MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN Y SU APLICACIÓN EN LA FÍSICA

Misael León Hilario - Rosendo Ochoa Jiménez†*
Universidad Nacional de Ingeniería
Grupo de Física Teórica - Facultad de Ciencias

RESUMEN

El método de la función de Green es un aparato matemático muy importante en la física de hoy. Con ayuda de la función de Green, podemos reemplazar las ecuaciones diferenciales por ecuaciones integrales, que es más cómodo para su aplicación en la teoría de las perturbaciones. La expresión para la función de Green depende no solo de la ecuación diferencial sino también de las condiciones iniciales y de contorno. Por eso para una misma ecuación diferencial podemos tener diferentes expresiones para la función de Green. Dando la interpretación física correcta, obtendremos un criterio para escoger la función de Green con la cual podemos resolver la ecuación para un caso dado.

* K19990307@uni.edu.pe
† rochoaj@uni.edu.pe

ABSTRACT

The Green function method is a mathematical tool very important in today physics. With the help of the Green function, we can transform differential equations into integral equations, which are easier to be solved with the application of perturbation theory. The expression of the Green function depends not only on the differential equation but also on the initial and boundary conditions. Therefore, we can obtain dierent expressions of the Green function for the same different equation. By giving the right physical interpretation, we will be able to get a criterion for choosing the Green function with which we can solve the equation for a given case.

I. Introducción

1.1 Funciones Generalizadas

Los conceptos clásicos de función, no son suficientes para su aplicación en la física. Su generalización nos lleva al concepto de funciones generalizadas o de distribución [1]. Conceptos ideales en la física como la densidad de puntos materiales, pueden ser expresados matemáticamente con ayuda de las funciones generalizadas. Para introducir una definición rigurosa de las funciones generalizadas se requiere el concepto de espacio de **funciones de prueba** [1].

Se dice que la función $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, pertenece al conjunto de funciones de prueba D si la sucesión de funciones $\{\varphi_i\}$ de D converge a la función $\varphi \in D$ dentro de una región que pertenece a $\mathbf{R}^n$, y fuera de ella las funciones $\{\varphi_i\}$ son iguales a cero, y además las sucesiones de sus derivadas de orden k que convergen uniformemente en esta región, son continuas.

Sea f una función dada, definida sobre la recta e integrable en cada intervalo finito y sea φ una función que pertenece a D tal que a cada función φ

de este tipo se le puede poner en correspondencia un número, mediante la función *f*, que va definir la funcional [1]:

$$\hat{f}\,[\varphi] \equiv (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \tag{1}$$

Las funciones generalizadas determinadas por funciones integrables según la formula (1) se llaman funciones generalizadas regulares.

Por ejemplo, consideremos la función $\frac{1}{x}$. Ella no es integrable en ningún intervalo que contenga el punto cero, sin embargo para cada φ que pertenece a *D*, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\frac{1}{x}\,dx$$

existe y es finita en el sentido del valor principal. En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \int_{a}^{b} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{a}^{b} \frac{\varphi(0)}{x}dx$$

Aquí (a, b) es el intervalo fuera del cual φ se anula. En la primera de estas integrales bajo el signo de la integral aparece una función acotada, mientras que la segunda integral, comprendida en el sentido del valor principal, es finita. De esta forma $\frac{1}{x}$ es una funcional sobre *D*, por tanto, una función generalizada.

Ahora construiremos funcionales lineales que no se obtiene de funciones como el caso anterior. Consideremos la siguiente sucesión de funciones $\{f_n\}$, que definen las funcionales $\hat{f}_n$. Sea que la sucesión $\{\hat{f}_n(\varphi)\}$ converge a un número finito, que vamos a denotar como $\hat{f}(\varphi)$. Por ejemplo el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

existe y es igual a 0, para todo $x \in \mathbf{R}$. También se da el caso cuando la sucesión $\{\hat{f}_n(\varphi)\}$ converge pero no converge la sucesión $\{f_n\}$. Por ejemplo el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n x^2}$$

es igual a cero para *x* diferente de cero e igual a ∞ para *x* igual a cero, pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n x^2}dx = 1$$

Entonces se dice que la sucesión $\{f_n\}$ converge débilmente a *f* (convergencia débil [1]). En el caso que la sucesión $\{f_n\}$ diverja, la función *f* no existe, pero la funcional $\hat{f}(\varphi)$ podría existir. Podemos decir que la sucesión de funciones generalizadas regulares f_n tiende a una función generalizada singular *f*. Por ello, cualquier igualdad que contenga una función generalizada singular, se debe entender como una igualdad de límites débiles [1].

