L_f - Correspondencias

Eladio Ocaña[1], *Wilfredo Sosa*[†]

Resumen

We described some conditions imposed to the functions for obtaining of the set of minimum points by means of limits of correspondences.

1. PRELIMINARES

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- Denotaremos por epi(f), al epígrafo de la función f, es decir:

$$epi(f) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$$

- Denotaremos por $L_f(\lambda)$, al subnivel de f en el nivel $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir:

$$L_f(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$$

- Denotaremos por $graf(f)$, a la gráfica de la función f, es decir:

$$graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Dado un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$.

- Diremos que K es convexo, si $\forall\, x, y \in K$ y $t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty \in K$.
- Denotaremos por co(K), la cápsula convexa del conjunto K, es decir:

1. CUST, Université Blaise Pascal, Campus des Cézeaux, 63177 Aubiére Cedex, France e Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Perú; eocana@uni.edu.pe
† Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Perú; sosa@uni.edu.pe, *Abril 2004*

$$co(K) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n(x)} \lambda_i x_i : (\lambda_i, x_i) \in \mathbb{R}^+ \times K;\ i = 1, \ldots, n(x);\ \sum_{i=1}^{n(x)} \lambda_i = 1 \right\},$$

para algún $n(x) \in \mathbb{N}$.

Es fácil probar que $co(K)$ es el menor conjunto convexo que contiene al conjunto K, es decir:

$$co(K) := \cap \{H \supset K : H \text{ es convexo}\}$$

- Diremos que K es un cono, si para todo $x \in K$ y $t \geq 0$, $tx \in K$.
- Denotaremos por $int(K)$, al interior del conjunto K, es decir:

  $int(K) := \{x \in K : \text{existe una vecindad } V \text{ de } x \text{ tal que } V \subset K\}$.
- Denotaremos por $cl(K)$, a la clausura del conjunto K.
- Denotaremos por $fron(K)$ a la frontera del conjunto K, es decir:

  $fron(K) := cl(K) \setminus int(K) := \{x \in cl(K) : x \notin int(K)\}$
- Denotaremos por $d(z,K)$ la distancia de z a K, es decir:

$$d(z, K) := inf\{\| z - y\| : y \in K\}.$$

Definición 1.1.- Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f es semicontinua inferior (s.c.i.) sobre $\mathbb{R}^n$ si para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x).$$

Proposición 1.1.- Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:

1. f es s.c.i. en $\mathbb{R}^n$.

2. $epi(f)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

3. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $L_f(\lambda)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Prueba. ver [3].

Definición 1.2.- Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Se dice que f es:

- Convexa sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t \in]0, 1[$, $f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$.
- Cuasiconvexa sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [0, 1]$, $f((1 - t)x + ty) \leq max\{f(x), f(y)\}$.
- Estrictamente Cuasiconvexa sobre $\mathbb{R}^n$ si y solo si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq y)$ y $t \in]0, 1[$,

$$f((1 - t)x + ty) < max\{f(x), f(y)\}.$$

Definición 1.3.- Una correspondencia es una "función" $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, donde a cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ le hace corresponder un subconjunto $F(x) \subset \mathbb{R}^m$.

Definición 1.4.- Dada una correspondencia $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, se define respectivamente el *límite superior* y el *límite inferior* de F en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\limsup_{y \to x} F(y) := \{z \in \mathbb{R}^m : \liminf_{y \to x} d(z, F(y)) = 0\}$$

y

$$\liminf_{y \to x} F(y) := \{z \in \mathbb{R}^m : \lim_{y \to x} d(z, F(y)) = 0\}.$$

Se sigue de la definición, que el *límite superior* y el *límite inferior* son conjuntos cerrados.

