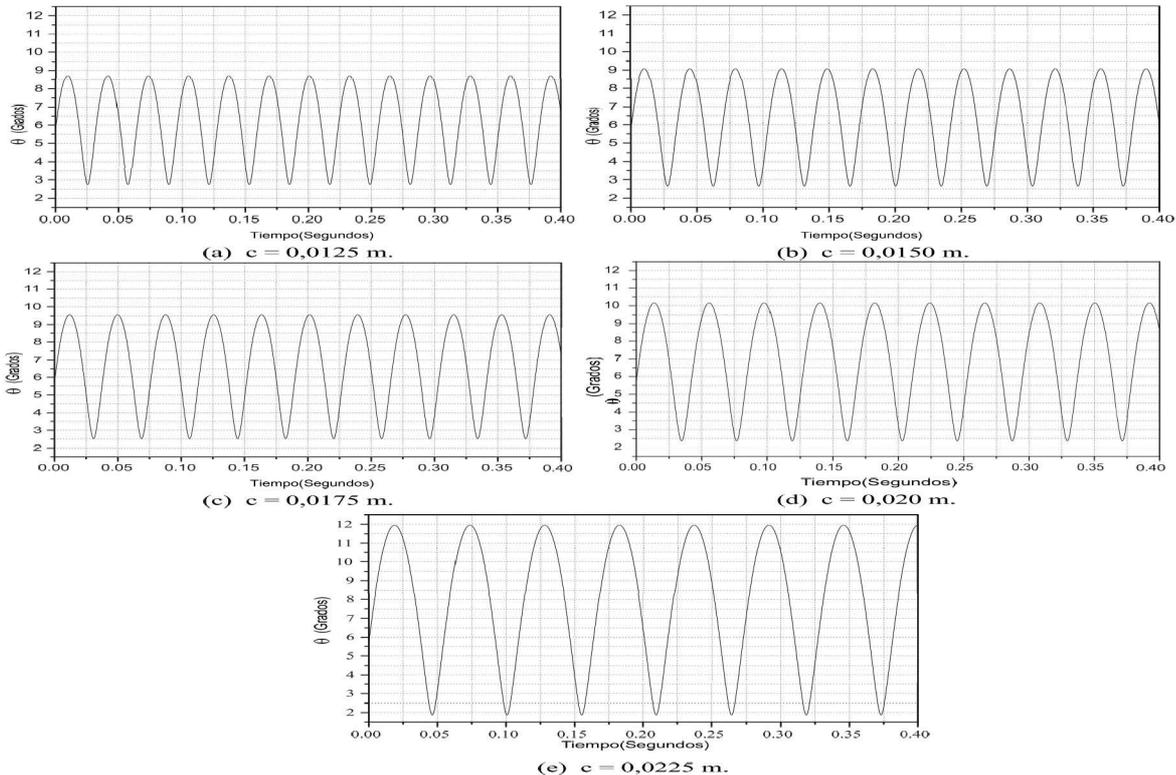


Figura 7. Comportamiento de la $\theta(t)$ cuando c varia, desde $0,0125$ m a $0,0225$ m.

Aquí resolvemos estas ecuaciones usando el cálculo numérico para cada caso. Además se empleó el *Método de Runge Kutta de orden 4*, con un paso de $h=0,0001$. Se trabajó el cálculo numérico en una Pentium IV de 2,676GHz y 512 MB. de RAM.

Fue necesario emplear cuatro programas de software:

- * Microsoft Developer Studio Fortran Power Station 4.0, para resolver numéricamente las ecuaciones no lineales.
- * Origin 6.0, para graficar los datos.
- * Free Hand 9.0, para hacer el gráfico de las elipsoides y de los ejes coordenados.
- * MiKTeX, para redactar el texto.

En las siguientes figuras mostramos algunos de los resultados obtenidos al resolver numéricamente las ecuaciones; (14), (15),(16) sin fricción, (22), (25), (28) con fricción por deslizamiento, (36), (40), (44), (48), (49) y (50) con fricción por rodadura pura.

Para el caso del *movimiento sin fricción*, en la Figura 7 se muestran cinco graficas de la función $\theta(t)$, cuando el parámetro $c \in [0,0125, 0,0225]$ m, donde $\theta \in [2^\circ, 12^\circ]$ y el tiempo $t \in [0, 0, 4]$ seg.

En la Figura 7 observamos, que la función $\theta(t)$ es periódica, presentan valores máximos y mínimos consecutivos. Además la amplitud y el período de la función va aumentando, al incrementarse c .

En la Figura 8, visualizamos las derivadas de los ángulos de Euler superpuestos, para $c=0,0125$ m. Aparecen curvas simétricas esto ocurre porque el período es común para las derivadas ([7] pág. 163).

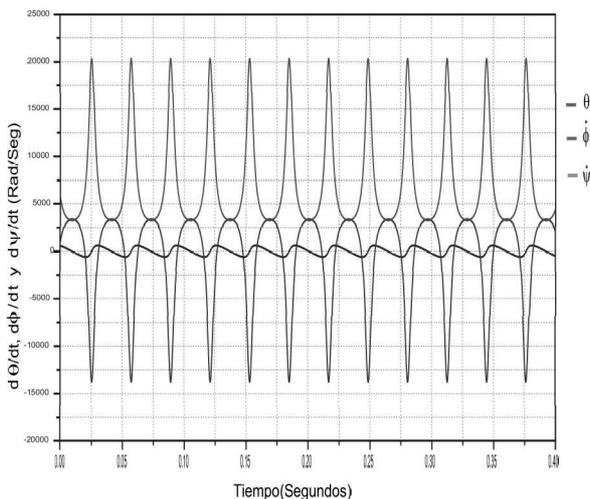


Figura 8. Superposición de las derivadas de los ángulos de Euler, cuando $c=0,0125$ m.