Sea $\hat{f}_n(\varphi)$ una funcional definida mediante una función *f* según la fórmula (1), entonces definimos la derivada generalizada [1] de funciones generalizadas como la funcional:

$$\hat{f}'(\varphi) \equiv -\hat{f}(\varphi'), \qquad \varphi' = \frac{d\varphi}{dx} \tag{2}$$

en el caso de las funciones generalizadas regulares la derivada generalizada coincide con la derivada clásica [1]:

$$\hat{f}'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx \tag{3}$$

Aquí se tuvo en cuenta que $\varphi(\pm\infty) = 0$. Por lo tanto:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \tag{4}$$

Veamos algunas funciones generalizadas singulares:

1. Función generalizada δ de Dirac

Esta función se define de la siguiente manera

$$\hat{\delta}(\varphi) = \varphi(0) \quad \varphi \in D \tag{5}$$

Existen sucesiones δ_n que divergen pero que cumplen con lo siguiente[1]:

$$\lim_{n\to\infty} (\delta_n, \varphi) = \varphi(0) \tag{6}$$

Y se dice que δ_n tiende a una función generalizada singular, que es la llamada función Delta de Dirac [1]

$$(\delta, \varphi) = \varphi\ (0) \tag{7}$$

2. Función generalizada de Heaviside

Definida de la siguiente manera:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 \ \ para \ \ x > 0 \\ \\ 0 \ \ para \ \ x \le 0 \end{cases} \tag{8}$$

Esta función define la funcional lineal, usando la ecuación (1) obtenemos

$$(\Theta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx$$

De acuerdo con la definición de la derivada de una función generalizada, tenemos

$$(\Theta', \varphi) = -(\Theta, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi\ (0) \tag{9}$$

(φ es igual a cero en el infinito). Se puede ver que la derivada de la función es la función δ.

3. Función de Green

Con ayuda de la función delta, podemos definir la función de Green. Sea L un operador diferencial lineal, y sea la ecuación no homogénea

$$Lu = F \tag{10}$$

Para poder definir completamente el operador L es necesario determinar las clases de funciones sobre las cuales actúa este operador. Tales limitaciones se obtiene de consideraciones físicas y esto se refleja en las condiciones de contorno e iniciales. Si tenemos condiciones tanto de contorno como iniciales con las cuales podamos demostrar el teorema correspondiente de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (10) entonces a cada función u el operador L hace corresponder una sola función F, por lo que podemos decir que existe la inversa del operador L tal que

$$u = L^{-1}F \tag{11}$$

Fácilmente se comprueba que L^{-1} es también un operador lineal. Entonces podemos expresar dicho operador, como un operador integral lineal [2], es decir

$$u(x) = \int K(x, x')F(x\ \ , u(x'))dx' \tag{12}$$

donde $K(x, x')$ es el núcleo del operador inverso. Ahora colocando (12) en (11) y aplicando de nuevo el operador L obtenemos

$$Lu(x) = \int LK(x, x')F(x', u(x'))dx' \tag{13}$$

Por tanto de (10), (13) y comparando con (7)

$$LK(x, x') = \delta(x - x') \tag{14}$$

El núcleo K(x, x') del operador L^{-1} es conocido como la función de Green del operador L y se denota con $G(x, x')$. Debido a que la función de Green es solución de una ecuación no homogénea, entonces, si $G(x, x')$ es solución de la ecuación

$$L\ G(x,x') = \delta(x-x') \tag{15}$$

también lo sería

$$G(x,x') + G_0(x-x') \tag{16}$$

donde $G_0(x, x')$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente.

