

# Aislamiento de Raíces de Polinomios

William Carlos Echegaray Castillo, Marlene Jenny Soldevilla Olivares  
*Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Ingeniería*  
*E-mail: williemechegaray@yahoo.com.br*

Recibido el 01 de diciembre del 2004, aceptado el 15 de diciembre del 2004

El presente trabajo trata de aislar los ceros de polinomios complejos. Existen muchos algoritmos numéricos eficientes que calculan ceros polinomiales, a partir de regiones iniciales disjuntas donde cada una de ellas contiene un único cero. La obtención de regiones disjuntas es un proceso denominado aislamiento de raíces y está directamente relacionado con la enumeración de ceros en una determinada región del plano complejo, generalmente un rectángulo.

Palabras claves: Raíces de Polinomios, Aislamiento de Raíces.

In this work, the problem of isolating polynomial complex zeros is dealt with. There are many numerical algorithms that compute polynomial zeros efficiently if it is given disjoint regions each containing a single zero. Despite of this, the problem of obtaining such regions is still unsatisfactory. This problem is called root isolating and requires the number of roots in a given region of the plane complex, usually a rectangle.

Keywords: Polynomial Roots, Roots Isolating

## 1. Introduccción

El aislamiento de raíces polinomiales es una herramienta fundamental para que se pueda calcular todas las raíces de un polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (1)$$

donde  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$  y  $a_n \neq 0$ , además, restringiremos los coeficientes a la siguiente forma  $Re(a_i), Im(a_i) \in \mathbb{Q}, \forall i = 0, 1, \dots, n$ .

El resultado de aislamiento es un conjunto de regiones disjuntas, cada una conteniendo una única raíz.

Cuando una región contiene ceros, es preciso contar cuantos ceros existen en esta región, para decidir si la nueva división debe ser hecha o no. Esto implica en la necesidad de contar con algoritmos exactos para contar (enumerar) las raíces de un polinomio en una región.

Disponemos de algoritmos para enumerar las raíces, desarrolladas en [1]. Un aspecto importante que debemos tener presente es la determinación de multiplicidades de las raíces de un polinomio. Los métodos a desarrollar se aplican a polinomios libre de cuadrado, como se vió en [1].

Antes de detallar los métodos, se dará los siguientes resultados que permiten encontrar donde se encuentran todas las raíces.

**Teorema 1** (Cauchy) *Todos los ceros del polinomio (1) están en el interior del círculo*

$$|z| < r_1 = 1 + \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left( \left\{ \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right\} \right) \quad (2)$$

Prueba: Se sabe que  $|p(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i$ ,

$\forall z \in \mathbb{C}$ .

Sea  $M = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left( \left\{ \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right\} \right)$   
 y si  $|z| > 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n||z|^n \left\{ 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| |z|^{i-n} \right\} \\ &\geq |a_n||z|^n \left\{ 1 - M \sum_{i=0}^{n-1} |z|^{i-n} \right\} \\ &= |a_n||z|^n \left\{ 1 - M \sum_{i=1}^n |z|^{-i} \right\} \\ &> |a_n||z|^n \left\{ 1 - M \sum_{i=0}^{\infty} |z|^{-i} \right\} \\ &= |a_n||z|^n \left\{ 1 - \frac{M}{|z| - 1} \right\} \\ &= |a_n||z|^n \left\{ \frac{|z| - 1 - M}{|z| - 1} \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $\left\{ \frac{|z| - 1 - M}{|z| - 1} \right\} \geq 0$  (es decir,  $|z| \geq 1 + M$ ), entonces  $|p(z)| > 0$ , y con esto  $p$  no tiene ceros en  $|z| \geq 1 + M$ , luego los unicos ceros de  $p$  son aquellos que satisfacen (2), es decir,  $p$  tiene ceros en el interior del círculo  $|z| < 1 + M$ .  $\square$

**Teorema 2** (Cauchy) *Todos los ceros del polinomio (1) están en el interior del círculo*

$$|z| < r_2 = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left\{ \left| \frac{na_k}{a_n} \right| \frac{1}{n-k} \right\} \quad (3)$$

Prueba: Vea [2].

**Teorema 3** (Knuth) *Todos los ceros del polinomio (1) están en el interior del círculo*

$$|z| < r_3 = 2 \max_{k=0,1,\dots,n-1} \left\{ \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \frac{1}{n-k} \right\} \quad (4)$$

Prueba: Vea [2].

Sea ahora  $R$  la región rectangular inicial donde se encuentran las raíces de  $p(z)$  que tendrá  $2r$  de lado centrado en el origen, donde

$$r = \lceil \min(\{r_1, r_2, r_3\}) \rceil \quad (5)$$

Esta región es utilizada por los métodos para aislar los ceros de (1) (Pinkert, Wilf y Collins-Krandick) descritos a continuación.

## 2. Método de Pinkert

La herramienta básica usada en el siguiente algoritmo, desarrollado por Pinkert [3], para calcular los ceros polinomiales es la sucesión de Sturm. El Teorema de Sturm aplica esta sucesión para calcular el número de raíces reales de un polinomio real en un intervalo, y el Teorema de Routh aplica estas ideas para los ceros de un polinomio complejo en la parte superior e inferior del plano complejo, desarrollado en [1].

### Ideas Básicas

El objetivo del presente método es aislar las raíces del polinomio dado en (1) en una región cuadrada de lado  $2r$  donde  $r$  es dado por la relación (5). El método presenta dos restricciones:

- (i.) No se puede aplicar el Teorema de Sturm a polinomios que tienen raíces de multiplicidades mayor que uno ( $p$  y  $p'$  tendrían raíces comunes).
- (ii.) El Teorema de Routh puede ser aplicado a polinomios Gaussianos que no tienen raíces reales.

El primer problema puede ser evitado de dos formas;

1. Sí las multiplicidades de las raíces del polinomio Gaussiano  $p$  no son importantes entonces aplicamos el algoritmo para  $p^*(z) = \frac{p(z)}{\text{mdc}(\{p(z), p'(z)\})}$  que es el mayor divisor libre de cuadrados.
2. Sí las multiplicidades de las raíces del polinomio no son necesarias, entonces debemos obtener una factorización libre de cuadrados,  $\{G_1, G_2, \dots, G_r\}$  para  $p(z) = \prod_{v=1}^r G_v(z)$  (vea [1]). Teniendo esta factorización, aplicamos el procedimiento para calcular las raíces para cada  $G_v$  de grado positivo ( $G_v$  libre de cuadrado), notar que las raíces de  $G_v$  son las raíces de  $p$  con sus respectivas multiplicidades.

Para polinomios Gaussianos arbitrarios que también tienen ceros reales pueden ser localizados usando el Teorema de Sturm, juntos con las siguientes observaciones.

Ahora redefinimos nuestro polinomio dado por la ecuación (1) de la siguiente forma:

$$p(z) = \gamma(z) + i\delta(z),$$

donde  $\gamma(z) = \text{Re}(p(z))$  y  $\delta(z) = \text{Im}(p(z))$ . También denotemos la parte simétrica de  $p$  por  $\text{SYMP}(p(z))$  es definida por  $\text{SYMP}(p(z)) = \text{mdc}(\{\gamma(z), \delta(z)\})$ .

