

Utilización de la Interpolación en el Método de Elementos Finitos

Irla Mantilla Núñez, Laura La Rosa Obando
Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica, Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería
E-mail: irlamn@uni.edu.pe, labosin@uni.edu.pe

Recibido el 01 de octubre del 2004; aceptado el 01 de diciembre del 2004

El Método de Elementos Finitos (MEF) es un método numérico avanzado que permite obtener una aproximación de la solución de un problema de contorno, asociado a una ecuación diferencial, ordinaria o en derivadas parciales, bajo ciertas condiciones de frontera. Este método consiste básicamente, en aproximar la solución de un problema de frontera de clase C^2 , por la solución del problema equivalente planteado sobre un subespacio de dimensión finita, lo cual caracteriza e identifica al MEF como esquema de Galerkin continuo. Usualmente la base de este espacio es generado por funciones lineales, que en el caso de mejorar la precisión de la solución se tendría que realizar un refinamiento de malla, lo que conduce a la búsqueda de algoritmos de convergencia rápida para la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales. El hecho de elevar el grado de las funciones de interpolación polinomial y continuas a trozos, asociadas al subespacio respectivo a cada elemento, puede ser otra alternativa; en este sentido, requiere previamente un análisis del algoritmo para mejorar la precisión y el tiempo de proceso computacional. Para ello, en el presente trabajo se propone la construcción de una base del subespacio de aproximación con el MEF, utilizando una base de funciones Spline de tipo cúbico natural. Para la evaluación de este método, se ha experimentado sobre un problema de valores de contorno unidimensional, bajo la condición de frontera de tipo Dirichlet no homogéneo.

Palabras claves: Galerkin, elementos finitos, funciones Spline cúbico natural.

The Method of Finite Elements (MEF) it is an advanced numeric method that allows to obtain an approach of the solution of a contour problem, associated to a differential, ordinary equation or in having derived partial, under certain frontier conditions. This method consists basically, in approaching the solution of a problem of class frontier C^2 , for the solution of the equivalent problem outlined on a subespacio of finite dimension, that which characterizes and it identifies to the MEF like outline of continuous Galerkin. The base of this space is usually generated by lineal functions that in the case of improving the precision of the solution would have to be carried out a mesh refinement, what leads to the search of algorithms of quick convergence for the resolution of big systems of lineal equations. The fact of elevating the grade of the functions of interpolation polinomial and continuous to pieces, associated to the respective subespacio to each element, it can be another alternative; in this sense, it requires an analysis of the algorithm previously to improve the precision and the time of process computacional. For it, presently work intends the construction of a base of the approach subespacio with the MEF, using a base of functions Spline of natural cubic type. For the evaluation of this method, it has been experienced on a problem of values of contour unidimensional, under the condition boundary of type non homogeneous Dirichlet.

Keywords: Galerkin, finite elements, functions Spline natural cubic.

1. Introducción

El Método de Galerkin es una técnica que proporciona el marco general para la aproximación de algunos problemas variacionales, en la práctica, se convierte en un algoritmo especial de discretización, que mediante la definición de una combinación lineal sobre un espacio de dimensión finita, se le denomina, Método de Elementos Finitos, (MEF). Su aplicación es muy importante, por ser muy usual en la resolución numérica de problemas de valores de frontera que con frecuencia se presentan en modelaciones fenomenológicas de la Ingeniería.

En el desarrollo de la formulación variacional, del problema diferencial, se introduce a medida que requiere, la teoría funcional básica, de un modo que el lector tenga la facilidad de comprender los objetivos del trabajo. Luego nos centraremos en la utilización del Método de Elementos Finitos para la búsqueda de una solución del problema variacional, el cual se formula a partir de un problema de contorno de tipo Dirichlet, así también en la comparación computacional, de la aplicación del Método con una base de funciones propuesta en el trabajo para la generación del

espacio de elementos finitos aproximador y la base usual en el espacio de igual dimensión.

2. Metodología

Formulación Variacional

Dado un conjunto abierto $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$, donde a, b son números reales sobre el que se ha planteado el siguiente problema diferencial

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x) \quad (1)$$

La variable desconocida “y” satisface las condiciones de frontera

$$u(a) = u_a \quad u(b) = u_b$$

Al que se le denomina también problema de contorno clásico.

Asumimos las siguientes afirmaciones:

Sean p, q y f funciones continuas sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset L^2(\Omega)$ un Espacio de Hilbert, de dimensión infinita y denotemos por V' al espacio dual de V , así también denotemos por $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal de V y $l \in V'$, una forma lineal.