Consideremos ahora algunos ejemplos importantes de correspondencias:

Ejemplo. (*Correspondencia Contingente*) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Se define la correspondencia contingente $T_K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como:

$$T_K(x) = \begin{cases} \{v \ \liminf_{h \to 0^+} d(x + hv, K)/h = 0\} & si \ \ x \in cl(K) \\ \emptyset & si \ \ x \notin cl(K) \end{cases}$$

Proposición 1.2.- Sea $x \in cl(K)$. Son equivalentes:

1. $v \in T_K(x)$

2. $\exists\, h_n \to 0^+$ y $\exists\, v_n \to v$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x + h_n v_n \in K$

3. $v \in \limsup_{h \to 0^+} \dfrac{K - x}{h}$

Prueba. $v \in T_K(x) \Leftrightarrow$ (por definición) $\exists\, h_n \to 0^+$ tal que

$$0 = \lim_{n \to \infty} d(x + h_n v, K)/h_n = \lim_{n \to \infty} d\left(v, \frac{K - x}{h_n}\right)$$

Así, $v \in T_K(x) \Leftrightarrow \exists\, h_n \to 0^+, \exists\, h_n \to v$ tal que $v_n \in \dfrac{K - x}{h_n}$.

Ejemplo. (*Correspondencia Tangente de Clarke*) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Se define la correspondencia Tangente de Clarke $C_K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como:

$$C_K(x) := \begin{cases} \{v \ \lim_{h \to 0^+, x^| \to_K x} d(x^| + hv, K)/h = 0\} & si \ \ x \in cl(K) \\ \emptyset & si \ \ x \notin cl(K) \end{cases}$$

Proposición 1.3.- Sea $x \in cl(K)$. Son equivalentes:

1. $v \in C_K(x)$

2. $\forall\, h_n \to 0^+, \forall\, x_n \to_K x, \exists\, v_n \to v$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n + h_n v_n \in K$

3. $v \in \liminf_{h \to 0^+, x^| \to K x} \dfrac{K - x^|}{h}$

Prueba. $v \in C_K(x) \Leftrightarrow$ (por definición) $\forall\, h_n \to 0^+, \forall\, x_n \to_K x$,

$$0 = \lim_{n \to \infty} d(x_n + h_n v, K)/h_n = \lim_{n \to \infty} d(v, \frac{K - x_n}{h_n})$$

Así, $v \in C_K(x) \Leftrightarrow \forall\, h_n \to 0^+, \forall\, x_n \to_K x, \exists\, v_n \to v$ tal que $x_n + v_n h_n \in$ K. ■

Proposición 1.4.- La correspondencia tangente de Clarke es un cono, convexo y cerrado.

Prueba. Sigue inmediatamente de la definición. ■

Proposición 1.5.- Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado y no vacío y sea $x \in K$.

Son equivalentes:

1. $x \in intK$

2. $x \in K$ tal que $C_K(x) = \mathbb{R}^n$.

Prueba. ver [7]. ■

Ejemplo. (*Correspondencia Normal de Clarke*) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Se define la correspondencia normal de Clarke $N_K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ como:

$$N_K(x) := [C_K(x)]^- = \{p \in \mathbb{R}^n : \forall v \in C_K(x)\ , \langle p, v\rangle \le 0\}$$

Proposición 1.6.- La correspondencia normal de Clarke es un cono, convexo y cerrado.

Prueba. Sigue inmediatamente de la definición. ■

Observación. Las correspondencias contingentes, tangentes de Clarke y normal de Clarke vistas anteriormente son una forma de representar en cada punto de su dominio a los conos contingentes, tangente de Clarke y normal de Clarke para un estudio contínuo de estos conos.

Definición 1.5.- (*[8]*) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado y no vacío. Se dice que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es un normal proximal a K en un punto $\bar{x} \in K$ si para $t > 0$ suficientemente pequeño, el único punto de K más próximo *a* $\bar{x} + tv$ (en la norma euclidiana) es $\bar{x}$. Este vector v es un límite proximal normal a K en un punto $\bar{x} \in K$, si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ con $x_n \to \bar{x}$ y existen normales proximales v_n a K en x_n, tal que $v_n \to v$.