**Proposición 1** Sea  $G(z) = \text{SYMP}(p(z))$ .  $\xi_0$  es una raíz real de  $G(z) = 0$  si, y solamente si  $\xi_0$  es una raíz real de  $p$ .

Prueba:

$\implies$  Sí  $\xi_0$  es una raíz real de  $G(z) = 0$ , entonces es una raíz real de  $p(z) = 0$  y como  $\gamma$  y  $\delta$  son reales, se tiene que  $\gamma(\xi_0) = \delta(\xi_0) = 0$ .

$\impliedby$  Sí  $\xi_0$  es una raíz real de  $P(z) = 0$ , entonces se tiene:  
 $p(\xi_0) = \gamma(\xi_0) + i\delta(\xi_0) = 0$   
 $\gamma(\xi_0) = 0$  y  $\delta(\xi_0) = 0$   
 $\gamma(z) = (z - \xi_0)g_1(z)$  y  $\delta(z) = (z - \xi_0)g_2(z)$   
 $G(z) = \text{SYMP}(p(z)) = (z - \xi_0)g_1(z) + i(z - \xi_0)g_2(z)$   
de donde  $\xi_0$  es una raíz de  $G(z) = 0$ .

□

Luego, sí  $p(z) = \gamma(z) + i\delta(z)$  es un polinomio arbitrario, calculamos  $G$  y  $p^*$ , es decir  $G(z) = \text{SYMP}(p(z))$  y también  $p^*(z) = \frac{p(z)}{G(z)} = \frac{\gamma(z)}{G(z)} + i\frac{\delta(z)}{G(z)}$ .  $G$  es un polinomio que se puede aplicar el Teorema de Sturm, es decir, podemos hallar las raíces reales de  $G(z) = 0$ , que serán las mismas raíces para  $p(z) = 0$ . También  $p(z) = \text{mdc}(\{\gamma(z), \delta(z)\})$ .

**Proposición 2**  $p^*$  es un polinomio que Gaussiano que no tiene raíces reales.

Prueba: Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j$  raíces reales de  $p(z) = 0$ , donde  $1 \leq j < n$ .

Como  $\xi_j$ , son las raíces reales de  $G(z) = 0$ , entonces:

$$G(z) = \left( \prod_{i=1}^j (z - \xi_i) \right) g(z)$$

donde  $g$  es un polinomio que tiene raíces complejas, sean  $\xi_{j+1}, \dots, \xi_n$  las raíces complejas de  $p(z) = 0$ , entonces  $p$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$p(z) = a_n \left( \prod_{i=1}^j (z - \xi_i) \right) \left( \prod_{i=j+1}^n (z - \xi_i) \right)$$

como  $p^*(z) = \frac{p(z)}{G(z)}$ , entonces tenemos:

$$p^*(z) = \frac{a_n}{g(z)} \prod_{i=j+1}^n (z - \xi_i)$$

Como  $p^*$  es un polinomio, entonces las raíces de  $g(z) = 0$  son algunas de las raíces  $\xi_{j+1}, \dots, \xi_n$ , esto es,

$$g(z) \Big| \prod_{i=j+1}^n (z - \xi_i).$$

De cualquier modo, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las raíces de  $g(z) = 0$  son  $\xi_l$ , ( $\xi_l$  es la raíz común), donde  $j + 1 < l < n$  y

$$p^*(z) = a_n \prod_{\substack{i=j+1 \\ i \neq l}}^n (z - \xi_i),$$

entonces  $p^*$  no tiene raíces reales.  $\square$

De esta forma, podemos aplicar el Teorema de Routh (ver [1]) a  $p^*$ .

La capacidad de determinar el número de raíces de un polinomio arbitrario Gaussiano encima y debajo del eje real, puede ser extendido para semi-planos horizontales haciendo un traslación del punto  $z = x + iy$  al punto  $z' = x + i(y + y')$ . Otra extensión para semi-planos verticales, puede ser hecho haciendo una rotación del punto  $z = x + iy$  al punto  $z' = \pm i(x + iy)$  y luego aplicar los métodos para semi-planos horizontales.

Para determinar el número de ceros en una faja horizontal  $H$  limitada por las rectas  $\lambda_1 = \nu_1 i$  y  $\lambda_2 = \nu_2 i$ , con  $\nu_1 < \nu_2$ , hacemos lo siguiente:

determinamos el número de ceros en los semiplanos  $\lambda_1$ , sean  $\mu_1$  el número de ceros en el semi-plano superior,

$\tau_1$  el número de ceros en el semi-plano inferior y

$\omega_1$  el número de ceros sobre  $\lambda_1$ ,

de igual forma hacemos para  $\lambda_2$ . Entonces el número de ceros en  $H$  es  $\mu_1 - \omega_2 - \mu_2$  (esto es equivalente a  $\tau_2 - \omega_1 - \tau_1$ ).

**Cuadralización** es un proceso en el cual de un polinomio con raíces  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ , es derivado un segundo polinomio con raíces  $\kappa_1^2, \kappa_2^2, \dots, \kappa_n^2$ . Sea  $q$  un polinomio que no tenga raíces en los ejes y sean  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$  sus ceros, y un segundo polinomio  $q^*$  con raíces  $\kappa_1^2, \kappa_2^2, \dots, \kappa_n^2$ , entonces las raíces de  $q$  en los cuadrantes I y III serían las raíces de  $q^*$  en los cuadrantes I y II y las raíces de  $q$  en los cuadrantes II y IV serían las raíces de  $q^*$  en los cuadrantes III y IV.

Por tanto si  $q$  tiene  $\nu$  raíces en los cuadrantes I y III y  $\eta$  en los cuadrantes II y IV, entonces  $q^*$  tendrá  $\nu$  raíces encima del eje real y  $\eta$  raíces debajo del eje real.

El siguiente Teorema dá un método para la cuadralización.

**Teorema 3** Sea  $p$  el polinomio definido en (1), donde  $n = \text{grad}(p) > 0$ .

Sea  $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i = a_n \prod_{i=0}^n (z - \alpha_i)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ .

Sean  $B(z) = A_1^2(z) - A_2^2(z)$ , donde  $A_1(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ ,

$A_2(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ , y  $q(z^2) = B(z)$ .

Entonces  $q(z) = (-1)^n a_n^2 \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i^2)$ .