Si $f \in L^2(\Omega)$, haciendo homogéneas a las condiciones de frontera, es decir $y_a = y_b = 0$ y multiplicando por una función v del espacio de funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto, entonces (1) se convierte en:

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) v + q(x)uv = f(x)v, \text{ para } u \in V.$$

Aplicando una integración por partes en esta ecuación, y teniendo en cuenta las condiciones de frontera; resulta la siguiente ecuación integral:

$$\int_{\Omega} [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$$

Si asumimos que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$$

donde se puede ver V es un espacio de Hilbert, $a(u, v)$ es una forma bilineal acotada y V -elíptica (o coerciva) de V , y $l(v)$ una forma lineal acotada de V . Entonces el problema clásico se reduce al siguiente problema denominado "problema Variacional", es decir:

Hallar $u \in V$, que satisfaga la ecuación variacional

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (2)$$

Se puede ver en [4] que:

$a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal acotada y V -elíptica o Coerciva; es decir,

$$\exists M \in \mathbb{R}, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$$

$$\exists C_0 \in \mathbb{R}, a(v, v) \geq C_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

Por el lema de Lax-Milgram se puede ver en [3], que el problema variacional (2) tiene solución única.

En general, es imposible encontrar una función de forma explícita que represente a la solución exacta del problema (2), puesto que el espacio V es de dimensión infinita. Por tanto se plantea una forma de hallar una solución aproximada, es decir resolver un problema equivalente a (2) pero en un espacio de dimensión finita. Para ello consideraremos lo siguiente:

El método de Galerkin, dice que es posible suponer que la combinación lineal definida por u_N , donde

$$u_N = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i \quad (3)$$

es solución aproximada del problema (2), así también que el conjunto de funciones $\phi_j, j=1, \dots, N$ son linealmente independientes y genera el espacio de dimensión finita V_N , es decir,

$u_N \in V_N$, es una sucesión de funciones que satisface la ecuación variacional

$$a(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in V_N \quad (4)$$

Por el principio del álgebra fundamental, se puede encontrar un subespacio de dimensión finita $V_N \subseteq V$. Entonces el problema (2) proyectamos sobre V_N y extendiendo las propiedades mencionadas anteriormente para la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y para la forma lineal $l \in V'$, podemos extender también el Lema de Lax-Milgram al problema discreto. Por tanto se puede predecir que existe solución única, que satisface la ecuación variacional del problema (4). Ahora para hallar esta solución, asumimos que la combinación lineal (3), esta determinada por el conjunto de funciones $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ la cual es una base de V_N y que $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ es el conjunto de componentes que definen la solución aproximada en cada nodo, ambos términos son desconocidos hasta ahora. Al reemplazar (3) en (4), se obtiene:

$$a\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i, v\right) = l(v) \quad \forall v \in V_N$$

Según el método de Galerkin si se toma ϕ_j de la misma base de V_N , se genera un problema discreto equivalente a (2), es decir:

Hallar el conjunto de funciones $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, tales que satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i a(\phi_i, \phi_j) = l(\phi_j); \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Quiere decir que mediante el método de Galerkin se convierte la ecuación variacional (2) en la forma de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas (5) que podemos expresarlo en forma matricial como:

$$A \xi = b \quad (6)$$

donde:

$\xi = (\xi_i), i = 1, \dots, N$, es el vector desconocido y la matriz $A = (a(\phi_i, \phi_j)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, cuyos coeficientes resultan de operar la forma bilineal sobre las funciones de base y en cada elemento de la malla. En la teoría de Elasticidad la matriz A recibe el nombre de matriz de Rigidez y

$$b = (l(\phi_j)) \in \mathbb{R}^N$$

el de vector de cargas es decir de la forma:

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & \cdot & \cdot & a(\phi_1, \phi_N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a(\phi_N, \phi_1) & \cdot & \cdot & a(\phi_N, \phi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\phi_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ l(\phi_N) \end{bmatrix}$$

Luego al resolver este sistema lineal de ecuaciones algebraicas se encuentra la solución aproximada del problema (1)