Se define la correspondencia proximal como:

$$\hat{N}_K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n \text{ tal que}$$

$$\hat{N}_K(x) := \begin{cases} \{v : v \text{ es limite proximal normal a } K \text{ en } \bar{x}\} & si\ x \in K, \\ \emptyset & si\ x \notin K, \end{cases}$$

Proposición 1.7.- Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado, entonces

$$N_K(x) = clco\,\hat{N}_K(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Prueba. ver [8]. ■

Proposición 1.8.- Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado con frontera no vacía y $x \in fron(K)$, entonces:

$$N_K(x) \underset{\neq}{\supset} \{0\}$$

Prueba. por la Proposición 1.5 $C_K(x) \neq \mathbb{R}^n$. Teniendo en cuenta la Proposición 1.4, se tiene la existencia de un vector $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $H(f, \alpha)$ separa $C_K(x)$ y $\{x\}$. Luego v o - v está en $N_K(x)$.

Es evidente de la definición que $0 \in N_K(x)$. Luego $N_K(x) \underset{\neq}{\supset} \{0\}$. ■

Definición 1.6.- Dada una función $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Definimos la correspondencia de subnivel asociada a f como:

$$L_f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$$

tal que

$$L_f(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : f(y) \leq f(x)\}$$

De esta manera podemos definir las siguientes correspondencias:

$$T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n \text{ tal que : } T(x, y) := \begin{cases} T_{L_f(x)}(y) & si\ \ y \in cl(L_f(x)) \\ \emptyset & si\ \ y \notin cl(L_f(x)) \end{cases}$$

y

$$C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n \text{ tal que : } C(x, y) := \begin{cases} C_{L_f(x)}(y) & si\ \ y \in cl(L_f(x)) \\ \emptyset & si\ \ y \notin cl(L_f(x)) \end{cases}$$

Llamadas (como en los ejemplos anteriores) las correspondencias *Contingente* y *Tangente de Clarke*, respectivamente.

Veamos ahora algunas condiciones suficientes impuestas sobre f de manera que las correspondencias tangentes definidas anteriormente sean iguales.

Proposición 1.9.- Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función cuasiconvexa.

Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$T(x, \bar{x}) = C(x, \bar{x}) = cl\left[\bigcup_{h>0}\left[\frac{L_f(x) - \bar{x}}{h}\right]\right],$$

donde $\bar{x} \in fron(L_f(x))$ (si $fron(L_f(x)) \neq \emptyset$)

Prueba. Primero probaremos que $\bigcup_{h>0}\left[\frac{L_f(x)-\bar{x}}{h}\right] \subset C(x, \bar{x})$.

En efecto:

Sea $v = \frac{y-\bar{x}}{h}$ un elemento de $\bigcup_{h>0} \frac{L_f(x)-\bar{x}}{h}$. Consideremos las sucesiones

$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0^+$ y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to_{L_f} \bar{x}$, entonces

$$v_n = \frac{y-x_n}{h} \to v \quad \& \quad x_n + h_n v_n = \left[\left(1-\frac{h_n}{h}\right)x_n + \frac{h_n}{h}y\right] \in L_f(x)\}$$

(debido a que $L_f(x)$ es convexo). Así $v \in C(x, \bar{x})$.

Ahora como $C(x, \bar{x})$ es un conjunto cerrado, $cl \bigcup_{h>0}\left[\frac{L_f(x)-\bar{x}}{h}\right] \subset C(x, \bar{x})$

De esta manera $cl\left[\bigcup_{h>0}\frac{L_f(x)-\bar{x}}{h}\right] = C(x, \bar{x})$, debido a que siempre

$C(x, \bar{x}) \subset cl\left[\bigcup_{h>0}\frac{L_f(x)-\bar{x}}{h}\right]$.

Proposición 1.10.- Supongamos que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1.

Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$T(x, \bar{x}) = C(x, \bar{x})$$

donde $\bar{x} \in fron(L_f(x))$ (si $fron[L_f(x)] \neq \emptyset$) con $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$

Prueba. Como $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, podemos suponer sin perdida de generalidad, que $\frac{\partial f}{\partial e_n}(\bar{x}) \neq 0$, luego por el teorema de la función implícita, existen abiertos $B = B(\bar{x}^*, \epsilon) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y $I = I(\bar{x}_n) \subset \mathbb{R}$, ($\bar{x}^* = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{n-1})$ y $\bar{x}_n$ es la n-ésima componente de $\bar{x}$) tal que $f^{-1}(f(\bar{x})) \cap [B \times I]$ es el gráfico de una función $\xi: B \to I$ de clase C^1. De esta manera $(y, \xi(y))$ está en la frontera de $L_f(x)$.
Luego $E = epi\xi \cap [B \times I] \subset L_f(x)$ ó $H = (epi\xi)^c \cap [B \times I] \subset L_f(x)$. Por lo tanto los conos tangentes coinciden en los puntos $(y, \xi(y))$ con $y \in B$. ■

Observación:

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Entonces para cada $\bar{x} \in fron(L_f(x))$ tal que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ se tiene lo siguiente:

1. Debido a que $\bar{x} \in fron(L_f(x))$, $\bar{x}$ no es máximo local.

2. Los conos en el punto $(x, \bar{x})$ no siempre coinciden. Para ver esto, tomemos $f(x, y) = x^2 - y^2$ y consideremos los conos en el punto $\overline{(x, y)} = (0, 0) = (x, y)$.

2. APLICACIONES

En lo que continúa de esta sección veremos algunas relaciones existentes entre límites de correspondencia y la correspondencia misma de subniveles asociada a una función s.c.i.

Observación

Si $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es s.c.i, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $L_f(x)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1 $\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$ es un conjunto no vacío $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Mas aún,

$$\bar{x} \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x).$$

Prueba. Sea $x_n \to \bar{x}$ $(x_n \neq \bar{x})$. Debido a que $x_n \in L_f(x_n)$, se tiene que $d(\bar{x}, L_f(x_n)) \leq |\bar{x} - x_n|$. De esta manera $\lim_{n \to +\infty} d(\bar{x}, L_f(x_n)) = 0$.

Luego por definición

$$\bar{x} \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.1.- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup [\ \{+\infty\}$ s.c.i. Si $(x, f(x))$ es un punto de acumulación de la *Graf*(*f*), entonces

$$\liminf L_f(y) \subseteq L_f(x)$$

Prueba. Sea $y \in \liminf_{y \to x} L_f(y)$ entonces, $\forall \{x_n\}_n \to x$, $\exists\, y_n \in L_f(x_n)$ tal que $y_n \to y$. Además como $(x, f(x))$ es un punto de acumulación de la *Graf*(*f*) entonces, existe $(x_n, f(x_n))$ tal que $x_n \to x$ $(x_n \neq x)$ y $f(x_n) \to f(x)$. De esta manera existe $y_n \in F(x_n)$ tal que $y_n \to y$. Ahora debido a la semicontinuidad inferior de *f* en *y*,

$$f(y) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(y_n) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\bar{x}).$$

Así,

$$\liminf L_f(y) \subseteq L_f(x). \qquad \blacksquare$$

Observación

- La condición de ser $(x, f(x))$ un punto de acumulación de la *Graf*(*f*) es esencial, ya que si

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{si } x > 0 \\ -x+1, & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Entonces se tendría que

$$F(0) = \{0\} \cup [\ \frac{3}{2}, +\infty) \ \ \& \ \ \liminf_{x \to 0} F(x) = \{0\} \cup [\ [1,+\infty).$$

Proposición 2.2.- Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. Entonces,

$$L_f(\bar{x}) \cap B(\bar{x}, \in) \subseteq \limsup L_f(x)$$

Para un cierto $\in\ = \ \in (f, \bar{x}) > 0$

Prueba.

1. Supongamos que $\bar{x}$ no es un máximo local y que $w \in F(\bar{x})$, entonces:

(a) $\exists\, (x_n) \to \bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) < f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(b) $f(w) \leq f(\bar{x})$
de (a) y (b), se tiene que $f(w) < f(x_n)$, luego tomando $y_n = w$(ya que $w \in F(x_n)$) se tiene que $w \in \limsup_{x \to \bar{x}} F(x)$.

De esta manera tomamos $\in\ = +\infty$

2. Si $\bar{x}$ es un máximo local de la función *f*, entonces existe $\in\ > 0$ tal que $\forall$ y $\in B(\bar{x}, \in)$ se tiene que $f(y) \leq f(\bar{x})$. Luego $F(\bar{x}) \cap B(\bar{x}, \in) \subseteq \limsup_{x \to \bar{x}} F(x)$.