Prueba: Se observa que si cambiamos  $-z$  por  $z$  obtenemos:

$$A_1(-z) = A_1(z) \text{ y } A_2(-z) = -A_2(z),$$

de esta forma se tiene:

$$\begin{aligned} B(z) &= A_1^2(z) - A_2^2(z) \\ &= (A_1(z) + A_2(z))(A_1(z) - A_2(z)) \\ &= p(z)(A_1(-z) + A_2(-z)) \\ &= p(z)p(-z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ a_n \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i) \right\} \left\{ a_n \prod_{i=1}^n (-z - \alpha_i) \right\} \\ &= (-1)^n a_n^2 \prod_{i=0}^n (z^2 - \alpha_i^2). \end{aligned}$$

Finalmente tenemos:  $q(z) = (-1)^n a_n^2 \prod_{i=0}^n (z - \alpha_i^2)$ .  $\square$

## Procedimiento para Calcular Raíces

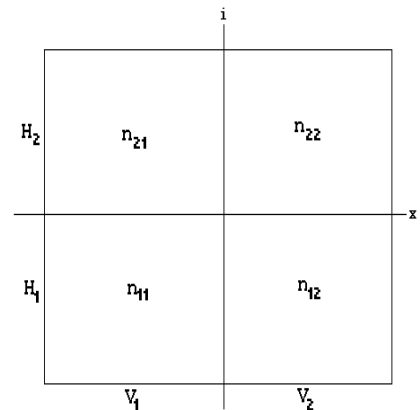
Ahora daremos un pequeño método desarrollado por Pinkert [3] para aislar las raíces de polinomios Gaussianos.

Con  $r$  dado en (5) definimos dos fajas en el plano complejo, una horizontal  $H = \mathbb{R} \times [-r, r]$  y una vertical  $V = [-r, r] \times \mathbb{R}$ . La intersección de  $H$  y  $V$  es el cuadrado  $[-r, r] \times [-r, r]$  donde se encuentran los ceros de  $p$  (que coincide con nuestra región original).

En cada iteración subsiguiente del procedimiento una estructura de la forma general que es mostrada en la figura 1 está presente, donde  $\eta_{kj}$  es el número de raíces de  $p(z) = 0$  en  $H_k \cap V_j$ .

Sí existen  $a$  fajas horizontales y  $b$  fajas verticales,

entonces  $\sum_{k=1}^a \sum_{j=1}^b \eta_{kj} = n = \text{grad}(p(z))$ .



**Figura 1** Primera Bisección del método de Pinkert.

Sí  $0 \leq \eta_{kj} \leq 1$  para  $1 \leq k \leq a$  y  $1 \leq j \leq b$ , entonces las raíces de  $p(z) = 0$  están aisladas. Sí  $\eta_{kj} > 1$  para algún  $k$  o sí los lados de los cuadrados son mayores que la especificada por el usuario, entonces la división de esos cuadrados es necesario. Esta división es hecho por bisección de cada faja horizontal y vertical.

Consideremos, sin pérdida de generalidad, la división de la faja horizontal  $H_1$  de la figura 1, en fajas  $H_{11}$  y  $H_{12}$  como se muestra en la figura 2, donde  $c_{kj}$  es el número de raíces de  $p(z) = 0$  en  $H_{k1} \cap V_j$  y  $d_{kj}$  es el número de raíces de  $p(z) = 0$  en  $H_{k2} \cap V_j$ . De aquí  $c_{kj} + d_{kj} = \eta_{kj}$ .

El número de ceros de  $p(z) = 0$  en  $H_{11}$  y  $H_{12}$  ahora pueden ser calculados. Sí no existen raíces en  $H_{11}$ , entonces  $c_{1j} = 0$  y  $d_{1j} = \eta_{1j}$  y no es necesario hacer otro procedimiento. De forma similar hacemos para  $H_{12}$ .

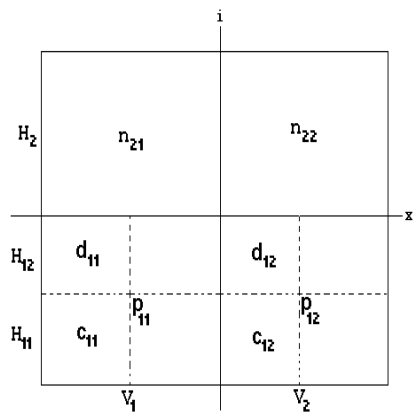


Figura 2 Segunda Bisección del método de Pinkert.

Vamos a suponer que existen raíces en  $H_{11}$  y  $H_{12}$ , como se muestra en la figura 2, entonces establecemos los ejes en el punto  $p_{11}$  y determinamos el número de raíces  $q_{11}$  en el cuadrante III de este sistema de coordenadas. Entonces  $c_{11} = q_{11}$  y  $d_{11} = \eta_{11} - c_{11}$ , ahora movemos los ejes al punto  $p_{12}$  y determinamos el número de raíces  $q_{12}$  en el cuadrante III. Ahora  $c_{12} = q_{12} - c_{11}$  y  $d_{12} = \eta_{12} - c_{12}$ . Podemos seguir este procedimiento para el resto de la faja horizontal  $H_{11}$  y  $H_{12}$ , usando

$$c_{1j} = q_{1j} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{1k} \text{ y } d_{1j} = \eta_{1j} - c_{1j}.$$

Ahora supongamos que la faja  $H_2$  es dividida en dos nuevas fajas  $H_{21}$  y  $H_{22}$  que contienen las raíces de  $p(z) = 0$ , ver figura 3, establecemos los ejes coordenados en el punto  $p_{21}$  y determinamos el número de raíces  $q_{21}$  en el cuadrante III de este sistema de coordenadas. Ahora  $c_{21} = q_{21} - (c_{11} + d_{11})$  y  $d_{21} = \eta_{21} - c_{21}$ ; moviendo los ejes coordenados al punto  $p_{22}$  nos dá  $c_{22} = q_{22} - (c_{21} + c_{11} + d_{11} + c_{12} + d_{12})$  y  $d_{22} = \eta_{22} - c_{22}$ .

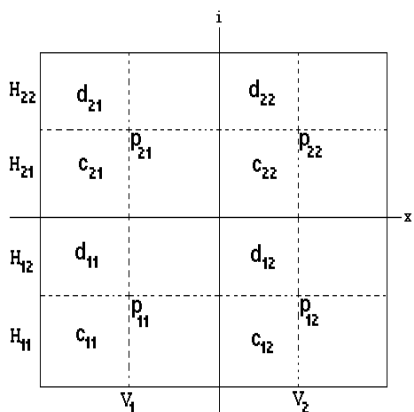


Figura 3 Tercera Bisección del método de Pinkert.

En general, podemos usar:

$$c_{hj} = q_{hj} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{hk} - \sum_{k=1}^j \sum_{p=1}^{h-1} (c_{pk} + d_{pk}),$$

donde  $d_{hj} = \eta_{hj} - c_{hj}$  y procedemos a través de todas las fajas horizontales. Una técnica similar se puede usar para biseccionar las fajas verticales en el plano complejo.

Las iteraciones se pueden repetir hasta que las raíces sean aisladas y refinadas con la longitud (del cuadrado) especificada por el usuario.

### 3. Método de Wilf

Este método también utiliza la sucesión de Sturm para determinar el número de ceros en el interior de un rectángulo (en nuestro caso será un cuadrado). Fué desarrollado por Wilf [4] como método numérico y adaptado por Camargo para computación algébrica [5] que también desarrollo un método para detectar ceros en la frontera del rectángulo. La idea central del método es el uso de la fórmula (4) del Teorema 2.2 de [1] pg. 31, pero con una formulación inteligente para minimizar el número de sucesión de Sturm que serán calculados. Sea  $p$  un polinomio definido en (1) y  $R$  un rectángulo dado de lado  $2r$  centrado en el origen, donde  $r$  está dado por la relación (5), que tiene por vértices  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, (Q_5 = Q_1)$ , ordenados en sentido antihorario conforme a la figura 4, comenzando con  $Q_1 = (-r, r)$ .