La solución u_N , es una aproximación de la solución exacta u . En la finalidad de precisar mejor la solución, es lógico buscar una mayor aproximación, una alternativa es elegir N muy grande, lo que equivale hacer un refinamiento sobre Ω . Es decir buscar una sucesión de subespacios $V_{N_1} \subseteq V_{N_2} \subseteq \dots \subseteq V_{N_n}$, y obtener la correspondiente sucesión de soluciones aproximadas u_{N_i} , $i = 1, 2, \dots, n$. Pero con este procedimiento sucede que también se incrementaría el tamaño de la matriz de coeficientes del sistema, lo que conduce a un más alto coste el cálculo computacional del sistema. Otra alternativa es elegir óptimamente las funciones de base para el subespacio V_N , de dimensión finita. Este espacio es construido por intermedio de polinomios a trozos. Generalmente con el método de Galerkin, se utiliza los polinomios de interpolación lineal de tipo Lagrange, lo que lleva a la obtención de subespacios lineales, asociados a dos nodos por elemento en cada elemento finito de la malla definida sobre Ω . A este esquema se conoce como método de Elementos Finitos de Galerkin lineal. Numéricamente el método de elementos finitos es el más eficiente para resolver problemas de valores de frontera, la ventaja es que permite elegir diferentes bases de aproximación, bajo la condición de que sus elementos deben satisfacer las propiedades, de ser linealmente independientes y generar el espacio solución. Anteriormente vimos que el problema de valores de frontera se reduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, cuya matriz de coeficientes es la matriz A , la cual es simétrica y definida positiva. Los coeficientes de A juegan un rol esencial, tales es así que, si el número de condición de A , es demasiado grande, entonces es imposible encontrar directamente una solución directa del sistema, la alternativa sería utilizar un método iterativo, lo que es otro inconveniente sumado a la dispersión de la matriz A . Se dice que es dispersa, si la mayoría de sus entradas son ceros, en caso contrario, se dice que la matriz es densa.

La propiedad de que la matriz sea dispersa, hace mas costosa el cálculo computacional del sistema, si se puede observar el cálculo de cada entrada de la matriz involucra un dominio de integración y a veces puede resultar que esta es no acotada. Otra forma de mejorar este inconveniente es, si previamente se realiza un tratamiento de la matriz, esto es utilizar un método de almacenamiento de tipo perfil o almacenar los coeficientes no nulos en un tipo vector. Generalmente si la matriz es muy dispersa el sistema es resuelto de manera más eficiente utilizando un método iterativo.

Para obtener una matriz de rigidez óptima, tenemos que ser muy cuidadosos con la elección del espacio de sus funciones de la base, para que pueda generar una matriz de tipo banda con un ancho óptimo.

Un espacio aproximador de Elementos Finitos V_h , donde h representa el espaciado de cada elemento, es optimo si se

optimiza el grado de aproximación de las funciones de su base, en este trabajo se propone elevar el grado de los polinomios a trozos, luego de generar el subespacio con esta base de funciones, proceder con el método de Elementos Finitos a resolver el siguiente problema:

$$\text{Hallar } u_h \in V_h$$

tales que

$$a(u_h, v_n) = l(v_n) \quad \forall v_n \in V_h \quad (7).$$

El problema de la estimación del error al aproximar con el Método de Elementos Finitos, se puede hacer mediante la aplicación del Lema de Céa, el cual consiste en la estimación de la siguiente desigualdad:

$$\|u - u_h\|_V \leq c \|u - \Pi_h u\|_V$$

donde $\Pi_h u$ es el interpolante de u [3,4] (u es la solución exacta del problema en V de dimensión infinita y u_h solución aproximada del problema en el espacio de dimensión finita).

En el presente trabajo proponemos desarrollar el método de Elementos Finitos de Galerkin para obtener la solución aproximada del problema (1), eligiendo como base los polinomios a trozos, es decir las funciones del espacio de aproximación, las funciones Spline de tipo Cúbico Natural.

Para explicar en que consiste este esquema de solución, consideraremos el problema de valores de frontera elíptica con las condiciones de frontera Dirichlet homogéneas:

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (8)$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

donde $p \in C^1[a,b]$ y $q, f \in C[a,b]$. Primeramente convertiremos este problema de valores de frontera en un problema variacional equivalente. Sea el dominio de integración $\Omega = (a, b)$. Consideremos el espacio de Sobolev, $V = H^1(\Omega)$ como el espacio para la formulación del problema débil o variacional. Empezaremos multiplicando la ecuación diferencial de la expresión (8) por una función $v \in V$, luego en la ecuación definida sobre Ω ; se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} \left[-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) v + q(x)uv \right] dx = \int_{\Omega} f(x)v dx \quad \forall u \in V \quad (9)$$

Aplicando la integración por partes se obtiene una igualdad parecida a la del problema (2).

Se puede ver [4], que $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal y $l(\cdot)$ es una forma lineal, del Lema de Lax Milgram ambas satisfacen las condiciones de existencia y unicidad de solución. Ahora buscaremos la solución: suponiendo la solución con una base de las funciones Splines de cúbico natural aplicando el método de Galerkin en un espacio de dimensión finita.

