VI. Conclusiones

Podemos ver que para una misma ecuación hemos obtenido distintas funciones de Green, y dependiendo de la ecuación algunas no tendrán sentido físico como es el caso de la ecuación de Shrödinger donde la función de Green avanzada no tiene significado físico, porque esta ecuación no describe fenómenos reversibles, pero en la ecuación de Newton y en la de Klein-Gordon la función de Greeen avanzada tiene sentido físico.

Bibliografía

1. A. Kolmogorov, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Moscú. Mir, 1978.
2. G.Arfken, Mathematical Methods for Physicists. Academic Press International, 1967.
3. C. Itzinson, Quantum Field Theory. New York. McGraw-Hill, 1965.

UNA PRUEBA DE UNICIDAD RESPECTO DE LA SECUENCIA DE MULTIPLICADORES GENERADA POR EL MÉTODO LAGRANGEANO AUMENTADO

Yna Consuelo Rezza Espinoza
Facultad de Ingeniería Económica y Ciencias Sociales
Escuela Profesional de Ingeniería Estadística
e-mail: yna_c@yahoo.com

RESUMEN

Este trabajo presenta una demostración de la ***unicidad*** *de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado con Penalidades* $P_i \in \mathrm{P}$. *Esta unicidad ha sido probada a lo largo de los últimos 25 años mediante el uso de la* ***relación de equivalencia*** *existente entre los Métodos Lagrangeano Aumentado y de Punto Proximal. Diversos investigadores tales como Rockafellar [10], Iusem [6]*

y Gonzaga y Castillo [2] probaron esta equivalencia y la consecuente unicidad de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado para casos particulares. La prueba que presentamos incluye todos estos casos y además se distingue por ser directa y ***no hacer uso*** *de la relación de equivalencia antes mencionada.*

1. Introducción

Problemas no lineales de optimización se presentan frecuentemente en muchos campos de aplicación. Uno de los más estudiados es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } f(x) & \quad (\mathrm{I}) \\ \text{s.a. } x \in \overline{S} & \end{array}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa y cerrada, S es abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $\overline{S}$ es su clausura.

Un método muy elegante para resolver este problema es el llamado Método de Punto Proximal. Introducido por Martinet [7] alrededor de los años 70, este opera esencialmente sustituyendo el problema inicial (I) por una sucesión de problemas regularizados (o sea con solución única).

Ya para resolver el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar } f(x) & & (\mathrm{II}) \\ s.a.\ \ g_i(x) \le 0, & i = 1,\dots, m & \\ \quad\ x \in \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para $i = 1,\dots,m$ son funciones convexas y cerradas, existe un método de optimización muy popular, conocido como el Método Lagrangeano Aumentado.

Con relación a estos métodos, Rockafellar [10] demostró en 1976 que el Método Lagrangeano Aumentado Estándar (aplicado al problema (II)) y el de Punto Proximal respectivo (aplicado al problema dual de (II)) pueden ser

vistos como equivalentes. Esto implica inmediatamente la unicidad de la secuencia de multiplicadores $\{\mu^k\}$ generada por el Método Lagrangeano Aumentado Estándar. Otras pruebas de esta equivalencia y la consecuente unicidad de la respectiva secuencia dual, para el caso del Método Lagrangeano Aumentado Exponencial y con Cambio de Variable pueden ser encontradas en [6] y [2] respectivamente.

La prueba de unicidad de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado que presentamos además de incluir todos estos casos, no hace uso de esta conocida relación entre los Métodos Lagrangeano Aumentado y de Punto Proximal.

NOTACIÓN

$\mathbb{R}_+$ Conjunto de números reales no negativos.

$\mathbb{R}_{++}$ Conjunto de números reales positivos.