Teorema 2.1.- Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un mínimo global de *f* si y sólo si

$$\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$$

Prueba.

($\Rightarrow$) Si $w \in \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$ entonces para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \to \bar{x}$ se tiene que $w \in L_f(x_n)$, esto es $\lim_{n \to +\infty} d(w, L_f(x_n)) = 0$, lo cual implica que $w \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

Ahora como $\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) \subset L_f(\bar{x})$ y $L_f(\bar{x}) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} F(y)$, entonces se tiene que $\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) \subset \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$. De esta manera $\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} L_f(y)$

($\Leftarrow$) Se sabe por el Lema 2.1 que $\bar{x} \in \liminf L_f(x)$ entonces, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x})$ ya que $\bar{x}$ pertenece a la intersección. ■

Corolario 2.1.- $\bar{x}$ es mínimo local si y sólo si $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que

$$\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) = \bigcap_{y \in B(\bar{x}, \varepsilon)} L_f(y)$$

Prueba. Similar al caso anterior. ■

Proposición 2.3.- Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s.c.i. Supongamos que existe un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que cumple las condiciones siguientes:

i. $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es un punto de acumulación de *Graf(f)*.

ii. $\bar{x} \in fron[L_f(\bar{x})]$.

Entonces:

$$\bar{x} \in fron\ [\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)]$$

Prueba. Se sabe por el Lema 2.1 que $\bar{x} \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

Ahora supongamos que $\bar{x} \in int[\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)]$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) \subseteq L_f(\bar{x})$. De esta manera $\bar{x} \notin fron[L_f(\bar{x})]$, lo cual contradice la hipótesis. ■

Proposición 2.4.- Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. y estrictamente cuasi-convexa, entonces:

1. Si $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es aislado de la *graf(f)*, entonces $\bar{x}$ es mínimo global.

2. Si $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ es punto de acumulación de la *graf(f)*, entonces

$$\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x) = L_f(\bar{x})$$

Prueba.

1. Por s.c.i. se tiene que existe $B = B(\bar{x}, \delta)$ tal que $\forall_y \in B$, $f(y) > f(\bar{x})$. De esta manera

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < f(\bar{x}) + \epsilon\} \cap B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{x}\}$$

para algún $\epsilon > 0$, $\delta = \delta(\epsilon) > 0$.

Luego por cuasiconvexidad estricta, se tiene que $\bar{x}$ es mínimo global de f.

2. Por la semicontinuidad de f, sólo resta probar que $L_f(\bar{x}) \subset \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

Sea $y \in L_f(\bar{x})$ y $(x_n) \to \bar{x}$ $(x_n \neq \bar{x})$, entonces:

(a) Si $f(y) = f(\bar{x})$, se tiene:

i. si $f(x_n) > f(\bar{x})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $L_f(\bar{x}) \subset L_f(x_n)$. De esta manera tomando $y_n = y$, se tiene que $y \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

ii. si $f(x_n) = f(\bar{x})$, entonces $L_f(\bar{x}) = L_f(x_n)$. De esta manera también tomando $y_n = y$, se tiene que $y \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

iii. si $f(x_n) < f(\bar{x})$, entonces como y no es mínimo, existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$ tal que $f(y_n) < f(y)$. Luego por semicontinuidad inferior, se tiene que

$$f(y) \leq \liminf_n f(y_n) \quad \& \quad f(\bar{x}) \leq \liminf_n f(x_n)$$

es decir existen los límites

$$f(y) = \lim_n f(y_n) = \lim_n f(x_n) = f(\bar{x})$$

De esta manera existen $n, m, p > N$ para todo $N > N_0$ (N_0 prefijado) tal que $f(x_n) < f(y_n) < f(x_p)$, luego $y_n \in L_f(x_n)$.

Por lo que $d(y, L_f(x_n)) \leq d(y, y_n) \to 0$.