En las Figura 9 se muestra las gráficas de la Energía vs el tiempo, cuando el parámetro c se incrementa. Se puede observar que hay pequeñas oscilaciones, pero estas son insignificantes, considerando que estamos analizando el caso de *movimiento sin fricción* (la energía mecánica se conserva); en el *cálculo numérico* se encuentra un margen de error, debido al error del proceso al ejecutar los cálculos.([7] pág. 165)

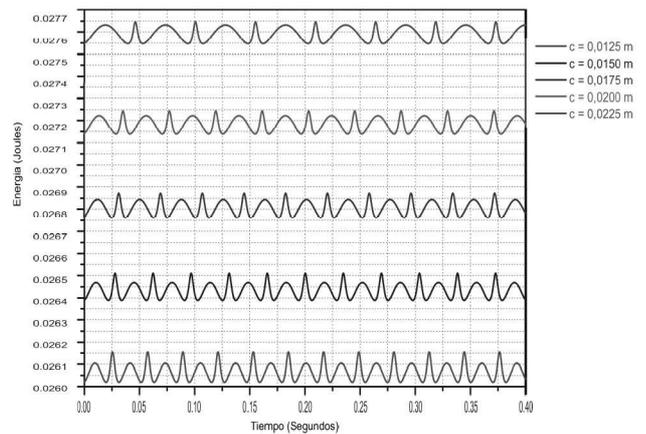


Figura 9. Comportamiento de Energía conforme la condición inicial de c varía.

Para el caso del *movimiento con fricción por deslizamiento* se muestra en la Figura 10 la función $\theta(t)$, para el intervalo $t \in [0, 2, 1]$ seg oscilando (como se aprecia en su ampliación), luego se incrementa bruscamente hasta alcanzar un valor máximo en $t=3,5$ seg y un $\theta = 150^\circ$ aproximadamente, a partir de allí las oscilaciones son periódicas.

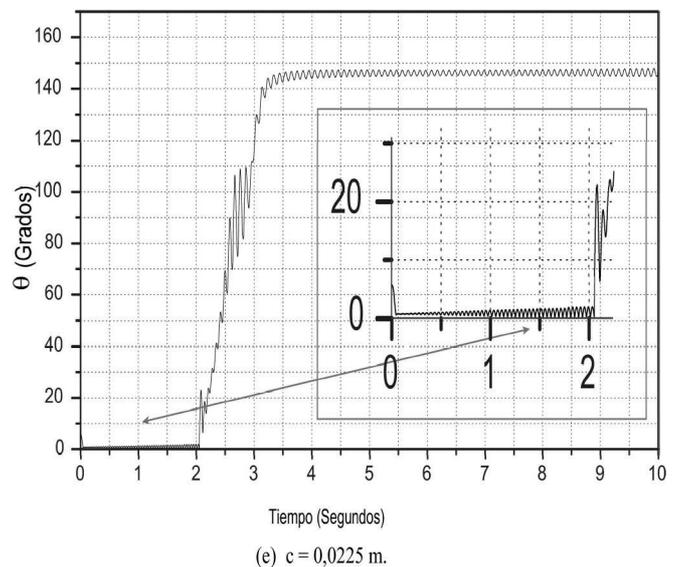


Figura 10. Movimiento del elipsoide no homogéneo cuando actúa una fuerza por deslizamiento: Gráfica de $\theta(t)$ cuando $c = 0,0225$ m, el valor máximo de $\theta(t)$ es de 145° .

En las Figura 11, se gráfica $\dot{\theta}(t)$ para un intervalo de $-1400^\circ/\text{seg} \leq \dot{\theta} \leq 1400^\circ/\text{seg}$ y un tiempo $t \in [0, 10]$ seg. La función $\dot{\theta}(t)$ muestra oscilaciones que van incrementándose entre 0 y 2,1 seg. Luego da saltos oscilatorios fuertes hasta 3,5 seg, a partir del cual oscila periódicamente con un amplitud casi constante. En la figura se puede apreciar también una ampliación de lo que aparentemente sería un manchón. Una observación importante, en la Figura 10 la grafica es estable a partir de $t=3,5$ seg lo mismo apreciamos en la Figura 11.

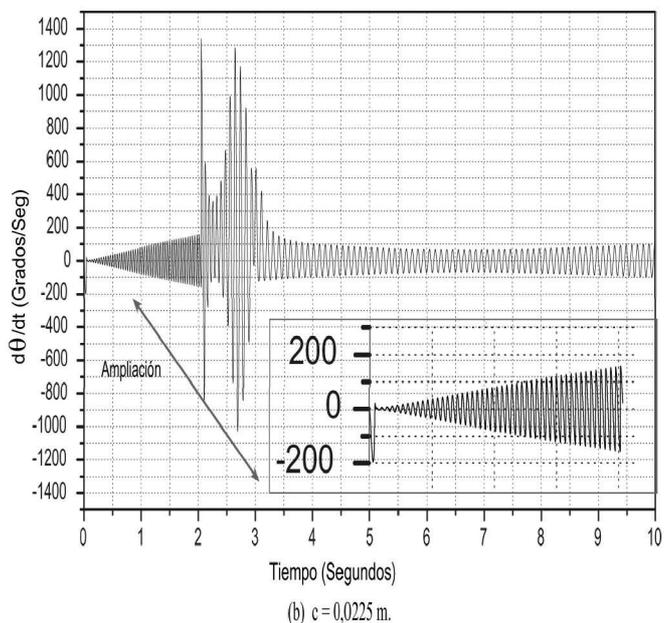


Figura 11. Movimiento del elipsoide no homogéneo cuando actúa una fuerza por deslizamiento: Gráfica de la función $\dot{\theta}$, cuando $c=0,0225$ m.

Para el caso movimiento con fricción por rodadura pura, se considero la siguiente tabla.

Tabla 1. Variaciones de D_2 e I .