2. La secuencia de multiplicadores generada por el método lagrangeano aumentado

Definición 2.1 Se dice que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ no idénticamente $+\infty$ es convexa si para todo $(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in (0, 1)$ tenemos:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)x') \le \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(x')$$

considerando esta desigualdad en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definición 2.2 La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice cerrada, si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\text{lím}_{y \to x} \inf f(y) \ge f(x).$$

Consideremos el siguiente problema de optimización convexa:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar } f(x) & & (\hat{P}) \\ s.a.\ g_i \le 0, & i = 1,\dots, m & \\ \quad x \in \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ para $i = 1,\ldots, m$ son funciones convexas y cerradas.

Hipótesis 2.3 Supongamos que el conjunto de soluciones óptimas del problema $(\hat{P})$ es no vacío y limitado.

Definición 2.4 Dado $b > 0$ (posiblemente $+\infty$), denotemos por P a la familia de funciones P: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ o P: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

Si $b = +\infty$ (respectivamente $0 < b < +\infty$)

1. $P(\,.\,,u)$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, estrictamente convexa en $(-b, +\infty)$ y constante en $(-\infty, -b]$.
2. $P(0,u) = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial t}(0, u) = u$
3. $\lim_{t \to -\infty} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t, u) = 0$ y
4. $\lim_{t \to -\infty} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t, u) = +\infty$

para cualquier $u \in \mathbb{R}_{++}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ (respectivamente para cualquier $u \in \mathbb{R}_{+}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$).

Por comodidad de aquí en adelante escribiremos $P'(\,.\,,u)$ en lugar de $\dfrac{\partial P}{\partial t}(\,.\,, u)$, para cualquier $u \in \mathbb{R}_{++}$ ($u \in \mathbb{R}_{+}$ respectivamente).

Observación 2.5 Para cada $u \geq 0$ y $\lambda > 0$ fijos. Considere $P \in$ P y g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa y cerrada. Entonces:

i) $P'(t,u) = P'_u(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
O sea, $P_u = P(\,.\,,u)$ es creciente.

ii) $P\left(\dfrac{g(\,.\,)}{\lambda}\right)(, u) = P_u \circ \dfrac{g}{\lambda}$ es convexa y cerrada.

Además, si $P \in$ P es tal que para cualquier $u > 0$, $P(\,.\,,u)$ es estrictamente convexa (el caso en que $b = +\infty$), entonces P'_u (t) >0, para todo $t \in \mathbb{R}$. O sea, P_u será estrictamente creciente.

Prueba
Ver Observación 2.10 dada en [9].

El Método Lagrangeano Aumentado con Penalidades $P_i \in$ P

Asociada al problema la $(\hat{P})$ definimos L, la función Lagrangeano Aumentado (con penalidades $P_i \in$ P) dada por:

$$x \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}^m, \lambda > 0 \ \to\ L\,\mu, \lambda(x) = L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} P_i\left(\frac{g_i(x)}{\lambda}, \mu_i\right)$$

donde las m funciones P_i : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ (o las m funciones $P_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$) llamadas **penalidades** pertenecerán a la familia P definida antes.

El Método Lagrangeano Aumentado para la optimización convexa intenta aproximar una solución del problema $(\hat{P})$ mediante la secuencia $\{x^k\} \in \mathbb{R}^n$, obtenida al resolver problemas de tipo:

$$\text{minimizar}_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x, \mu^k, \lambda_k) = f(x) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} P_i\left(\frac{g_i(x)}{\lambda_k}, \mu_i^k\right) (\hat{P}_k)$$

donde la actualización de m^k se realiza por la fórmula:

$$\mu_i^{k+1} = \frac{\partial P_i}{\partial y_i}(y_i^{k+1}, \mu_i^k) \ \ e \ \ y_i^{k+1} = \frac{g_i(x^{k+1})}{\lambda_k}$$

para todo $i = 1,\ldots, m$ y para todo $k \in \mathbb{N}$

Un profundo estudio de la formulación de este método (generalización que incluye casi todas las formulaciones existentes en la literatura) puede ser encontrado en [9].