En el lado  $k$  de  $R$ , se encuentran  $Q_k, Q_{k+1}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Construimos las sucesiones de Sturm como sigue:

1. Expandir  $p$  como un polinomio alrededor de  $Q_k$ . Cambiamos  $z_k$  por  $t_k = Q_k + i^{k-1}t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . De esta manera, tenemos un polinomio que denotamos por  $\bar{p}_k(t) = p(t_k)$ , siendo  $t_k$  la transformación necesaria para el lado  $k$ ,  $(Q_k Q_{k+1}, k = 1, 2, 3, 4)$ .
2. Sea  $\bar{p}_k(t) = \bar{\gamma}_k(t) + i\bar{\delta}_k(t)$ .
3. Generamos la sucesión de Sturm asociada al lado  $k$ , iniciando con  $f_0(t) = \bar{\gamma}_k(t)$  y  $f_1(t) = \bar{\delta}_k(t)$ .

Ahora hacemos uso de las cuatro sucesiones de Sturm para los cuatro lados del rectángulo, para determinar el número de raíces en su interior. Para la bisección y refinamiento se procede de la siguiente manera:

- i. Se obtiene el centro del rectángulo  $z_c$  (en el caso inicial  $z_c = (0, 0)$ ).
- ii. Se obtiene dos nuevos polinomios por la transformación  $z \rightsquigarrow z + z_c$  y  $z \rightsquigarrow iz + z_c$ , que equivalen a la recta horizontal central, y a la recta vertical central en el eje  $X$  respectivamente.
- iii. Se genera dos nuevas sucesiones de Sturm a partir de los nuevos polinomios construidos en (ii).
- iv. Se obtiene los extremos de cada intervalo de acuerdo con la sucesión de Sturm que está siendo utilizada, para así determinar el número de ceros del nuevo rectángulo investigado.

La figura 4 muestra el rectángulo biseccionado, con los cuatro sub-rectángulos, y los cuatro vértices. Cada lado se encuentra asociado con una sucesión de Sturm básica y serán denotados por  $ST_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  y las dos sucesiones de Sturm adicionales son asociadas con las rectas internas que componen los cuatro sub-rectángulos y lo denotaremos por  $ST_5$ , para la recta horizontal y  $ST_6$  para la recta vertical.

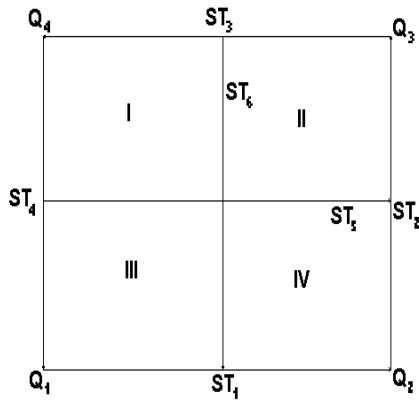


Figura 4 El Rectángulo particionado con las Sucesiones de Sturm.

Tener en cuenta que cada sub-rectángulo es recorrido en el sentido anti-horario y se utiliza una combinación de las cuatro sucesiones de Sturm, a partir de un conjunto de las seis sucesiones de Sturm posibles. De esta manera, para cada lado tenemos:

- I, se usa  $ST_5, ST_6, ST_3, ST_4$
- II, se usa  $ST_5, ST_2, ST_3, ST_6$
- III, se usa  $ST_1, ST_6, ST_5, ST_4$
- IV, se usa  $ST_1, ST_2, ST_5, ST_6$

La determinación del número de ceros de cada sub-rectángulos haciendo uso de la fórmula (7) del Teorema 2.3 de [1] pg. 33 ubicando debidamente los orígenes.

### Ceros en la Frontera del rectángulo

Para detectar si existe o no ceros en la frontera, procedemos de la siguiente forma:

Para detectar cada lado  $k$ , se tiene una sucesión de Sturm asociada. El último término de esta sucesión es, a menos del signo, el máximo común divisor (mdc) de los dos términos iniciales ( $f_0$  y  $f_1$ ), que denotamos por  $h_k$ . Si  $h_k$  fuera una constante, entonces no existen ceros en el lado  $k$ , pero no necesariamente. Si el polinomio original  $p$  tuviera algún cero sobre el lado  $k$ , implica que el polinomio transformado  $\bar{p}_k$  tiene ceros reales en el intervalo  $[\bar{\sigma}, \bar{\beta}]$ , donde  $\bar{0}$  es el origen trasladado.

Si  $p_k$  es complejo, significa que un cero de  $p(z)$  debe ser un cero común de  $f_0$  y  $f_1$ . Como en este caso  $h_k$  no es constante, si  $z^*$  es un cero de  $h_k$  entonces es un cero común de  $\langle \alpha_k \beta_k \rangle$ . Para verificar si  $h_k$  tiene ceros reales, basta utilizar el Teorema de Sturm 2.3 de [1] pg. 32, en este caso iniciamos la sucesión con  $f_0 = H_k$  y  $f_1 = h'_k$ . Si no contiene ceros reales, el procedimiento continua como en el caso en que  $h_k$  es constante. Caso contrario, el lado asociado contiene ceros y el número de ceros de este lado es almacenado en  $b_k$ .

Como es necesario una región sin ceros en su frontera para aplicar la fórmula (7) del Teorema 2.3 de [1] pg. 33, obteniéndose  $\frac{\bar{p}_k}{h_k}$ , para eliminar estos ceros. Hecho esto, la sucesión de Sturm para el lado  $k$  se debe iniciar con

$$f_0 = \frac{\alpha_k}{h_k}, \quad f_1 = \frac{\beta_k}{h_k}.$$

Luego la fórmula (7) del Teorema 2.3 de [1] pg. 33 se convierte en:

$$N = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (V(l_k) - V(0)) - \sum_{k=1}^4 b_k \quad (6)$$

donde  $b_k$  es el número de ceros sobre el lado  $k$ .

**Ejemplo 1** Analizaremos el ejemplo (2.3) pg. 37 presentado en [1]

$$p(z) = z^5 + 2z^3 + (3+i)z^2 + (-63+i).$$

Sabemos que por el análisis realizado en [1] pg. 38, se tiene que las raíces se encuentran una en el primer cuadrante, una en el segundo cuadrante, una en el tercer cuadrante y dos en el cuarto cuadrante. Según (5)  $r = 4$ , entonces nuestra región donde están los ceros es el cuadrado de lado  $2r$  centrado en el origen. Vamos a biseccionar el cuadrado hasta obtener cuadraditos de lado  $l = \frac{1}{4}$  o menor. Hacemos la bisección en cada cuadrante y obtenemos nuevos cuadrados de lado  $l = 2$ .