D_2 m	I $Kg\ m^2$
0,0001	$3,075001 \times 10^{-6}$
0,0010	$3,0751 \times 10^{-6}$
0,0020	$3,0754 \times 10^{-6}$
0,0030	$3,0759 \times 10^{-6}$
0,0040	$3,0766 \times 10^{-6}$
0,0050	$3,0775 \times 10^{-6}$
0,0060	$3,0786 \times 10^{-6}$
0,0065	$3,0792 \times 10^{-6}$
0,0070	$3,0799 \times 10^{-6}$
0,0075	$3,0806 \times 10^{-6}$
0,0078	$3,0810 \times 10^{-6}$
0,0080	$3,0814 \times 10^{-6}$
0,0090	$3,0831 \times 10^{-6}$
0,010	$3,085 \times 10^{-6}$

En la Figura 12 se muestra la función $\theta(t)$, en un intervalo de $\theta \in [0, 0,45]$ Rad y un tiempo $t \in [0, 0,5]$ seg. Cuando el parámetro D_2 toma los valores que se indica en cada gráfico, nuevamente nuestra función es periódica. En esta parte pareciera que $\theta(t)$ no varía casi nada, notese que se considera el valor de $c=0,125$ m para todos los casos

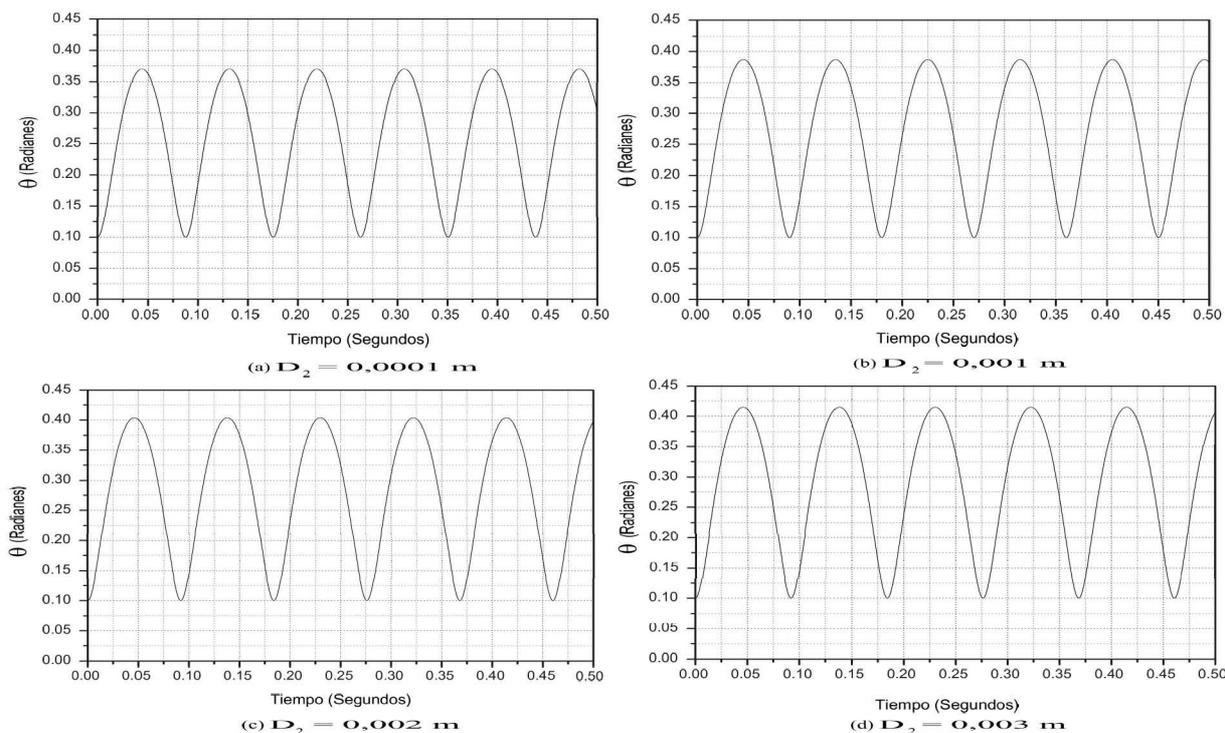


Figura 12. Movimiento del elipsoide no homogéneo cuando actúa una fuerza por rodadura pura: Comportamiento de $\theta(t)$ cuando D_2 varía.

Se puede observar como en el caso de movimiento sin fricción, la función $\theta(t)$ es periódica y muestran valores máximos y mínimos. A medida que el parámetro D_2 se incrementa, la amplitud de la función θ se incrementa, hasta un cierto valor de $D_2 = 0,004$ m, y luego disminuye

la amplitud de la función. El período de la $\theta(t)$ tienen un comportamiento semejante, se incrementa lentamente hasta $D_2 = 0,002$ m y luego empieza a disminuir.