Construcción de la base del espacio de solución V_h generado por un Spline cúbico natural

Para $N \in \mathbb{N}$, particionamos el dominio $[a, b]$ en N partes: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Los puntos x_i para $0 \leq i \leq N$, son llamados los nodos, y los elementos finitos son los subintervalos a los que denotaremos por $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, para $1 \leq i \leq N$. En este problema tomaremos, los valores de frontera discretos, que satisfacen la condición de Dirichlet homogénea, es decir, en el nodo x_0 y x_N la variable dependiente u , toma el valor cero. La longitud de espaciado en cada elemento de la malla denotado por $h_i = x_i - x_{i-1}$ y por $h = \text{Max } h_i$. Generalmente se considera la aproximación con el Método de Elementos Finitos en una malla uniforme y con una base de funciones de tipo lineal. En el presente trabajo proponemos desarrollar este método para obtener la solución, utilizando una base de funciones generada a partir de funciones de Spline Cúbico natural:

Construimos la siguiente función Spline S cúbico natural, tal que S es definida en $(-\infty, \infty)$, $S \in C_0^2(-\infty, \infty)$ y $S(x) \in [0, 1]$. Entonces ésta resulta ser la función representada por:

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3 + 4(1+x)^3], & -2 < x \leq -1; \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3], & -1 < x \leq 0; \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & 0 < x \leq 1; \\ \frac{1}{4}[(2-x)^3], & 1 < x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \end{cases} \quad (10)$$

y gráficamente puede verse en la figura 1.

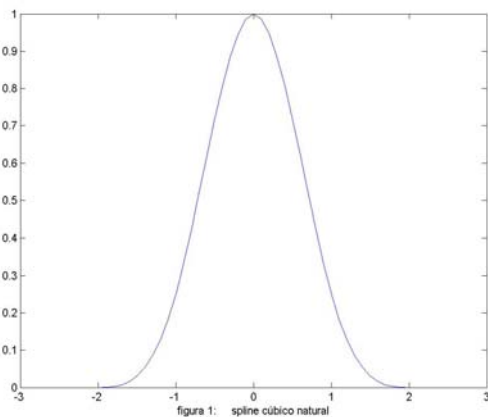


Figura 1.

Para construir las funciones de la base, tomaremos $a = 0$ y $b = 1$, es decir $\phi_i(x) \in C_0^2[0, 1]$, elegimos: un entero positivo natural n , definiendo $h = \frac{1}{n+1}$, los nodos están igualmente espaciados.

Entonces $x_i = i \cdot h$, para cada $i = 0, \dots, n+1$. Si asumimos que los polinomios cúbicos que representen al Spline $S(x)$ están dados por:

$$S_i(x) = S\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \quad \text{para cada } i = 0, \dots, n+1.$$

Siendo $\{S_i\}_{i=0}^{n+1}$ un conjunto de funciones linealmente independientes. Pero para que el conjunto $\{S_i\}_{i=0}^{n+1}$ verifique las condiciones de frontera $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$, es necesario redefinir los S_0, S_1, \dots, S_{n+1} , de modo que las funciones de base asociadas a $S(x)$, de (10), se puede expresar por $\phi_i(x)$, donde:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} S_0(x) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), & i = 0; \\ S_1(x) - S\left(\frac{x+h}{h}\right), & i = 1; \\ S_i(x), & 2 \leq i \leq n-1; \\ S_n(x) - S\left(\frac{x-(n-2)h}{h}\right), & i = n; \\ S_{n+1}(x) - 4S\left(\frac{x-(n-2)h}{h}\right) & i = n+1; \end{cases} \quad (11)$$

Con el Spline cúbico natural dado en (10) y para una partición de $n = 9$; el gráfico resultante del conjunto de funciones $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ se presenta en la figura 2.

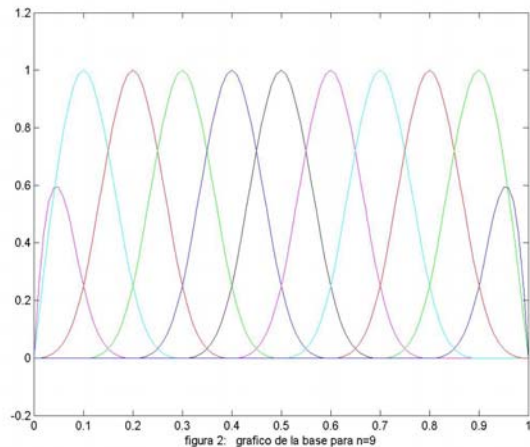


Figura 2.

Se puede observar en el gráfico que $\phi_i(x)$ y $\phi_j(x)$ son diferentes de cero solamente en $x_{j-2} \leq x \leq x_{j+2}$; para cada $j = 0, 1, \dots, n+1$. El espacio de soluciones, en cada elemento finito, está dado por:

$$V_h = \text{Span}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}\};$$

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_{\Omega} [p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx;$$

$$i, j = 0, 1, \dots, n+1; \quad y$$

$$l(\phi) = b_i = \int_{\Omega} f(x)\phi_i(x) dx \quad \text{para } i = 0, \dots, n+1.$$

La matriz resultante A , en esta base y de coeficientes $a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, calculada con el método de Elementos Finitos, es una matriz banda con un ancho de longitud

máximo de siete, para cualquier valor de n . El sistema lineal de ecuaciones que se obtiene puede resolverse fácilmente por algún método directo, por ejemplo el método de Cholesky, (método utilizado en los resultados numéricos) u otro para la solución de este tipo de sistemas lineales con matrices banda.