Se observa que el cuadrado (ver figura 5) donde se encuentran las raíces  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  son vecinos, igual sucede con  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$ ; lo mismo con  $\kappa_3$  y  $\kappa_4$  y también  $\kappa_4$  y  $\kappa_5$ . Volvemos a biseccionar sólo aquellos cuadrados donde se encuentran las raíces (ver figura 6) y observamos que estas nuevas regiones son ahora disjuntas con lado  $l = 1$ , pero no es el tamaño deseado, por tanto continuamos con el proceso, y finalmente obtenemos que las raíces quedan en los cuadrados como se indica en la figura, observar que las coordenadas de los vértices de los cuadraditos finales están dados en números racionales, esto nos permite hacer uso de la aritmética exacta.

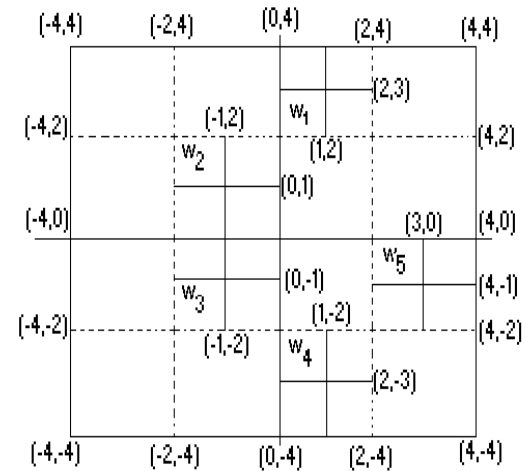
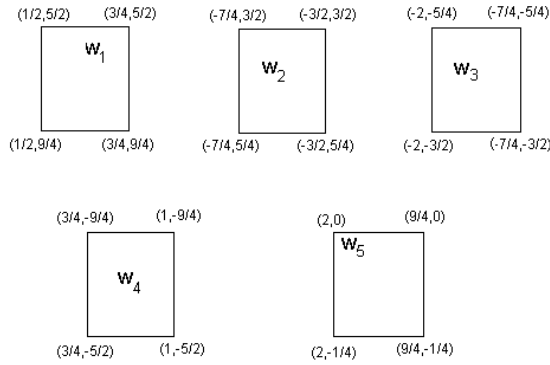


Figura 5 Biseccionamiento sucesivo del cuadrado.



**Figura 6** Cuadrado final deseado con  $l = \frac{1}{4}$ , donde se encuentran las raíces de  $p(z)$  después de hacer las bisecciones sucesivamente.

#### 4. Método de Collins-Krandick

Este método utiliza el principio del argumento de forma directa para determinar el número de raíces de un polinomio complejo  $p$  de la forma (1) en una región  $R$  rectangular, es decir, es igual al número de vueltas que la curva  $p(\text{front}(R))$  pasa alrededor del origen. En general la región  $R$  es cualquier curva de Jordan simple cerrada.

Otra forma de contar los cambios en  $\text{Arg}(z)$  cuando  $z$  recorre  $\text{front}(R)$  es por la determinación de la sucesión de cuadrantes recorridos por  $p(z)$  cuando  $z$  recorre la  $\text{front}(R)$ . Partiendo de un punto  $z_0 \in \text{front}(R)$ , se verifica los cambios de cuadrantes de  $p(z)$  cuando  $z$  recorre la  $\text{front}(R)$  [6].

Los cambios de cuadrantes ocurren siempre en puntos del eje real  $X$  y en los puntos del eje imaginario  $Y$  (estos puntos son llamados puntos críticos).

Cuando la imagen de un lado del rectángulo queda totalmente sobre un eje, se tiene una línea axial.

La determinación del número de vueltas que la imagen de  $p(z)$  dá alrededor del origen puede ser hecha al acumularse los cambios de  $\text{Arg}(p(z))$  de  $p(\text{front}(R))$  en unidades de  $\frac{\pi}{4}$  (un cuadrante) y dividido por  $2\pi$  (una vuelta completa).

Considerando que  $z$  recorre  $\text{front}(R)$  en sentido anti-horario, los cambios de cuadrante de  $p(z)$  en el mismo sentido son calculados positivamente y los cambios de cuadrante en sentido horario son calculadas negativamente.

Sí la curva de la imagen  $p(z)$  pasa por el origen, significa que existen ceros en la  $\text{front}(R)$ . En este caso, se tiene una ambigüedad cuando ocurre cambio del argumento. Es preciso entonces decidir el camino que irá recorrer. Sí la curva del imagen tuviera un trecho que pasa del tercer cuadrante al primer cuadrante, existen dos caminos posibles: en sentido horario ( $III, II, I$ ), o en sentido anti-horario ( $III, IV, I$ ). Esto se puede traducir de la siguiente forma: el camino en el sentido anti-horario es para el caso de la raíz de una frontera que debe ser considerada en la cuenta total de ceros dentro del rectángulo, y el camino en sentido horario es para el caso de la raíz de una frontera que no es considerada.

#### Conteo de los Cambios de Cuadrantes

Para que se pueda determinar los cambios de cuadrantes, es necesario identificar como  $p(z)$  se comporta alrededor de los puntos críticos. Por cuestiones de simplicidad, se consideró la siguiente equivalencia: una vuelta completa ( $2\pi$ ) es compuesta por cuatro cambios de cuadrantes. Así, un cambio de cuadrante equivale a  $\frac{\pi}{2}$ .

Considerando inicialmente los casos de ambigüedad, se tiene:

- Sí un punto crítico toca uno de los ejes (no el origen) sin cruzarlo, se cuenta 0 en el cambio del argumento. (No hubo cambio de cuadrantes).
- Sí el cambio de cuadrantes ocurre entre dos cuadrantes adyacentes cruzando uno de los ejes (no el origen), se cuenta 1 (en el sentido anti-horario) y -1 (en el sentido horario).
- Sí ocurre un cambio de un cuadrante para una línea axial (no el origen), se cuenta  $\frac{1}{2}$  (en el sentido anti-horario) y  $-\frac{1}{2}$  (en el sentido horario).
- Para un punto crítico que es un lado del rectángulo, cuyas dos líneas incidentes son líneas axiales que no pasan por el origen, se cuenta 0.

Cambios de cuadrantes que generan ambigüedades (pasan por el origen).

Por el principio del Argumento, el número de cambios del argumento obtenida para el caso de contar la raíz en la frontera es mayor por  $2\pi$  que del cambio del Argumento obtenida sin contar la raíz en la frontera. En los casos posibles citados bajo, el primer valor se refiere al caso de contar la raíz en la frontera y el segundo se refiere de no contar la respectiva raíz.

- Cambio de un cuadrante para otro adyacente, cruzando el origen se cuenta 1 ó -3.
- Cambio de un cuadrante para otro opuesto diagonalmente, cruzando el origen, se cuenta 2 ó -2.
- Cambio de un semi-eje negativo para el mismo semi-eje positivo, se cuenta 2 ó -2.
- Cambio de semi-eje para otro semi-eje, (pasando por el origen y girando a la izquierda), se cuenta -1 ó 3.
- Cambio de un semi-eje para otro semi-eje, (pasando por el origen y girando a la derecha), se cuenta 1 ó -3.
- Cambio de un cuadrante para un semi-eje adyacente (pasando por el origen), en sentido anti-horario, se cuenta 4,5 ó 0,5. Sí el cambio fuera en el sentido opuesto, se cuenta 3,5 ó -0,5.
- Cambio de un cuadrante para un semi-eje adyacente (pasando por el origen), en el sentido horario, se cuenta 3,5 ó -0,5. Sí el cambio fuera en el sentido opuesto, se cuenta 4,5 ó 0,5.