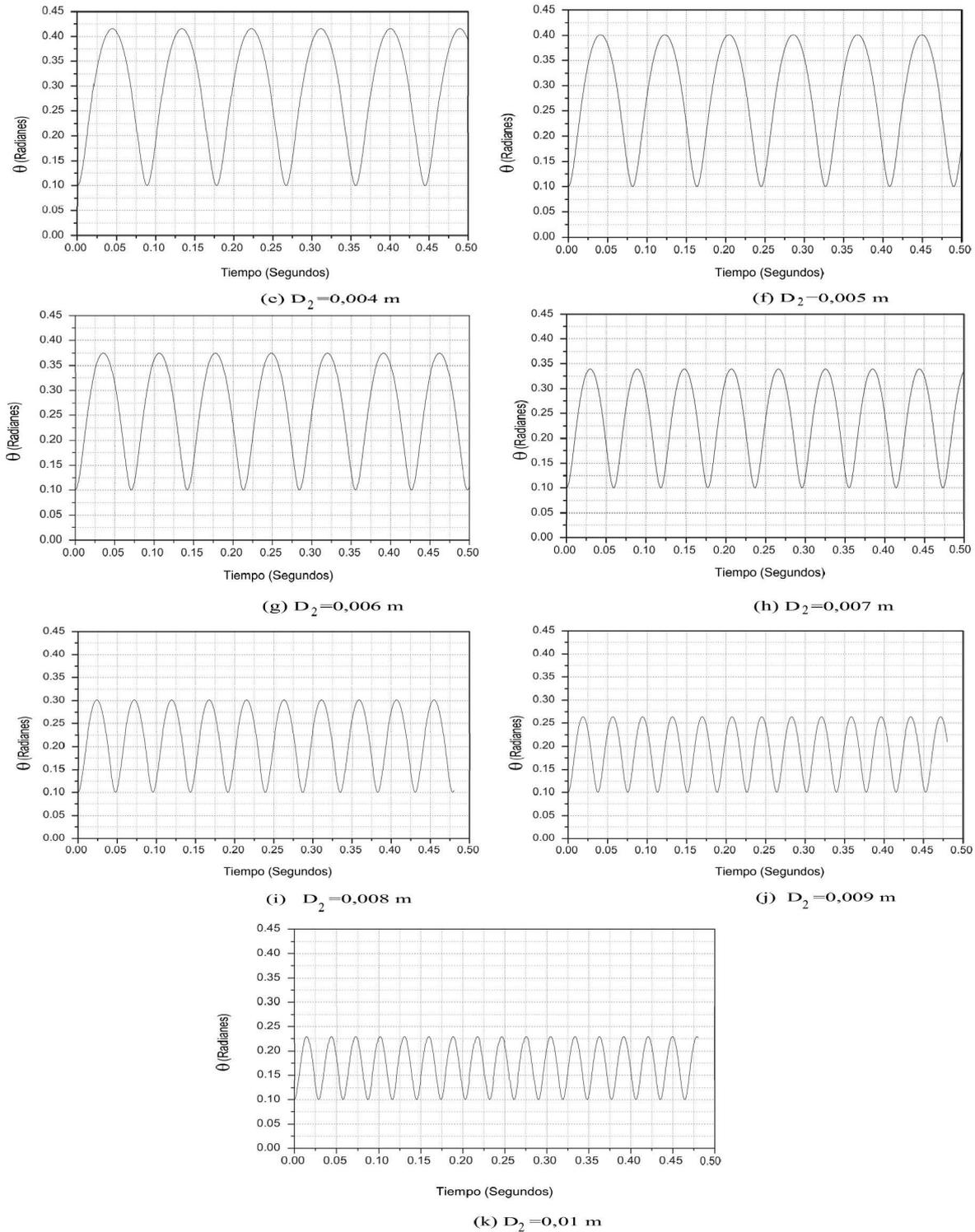


Figura 13. Movimiento del elipsoide no homogéneo cuando actúa una fuerza por rodadura pura: comportamiento de $\theta(t)$ cuando D_2 varía.

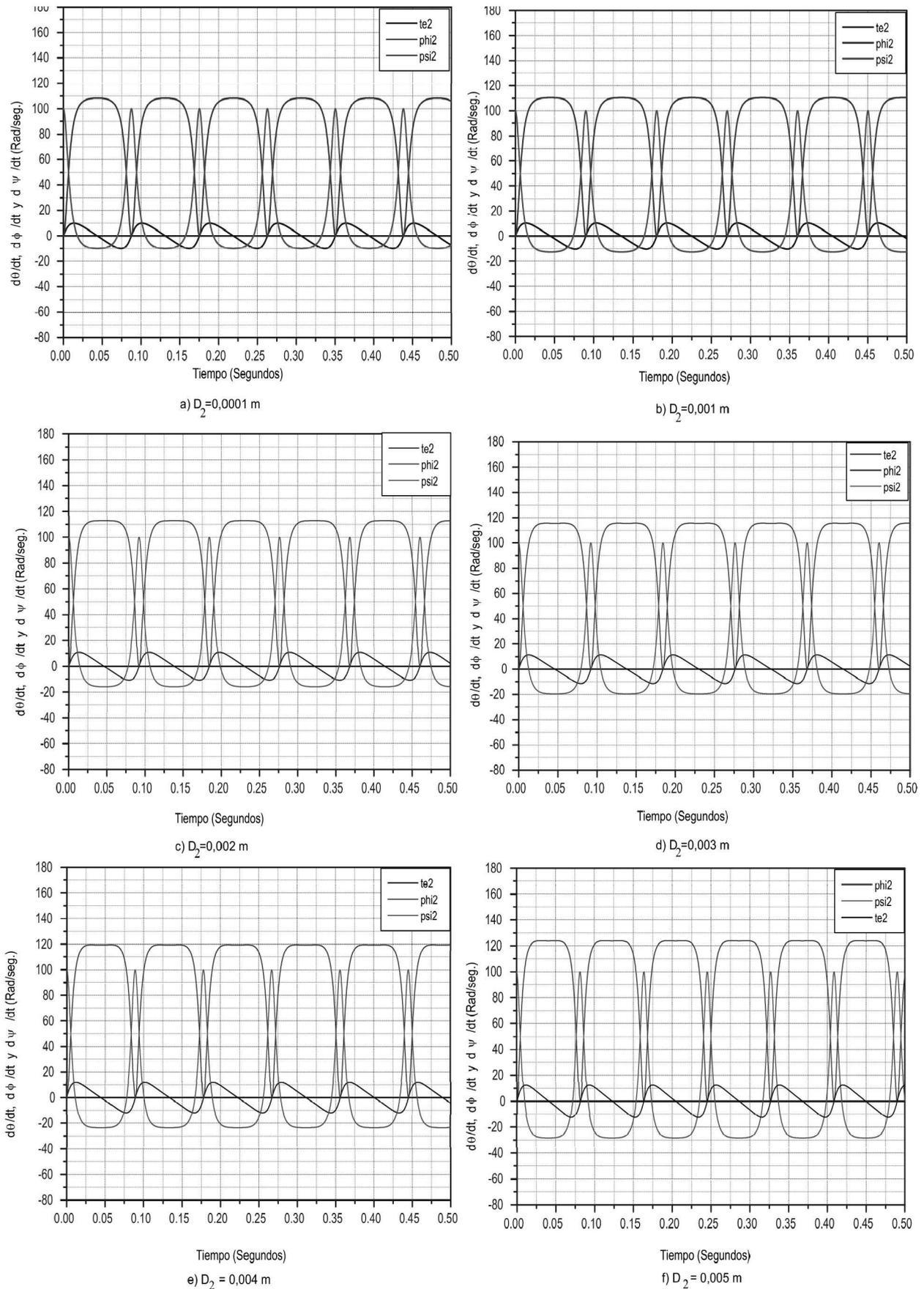


Figura 14. Movimiento del elipsoide no homogéneo cuando actúa una fuerza por rodadura pura: superposición de las derivadas de los ángulos de Euler, cuando D_2 varía.

