Descomposición del valor singular y sus aplicaciones

Marlene J. Soldevilla Olivares[1], *William C. Echegaray Castillo*†

Resumen

El presente trabajo damos algunas propiedades de los valores singulares de una matriz $A \in \mathbb{R}(m, n)$ que son las raíces cuadradas de los valores propios de A^TA, y de esta forma se tiene una relación muy importante entre los valores singulares y los valores propios y así obtener aplicaciones importantes en ingeniería, biología, cálculo variacional, etc.

1. INTRODUCCIÓN

Sabemos que toda matriz $A \in \mathbb{C}(m, n)$ puede ser descompuesta en $A = UDV^*$, donde U y V son matrices unitarias, D es una matriz que posee una submatriz diagonal diagonal. Si $A \in \mathbb{R}(m, n)$, entonces U y V son matrices ortogonales reales.

Vamos a suponer en adelante que $A \in \mathbb{R}(m, n)$. Esta descomposición es llamada *DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR DE A*.

2. EXISTENCIA DE LA DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR

Teorema 2.1. *Sea $A \in \mathbb{R}(m, n)$ una matriz. Entonces existen matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}(m, m)$ y $V \in \mathbb{R}(n, n)$ tales que:*

$$U^TAV = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D_{m\times n}$$

1. Facultad de Ciencias-Universidad Nacional de Ingeniería
† Facultad de Ciencias-Universidad Nacional de Ingeniería

donde D_1 es una matriz diagonal no singular, 0 son matrices nulas. Los elementos de la diagonal de D_1 son no-negativos y estos pueden, sin pérdida de generalidad, ser ordenados en forma no creciente. El número de elementos *en la diagonal de D_1 es igual al $r(A)$ (rango de A).*

Prueba:

Consideremos la matriz $B = A^TA$

$\Rightarrow$ B es una matriz simétrica semidefinida positiva.

$\Rightarrow$ los valores propios de B son no-negativos.

Sean $\lambda_1 = \sigma_1^2, \lambda_2 = \sigma_2^2, \ldots, \lambda_n = \sigma_n^2$ los valores propios de B y supongamos que: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_r > 0$ y $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \ldots = \sigma_n = 0$

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ los vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Como B es simétrica, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal y satisface:

$$
\begin{array}{lrcll}
 & Bv_i & = & \lambda_i v_i & i = 1, 2, \ldots, n \\
\Rightarrow & A^TAv_i & = & \sigma_i^2 v_i & i = 1, 2, \ldots, n \\
\Rightarrow & v_i^T (A^TA)v_i & = & \sigma_i^2 v_i^T v_i & i = 1, 2, \ldots, n \\
\Rightarrow & v_i^T (A^TA)v_i & = & \sigma_i^2 & i = 1, 2, \ldots, n \\
\Rightarrow & v_i^T (A^TA)v_i & = & \sigma_i^2 > 0 & i = 1, 2, \ldots, r \qquad (1) \\
\text{y} & v_i^T (A^TA)v_i & = & 0 & i = r+1, \ldots, n \qquad (2) \\
\text{además} & v_i^T (A^TA)v_j & = & 0 & i, j = 1, 2, \ldots, r;\ i \neq j \qquad (3)
\end{array}
$$

Definamos:

$V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ donde v_i son vectores asociados a λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.
$V_2 = \{v_{r+1}; \ldots ; v_n\}$ donde v_i son vectores asociados a $\lambda_i = 0$, $i = r+1; \ldots\ n$.