- Cambio de un cuadrante para el segundo semi-eje no adyacente, llenando en el sentido anti-horario, se cuenta 2,5 ó -1,5. Si el cambio fuera en el sentido opuesto, se cuenta 1,5 ó -2,5.

El número total de ceros es dado entonces al acumularse los valores obtenidos para cada punto crítico, dividido por 4. La forma de obtener estos puntos críticos es a través del método para aislar raíces reales.

Teniendo establecido el proceso de enumeración en rectángulos arbitrarios, entonces el proceso de aislamiento queda de la siguiente manera:

A partir de la determinación de  $r$  dada por (5) para el módulo de las raíces, se genera un cuadrado inicial con centro en el origen de lado  $2r$ , conteniendo todos los ceros de  $p$ . Usando el método para enumerar raíces descrita en [1], todas las raíces de  $p(z) = 0$  pueden ser aisladas por biseccionamiento de la región, alternadamente por una línea vertical y una línea horizontal (ver [6]). Para cada región sub-dividida, se cuenta el número de ceros para las dos mitades. Regiones que no contienen ceros son descartadas. Regiones con un cero y lados menor que el mínimo especificado por el usuario son incluidas en una lista de regiones aisladas. Regiones con más de un cero se deben particionar hasta que se obtenga regiones aisladas del tamaño deseado.

Dado el polinomio por (1), obtenemos la representación siguiente:

$$p(z) = \gamma(z) + i\delta(z) = \gamma(x, y) + i\delta(x, y).$$

Considerando  $R$  un rectángulo cualquiera, se establece la esquina inferior izquierda como punto de partida. En principio, podría ser cualquier otro vértice del rectángulo. Partiendo desde este punto y recorriendo el rectángulo en el sentido anti-horario, los respectivos lados son denominados por L1, L2, L3 y L4.

Para cada lado, se ejecuta los siguientes pasos:

#### ▪ Especialización

Sea  $(b_0, b_1)$  los puntos que delimitan un lado de un rectángulo. Si L1 ó L3 tienen la coordenada  $y = s$  fija, se tiene  $\hat{\gamma}(x) = \gamma(x, s)$ ,  $\hat{\delta}(x) = \delta(x, s)$ . Si L2 ó L4 tienen la coordenada  $x = s$  fija, se tiene  $\hat{\gamma}(y) = \gamma(s, y)$ ,  $\hat{\delta}(y) = \delta(s, y)$ .

#### ▪ Localización de puntos críticos

Los puntos críticos son determinados localizando los ceros de  $\hat{\gamma}$  y  $\hat{\delta}$ .

Los polinomios  $\hat{\gamma}$  y  $\hat{\delta}$  son factores de la forma libre de cuadrados, de esta forma, se sabe que cada polinomio tiene raíces simples y el método de variación de signo puede ser usado. A los intervalos resultantes de la aplicación de este sub-algoritmo deben ser asociados a los respectivos polinomios. Intervalos aislados que se refieren a diferentes polinomios deben ser refinados hasta que sean disjuntos. Los intervalos asociados a  $\hat{\gamma}$  y  $\hat{\delta}$  son ordenados en forma creciente para los lados L1 y L2, en forma decreciente para los lados L3 y L4. Esto es hecho para mantener el sentido anti-horario.

#### ▪ Clasificación de los puntos críticos

En el proceso de determinación de los puntos críticos, se obtienen intervalos aislados, en los cuales están contenidos los puntos críticos. Eventualmente estos intervalos, pueden ser un punto, teniéndose en este caso un punto crítico.

La clasificación de un punto crítico consiste en determinar el comportamiento de la imagen de  $p(z)$  en la vecindad de este punto crítico. Si ningún polinomio es idénticamente nulo, y si el punto crítico no estuviera en la frontera del rectángulo, entonces los cambios de cuadrantes pueden ser obtenidas por la simple verificación de las multiplicidades obtenidas en el proceso de factorización libre para cada polinomio especificado.

Cuando no existe cero en la frontera, el conteo se hace de la siguiente manera:

Multiplicidades par se cuenta 0. Multiplicidades impar, se cuenta 1. Cuando existen ceros aislados, las ambigüedades son identificadas cuando un intervalo aislado pertenece a  $\hat{\gamma}$  y  $\hat{\delta}$  simultáneamente. Los diferentes conteos serán expresadas en primer lugar para el caso de conteos de ceros en la frontera y en segundo lugar para el caso no contar ceros en la frontera.

Si la multiplicidad es par: se cuenta 1 ó -3.

Si la multiplicidad es impar: se cuenta 2 ó -2.

Para los casos en que uno de los polinomios es idénticamente nulo, o el punto crítico es un punto, se verifica los cambios de cuadrantes, de acuerdo con los casos identificados en (4.1).

Para identificar si el conteo es hecho en sentido horario o anti-horario, se define el cuadrante inicial, a través de la evaluación de  $\hat{\gamma}$  y  $\hat{\delta}$  en  $q1$ .

A partir de ahí, se almacena los cuadrantes recorridos, se puede verificar el cuadrante actual y determinar el cuadrante siguiente. Esto puede ser hecho considerándose que, si el intervalo aislado pertenece al polinomio  $\hat{\gamma}$ , entonces ocurrirá un cruzamiento en el eje Y, y si pertenece a  $\hat{\delta}$ , el cruzamiento será en el eje X.

Teniendo el número de ceros de un rectángulo, si este fuera menor o igual a 1, entonces se acaba la búsqueda. Caso contrario, el mismo debe ser particionado y los pasos de arriba se deben repetir.

Los ceros que están en la frontera deben ser contados solamente en un rectángulo. Tal condición puede ser garantizada se contamos los ceros solamente en las líneas superior y derecha del rectángulo, y solamente en las esquinas incidentes de estas líneas de cada rectángulo.

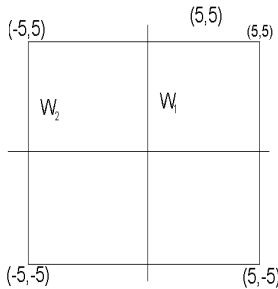
Para cada partición realizada, solamente para esta nueva línea divisoria es necesario la determinación de los puntos críticos.

Además de eso, para cada lado particionado es necesario verificar si el punto de intersección resultante no está contenido en algún intervalo aislado para alguno de los polinomios asociados de aquel lado.

**Ejemplo 2** Sea el polinomio:

$$p(z) = z^2 + (1 - 2i)z - 3 - i,$$

ahora aplicamos la relación (5) con lo cual tenemos  $r = 5$ , y así obtenemos la región rectangular  $R$  de lado  $2r$  centrado en el origen (ver figura 7) tiene las raíces de  $p$ .