En la Figura 14, se muestra las superposiciones de las funciones $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$, cuando D_2 varía de 0,0001m a 0,005m, observamos que los períodos de las derivadas de

los ángulos de Euler son los mismos en todas las funciones, obviamente tomando en cuenta un determinado valor del parámetro D_2 .

En la Tabla 2 mostramos las variaciones de la *Energía mecánica* al variar D_2 , se nota que existen pequenísimas

oscilaciones que surgen del calculo numérico, al obtener de los resultados.

Tabla 2. Variaciones de la *Energía* conforme D_2 varian.

D_2 m	E_{min} Joules	E_{max} Joules	ΔE Joules	\bar{E} Joules	% Error Joules
0,0001	0,0216	0,02241	0,00081	0,0219900± 0,0000032	3,68 %
0,0010	0,02136	0,02228	0,00092	0,0217800± 0,0000036	4,216 %
0,0020	0,02108	0,02213	0,00068	0,0215400± 0,0000041	3,147 %
0,0030	0,02082	0,02198	0,00116	0,0214000± 0,0000020	5,445 %
0,0040	0,02059	0,02184	0,00125	0,0212100± 0,0000021	5,892 %
0,0050	0,02042	0,02169	0,00127	0,0211000± 0,0000048	6,031 %
0,0060	0,02033	0,02155	0,00122	0,0209500± 0,0000020	5,826 %
0,0070	0,02029	0,02140	0,00111	0,0209400± 0,0000044	5,325 %
0,0080	0,02030	0,02125	0,00095	0,0207900± 0,0000040	4,572 %
0,0090	0,02033	0,02111	0,00078	0,0208000± 0,0000032	3,769 %
0,010	0,02035	0,02096	0.00061	0,0207200± 0.0000010	2,953 %

Trayectoria de la proyección del centro geométrico sobre el plano XY

Los resultados obtenidos de la rodadura pura fueron muy interesantes (la periodicidad de las funciones θ , ϕ , ψ y sus derivadas). Motivados por eso se decidió analizar las trayectorias en los diferentes planos para obtener mayor información y poder interpretar los resultados hallados.

Analizando primero el caso con $D_2 = 0,01m$. En la Figura 15 se nota la formación de un tercer rizo en el intervalo $[2T, 3T]$, la mitad del tercer rizo se termina de formar en E ($X_E = - 0,00019$ m, $Y_E, - 0,00203$ m). La trayectoria de la proyección del CG del elipsoide es de tal modo que $X < 0$ e $Y < 0$. Si $2T < t < \frac{3}{2}T$. Podemos decir que hay tres rizos para tres períodos.

En la Figura 16 se muestran las trayectorias del CG del elipsoide en 3D, se forman tres rizos en los tres planos de proyección ($XY, XZyYZ$). En esta figura notamos la trayectoria del centro geométrico del elipsoide cuando se considera un tiempo de tres períodos.

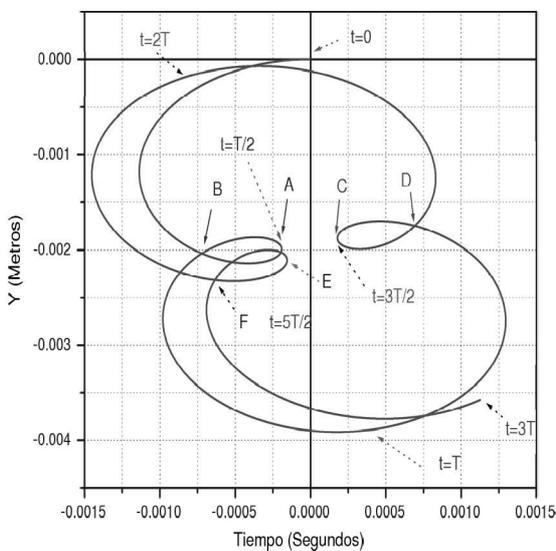


Figura 15. Trayectoria de la curva X vs Y , considerando tres períodos.

Figura 16. Gráfica en 3D para un tiempo de 3 períodos.

En la Figura 17, mostramos la trayectoria del centro geométrico del elipsoide, pero considerando un tiempo 15 períodos aproximadamente; en a) se aprecia mejor la pequeña zona prohibida en el plano XY , en b) y c) apreciamos las diferentes proyecciones del movimiento, para el caso de $D_2 = 0,01$ m. Las proyecciones en los planos XZ y YZ muestran la forma de un cono truncado para una altura máxima y cuando el valor de Z es pequeño la zona prohibida se incrementa a un máximo valor.