Entonces

$$
\begin{array}{lrcll}
 & V_2^T A^T A V_2 & = & V_2^T (A^TA)(v_{r+1}, \ldots, v_n) & \\
 & & = & V_2^T (A^TAv_{r+1}, \ldots, A^TAv_n) & \\
 & & = & V_2^T (0, 0, \ldots, 0) & \\
\Rightarrow & V_2^T A^T A V_2 & = & 0 & \\
\Rightarrow & \| AV_2 \| & = & 0 & \\
\Rightarrow & AV_2 & = & 0 & \\
\Rightarrow & Av_k & = & 0 & k = r+1, \ldots, n \qquad (4)
\end{array}
$$

Definamos $u_i = \dfrac{1}{\sigma_i} Av_i$, i = 1, ... , r (5)

Veamos que $\{u_i\}$, $i = 1, \ldots, r$ es un conjunto ortonormal

$$
\begin{aligned}
u_i^T u_j &= \frac{1}{\sigma_i}(Av_i)^T \frac{1}{\sigma_i}(Av_j) \\
&= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j} v_i(A^TA)v_j \qquad (6) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \text{ por (3)} \\ 1 \text{ si } i = j \text{ por (1)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \{u_i\}$, $i = 1, \ldots, r$ es un conjunto ortonormal.

Definamos $U_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ y elijamos $U_2 = (u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_m)$ tal que $U = (U_1; U_2)$ sea una matriz ortogonal.

Entonces, para cualquier $k > r$, tenemos:

$$\begin{array}{llcll} & u_k^T\,Av_i & = & \sigma_i u_k^T u_i \qquad i = 1, \dots, r & \text{por (5)} \\ & & = & 0 & \text{por (6)} \\ \Rightarrow & u_k^T\,Av_i & = & 0 \qquad i = 1, \dots, r & \\ \text{y} & u_k^T\,Av_i & = & 0 \qquad i = r+1, \dots, n & \text{por (4)} \end{array}$$

Sea $V = (V_1, V_2)$

$$(U^T)\;AV = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m^T \end{pmatrix} A(v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} v_1^T A^T \\ \frac{1}{\sigma_2} v_2^T A^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{\sigma_r} v_r^T A^T \\ u_{r+1}^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m^T \end{pmatrix} A(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = D$$

entonces

$$U^T\;AV = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D_{m \times n}$$

donde $D_1 = diag\,(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}(r, r)$

Veamos que $r(A) = r(D) = r$:

$$\begin{array}{lrcll} \text{Como} & U^T AV & = & D & \\ \Rightarrow & UU^T AV & = & UD & \\ & AV & = & UD & (\,UU^T = I_{m \times m} \text{ ortogonal}\,) \\ \Rightarrow & AV\,V^T & = & UDV^T & \\ \Rightarrow & A & = & UDV^T & (\,V\,V^T = I_{n \times n} \text{ ortogonal}\,) \\ \Rightarrow & r(A) & = & r(UDV^T) = r(D) = r & \end{array}$$

Definición 2.0.1. *Las componentes de la diagonal de la matriz D son llamadas VALORES SINGULARES DE A, los números $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ son llamados valores singulares positivos.*

Definición 2.0.2. *Las columnas de U son llamadas VECTORES SINGULARES POR LA IZQUIERDA DE A y los de V VECTORES SINGULARES POR LA DERECHA DE A.*

2.1 UNICIDAD DE LA DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR

Existen $k = \min(\{m, n\})$ valores singulares de A.

Sea $r = r(A)$

$\Rightarrow\ \exists$ valores singulares positivos.

Sean $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$, ... , $\sigma_r = \sqrt{\lambda_r} > 0$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son los valores propios de A^TA.

Si $r < k \Rightarrow$ los $(k - r)$ valores singulares son ceros (teorema 2.1).

Luego los valores singulares son únicos. Sin embargo los vectores singulares no son únicos.

Ejemplo 2.1.1. *Calcular los valores y vectores singulares de:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Cálculo de Valores Singulares:*

Sea

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 29 \end{pmatrix}$$

Entonces el polinomio característico de B es:

$$\begin{vmatrix} 14 - \lambda & 20 \\ 20 & 29 - \lambda \end{vmatrix} = (14 - \lambda)(29 - \lambda) - 400$$

Luego los ceros del polinomio anterior son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(43 + 5\sqrt{73}) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(43 - 5\sqrt{73})$$

Entonces los valores singulares de A son:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{1}{2}(43 + 5\sqrt{73})} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{1}{2}(43 - 5\sqrt{73})}$$

2. Cálculo de V:

La matriz V_1 compuesta por los vectores propios asociados a los valores propios de $B = A^T A$, en este caso hacemos $V = V_1$, debido a que $r = r(A) = 2$, donde $V_1 = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}(2, 2)$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ son los vectores propios asociados a λ_1, λ_2 respectivamente.