**Figura 7** Región de lado  $r = 5$  donde se encuentran los ceros de  $p(z)$ .

Hacemos la transformación hecha por Collins-Krandick  $z \leftarrow x + iy$  obteniéndose

$$\begin{aligned} p(x + iy) &= (x + iy)^2 + (1 - 2i)(x + iy) - 3 - i \\ &= \gamma(x, y) + i\delta(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donde } \gamma(x, y) &= x^2 - y^2 - x + 2y - 3, \\ \delta(x, y) &= 2xy - 2x + y - 1. \end{aligned}$$

Observamos que en los vértices se tienen los siguientes valores para  $p(z)$ :  $p(5, 5) = 2 + 44i$ ,  $p(-5, 5) = 12 - 36i$ ,  $p(-5, -5) = -8 + 54i$ ,  $p(5, -5) = -18 - 66i$ .

Comenzamos con el rectángulo que tiene como vértices  $(-5, -5)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(0, 5)$  y  $(-5, 5)$  que llamaremos la región  $R_1$  y cuyos valores en  $p(z)$  son:  $p(-5, -5) = -8 + 54i$ ,  $p(0, -5) = -38 - 6i$ ,  $p(0, 5) = -18 + 4i$  y  $p(-5, 5) = 12 - 36i$ .

Hacemos la especialización de este rectángulo e iniciamos con el lado cuyo vértice es  $(-5, -5)$  y continuamos en el sentido anti-horario.

- (1) Aquí hacemos  $y = s = -5$  y  $x \in \langle -5, 0 \rangle$  y obtenemos los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(x) &= \gamma(x, -5) = x^2 - x - 38 \\ \bar{\delta}(x) &= \delta(x, -5) = -12x - 6 \end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{153}}{2}$  y  $x = -\frac{1}{2}$  respectivamente.

- (2) Aquí hacemos  $x = s = 0$  y  $y \in \langle -5, 5 \rangle$  y obtenemos los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(y) &= \gamma(0, y) = -y^2 + 2y - 3 \\ \bar{\delta}(y) &= \delta(0, y) = y - 1 \end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $y = 1 \pm \sqrt{2}i$  e  $y = 1$  respectivamente.

- (3) Aquí hacemos  $y = s = 5$  y  $x \in \langle -5, 0 \rangle$  de donde  $-5 - x \in \langle -5, 0 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(-5 - x) &= \gamma(-5 - x, 0) = x^2 + 11x + 12 \\ \bar{\delta}(-5 - x) &= \delta(-5 - x, 0) = -8x - 36 \end{aligned}$$

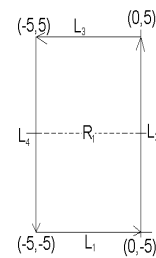
donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $x = -\frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{73}}{2}$  y  $x = -\frac{9}{2}$  respectivamente.

- (4) Aquí hacemos  $x = s = -5$  y  $y \in \langle -5, 5 \rangle$  de donde  $-y \in \langle -5, 5 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

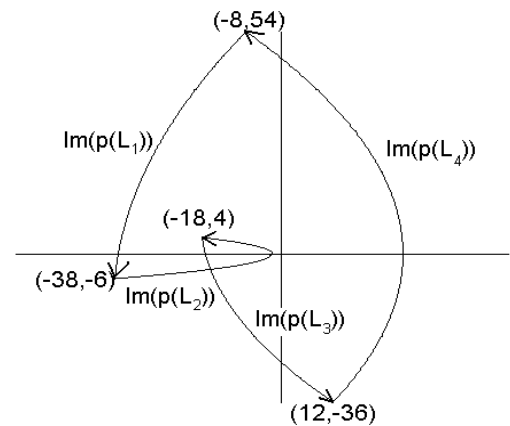
$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(-y) &= \gamma(-5, -y) = -y^2 - 2y + 27 \\ \bar{\delta}(-y) &= \delta(-5, -y) = 9y + 9 \end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $y = 1 \pm \sqrt{28}$  e  $y = -1$  respectivamente.

La imagen de estos polinomios están dados en la figura 8.



Muestra la sub-región  $R_1$  de la región  $R$  (figura 7)



**Figura 8** Imagen de  $p(\text{front}(R_1))$ , denotada por  $\text{Im}(p(R_1))$ .

Hacemos notar que  $\text{Im}(p(R_1))$  contiene el origen, por tanto en la región  $R_1$ , existen ceros de  $p(z)$ : la curva  $\text{Im}(p(L_1))$  tiene un cambio de cuadrantes del segundo al tercero, es decir, la cuenta es 1, la curva  $\text{Im}(p(L_2))$  vuelve del tercero al segundo, entonces se cuenta  $-1$ , la curva  $\text{Im}(p(L_3))$ , va del segundo cuadrante, pasa por el tercero y llega hasta el cuarto cuadrante, entonces contamos 2 y finalmente tenemos la curva  $\text{Im}(p(L_4))$  que va del tercer cuadrante, pasa por el primero y llega hasta el segundo cuadrante, aquí contamos 2, por tanto, la cuenta total es igual a 4, es decir, que en la región  $R_1$  tenemos exactamente una raíz de  $p(z)$ , y como el polinomio es de grado  $n = 2$ , la otra raíz se encuentra en la región  $R_2$ .



Ahora en la región  $R_1$  tomamos la recta horizontal  $x = 0$  y tenemos la sub-región  $R_{11}$  que tiene como vértices los puntos  $(-5, -5)$ ,  $(0, -5)$ ,  $(0, 0)$  y  $(-5, 0)$  y la sub-región  $R_{12}$  tiene como vértices  $(-5, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, 5)$  y  $(-5, 5)$ . Ahora analizamos la región  $R_{11}$  en el sentido anti-horario y hacemos la especialización según Collins-Krandick y obtenemos los siguientes polinomios:

- (1) Aquí hacemos  $y = s = 5$  y  $x \in \langle -5, 0 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(x) &= \gamma(x, 5) = x^2 - x - 38 \\ \bar{\delta}(x) &= \delta(x, 5) = -12x - 6\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{153}}{2}$  y  $x = -\frac{1}{2}$  respectivamente.

- (2) Aquí hacemos  $x = s = 0$  e  $y \in \langle -5, 0 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(y) &= \gamma(0, y) = -y^2 + 2y - 3 \\ \bar{\delta}(y) &= \delta(0, y) = y - 1\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $y = 1 \pm \sqrt{2}i$  e  $y = 1$  respectivamente.

- (3) Aquí hacemos  $y = s = 0$  y  $x \in \langle -5, 0 \rangle$ , de donde  $-5 - x \in \langle -5, 0 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(-5-x) &= \gamma(-5-x, 0) = x^2 + 11x + 27 \\ \bar{\delta}(-5-x) &= \delta(-5-x, 0) = 2x + 9\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $x = -\frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$  y  $x = -\frac{9}{2}$  respectivamente.