Por lo tanto $y \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

(b) Si $f(y) < f(\bar{x})$, entonces repitiendo los procedimientos anteriores sólo probaremos el caso cuando $f(x_n) < f(\bar{x})$.

Por s.c.i. de f se tiene que $f(\bar{x}) = \lim_n f(x_n)$. De esta manera para $n > N$

(con N prefijado) $f(y) < f(x_n) < f(\bar{x})$, de donde $y \in F(x_n)$ para $n > N$.

Tomando $y_n = y$ con $n > N$, se tiene que $y \in \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)$.

Luego de a), b) y teniendo en cuenta la semicontinuidad inferior de f, se tiene que $L_f(\bar{x}) = \liminf_{x \to \bar{x}} L_f(\bar{x})$. ■

Proposición 2.5.- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i y estrictamente cuasiconvexa y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto donde f no alcanza su mínimo. Si para todo $\bar{y} \in fron[\liminf_{x \to \bar{x}} L_f(x)]$ se cumple que

$$[\,\bar{y} - N_{\liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)}(\bar{y})] \cap [\bigcap_{y\in\mathbb{R}^n} L_f(x)] = \emptyset$$

Entonces

$$\bigcap_{y\in\mathbb{R}^n} L_f(x)] = \emptyset$$

Prueba. Si $\bigcap_{y\in\mathbb{R}^n} L_f(x)] \neq \emptyset$, entonces por la cuasiconvexidad estricta, se tiene

$$\bigcap_{y\in\mathbb{R}^n} L_f(x) = \{\xi\} \subset L_f(\bar{x})$$

Ahora como $\bar{x} \in fron[L_f(\bar{x})]$, entonces existe $\bar{y} \in fron[L_f(\bar{x})]$ tal que

$$0 < \| \xi - \bar{y} \| = \min_{y \in fron[L_f(\bar{x})} d(\xi, y) \leq \| \xi - \bar{x} \|.$$

Afirmo que: $v = \bar{y} - \xi \in N_{\liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)}(\bar{y})$

En efecto:

Es fácil ver por la convexidad de $L_f(\bar{x})$ que v es normal proximal a $L_f(\bar{x})$ en $\bar{y}$.

De esta manera, por la Proposición 2.4, se tiene

$$[\,\bar{y} - N_{\liminf_{x\to\bar{x}} L_f(x)}(\bar{y})] \cap [\bigcap_{x\in\mathbb{R}^n} L_f(x)] \neq \emptyset \quad ■$$

3. OBSERVACIONES FINALES

La intruducción de este nuevo enfoque está motivada por el hecho de que los modelos clásicos de optimización matemática no se adaptan para atacar problemas, tales como los que aparecen en la teoría de juegos que simulan la dinámica de mercados. Por lo tanto es necesario diseñar nuevas teorías que llevan analizar estas nuevas clases de problemas. Unas de las cosas que hemos introducido son las correspondencias, más explícitamente las L_f correspondencias. Mas adelante haremos uso de estos resultados teóricos para generar nuevos algoritmos iterativos.

Referencias Bibliográficas

1. A. Auslender, M. Teboulle, Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities, Springer Monographs in Mathematics, 2003.

2. J. P. Aubin and H. Frankowska. Set-Valued Analysis. Birkhäuser, Boston. (1990).

3. H. Brézis. Analyse fonctionnelle. Masson Editeur, de Paris. (1983).

4. J. P. Crouzeix. *Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*. Monogafías del IMCA No. 17 (2000).

5. J. P. Crouzeix, Eladio Ocaña, Wilfredo Sosa *Análisis Convexo*. Monografías del IMCA No. 33 (2003).

6. R.T. Rockafellar *Convex Analysis*, Princeton University Prees, Princeton, New Jersey, 1970.

7. R.T. Rockafellar. *Clarke's Tangent Cones and the Boundaries of Closed Sets in* $\mathbb{R}^n$. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications Vol. 3, No. 1, pp.145-154 (1979).

8. R. T. Rockfellar. *Extensions of Subgradient Calculus with Applications to Optimization*. Nonlinear Analysis Vol. 9, No. 7, pp.665-698 (1985).