Entonces

$$Bv_i = \lambda_i v_i, \qquad i = 1; 2$$

entonces

$$v_1 = \sqrt{\frac{73 - 3\sqrt{73}}{146}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{73} + 3}{8} \end{pmatrix}, \qquad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{73 + 3\sqrt{73}}{146}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{73} - 3}{8} \end{pmatrix},$$

3. *Cálculo de U = (u₁, u₂, u₃)*

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(43 + 5\sqrt{73})}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{73 + 3\sqrt{73}}{146}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{73} + 3}{8} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \upsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(43 - 5\sqrt{73})}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{73 - 3\sqrt{73}}{146}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{73} + 3}{8} \end{pmatrix}$$

Luego elegimos u_3 tal que $U = (u_1, u_2, u_3)$ sea una matriz ortogonal, es decir,

$$u_1^T u_3 = u_2^T u_3 = 0 \quad \text{y} \quad u_3^T u_3 = 1, \textit{ obteniéndose } \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Así tenemos

$$D = U^T AV = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}(43+5\sqrt{73})} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}(43-5\sqrt{73})} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Notas:

a. Asumiremos en adelante, sin pérdida de generalidad, que $m \geq n$; por que si $m < n$, consideraremos que la *DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR* es para A^T, donde $A^T = UDV^T$, entonces la *DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR* de $A = V D^T U^T$.

b. Asumiremos que los valores singulares son no-crecientes.
Luego $\sigma_{máx} = \sigma_1$ es el mayor valor singular y $\sigma_{mín} = \sigma_r$ es el menor valor singular diferente de cero y denotemos
$vs(A) = \{\sigma \in \mathbb{R}/s$ es un valor singular de $A\}$.

3. RELACIÓN ENTRE LA DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR Y LA DESCOMPOSICIÓN PROPIA

El siguiente teorema prueba como la *DESCOMPOSICIÓN DEL VALOR SINGULAR* de A está relacionada con los valores propios de AA^T y A^TA.

Teorema 3.1. *Sea $A \in \mathbb{R}(m, n)$ una matriz, $A = UDV^T$ la descomposición del valor singular y sea $r = r(A)$. Entonces*

1. $V^T (A^T A)V = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)_{n\times n}$

2. $U^T(AA^T)U = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)_{m\times m}$

Prueba:

Como
$$\begin{aligned} A &= UDV^T \\ \Rightarrow \quad A^TA &= (V D^T U^T)(UDV^T) \\ &= V D^T D V^T \\ \Rightarrow \quad A^TA &= V\tilde{D} V^T \qquad \tilde{D} = D^T D \end{aligned}$$

donde $\tilde{D} = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)_{n\times n}$

luego $\tilde{D} = V^T A^T AV$.

Para
$$\begin{aligned} AA^T &= (U DV^T)(V D^T U^T) \\ &= U DD^T U^T \\ \Rightarrow \quad AA^T &= U\hat{D} U^T \qquad \hat{D} = D^T D \end{aligned}$$

donde $\hat{D} = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)_{m\times m,}$

luego $\hat{D} = U^TAA^TU$.

Del último Teorema se obtiene:

1. Los vectores singulares derechos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vectores propios de $A^T A$.

2. Los vectores singulares izquierdos $u_1; u_2; \ldots ; u_m$ son los vectores propios de AA^T.

3. $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$, son los valores propios de AA^T y $A^T A$.

Ejemplo 3.0.2. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

definamos $B_1 = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad |B_1 - \lambda I| = \lambda^2 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 6$$

Definamos $B_2 = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad |B_2 - \lambda I| = 6\lambda^2 - 6\lambda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, \lambda = 0, \lambda = 6$$

Los valores propios y vectores propios asociados de B_1 son respectivamente:

$$\lambda = 6, \upsilon_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 0, \upsilon_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Los valores propios y vectores propios asociados de B_2 son respectivamente:

$$\lambda = 6, u_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad \lambda = 0, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \quad \lambda = 0, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = UDV^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{6}}{6} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

donde $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Se verifica que: $\quad V A^T AV = diag(6, 0) \in \mathbb{R}(2, 2)$

$\qquad UAA^T U = diag(6, 0; 0) \in \mathbb{R}(3, 3)$.