Debido al uso posterior que haremos de las penalidades $P_i \in$ P, las detallaremos. Las dos posibilidades respecto de $b > 0$ (ver Definición 2.4) darán lugar a dos familias la primera de las cuales puede a su vez ser subdividida en dos casos como veremos a continuación.

Penalidad Tipo I ($b = +\infty$)

P_1 es una penalidad Tipo I, si para todo $u \in \mathbb{R}_{++}$ se satisface:

1. $P_1(\, . \,, u)$ es continuamente diferenciable y estrictamente convexa en $\mathbb{R}$,

2. a) $P_1(\, . \,, u)$ es ilimitada o
b) $P_1(\, . \,, u)$ es limitada inferiormente

3. $P_1(0, u) = 0, \quad P_1{}' (0, u) = u$

4. $\text{lím}_{t \to -\infty} P_1{}' (t, u) = 0$ y

5. $\text{lím}_{t \to -\infty} P_1{}' (t, u) = +\infty$

Penalidad Tipo II ($b > 0$ finito)

P_2 es una penalidad Tipo II, si para todo $u \in \mathbb{R}_+$ se satisface:

1. $P_2 (.,u)$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, estrictacmente convexa en $(-b, +\infty)$ y constante en $(-\infty, -b]$.

2. $P_2(0, u) = 0, \quad P_2{}' (0, u) = u$

3. $\text{lím}_{t \to -\infty} P_2{}' (t, u) = 0$ y

4. $\text{lím}_{t \to -\infty} P_2{}' (t, u) = +\infty$

La unicidad de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado

Consideremos el problema $(\hat{P})$ bajo la Hipótesis 2.3. Sea $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ una secuencia generada por el Método Lagrangeano Aumentado con penalidades $P_i \in$ P siguiente:

$$\mu^0 \in \mathbb{R}^m_+ \;\; (\mu^0 \in \mathbb{R}^m_{++}) \tag{2.1}$$

$$x^{k+1} = \text{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \{L(x, \mu^k, \lambda_k)\} \tag{2.2}$$

$$\mu_i^{k+1} = \frac{\partial P_i}{\partial y_i} (y_i^{k+1}, \mu_i^k) \tag{2.3}$$

para todo $i = 1 ,..., m$ y para todo $k \in \mathbb{N}$

donde $\{\lambda_k\}$ es una secuencia limitada de números reales positivos, L es la función Lagrangeano Aumentado con penalidades

$$P_i \in \text{P} \;\text{ e }\; y_i^{k+1} = \frac{g_i(x^{k+1})}{\lambda_k} \;\text{ para }\; i = 1,...,m. \tag{2.4}$$

Afirmación 2.6 La secuencia $\{ x^k \}$ está bien definida.

Prueba
Ver Afirmación 2.26 dada en [9].

A continuación presentamos otra forma de probar la unicidad de la secuencia de multiplicadores $\{\mu^k\}$ generada por el Método L.A. con penalidades $P_i \in$ P.

Lema 2.6 Consideremos el Método L.A. con penalidades $P_i \in$ P, dado por las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.4). En cada iteracción k y para cada $i = 1,...,m$,

μ_i^k es único e y_i^k es único, para penalidades P_i de Tipo I,

μ_i^k es único e y_i^k es único ó $\mu_i^k = 0$ y $y_i^k \leq -b$ para penalidades P_i de Tipo II.

Prueba

Para las penalidades de Tipo II:

i) Si el problema dado en (2.2) tiene mínimo único obviamente y_i^{k+1} y μ_i^{k+1} serán únicos (basta sustituir el punto mínimo en (2.4) y (2.3) respectivamente).

ii) Caso $L_{\mu^k,\ \lambda_k}(.)$ no tenga minimizador único. Sean a^{k+1}, b^{k+1} dos soluciones diferentes del problema dado en (2.2). Denotemos por $y_i^{1,k+1} = \dfrac{g_i(a^{k+1})}{\lambda_k}$, $y_i^{2,k+1} = \dfrac{g_i(b^{k+1})}{\lambda_k}$, para cada $i = 1,\ldots, m$ y comparemos $y_i^{1,k+1}$ con $y_i^{2,k+1}$.