II. Ecuación de Newton

Vamos a resolver la ecuación de Newton, con una fuerza que depende del tiempo. Sea la ecuación de Newton en una dimensión:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \tag{17}$$

Entonces la ecuación para la función de Green es:

$$\frac{\partial^2 G(t-t')}{\partial t^2} = \delta(t-t') \tag{18}$$

Se puede mostrar, que la función de Green tiene la forma:

$$G(t) = \Theta(t)Z(t) \tag{19}$$

para $t > 0$ y vale cero para $t < 0$, donde $Z(t)$ cumple con la ecuación homogénea:

$$\frac{d^2}{dt^2}Z(t) = 0; \qquad t>0; \qquad Z(0) = 0; \qquad \dot{Z}(0) = 1$$

Esto se hace colocando (19) en (18):

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\Theta(t)Z(t) = \delta(t) \tag{21}$$

Este resultado también se puede obtener utilizando las transformadas de Fourier de la función de Green y de la función delta de Dirac:

$$G(t-t') = \int \frac{dk}{2\pi}G(k)\ e^{-ik(t-t')} \qquad \delta(t-t') = \int \frac{dk}{2\pi}\ e^{-ik(t-t')} \tag{22}$$

la integración se realiza de -∞ a +∞ es decir por todo en espacio, en adelante si no están indicados los límites de la integración, entonces se entiende que se integra por todo el espacio. Reemplazando (22) en (18):

$$(-k^2)G(k) = 1 \Rightarrow G(k) = -\frac{1}{k^2} \tag{23}$$

de donde se obtiene la expresión para la función de Green:

$$G(t-t') = -\int \frac{dk}{(2\pi)}\ \frac{e^{-ik(t-t')}}{k^2} \tag{24}$$

Para integrar (24), la integral se toma por una variable compleja, lo cual permite utilizar el teorema de los residuos[2]. La integral a lo largo del eje real coincide con (24), por lo tanto el contorno de integración en el plano complejo debe de contener al eje real. En la fórmula (19) la función de Green para $t < 0$ vale cero. Para obtener este resultado, bajamos el polo una pequeña distancia "ε" dentro del plano complejo (figura 1), el contorno de integración en este caso es el intervalo $[-R,R]$, $(0 < R \in \mathbf{R})$ y la semicircunferencia inferior de radio R. Luego se hace el límite $R \to \infty$ y por el lema de Jordan[2] la integral por la semicircunferencia tiende a cero, quedando solamente la integral a lo largo del eje real. Luego se toma el límite cuando ε tiende a cero.

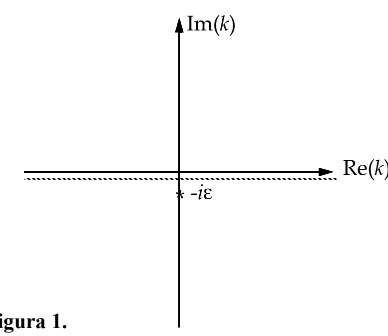

Figura 1.

En este caso para t - t′ > 0 obtenemos:

$$G(t-t') = (t-t') \tag{25}$$

Para t - t' < 0 la integral sería cero

$$G(t-t') = 0 \tag{26}$$

Entonces se obtiene:

$$G(t-t') = (t-t')\ \Theta(t-t') \tag{27}$$

A esta función de Green se le denomina función de Green retardada y se denota con G_{re}. Si el polo se mueve hacia (figura 2) arriba, el contorno de integración es el eje de la recta real y la semicircunferencia superior. Por el lema de Jordan la integral por la semicircunferencia es cero. Así obtenemos la denominada función de Green avanzada, que vale cero para t - t' > 0 y diferente de cero para t - t' < 0 y que tiene la forma:

$$G_{av}(t-t') = (t'-t)\ \Theta(t'-t) \tag{28}$$

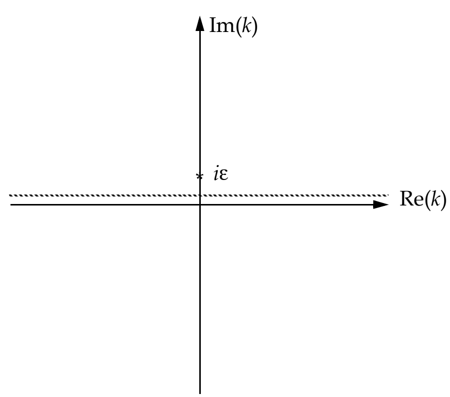

Figura 2.