3. Resultados Numéricos

Para los resultados numéricos se plantea el siguiente problema:

$$-u'' + \pi^2 u = 2\pi^2 \text{sen}(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (12)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Sea

$$V = H_0^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) \mid v(0)=0\}$$

subespacio de $H^1(0,1)$.

Para la formulación débil utilizamos el espacio de funciones V , obteniéndose el problema débil o en su forma variacional equivalente al problema (12), el cual está expresado por:

$$\text{Hallar } u \in V \text{ tal que ,}$$

$$\int_0^1 (u'(x)v'(x) + \pi^2 u(x)v(x)) dx$$

$$= \int_0^1 2\pi^2 \text{sen}(\pi x)v(x) dx ; \quad \forall v \in V$$

Haciendo:

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + \pi^2 u(x)v(x)) dx$$

$$l(v) = \int_0^1 2\pi^2 \text{sen}(\pi x)v(x) dx$$

$$a(u, v) = l(v) \quad (13)$$

se puede ver fácilmente que V es un espacio de Hilbert, $a(,)$ es una forma bilineal y acotada, $l(v)$ es una forma lineal y acotada en V . Además se puede ver que $a(,)$ V -éptica o coerciva, con lo que del lema de Lax-Milgram, se verifica que el problema (13) tiene solución única. Aplicando el Método de Elementos Finitos con los resultados propuestos en la sección anterior para el problema (8), con las funciones de base $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$, asociadas a cada elemento y nodos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ de la malla unidimensional.

Vemos que el Espacio de Elementos Finitos es:

$$V_h = \text{span} \{ \phi_i \mid 0 \leq i \leq N \} \subseteq V,$$

que mediante el método de Galerkin, se genera el problema discreto, el que consiste en hallar:

$$u_h \in V_h, \text{ tal que}$$

$$a(u_h, v_n) = l(v_n) \quad \forall v_n \in V_h \quad (14)$$

por el Lema de Lax-Milgram extendido a cada elemento, existe solución única. Por el Método de Galerkin, podemos suponer que u_h es de la forma:

$$u_h = \sum_{i=1}^N \xi_i \phi_i \quad (15)$$

sustituyendo (15) en (13), del problema (14) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i a(\phi_i, \phi_j) = l(\phi_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Luego podemos expresar el problema (14) en la forma de un sistema lineal:

$$A \xi = b \quad (17)$$

$\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^N$, se obtiene al resolver la ecuación matricial (17). Para comprobar la eficiencia del método, se busca una función que satisfaga exactamente al problema dado, es decir probaremos que la función $y(x) = \text{sen}(\pi x)$, satisface al problema de valores de frontera:

En efecto, sustituyendo esta función en (12) tenemos:

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) + \pi^2 y = 2\pi^2 \text{sen}(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (18)$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

donde : $p(x) = 1$, $q(x) = \pi^2$, $f(x) = 2\pi^2 \text{sen}(\pi x)$.

Entonces comparando la solución exacta con la solución aproximada, para el caso de $n = 9$ particiones; $h = 1/(n+1)$, $N = n+1 = 10$ nodos, se puede ver que el gráfico resultante en la figura 3.

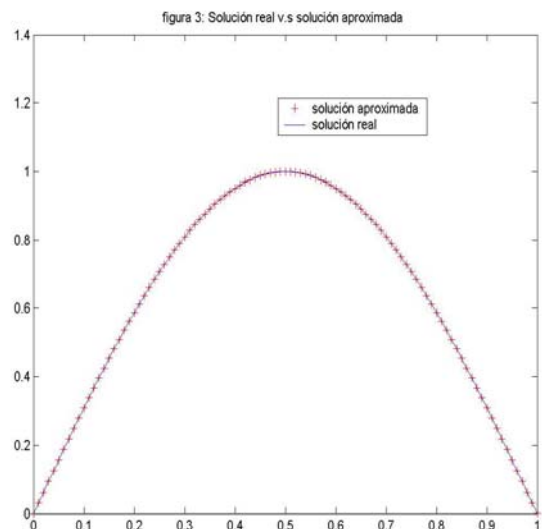


Figura 3.