Para $y_i^{1,k+1} < y_i^{2,k+1}$ con i arbitrario fijo. Supongamos que $y_i^{1,k+1} > -b$. Luego para $\alpha \in (0, 1)$ tenemos:

$$P_i(\alpha\ y_i^{1,k+1} + (1-\alpha)\ y_i^{2,k+1},\ \mu_i^k) < \alpha\ P_i(y_i^{1,k+1}, \mu_i^k) + (1-\alpha)\ P_i(y_i^{2,k+1}, \mu_i^k)$$

para aquel i, pues en ese intervalo $P_i(.,\ \mu_i^k)$ es estrictamente convexa. Dado que g_i es, convexa para todos los índices restantes en $\{1,..,m\}$, si hacemos la suma obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i(\alpha y_i^{1,k+1} + (1-\alpha) y_i^{1,k+1}, \mu_i^k) < \alpha \sum_{i=1}^{m} P_i(y_i^{1,k+1}, \mu_i^k) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} P_i(y_i^{2,k+1}, \mu_i^k)$$

multiplicando por λ_k y sumando $\alpha f(a^{k+1}) + (1-\alpha) f(b^{k+1})$ en ambos miembros tenemos:

$$\alpha f(a^{k+1}) + (1-\alpha) f(b^{k+1}) + \lambda_k \sum_{i=1}^{m} P_i(\alpha y_i^{1,k+1} + (1-\alpha)\ y_i^{2,k+1}, \mu_i^k)$$

$$< \alpha\ L(a^{k+1}, \mu^k, \lambda_k) + (1-\alpha)\ L(b^{k+1}, \mu^k, \lambda_k)$$

recordando ahora la convexidad de f, de cada g_i y usando la Observación 2.5, concluimos:

$$L(\overline{x}, \mu^k, \lambda_k) < \alpha L(a^{k+1}, \mu^k, \lambda_k) + (1-\alpha) L(b^{k+1}, \mu^k, \lambda_k) < L(a^{k+1}, \mu^k, \lambda_k)$$

donde $\overline{x} = \alpha\ a^{k+1} + (1-\alpha)\ b^{k+1}$, lo que es una contradicción dado que $L(a^{k+1}, \mu^k, \lambda_k)$ es valor óptimo. Por tanto, $y_i^{1,k+1} \leq -b$, (o sea $y_i^{k+1} \leq b$) de lo que se deduce también que $\mu_i^{k+1} = 0$ pues $P_i^{\prime}(t, u) = 0$ para $t \leq -b$ y $u \geq 0$ fijo.

Si $y_i^{1,k+1} = y_i^{2,k+1}$ para cada $i = 1,\ldots, m$, y_i^{k+1} es único. Luego también μ_i^{k+1} será único.

Para las penalidades de Tipo I:

i) Si el problema dado en (2.2) tiene mínimo único obviamente y_i^{k+1} y μ_i^{k+1} serán únicos (basta sustituir el punto mínimo en (2.4) y (2.3) respectivamente).