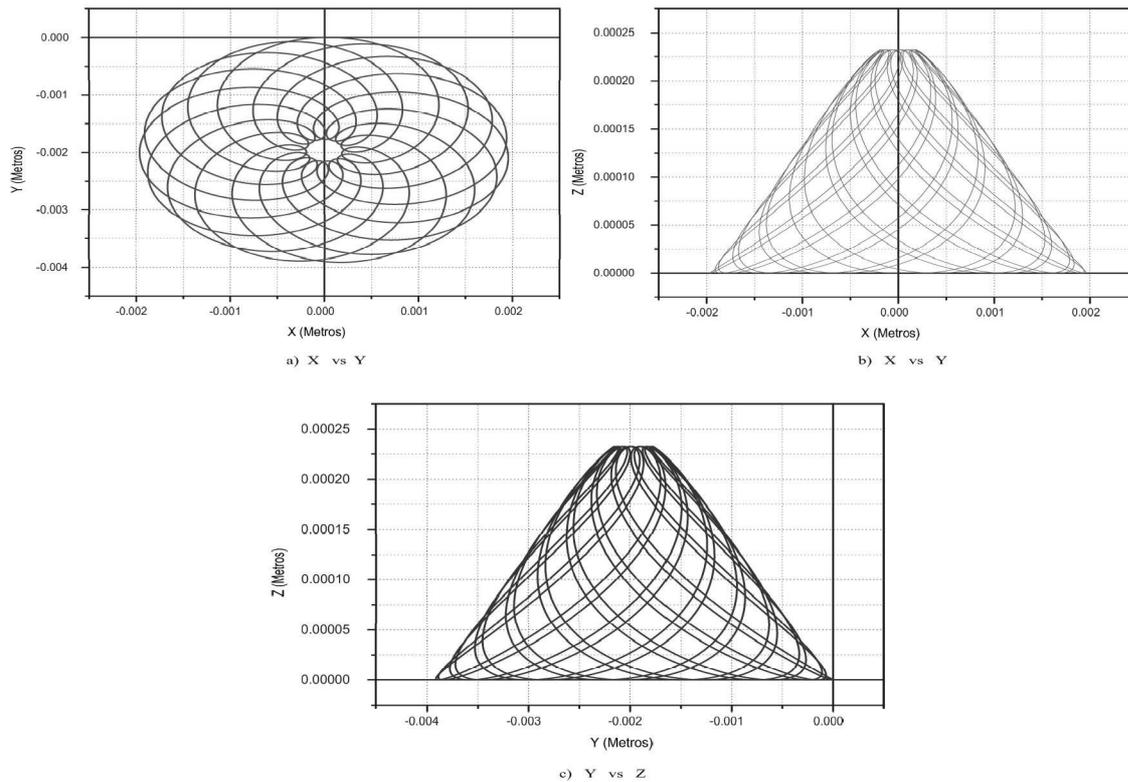


Figura 17. Trayectoria del centro geométrico cuando $D_2 = 0,01\text{m}$, considerando las proyecciones en tres dimensiones, para un tiempo de 15 períodos. En la figura a) se aprecia un pequeño pozo en el plano XY, b) y c) son las proyecciones del movimiento en los plano XZ y YZ.

En la Figura 18 presentamos la trayectoria de la proyección del centro geométrico en 3D, para el intervalo $[0, 15T]$.

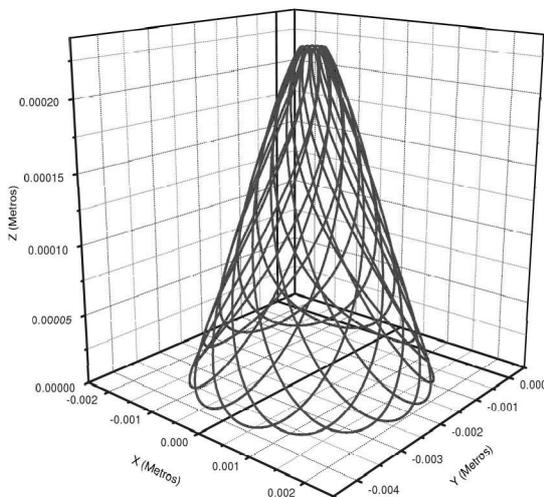


Figura 18. Trayectoria del centro geométrico cuando $D_2 = 0,01\text{m}$, en 3 dimensiones y consideran un tiempo de 15 períodos.

Como llamo la atención ese comportamiento de las zonas prohibidas, se decidió analizar otros casos:

Figura 19, trayectoria del centro geométrico, cuando

$D_2 = 0,0007\text{ m}$ considerando el tiempo de un período, como se puede apreciar casi no se nota el rizo que se aparecía cuando $D_2 = 0,01\text{ m}$.

Figura 19. Trayectoria del centro geométrico, cuando $D_2 = 0,0007\text{m}$ y para un tiempo $t \in [0, T]$ seg. en tres dimensiones.

En la Figura 20 nuevamente apreciamos las proyecciones en los diferentes planos, y como siempre lo más resaltante es el pozo formado en el plano XY.