Con la función de Green retardada podemos resolver la ecuación de Newton con condiciones iniciales. Si la ecuación de Newton es invariante cuando se cambia el signo del tiempo, entonces con la función avanzada de

Green podemos obtener información del pasado. Esto se puede comprobar con el siguiente ejemplo del movimiento de caída.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \qquad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_o \tag{29}$$

La expresión para $x(t)$ es

$$x(t) = \int F(t')G(t-t')dt' + (x_o + v_o t) \tag{30}$$

El último sumando se obtiene considerando (16) y de las condiciones iniciales. Para t > 0 tenemos:

$$\int G_{re}(t-t')(-g)dt' = -g\int_0^t (t-t')dt' = -\frac{gt^2}{2} \tag{31}$$

también para t < 0:

$$\int G_{av}(t-t')(-g)dt' = -g\int_t^0 (t'-t)dt' = -\frac{gt^2}{2} \tag{32}$$

Entonces:

$$x_{av}(t) = x_0 + v_o t - \frac{gt^2}{2} \qquad t<0 \qquad x_{re}(t) = x_0 + v_o t - \frac{gt^2}{2} \qquad t>0 \tag{33}$$

Veamos cual es la posición x_0' y la velocidad v_0' de la partícula un segundo antes que se encuentre en la posición x_0, para ello utilizamos G_{av}:

$$x_0' = x_{av}(-1) = x_0 + v_0(-1) - \frac{g(-1)^2}{2} = x_o - v_0 - \frac{g}{2}, v_o' = x_{av}(-1) = v_0 + g \tag{34}$$

Si la partícula se encuentra en x_0' con velocidad v_0' y para saber donde se va encontrar un segundo después utilizamos G_{re}.

$$x_{re}(t) = x_0' + v_0' - \frac{gt^2}{2}, \quad x_{re}(1) = x_0' + v_0' - \frac{g}{2} = x_0 + v_0 - \frac{g}{2} + v_0 + g - \frac{g}{2} = x_0 \tag{35}$$

con esto comprueba que ambas funciones de Green tienen significado físico.

III. Ecuación del Calor

La ecuación del calor no homogénea en general tiene la forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\nabla^2\right)\varphi(\mathbf{x}, t) = J(\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) \tag{36}$$

Entonces la ecuación para la función de Green es:

$$\frac{\partial G}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)G = \delta(\mathbf{x}, t) \tag{37}$$

donde $x = (t, \mathbf{x})$, $k = (k^0, \mathbf{k})$ y $kx = k^0t - \mathbf{kx}$. Sean las transformadas de Fourier de la función de Green y de la Delta:

$$G(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G(k) e^{-ik(x-x')}, \quad \delta(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \tag{38}$$

Reemplazando en (37):

$$\frac{\partial}{\partial t}G = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-ik^0)G(k)e^{-ik(x-x')}, \quad \nabla^2 G = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-k^2)G(k)e^{-ik(x-x\ )} \tag{39}$$

de donde:

$$G(k) = -\frac{1}{i(k^0 + ia^2\mathbf{k}^2)} \tag{40}$$

Entonces obtenemos:

$$G(x - x') = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{i(k^0 + ia^2\mathbf{k}^2)} = \frac{-1}{i}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{e^{-ik^0(t-t')}}{(k^0 + ia^2\mathbf{k}^2)} \tag{41}$$

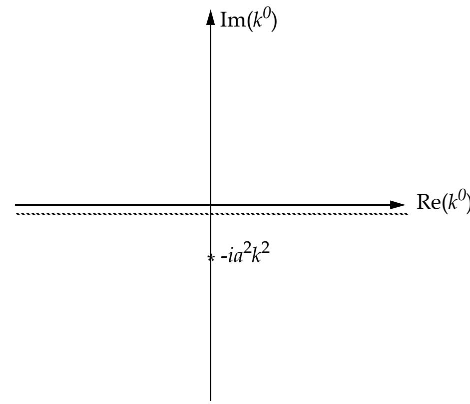

Figura 3.