- (4) Aquí hacemos  $x = s = -5$  e  $y \in \langle -5, 0 \rangle$  de donde  $-5 - y \in \langle -5, 0 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(-5-y) &= \gamma(-5, -5-y) = -y^2 - 12y - 8 \\ \bar{\delta}(-5-y) &= \delta(-5, -5-y) = 9y + 54\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $y = 6 \pm \sqrt{24}i$  e  $y = -6$  respectivamente.

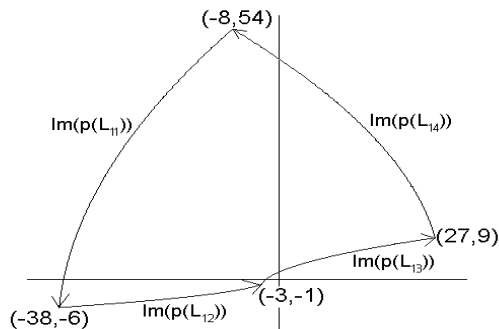


Figura 9 La Imagen de  $p(\text{front}(R_{11}))$ .

Observamos en la figura 9 que la imagen de  $p(\text{front}(R_{11}))$  no contiene el origen, por tanto, esta

región no tiene cero de  $p(z)$ , entonces el cero se encuentra en la región  $R_{12}$ .

De la misma forma analizamos la región  $R_2$ , pero como sabemos que existe una raíz es suficiente investigar una sub-región, entonces sub-dividimos en regiones  $R_{21}$  con vértices  $(0, -5)$ ,  $(5, -5)$ ,  $(5, 0)$  y  $(0, 0)$  y recorremos en sentido anti-horario y la otra región  $R_{22}$  que tiene como vértices  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(5, 5)$  y  $(0, 5)$ , ahora comenzamos con la región  $R_{21}$ :

- (1) Aquí hacemos  $y = s = -5$  y  $x \in \langle 0, 5 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(x) &= \gamma(x, 5) = x^2 - x - 38 \\ \bar{\delta}(x) &= \delta(x, 5) = -12x - 6\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{153}}{2}$  y  $x = -\frac{1}{2}$  respectivamente.

- (2) Aquí hacemos  $x = s = 5$  e  $y \in \langle -5, 0 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(y) &= \gamma(5, y) = -y^2 + 2y + 17 \\ \bar{\delta}(y) &= \delta(5, y) = 11y - 11\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $y = 1 \pm \sqrt{18}i$  e  $y = 1$  respectivamente.

- (3) Aquí hacemos  $y = s = 0$  y  $x \in \langle 0, 5 \rangle$  de donde  $5 - x \in \langle 0, 5 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(5-x) &= \gamma(5-x, 0) = x^2 - 9x + 17 \\ \bar{\delta}(5-x) &= \delta(5-x, 0) = 2x - 11\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $x = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$  y  $x = \frac{11}{2}$  respectivamente.

- (4) Aquí hacemos  $x = s = 0$  e  $y \in \langle -5, 0 \rangle$  de donde  $-5 - y \in \langle -5, 0 \rangle$  obteniéndose los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(-5-y) &= \gamma(0, -5-y) = -y^2 - 12y - 38 \\ \bar{\delta}(-5-y) &= \delta(0, -5-y) = -y - 6\end{aligned}$$

donde los ceros de  $\bar{\gamma}$  y  $\bar{\delta}$  son  $y = -6 \pm \sqrt{2}i$  e  $y = -6$  respectivamente.

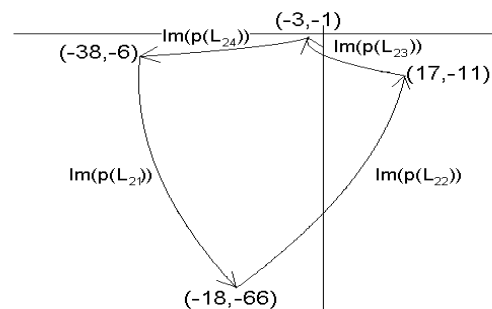


Figura 10 La Imagen de  $p(\text{front}(R_{21}))$ .

Observando en la figura 10 la imagen de  $p(\text{front}(R_{11}))$  no contiene el origen, por tanto no tiene ceros en la región  $R_{21}$ , la raíz se encuentra en la región  $R_{22}$ . Continuamos de esta manera hasta reducir las regiones del tamaño deseado por el usuario.

En resumen tenemos que las raíces se encuentran en la regiones  $R_{11}$  y  $R_{21}$ .

## 5. Conclusiones

Hacemos notar que el algoritmo de Wilf comienza con una región (donde se encuentra todos los ceros de  $p(z)$ ) rectangular inicial de lado  $2r$  centrado en el origen, donde  $r$  está dado por la relación (5), divide en cuatro sub-rectángulos y calcula el número de ceros en cada uno de los nuevos cuadrados donde se encuentran aún ceros, guardando esta información y vuelve al proceso como si fuera un rectángulo original.

El algoritmo de Pinkert es más trabajoso, el método de Pinkert es más histórico que práctico, pues fué el primer método que hacía uso de la aritmética exacta. El rectángulo inicial es el mismo, conociendo la localización de los ceros en cada uno de los cuadrantes,

el método se inicia dividiendo en fajas verticales y horizontales, como es descrito en el presente trabajo. Además, tiene que hacer una traslación del origen para calcular los ceros en el nuevo cuadrante.

El algoritmo de Collins-Krandick es un método que usa exclusivamente el Principio del Argumento para enumerar el número de ceros dentro de una región rectangular  $R$ , es decir, si la imagen de  $p(\text{front}(R)) = \mathcal{C}$  contiene el origen, entonces contendrá por lo menos un cero. El número de vueltas que la curva  $\mathcal{C}$  da alrededor del origen es determinado por el cambio de cuadrantes. Cabe indicar que el algoritmo Collins-Krandick es más ventajoso que el algoritmo de Pinkert.

## Agradecimientos

Agradecemos a REVCUNI, Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI, por el apoyo que brinda y hacer que esta pequeña obra se pueda publicar, también queremos agradecer a todas aquellas personas que de una u otra manera hicieron críticas constructivas al presente trabajo.

- 
1. Echegaray C., William C., Enumeración de Ceros de Polinomios Complejos. Revciuni, Revista de la Facultad de Ciencias de la UNI. pg. 28 Vol. 4 No. (1999).
  2. Davempport, J. H., *Computer Algebra. Systems and Algorithms for Algebraic*. (Academic Press, 1988).
  3. Pinkert, James R., An Exact Method for Finding of Complex Polynomial., Acm Transactions on Mathematic Applied, pg. (351-363) December 1976.
  4. Wilf, H., A Global Bisection Algorithm for Computing the Zeros of Polinomials in the Complex Plane, journal of the ACM, (25)(3) July, 1978, pp 415-420.
  5. Camargo, M. A. O., Trevisan, V. and Caludio, D. M., A symbolic Algorithm to Isolate Complex Polynomial Zeros using Sturm Sequences. Universidade Federal Rio Grande do Sul, January, 1994.
  6. Collins, G. E. and Krandick W., An Efficient Algorithms for infallible Polynomial Complex Root Isolation. Proceeding of issac USA, 1992, pg. 189-194.