Las etapas que se ha seguido para programar los algoritmos de solución en el entorno de MATLAB, son las siguientes:

Preproceso

Construcción de la malla sobre $[0, 1]$

Ingreso de los datos:

Número de particiones $n = 9$; obteniéndose automáticamente el número de nodos y el espaciado de los elementos. Construcción de las funciones, para $p(x)$, $q(x)$ y $f(x)$ y los valores de frontera, bajo las condiciones de continuidad.

$$c = \begin{pmatrix} 0.00000512 & 877907 \\ 0.20942927 & 759011 \\ 0.39836341 & 543312 \\ 0.54829854 & 268697 \\ 0.64456432 & 050772 \\ 0.67773467 & 249315 \\ 0.64456432 & 050772 \\ 0.54829854 & 268697 \\ 0.39836341 & 543312 \\ 0.20942927 & 759011 \\ 0.00000512 & 877907 \end{pmatrix}$$

Proceso

En esta etapa se calcula automáticamente lo siguiente:

- Los coeficientes de la función Spline cúbico natural en cada elemento
- Las funciones de la base del espacio de aproximación a partir de una función Spline cúbico natural
- Los coeficientes de la matriz, generados por las formas lineal y bilineal, asociados al par de funciones para la posición ij respectivamente
- La solución del sistema lineal de ecuaciones algebraicas con la matriz banda.

Se puede observar la densidad de los coeficientes de la matriz A , en forma banda en la figura 4.

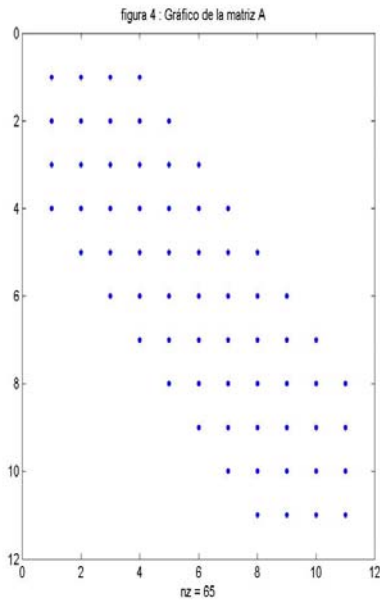


Figura 4.

Postproceso

En esta etapa se codifica los archivos para la presentación de los resultados, mediante la visualización de gráficos y tablas.

Vector c de coeficientes c_i de la supuesta solución aproximada Y_{aprox} , es:

Tabla 1.

x_i	$Y_{aprox}(x_i)$	$Y_{real}(x_i)$
0.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	0.3090214136431546	0.3090169943749474
0.2	0.5877953705023894	0.5877852522924731
0.3	0.8090304766721829	0.8090169943749475
0.4	0.9510726243027534	0.9510565162951535
0.5	1.0000168327470145	1.0000000000000000
0.6	0.9510726243027547	0.9510565162951535
0.7	0.8090304766721800	0.8090169943749475
0.8	0.5877953705023890	0.5877852522924733
0.9	0.3090214136431544	0.3090169943749475
1.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000

Gráficamente el error es presentado en la figura 5.

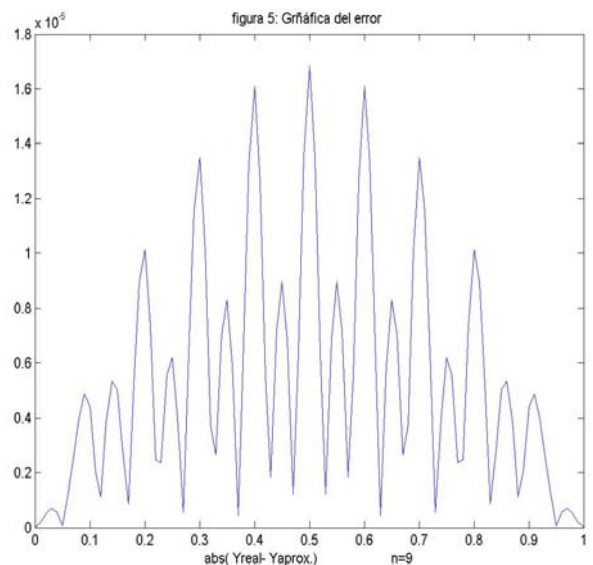


Figura 5.

Se puede apreciar que al variar n ; mejor es la precisión ya que el error se reduce hasta llegar a un punto en que ésta se mantiene casi constante; esto se puede observar en la siguiente gráfica, figura 6, para $n = 9$ y $n = 18$ y $n = 36$.

Tabla 2.