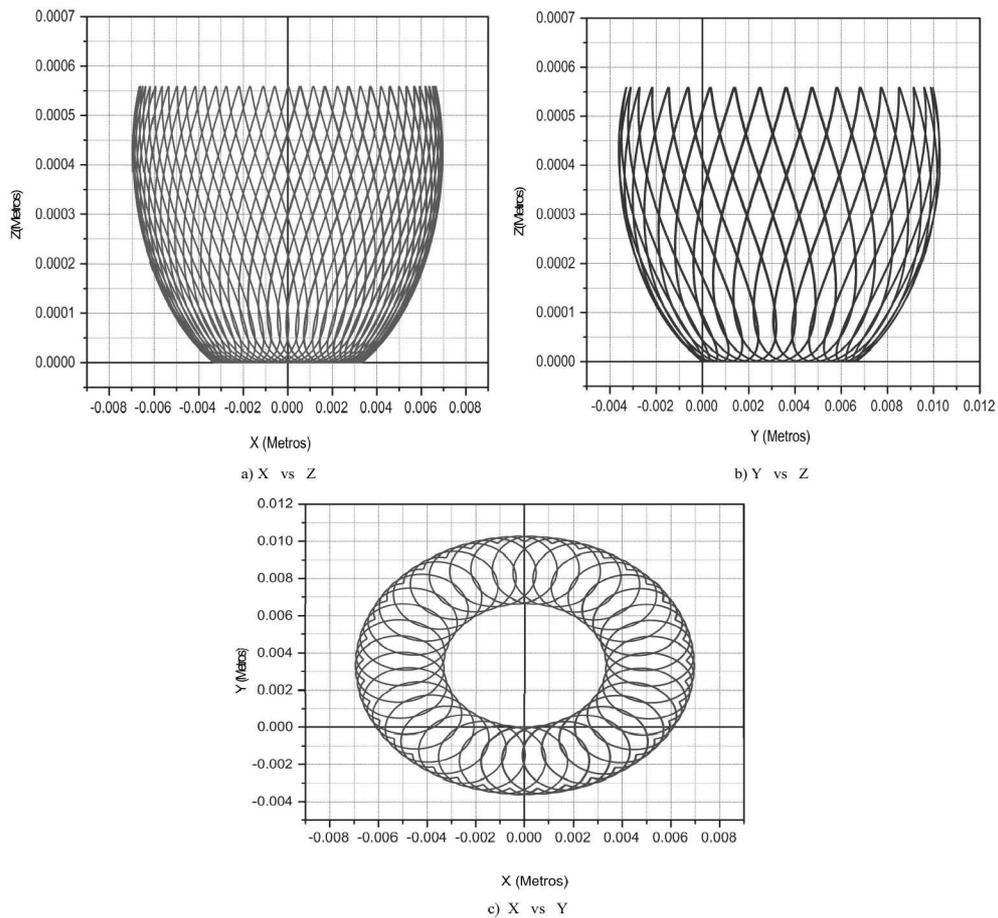


Figura 20. Proyecciones de la trayectoria en 3D, cuando $D_2 = 0,0007m$ y para un $t \in [0, 15T]$ seg.

Para terminar este caso ($D_2 = 0,0007m$), mostramos en la Figura 22, la trayectoria del centro geométrico en 3D, donde es mas evidente la zona prohibida.

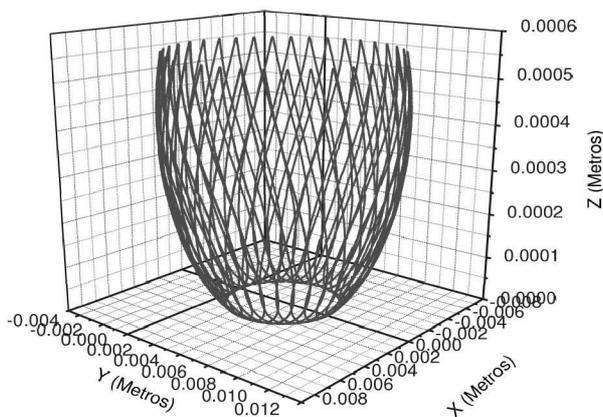


Figura 21. Trayectoria del centro geométrico en tres dimensiones, cuando $D_2 = 0,0007m$ y para un $t \in [0, 15T]$ seg.

Figura 22. Trayectoria del centro geométrico, cuando $D_2 = 0,0004m$ y para un tiempo $t \in [0, T]$ seg. en tres dimensiones.

El último caso analizado es cuando $D_2 = 0,0004 m$, para un tiempo de un período, notamos que ya no hay rizo.

Nuevamente en la Figura 23(c) apreciamos que la zona prohibida crece más que la Figura 20.

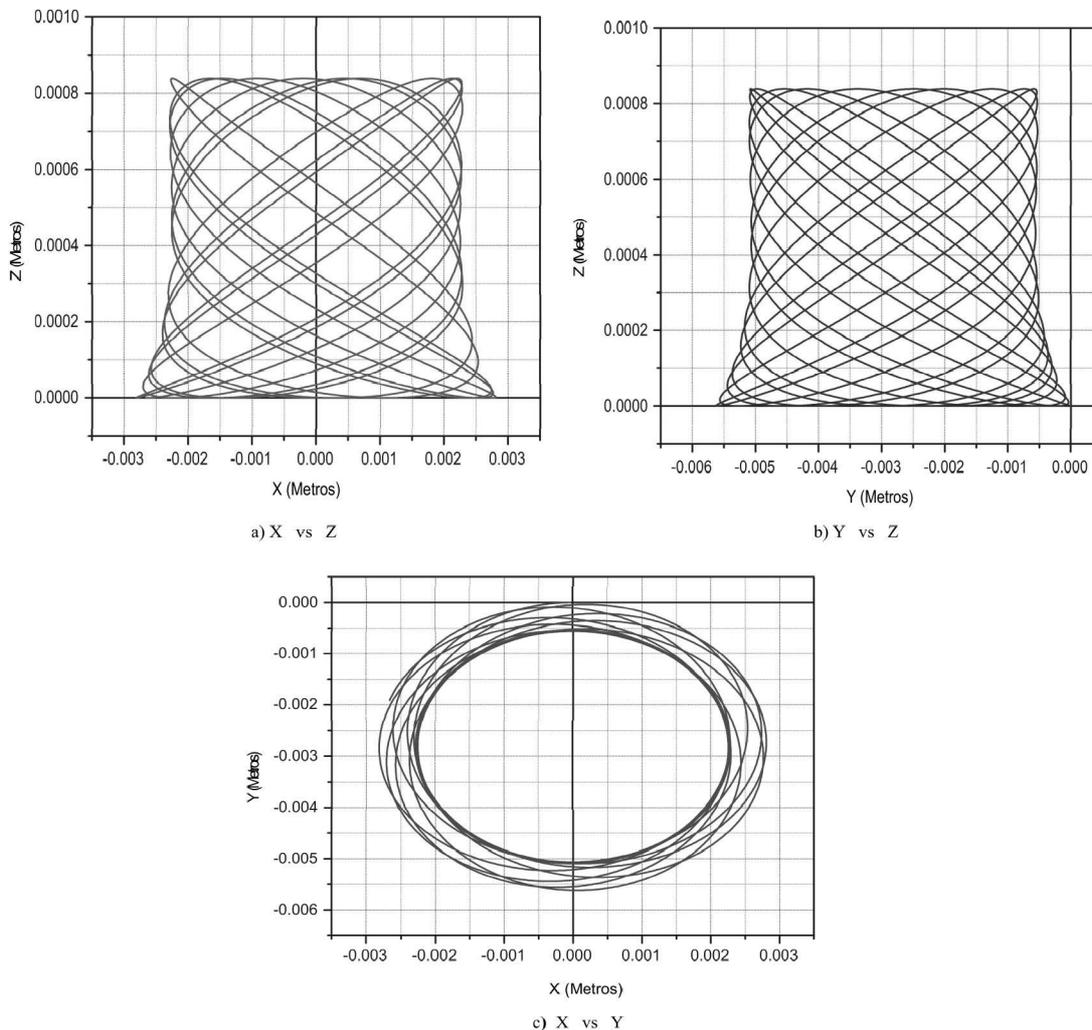


Figura 23. Proyecciones de la trayectoria en 3D, cuando $D_2 = 0,0004$ m y para un $t \in [0,10 T]$.