La integral por k^0 se realiza con ayuda de la teoría de los residuos y el lema de Jordan, obteniendose la función de Green retardada para la ecuación del calor.

$$G(x) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\, exp\left\{\frac{-\mathbf{x}^2}{4a^2t}\right\} \tag{42}$$

en este caso no hubo problema, en el momento de integrar ya que el polo no estaba en el eje real (figura 3), y la regla de integración estuvo definida y se obtuvo la función de Green retardada que esta de acuerdo con el problema físico.

IV. Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger de una partícula libre con la inclusión de una fuente es:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x) = J(\psi(x), x) \tag{43}$$

donde $x = (t, \mathbf{x})$. La función de Green se define como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) G(x - x') = \delta^4(x - x') \tag{44}$$

Las transformada de Fourier de la función de Green y de la Delta son ($\hbar = 1$):

$$G(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p)\, e^{-ip(x - x')};\ \ \delta(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x - x')} \tag{45}$$

donde $p = (w, \mathbf{p})$. Reemplazando (45) en la ecuación (43) obtenemos:

$$G(p) = \frac{1}{w - \mathbf{p}^2/2m} \tag{46}$$

Luego la función de Green es:

$$G(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x - x')}}{w - \mathbf{p}^2/2m} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \int \frac{dw}{(2\pi)} \frac{e^{-iw(t - t')}}{w - \mathbf{p}^2/2m} \tag{47}$$

integrando:

$$\int \frac{dw}{(2\pi)} \frac{e^{-iw(t - t')}}{w - \mathbf{p}^2/2m} \tag{48}$$

A diferencia de la ecuación del calor, en este caso el polo se encuentra en el eje real (Figura 4). En este caso no tiene sentido físico la función de Green avanzada, debido a que la ecuación (43) no es invariante cuando se cambia de signo al tiempo t. Por lo que solamente va tener sentido hallar la función de Green retardada.

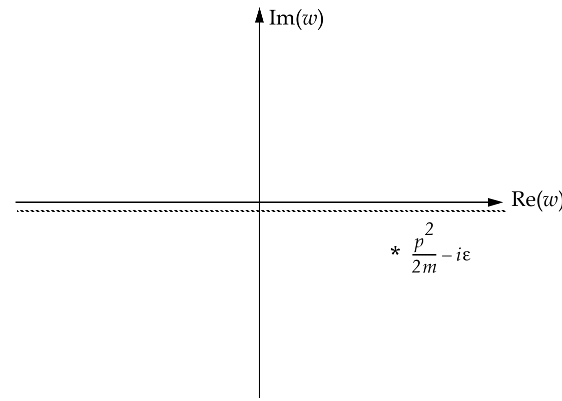

Figura 4.

Bajando el polo e integrando con ayuda de la teoría de los residuos y el lema de Jordan, obtenemos la expresión para la función de Green retardada:

$$G(x - x') = -i\Theta(t - t')\left(\frac{m}{2\pi i(t - t')}\right)^{3/2} exp\left\{\frac{im(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2(t - t')}\right\} \tag{49}$$

V. Ecuación de Klein - Gordon

En la teoría clásica de los campos la ecuación de la interacción del campo escalar con el campo electromagnético esta dada por [3]:

$$(\Box + m^2)\varphi = (2ieA_u\partial^u + e^2 A_u A^u)\varphi, \qquad \Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{50}$$

Que es la ecuación de Klein-Gordon con parte derecha diferente de cero, que vamos a denotar por $J(x)$, donde $x = (ct, \mathbf{x})$ es decir :