ii) Caso $L_{\mu^k,\ \lambda_k}(.)$ no tenga minimizador único. Sean a^{k+1}, b^{k+1} dos soluciones diferentes del problema dado en (2.2). Denotemos por $y_i^{1,k+1} = \dfrac{g_i(a^{k+1})}{\lambda_k}$, $y_i^{2,k+1} = \dfrac{g_i(b^{k+1})}{\lambda_k}$ para cada $i = 1,\ldots,m$ y supongamos que para i arbitrario fijo, $y_i^{1,k+1} \neq y_i^{2,k+1}$. Luego, para $\alpha \in (0, 1)$ tenemos:

$$P_i(\alpha\ y_i^{1,k+1} + (1-\alpha)\ y_i^{2,k+1},\ \mu_i^k) < \alpha\ P_i(y_i^{1,k+1}, \mu_i^k) + (1-\alpha)\ P_i(y_i^{2,k+1}, \mu_i^k)$$

para aquel i, pues en ese intervalo $P_i(.,\ \mu_i^k)$ es estrictamente convexa. Haciendo la suma para obtener L y usando argumentos similares al caso anterior, concluimos que:

$$L(\overline{x}, \mu^k, \lambda_k) < \alpha L(a^{k+1}, \mu^k, \lambda_k) + (1-\alpha)\ L(b^{k+1}, \mu^k, \lambda_k) < L(a^{k+1}, \mu^k, \lambda_k)$$

donde $\overline{x} = \alpha\, a^{k+1} + (1 - \alpha)\, b^{k+1}$, lo que es una contradicción dado que $L(a^{k+1}, \mu^k, \lambda_k)$ es valor óptimo. Por tanto, $y_i^{1,k+1} = y_i^{2,k+1}$ para cada $i = 1,\ldots,m$, de lo que se deduce que es único. Luego también μ_i^{k+1} será único.

Si $y_i^{1,k+1} = y^{2,k+1}$ para cada $i = 1,\ldots,m$, y_i^{k+1} es único. Luego también μ_i^{k+1} será único.

Bibliografía

1. **Bertsekas, D. P.,** Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Method, Academic Press, New York, 1982.
2. **Gonzaga, C. y Castillo, R.**, "Métodos de Lagrangeano Aumentado usando Penalidades Generalizadas para Programação não linear" Tesis, COPPE, UFRJ, 1998.
3. **Hiriart - Urruty J.- Baptiste y Lemaréchal, C.,** Convex Analysis and Minimization Algorithms I, 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1993.
4. **Hiriart - Urruty J.- Baptiste y Lemaréchal, C.**, Convex Analysis and Minimization Algorithms II, 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1993.
5. **Hestenes, M.**, "Multiplier and Gradient Methods", Jota, vol 4, pp. 303-320, 1969.
6. **Iusem, A.,** Métodos de Ponto Proximal em Otimizacao, 20° Coloquio Brasileiro de Matemática , IMPA, R., J., Brasil, 1995.
7. **Martinet, B.**, "Regularisation D'inequations variationnelle par approximations successives", Revue Francaise de Informatiqué et Recherche Opérationelle 2, pp. 154 - 159, 1970.
8. **Powell, M.**, "A method for nonlinear constraints in minimizations problems", Ed., Academic Press, N.Y., pp. 283-298, 1969.
9. **Rezza , Y.**, "Una prueba general de la buena definición del Método Lagrangeano Aumentado", Revciuni, vol. 7, num. 1, pp. 38-57, 2003.
10. **Rockafellar R. T.**, "Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming", Mathematics of Operations Research, vol. 1, pp. 97-116, 1976.

MÉTODO MONTECARLO– METRÓPOLIS EN LA SOLUCIÓN DEL MODELO DE ISING PARA EL FERROMAGNETISMO

*Angel Paredes *, Héctor Loro ***

RESUMEN

Se usa el método Montecarlo-Metrópolis para describir y analizar el comportamiento de un magneto Ising bidimensional partiendo de diferentes configuraciones. Se comprueba que debajo de la temperatura crítica del magneto, $T_c \approx 2{,}3\ J/k_B$, el sistema se mantiene "ordenado" y por encima de esta temperatura, el magneto se "desordena". Cuando se desciende la temperatura se encuentra la presencia de dominios. El tamaño de estos dominios depende de lo rápido que desciende la temperatura.

* ajparedes@uni.edu.pe.
** hloro@uni.edu.pe
Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Ingeniería. Lima –Perú