Finalmente mostramos la gráfica en 3D para este caso

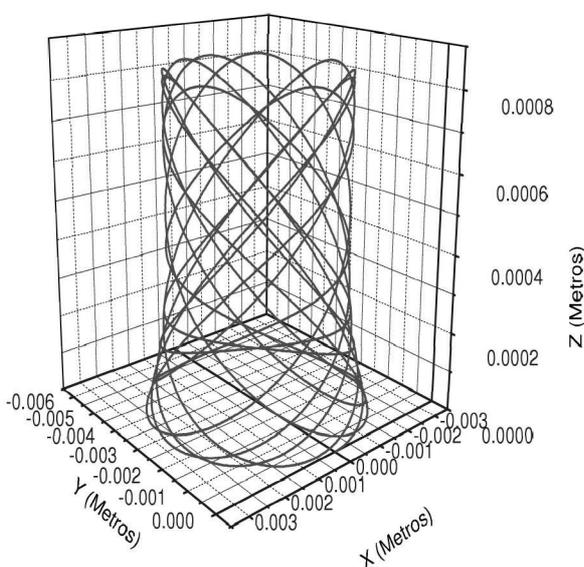


Figura 24. Trayectoria del centro geométrico en tres dimensiones, cuando $D_2 = 0,0004$ m y para un $t \in [0, 10T]$

3. Conclusiones

Movimiento sin deslizamiento

Al resolver numéricamente las ecuaciones (14), (15) y (16) se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para los ángulos de Euler. Una muestra es la Figura 7 donde el comportamiento de $\theta(t)$ es periódico, considerando que se varía c . En [4, p.146] se obtuvo también que es periódico considerando ahora que la velocidad $\dot{\psi}(t)$ es la que varía y c permanece constante.

Los períodos para las velocidades de $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ son los mismo como se observa en la Figura 8 y también los comprobamos en [4, p.154] para otros casos.

Se comprobó que cuando no actúa la fuerza por deslizamiento la energía mecánica se conserva, En la Figura 9 se observa pequeñas ondulaciones, debido al calculo numérico.

Movimiento por deslizamiento

Luego de resolver numéricamente las ecuaciones (30), (32), (36), (38) y (39), se encontró: θ tiene un comportamiento semejante al caso del Tipp Top [1] y [2], pero

sin llegar al valor de 180^0 (el máximo valor es 160^0) eso significa que el elipsoide se para, pero no da la vuelta (ver Figura 11).

Para algunos casos se encontró que el valor promedio de $\theta = 100^0$, es decir que el movimiento del elipsoide no homogéneo es semejante a un huevo duro [2]. Es decir para que un huevo duro se pare debe de haber fricción por deslizamiento.

El caso que se muestra en este artículo es cuando c varía, pero en [4, p.179], se muestra cuando la fricción varía (su comportamiento es similar).

Movimiento por rodadura pura

Las funciones θ , $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ para el movimiento sin fricción y con rodadura pura, son periódicas y estas funciones tienen el mismo período, cuyo valor cambia si algún parámetro (c o condición inicial ($\dot{\psi}(0)$)) se modifica, (ver [4]).

El movimiento del centro geométrico está limitado por dos superficies. Es decir el movimiento del centro geométrico está dentro de una región limitada R . Existe un pozo de potencial, como se apreció en las Figuras 17, 18, 20, 21, 23 y 24.

La distancia D_2 juega un papel muy importante a la hora de realizar la simulación, esto se observa en los resultados obtenidos en las Figuras 17, 18 considerando $D_2 = 0,01$ m, notamos un cono truncado; 20, 21 cuando $D_2 = 0,0007$ m; 23 y 24 teniendo $D_2 = 0,0004$ m, la forma del movimiento varía y tiende a una superficie cilíndrica.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Finalmente para resolver el sistema de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no lineales y acopladas* se empleó el Fortran Power Station 4, por presentar mayor facilidad para resolver numéricamente las ecuaciones, se intentó trabajar con el *Matlab 6* y el *Mathematica 5* pero consumen mucha memoria y tiempo de ejecución, al correr el programa.

Pudo emplearse los métodos numéricos mejorados, como el Runge Kutta Fehlberg o Runge-Kutta-Verfahren, más precisos, pero se deja para otros trabajos.

Agradecimientos

Agradecemos al Profesor Holger Valqui por los conocimientos impartidos, al Profesor Armando Bernui por su espíritu de colaboración, al grupo de Física Teórica de la Facultad de Ciencias, así como a la Facultad de Ciencias y a la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas por el apoyo recibido.

-
1. R.J. Cohen, *The tippe top revisited*, Amer J. Phys, 45(1) (1977), pp. 12-17.
 2. H.K. Moffatt y Yutaka Shimomura, "Spinning egg - a paradox resolved", Nature, 416 (2002). Holger G. Valqui,
 3. Edgard Vidalón V., Tesis de licenciatura: *Movimiento de una esfera no homogénea*, 1994, UNI-FC.
 4. Alejandra Altamirano Macetas, Tesis de licenciatura: *Movimiento de un elipsoide no homogéneo*, 2005, UNI-FC.