Error = $ Y_{\text{aprox}}(x_i) - Y_{\text{real}}(x_i) $
0.0000000000000000
0.0000044192682072
0.0000101182099163
0.0000134822972354
0.0000161080075999
0.0000168327470145
0.0000161080076012
0.0000134822972325
0.0000101182099157
0.0000044192682069
0.0000000000000000

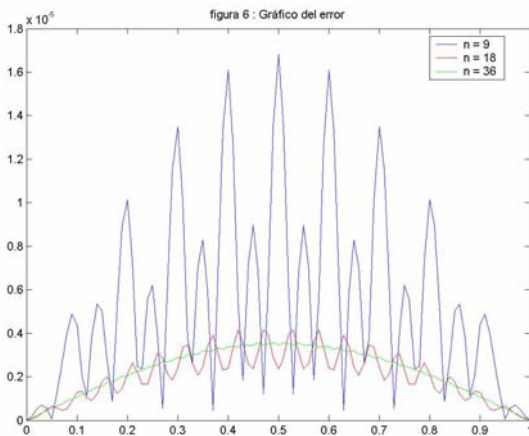


Figura 6.

Para hacer una comparación con el método de elementos finitos de Galerkin lineal, se ha considerado la misma malla sobre $[0,1]$, es decir como nodos los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, tales que, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$

Tomando $h_i = x_{i+1} - x_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, elegimos las funciones de base $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ lineales expresadas por:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1} \\ \frac{(x - x_{i-1})}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$, donde n es el número de particiones, eligiendo las funciones dadas en (18), para las funciones de base, que gráficamente una de ellas, se puede observar en la figura 7.

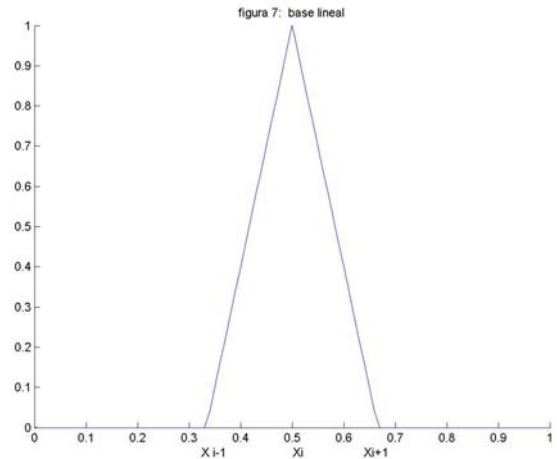


Figura 7.

Para la comparación tomemos $n = 9$; es decir, el mismo tamaño de la malla uniforme con $h = 1/(n+1)$ y $N = 10$ número de nodos; como en el caso utilizado en la aproximación con el Spline cúbico natural. Para el caso lineal dado en (18) y para un $n = 9$; gráficamente se pueden ver el conjunto de funciones de base lineal $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$, en la figura 8

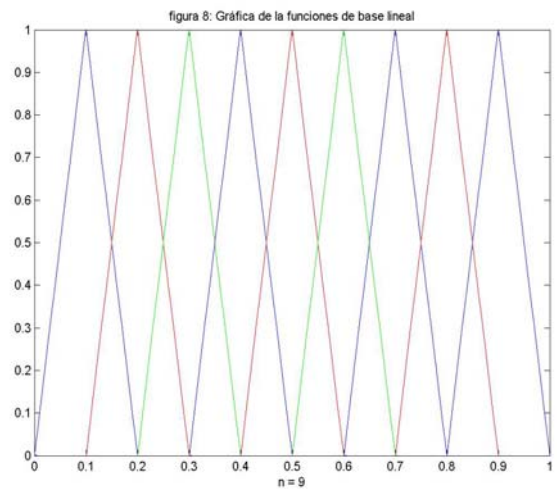


Figura 8.

Note que $\phi_i(x)$ y $\phi_j(x)$ son diferentes de cero solamente para $x_{i-1} \leq x \leq x_{j+1}$; la matriz resultante A , con el espacio de aproximación $V_h = \text{Span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$; es una matriz tridiagonal, como se puede ver es menos densa que con la base descrita anteriormente, se puede observar en la figura 9.

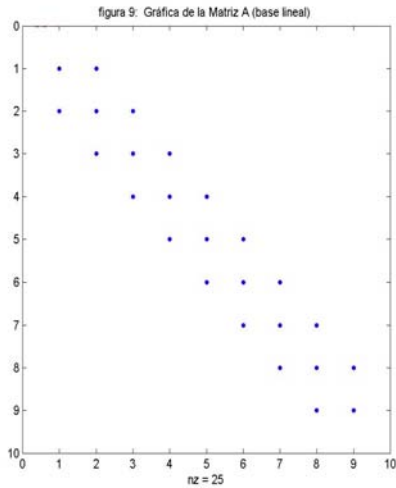


Figura 9.

Tabla 3.

x_i	$Y_{real}(x_i)$	$Y_{aprox}(x_i)$
0.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	0.3102866756144744	0.3090169943749474
0.2	0.5902003295254129	0.5877852522924731
0.3	0.8123410630149075	0.8090169943749475
0.4	0.9549641933435066	0.9510565162951535
0.5	1.0041087748008664	1.0000000000000000
0.6	0.9549641933435069	0.9510565162951535
0.7	0.8123410630149075	0.8090169943749475
0.8	0.5902003295254132	0.5877852522924733
0.9	0.3102866756144752	0.3090169943749475
1.0	0.0000000000000000	0.0000000000000001

Tabla 4.