Corolario 3.0.1. *Sea $A \in \mathbb{R}(n, n)$ una matriz simétrica con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Entonces los valores singulares de A son $\sigma_i = |\lambda_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Prueba:

Como $\qquad A = A^T$

$\Rightarrow \qquad A^T A = A^2$

Del teorema (3.1) tenemos que:

A tiene n valores singulares no-negativos que son las raíces de los n valores propios de A^2.

Debido a que los valores propios de A^2 son $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$

$$\Rightarrow \sigma_1 = |\lambda_1|; \sigma_2 = |\lambda_2|; \ldots ; \sigma_n = |\lambda_n| \qquad \blacksquare$$

Corolario 3.0.2. *Una matriz $A \in \mathbb{R}(n, n)$ es no-singular si, y sólo si todos* los valores singulares son diferentes de cero.

Prueba:

Sabemos que $det(AA^T) = det(A)det(A^T) = det(A)^2$.

Luego A es una matriz no-singular $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$ (valores propios de A), $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n \overset{det(AA^T)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \sigma_i \neq 0$ (valores singulares de A), $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ ■

Teorema 3.2. *Sea $A \in (m, n)$ $(m \geq n)$ y sea $C \in \mathbb{R}(m+n, m+n)$ una matriz definida POR:*

$$C = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^T & 0_{n\times n} \end{pmatrix}$$

Sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ los valores singulares de A. Entonces los valores propios de C son:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = \sigma_1, & \lambda_2 = \sigma_2, & \ldots, & \lambda_n = \sigma_n, \\ \lambda_{n+1} = -\sigma_1, & \lambda_{n+2} = -\sigma_2, & \ldots, & \lambda_{2n} = -\sigma_n, \\ \lambda_{2n+1} = 0, & \lambda_{2n+2} = 0; & \ldots, & \lambda_{m+n} = 0. \end{array}$$

Prueba:

Sea $A = UDV^T$,

donde $U = (U_1, U_2)$, $U_1 \in \mathbb{R}(m, n)$, $U_2 \in \mathbb{R}(m, m-n)$,

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ \tilde{0} \end{pmatrix}, \; D_1 \in \mathbb{R}(n, n),\; \tilde{0} \in \mathbb{R}(m-n, n),\; V \in \mathbb{R}(n, n).$$

Definamos:

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 & -\tilde{U}_1 & U_2 \\ \tilde{V} & \tilde{V} & \tilde{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(m+n, m+n)$$

donde $\tilde{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}U_1$, $\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}V$

$$\Rightarrow \quad P^TCP = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1^T & \tilde{V}^T \\ -\tilde{U}_1^T & \tilde{V}^T \\ \tilde{U}_2^T & \tilde{0}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^T & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 & -\tilde{U}_1 & U_2 \\ \tilde{V} & \tilde{V} & \tilde{0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^TCP = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & -D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $D_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Además:

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, -\sigma_1, -\sigma_2, \ldots, -\sigma_n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m-n}$ son los valores propios de C. ■

Ejemplo 3.0.3. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} 0_{3\times 3} & A \\ A^T & 0_{2\times 2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3+2, 3+2)$$

Usando los resultados del ejemplo (2.1.1) se tiene:

$U = (U_1, U_2)$, $U_1 \in \mathbb{R}(3,2)$, $U_2 \in \mathbb{R}(3,3-2)$, luego

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha\left(\frac{\sqrt{73}+3}{4}\right) & \beta\left(\frac{\sqrt{73}+3}{4}\right) \\ \alpha\left(\frac{3\sqrt{73}+25}{8}\right) & \beta\left(\frac{3\sqrt{73}-25}{8}\right) \\ \alpha\left(\frac{\sqrt{73}+9}{2}\right) & \beta\left(\frac{\sqrt{73}-9}{2}\right) \end{pmatrix}$$

donde $\alpha = \sqrt{\dfrac{73-3\sqrt{73}}{73(43+5\sqrt{73})}}$, $\beta = \sqrt{\dfrac{73+3\sqrt{73}}{73(43-5\sqrt{73})}}$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right) \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \gamma & -\delta \\ \gamma\left(\frac{\sqrt{73}+3}{8}\right) & \delta\left(\frac{\sqrt{73}-3}{8}\right) \end{pmatrix}$$

donde $\gamma = \sqrt{\dfrac{73-3\sqrt{73}}{146}}$, $\delta = \sqrt{\dfrac{73+3\sqrt{73}}{146}}$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} \tilde{U}_1 & -\tilde{U}_1 & U_2 \\ \tilde{V} & \tilde{V} & \tilde{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(5,5) \ \text{donde} \ \tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$P^T C P = diag(t1, t2, -t1, -t2, 0)$$

donde $t1 = \sqrt{\frac{1}{2}(43+5\sqrt{73})}$ *y* $t2 = \sqrt{\frac{1}{2}(43-5\sqrt{73})}$ ■

4. SENSIBILIDAD DEL VALOR SINGULAR

Debido que el cuadrado de los valores singulares de A son justamente los valores propios de la matriz simétrica real $A^T A$ y estudiar la sensibilidad de los valores singulares es estudiar la sensibilidad de los valores propios, entonces veremos esto a través del siguiente:

Teorema 4.1 (Peturbación del Valor Singular). *Consideremos las siguientes matrices A,* $B = A + E \in \mathbb{R}(m, n)$ $(m \geq n)$. *Sean* σ_i *y* $\tilde{\sigma}_i$, $i = 1; 2; \ldots; n$, *respectivamente los valores singulares de A y B, en orden no-decreciente. Entonces* $|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \| E \|_2$ *para todo i; donde* $\| . \|_2$ *indica la norma* 2.

Prueba

Haremos la prueba usando la relación entre los valores singulares de una matriz A y los valores propios de la matriz simétrica.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(m, n)$$

sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ los valores singulares de A diferentes de cero, entonces del teorema (3.2) tenemos que:

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, -\sigma_1, -\sigma_2, \ldots, -\sigma_k$ son los valores propios de $\tilde{A}$ distintos de cero y los otros $m-2k$ valores propios son ceros. Definamos

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E^T & 0 \end{pmatrix}$$

se observa que $\tilde{B} - \tilde{A} = \tilde{E}$.

Entonces volviendo a usar el teorema (3.2) tenemos que los valores propios de $\tilde{B}$ y $\tilde{E}$ están relacionadas con los valores singulares de B y E respectivamente, entonces de acuerdo a un teorema del álgebra lineal tenemos:

$$|\sigma_i - \tilde{\sigma}_i| \leq \|\tilde{E}\|_2 = \|E\|_2$$ ■

Ejemplo 4.0.4. *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 \end{pmatrix}$$

entonces los valores propios de

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 56 & 66 \\ 56 & 69 & 82 \\ 66 & 82 & 98 \end{pmatrix}$$

son:

$$\lambda_1 = 0 \qquad = 0.000000000000000$$

$$\lambda_2 = \frac{213}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{44457} \approx 1.075856655128756$$

$$\lambda_3 = \frac{213}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{44457} \approx 211.92414334487142$$

entonces los valores singulares de A son:

$$\sigma_1 = \sqrt{0} \qquad = 0.000000000000000$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{213}{2} - \frac{1}{1}\sqrt{44457}} \approx 1.03723510118418$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{213}{2} + \frac{1}{1}\sqrt{44457}} \approx 14.55761461726719$$

Sea

$$B = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8.0002 \end{pmatrix}$$

entonces los valores propios de:

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8.0002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8.0002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 56 & 66.0012 \\ 56 & 69 & 82.0014 \\ 66.0012 & 82.0014 & 98.00320004 \end{pmatrix}$$

son:

$$\tilde{\lambda}_1 \approx 0.000000000702 \qquad \tilde{\lambda}_2 \approx 1.075745478674 \qquad \tilde{\lambda}_3 \approx 211.927454560624$$

entonces los valores singulares de B son:

$$\tilde{\sigma}_1 \approx 0.00002649528260$$

$$\tilde{\sigma}_2 \approx 1.03718150710189$$

$$\tilde{\sigma}_3 \approx 14.55772834478732$$

además tenemos que $\|E\|_2 = 0.0002$

luego tenemos:

$$|\tilde{\sigma}_1 - \sigma_1| = 0.0264069522e - 03 < \|E\|_2 = 0.0002$$

$|\tilde{\sigma}_2 - \sigma_2| = 0.0535940823e - 03 < \| E \|_2 = 0.0002$

$|\tilde{\sigma}_3 - \sigma_3| = 0.1137275201e - 03 < \| E \|_2 = 0.0002$ ■

Teorema 4.2. *Sea A, E ∈ $\mathbb{R}(m, n)$, σ_i, $\tilde{\sigma}_i$, i = 1; ... ; n los mismos como en el* teorema (4.1). Entonces

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - \tilde{\sigma}_i)^2} \leq \| E \|_F,$$

donde $\| A \|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2}$ *es llamada la norma de Frobenius.*

Definición 4.0.1. *Sea A ∈ $\mathbb{R}(n, n)$ una matriz no-singular, definimos la Condición de A con respecto a la norma 2, y lo denotamos Cond(A)$_2$, al número.*

$$Cond(A)_2 = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2$$

5. APLICACIONES

La descomposición del valor singular puede ser usado para obtener propiedades muy importantes relacionadas a la estructura de las matrices, tales como la norma Euclideana, bases ortonormales para el espacio nulo, problema de almacenamiento en el computador, entre otras propiedades como veremos en esta sección.

5.1 NORMAS

Teorema 5.1. *Sean $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$ los valores singulares de una matriz A ∈ $\mathbb{R}(m, n)$. Entonces*

1. $\| A \|_2 = \sigma_1 = \sigma_{max}$

2. $\| A \|_F = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 \right)^{1/2}$

3. $\| A^{-1} \|_2 = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\sigma_{min}}$, *cuando A ∈ $\mathbb{R}(n, n)$ y no-singular.*

4. *Si A ∈ $\mathbb{R}(n, n)$ es una matriz no-singular, entonces*

$$Cond_2(A) = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$

Prueba:

1. Sabemos que por el teorema (2.1) existen matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}(m, m)$, $V \in \mathbb{R}(n, n)$ tales que: $U^T A V = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$, donde D_1 es una matriz no-singular, entonces:

$$\| A \|_2 = \| UDV^T \|_2 = \| D \|_2 = \max_i (\{\sigma_i\}) = \sigma_1 = \sigma_{max}$$

2. De acuerdo al teorema (2.1) y la definición de $\| . \|_F$ tenemos:

$$\| A \|_F = \| UDV^T \|_F = \| D \|_F = \left(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \right)^{1/2}$$

3. En este caso $A \in \mathbb{R}(n, n)$ es una matriz no-singular, entonces existe $A^{-1} \in \mathbb{R}(n; n)$ y $\sigma_n = \sigma_{min} > 0$, luego $\frac{1}{\sigma_n}$ es el mayor valor singular de A^{-1} y aplicando el teorema (5.1)(1) tenemos:

$$\| A^{-1} \|_2 = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\sigma_{min}}$$

4. Sabemos que $Cond(A)_2 = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2$, entonces por la parte (1) y (3) del presente teorema tenemos:

$$Cond(A)_2 = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$ ■

Ejemplo 5.1.1. *Sea* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 7.999 \end{pmatrix}$ *cuyo valores singulares son:*

$\sigma_1 = 14.557046000106184607$

$\sigma_2 = 1.037503124456149584$

$\sigma_3 = 0.000132424274849910$

y de acuerdo al teorema (5.1) tenemos:

1. $\|A\|_2 = \sigma_1 = 14.557046000106184607$

2. $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = 14.5939713921865$

3. $\|A^{-1}\|_2 = \dfrac{1}{\sigma_3} = \dfrac{1}{0.000132424274849910} = 7551.48556796174$

4. $Cond(A)_2 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_3} = \dfrac{14.557046000106184607}{0.000132424274849910} = 109927.322781155$ ■

5.2 PROBLEMA DE ALMACENAMIENTO

Cuando se tiene una matriz $A \in \mathbb{R}(m, n)$ de gran tamaño, tenemos el problema de almacenamiento, entonces podemos hacer uso de los vectores singulares por la izquierda y por la derecha respectivamente de A, sabiendo que se tiene r valores singulares positivos y $\sigma_{r+1} = ... = \sigma_n = 0$, y esto nos permite tener $(m+n)$ lugares en la memoria (del computador) en vez de mn; lo cual queda justificado por el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Sean* $A \in \mathbb{R}(m, n)$ *una matriz y* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$ *los* r valores singulares de A. Entonces:

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_r u_j \upsilon_j^T$$

Prueba:

Debido al teorema (2.1) existen matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}(m, m)$ y $V \in \mathbb{R}(n, n)$ tales que: $A = UDV^T$, entonces

$$A = (u_1, u_2, \dots, u_m) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos:

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_r u_j v_j^T$$

teniendo en cuenta que $\sigma_{r+1} = ... = \sigma_n = 0$ ■

Ejemplo 5.2.1. *Sea la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, *cuyos valores singulares son:*

$\sigma_1 = 14.55761461726719$

$\sigma_2 = 1.03723510118419$

$\sigma_3 = 0.00000000000000$

de donde $r = 2$ *y de acuerdo al teorema (2.1) obtenemos:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.46250865 \\ 0.57056873 \\ 0.67862882 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0.78703182 \\ -0.08823069 \\ 0.61057044 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{pmatrix} 0.25000886 \\ 0.48517186 \\ 0.83791637 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \begin{pmatrix} 0.83705046 \\ 0.32667037 \\ -0.43889976 \end{pmatrix}$$

y de esta manera se tiene:

$$\sigma_1 u_1 \upsilon_1^T + \sigma_2 u_2 \upsilon_2^T = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Como observamos no hacemos uso de los vectores u_3 y υ_3. ■

5.3 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

La descomposición del valor singular de una matriz también puede ser utilizada para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$Ax = b$$

donde $A \in \mathbb{R}(m, n)$, $b \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ son dados y $x \in \mathbb{R}^n$ es la incógnita a encontrar; entonces hacemos lo siguiente: descomponemos $A = UDV^T$ y lo reemplazamos en el sistema original obteniendo

$$\begin{aligned} UDV^T x &= b \\ DV^T x &= U^T b \\ Dy &= b^{|} = U^T b \end{aligned}$$

donde $y = V^T x$; ahora simplemente resolvemos la última ecuación que es mucho fácil, donde $D \in \mathrm{R}(m, n)$ es la matriz del teorema (2.1).

6. CONCLUSIONES

Observamos que la descomposición del valor singular de una matriz $A \in \mathbb{R}\ (m; n)$ abrevia el cálculo debido a la propiedad que tiene una matriz simétrica ($A^T A$ en este caso) con sólo calcular los valores propios de $A^{\mathrm{T}} A$ que son no-negativos.

Geométricamente, la descomposición del valor singular de la matriz $A \in \mathbb{R}\ (m, n)$ puede interpretarse como una transformación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto y = A(x) \end{aligned}$$

donde $\| x \|_2 = 1$.

Ejemplo 6.0.1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 0.72 & 1.04 \\ 1.46 & 0.72 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2, 2)$, *en este caso* $m = n = 2$, *entonces los valores singulares de A son:* $\sigma_1 = 2.00$, $\sigma_2 = 0.50$*;*

$$U = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \ y \ V = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} \text{ entonces tenemos:}$$

$$Ax = UDV^T x = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & -0.8 \end{pmatrix} x$$

consideremos $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, *entonces*