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = J(x) \tag{51}$$

Esta ecuación también se puede resolver con el método de la función de Green. Y podemos expresar la solución de la siguiente manera

$$\varphi(x) = \int G(x - x')J(x')d^4x' \tag{52}$$

La ecuación para la función de Green es

$$(\Box + m^2)G(x-x') = \delta^4(x-x') \tag{53}$$

Para resolver esta ecuación expresamos la función de Green y la función delta de Dirac en integrales con ayuda de la transformada de Fourier:

$$G(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(k) e^{-ik(x-x')}, \quad \delta(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-x')} \tag{54}$$

La cual reemplazando en la ecuación (24) y considerando el sistema natural ($c = 1$, $\hbar = 1$), obtenemos que:

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2} = \frac{1}{k_0^2 - E^2} \tag{55}$$

donde $E \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 - m^2}$. Luego la función de Green es:

$$G(x-x') = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{e^{-ik_0(t-t')}}{k_0^2 - E^2} \tag{56}$$

La integral por k_0 se realiza con ayuda del método de los residuos y el Lema de Jordan. En este caso los polos se encuentran sobre la recta real. Aplicamos la misma idea que en los caso anteriores, para poder encontrar las funciones de Green avanzada y retardada.

Si bajamos los polos (Figura 5) e integramos por la semicircunferencia inferior obtenemos la siguiente expresión para la función de Green retardada:

$$G_{re}(x-x\ ) = i\Theta(t-t') \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \left(e^{-iE(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} - e^{iE(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\right) = 0 \tag{57}$$

Si la integración se realiza subiendo los polos (Figura 6) e integrando por la semicircunferencia superior, obtenemos la función de Green avanzada.

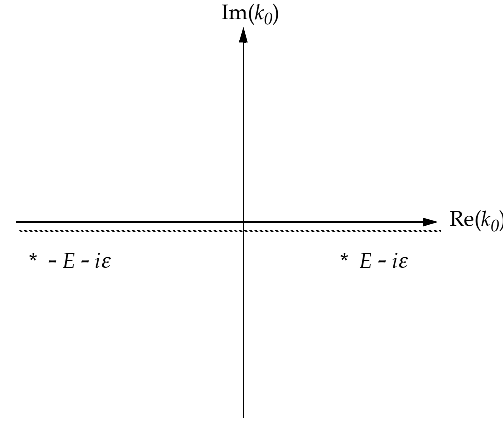

Figura 5.

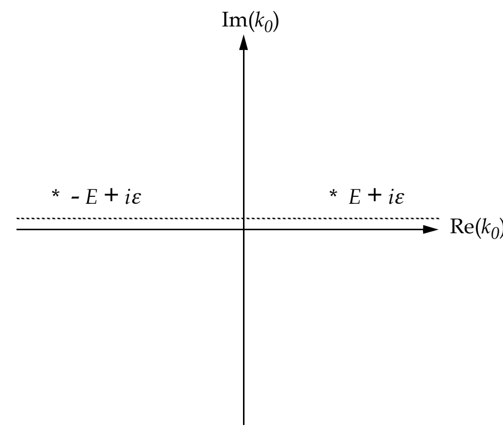

Figura 6.

$$G_{av}(x-x') = i\Theta(t'-t) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} \left(e^{iE(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} - e^{-iE(t-t')-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\right) \tag{58}$$

Si ahora subimos un polo y el otro lo bajemos de acuerdo con la figura 7, entonces la integración se realizará en ambas semicircunferencias; esto fue propuesto por Feynman and Stueckelberg la cual nos da la denominada Función de Green de la causalidad.

$$G^c(x-x') = i\Theta(t-t') \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E}\, e^{-iE(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} +$$

$$+\ i\Theta(t'-t) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E} (e^{iE(t-t')+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')})$$

agrupando, obtenemos una expresión más compacta

$$G^c(x-x') = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\, e^{-iE|t-t'|}$$

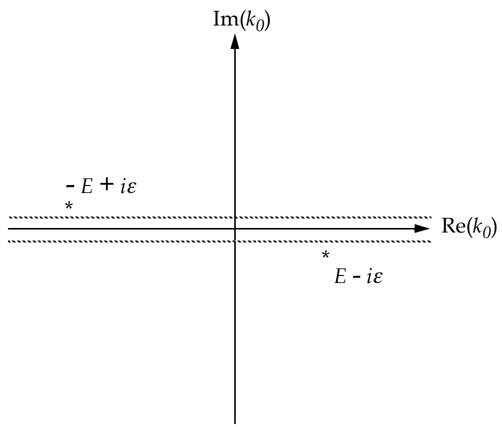

Figura 7.