Error = $ Y_{aprox}(x_i) - Y_{real}(x_i) $
0.0000000000000000
0.0012696812395270
0.0024150772329398
0.0033240686399600
0.0039076770483530
0.0041087748008664
0.0039076770483534
0.0033240686399600
0.0024150772329400
0.0012696812395276
0.0000000000000001

Comparando la solución real o exacta, con la solución aproximada para el caso de $n = 9$, en el caso de una base lineal tenemos una poligonal, ver la figura 10.

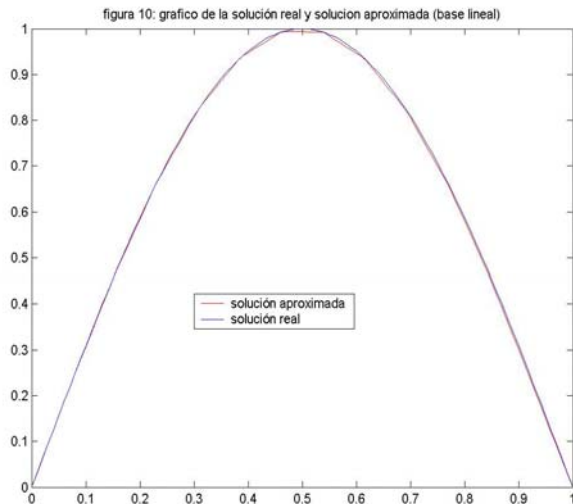


Figura 10.

Cuyo gráfico del error esta dado en la figura 11:

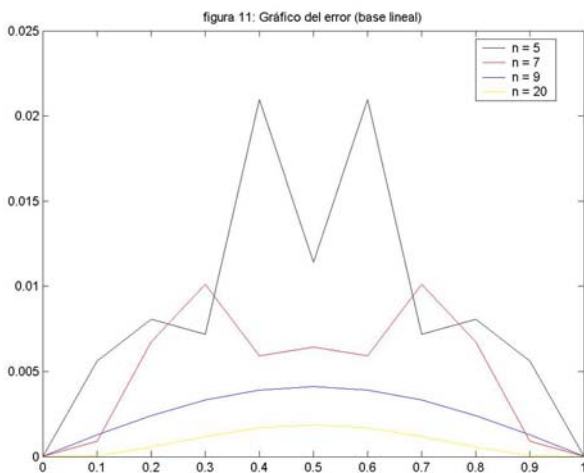


Figura 11.

4. Conclusiones

- Con el Lema de Céa, la estimación del error se ha calculado en ambos casos y nos permite hacer una comparación de la eficiencia del esquema propuesto de solución.
- Si comparamos con las dos bases de aproximación realizadas (aproximación Spline Cúbico natural y lineal respectivamente) sobre el mismo número de elementos, la solución obtenida con el Método de elementos finitos de Galerkin - Spline Cúbico Natural, es mas precisa a la solución real o exacta, que con el método de elementos finitos de Galerkin Lineal. Esto se puede observar mejor en el gráfico del error. Si queremos obtener el mismo error con ambas bases, se requiere hacer un refinamiento en el caso lineal, lo cual no es conveniente por el alto costo computacional del proceso.
- Según las experiencias numéricas realizadas en base a la simulación del problema dado, se puede ver que el método es eficiente para resolver problemas de valores de frontera del tipo homogéneo y es posible aplicar también en el caso no homogéneo.

- En el caso de que no se conozca la solución exacta el grado de aproximación es del orden:

$$\left(\int_0^1 |y(x) - \phi_i(x)| dx \right)^{1/2} = O(h^4)$$

- La ventaja de este método es que con un pequeño refinamiento de la malla, el error disminuye pero al aumentar el refinamiento se observa que el error tiende a un valor constante y muy pequeño.
- Para este problema de prueba, el valor estimado del error está alrededor de 10^{-5} .

-
1. Richard I. Burden, J. Douglas Faires Análisis Numérico, (1985).
 2. Kendal Atkinson, Weimin Han Theoretical Numerical Analysis - A Functional Analysis Framework , Springer (2001).
 3. David Kincaid, Ward cheney. Análisis Numérico – Las Matemáticas del Cálculo Científico, Adisson-Wesley (1994).
 4. O.Axelsson,V.A.Barker. Finite Element solution of boundary value problems - theory and computation, Academic Press Inc.(1984).
 5. Golub, Gene Howard; Ortega James M. Scientific Computing and Differential Equations: An introduction to numerical Methods (1992).