Para dar una interpretación a la función de la causalidad, resolvamos la ecuación (51) utilizando esta función

$$\varphi(x) = \int G(x-x')J(x')\, d^4x' \tag{59}$$

Y con ayuda de la transformada de Fourier obtenemos la expresión integral para la función J(x):

$$J(x) = \int J(k_0, \mathbf{x})\, e^{-ik_0 t} dk_0 \tag{60}$$

Entonces:

$$\varphi(x) = \int d^3x' \int d^3\boldsymbol{k} \int \frac{dk_0}{2}\, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int e^{-iE|t-t'|-ik_0t'} J(k_0, \mathbf{x}')dt' \tag{61}$$

luego:

$$I = \int dk_0 \int e^{-iE|t-t'|-ik_0t'} J(k_0, \mathbf{x}')dt' \tag{62}$$

Para $t - t' > 0$

$$I = \int dk_0 \int e^{-iEt+iEt'-ik_0t'}\ J(k_0, \mathbf{x}')dt' = e^{-iEt}\ J(E, \mathbf{x}') \tag{63}$$

Para $t - t' < 0$

$$I = \int dk_0 \int e^{iEt-iEt'-ik_0t'}\ J(k_0, \mathbf{x}')dt' = e^{-iEt}\ J(E, \mathbf{x}') \tag{64}$$

Por ello

$$\varphi(x) = \int d^3\mathbf{x}' \int d^3\mathbf{k}' \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2}\ J(\pm E_k, x')e^{\mp Et} \tag{65}$$

El signo superior corresponde al caso t - t' > 0 y el inferior al caso t - t' < 0. De la última fórmula se puede llegar a la siguiente conclusión, cuando t - t' > 0 el campo se determina solamente por los estados energéticos de la fuente con energía positiva y cuando t - t' < 0 con los estados con energía negativa.

Los estados de la fuente con energía positiva se determina con campos de partículas elementales y los estados con energía negativa con campos de antipartículas, las cuales son absorbidas en la reacción que se estudia, es decir son las partículas y antipartículas que existen antes de la interacción. Si bajamos y subimos los polos de la otra manera se va a obtener la función de Green de la anticausalidad la cual no tiene significado físico.

VI. Conclusiones

Podemos ver que para una misma ecuación hemos obtenido distintas funciones de Green, y dependiendo de la ecuación algunas no tendrán sentido físico como es el caso de la ecuación de Shrödinger donde la función de Green avanzada no tiene significado físico, porque esta ecuación no describe fenómenos reversibles, pero en la ecuación de Newton y en la de Klein-Gordon la función de Greeen avanzada tiene sentido físico.

Bibliografía

1. A. Kolmogorov, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Moscú. Mir, 1978.
2. G.Arfken, Mathematical Methods for Physicists. Academic Press International, 1967.
3. C. Itzinson, Quantum Field Theory. New York. McGraw-Hill, 1965.

UNA PRUEBA DE UNICIDAD RESPECTO DE LA SECUENCIA DE MULTIPLICADORES GENERADA POR EL MÉTODO LAGRANGEANO AUMENTADO

Yna Consuelo Rezza Espinoza
Facultad de Ingeniería Económica y Ciencias Sociales
Escuela Profesional de Ingeniería Estadística
e-mail: yna_c@yahoo.com

RESUMEN

*Este trabajo presenta una demostración de la **unicidad** de la secuencia de multiplicadores generada por el Método Lagrangeano Aumentado con Penalidades* $P_i \in$ P. *Esta unicidad ha sido probada a lo largo de los últimos 25 años mediante el uso de la **relación de equivalencia** existente entre los Métodos Lagrangeano Aumentado y de Punto Proximal. Diversos investigadores tales como Rockafellar [10], Iusem [6]*