## IV. Conclusiones

El modelo propuesto hace posible reproducir aproximadamente la *dispersión mensual promedio* de CSS en Lima con sólo un número finito de fuentes.

La influencia de las elevaciones de terreno en la dispersión de CSS queda confirmada con el buen ajuste obtenido al incluir *estaciones ficticias* de concentraciones nulas en puntos elevados (Figura 7).

La resolución espacial con la cual se trabajó el *caso* de dos fuentes del Gráfico 7 y la disminución del RMS en más del 20% al considerar cuatro fuentes, sugiere que la **Figura 8** está cerca de representar la distribución promedio de CSS para la *Ciudad de Lima.*

Con el grado de precisión alcanzado, es posible incorporar al modelo propuesto los estudios de impacto ambiental que se pudieran realizar sobre nuevas chimeneas industriales en la *Ciudad de Lima* y determinar en cuánto cambiarían las condiciones actuales.

## Bibliografía

[1] **Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología** (DGM, DGH, DGA, DGIA)
"Vigilancia de la Contaminación Ambiental", Boletín Mensual, 1999
"Boletín Meteorológico e Hidrológico del Perú", Boletín Mensual, 2000
"Boletín Meteorológico e Hidrológico del Perú", Boletín Mensual, 2001

[2] **Eugene Butkov,** Mathematical Physics , Addison-Wesley (1968)
**Dimitri Vvedensky**, Partial Differential Equations , Addison-Wesley (1993).

[3] **Edson Jesús Plasencia Sánchez**, "Informe Final del Curso CF-581: Proyecto de Tesis". "Modelo de Dispersión de CSS para la Ciudad de Lima", FC - UNI, 2002.

[4] **Decreto Supremo Nº 074-2001 – PCM del 26 de Junio del 2001**
Reglamento de Estándares Nacionales de Calidad Ambiental del Aire

[5] **Modelos de Dispersión de Contaminantes Atmosféricos, Monografía**
Edson Jesús Plasencia Sánchez – Practicante SENAMHI 2001.



# CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN VALOR ÓPTIMO EN PROGRAMACIÓN DE DOS NIVELES

*Pedro Canales García*
*UNI-Facultad de Ciencias-Postgrado en Matemática Aplicada*

**RESUMEN**

Variados problemas de la vida real pueden modelarse como problemas de programación matemática de dos niveles (PDN). Resolver estos problemas no es tarea fácil, es frecuente utilizar métodos conocidos de la programación no lineal. Para esto, es necesario reformular el problema de dos niveles como de un solo nivel. Una manera de lograrlo es a través de la denominada función valor óptimo (o función marginal), por esta razón es conveniente conocer algunas de sus propiedades mas importantes. En este trabajo estudiamos la continuidad por ser de interés en la solución de problemas de programación matemática de dos niveles. Al final presentamos ejemplos de problemas de programación matemática de dos niveles e ilustramos algunos conceptos.

**ABSTRACT**

Several problems of real life can be modeled as two-level mathematical programming problems. To solve these problems is not an easy work, it is frequent to use known methods of non-linear programming. For this it is necessary to formulate the two-level problem as one level problem. A good way to obtain this is using the well known optimal value function (or marginal function), for this reason it is convenient to known some of their more important proprieties. In this work we study the interest in the solution two-level mathematical programming problem. At the end we show examples of two-level mathematical programming problem and we clarify some notions.

## 1. Introducción

Un problema de optimización, donde una de las restricciones es, a su vez, otro problema de optimización, es llamado de problema de programación matemática de dos niveles (PDN). Problemas de este tipo aparecen en diferentes áreas de las ciencias, como por ejemplo en economía, en la producción, en transporte, etc. Un PDN es un problema de tomada de decisión jerárquica, donde la toma de decisión en un nivel afecta la toma de decisión en el otro nivel. Una clase de PDN's es la no cooperativa, donde en las tomas de decisión no existe acuerdo previo entre los niveles. Resolver un PDN no es tarea fácil, una manera de hacerlo es utilizar la *función valor óptimo* (o función marginal), la cual en general es no convexa y/o no diferenciable [1]. Esta función permite transformar el PDN en otro problema equivalente de un solo nivel y luego aplicar resultados de la teoría de programación no lineal.

## 2. Formulación

Un problema de programación de dos niveles tiene la forma siguiente:

PDN:





$$\min_{x} \; F(x,y) \tag{1}$$
$$\text{s.a.} \quad G(x,y) \leq 0 \tag{2}$$
$$\min_{y} \; g(x,y) \tag{3}$$
$$\text{s.a.} \quad g(x,y) \leq 0 \tag{4}$$
$$h(x,y) = 0 \tag{5}$$

donde $F, f : R^n \times R^m \to R$, $G : R^n \times R^m \to R^v$ y $g : R^n \times R^m \to R^p$, $h : R^n \times R^m \to R^q$, son en particular, funciones continuas, convexas y de clase $C^2$.

El problema definido por (1-2) es el problema del líder y (3-4-5) es el problema del seguidor.

## 3. Definiciones

*Región Factible del PDN*.

$S := \{(x,y) \in R^n \times R^m / G(x,y) \leq 0,\; g(x,y) \leq 0,\; h(x,y) = 0\}$

*Conjunto factible del seguidor*. Es el conjunto de restricciones del problema del seguidor, para cada $x$ fijo se le define como

$S(x) := \{y \in R^m / g(x,y) \leq 0,\; h(x,y) = 0\}$.

Observar que $S(.) : R^n \to P(R^m)$, es una aplicación de punto a conjunto. Es llamada aplicación de restricciones para el seguidor.

En el PDN, se puede asociar al problema del seguidor una función $w : R^n \to R$, definida por

$$w(x) = \inf_{y \in S(x)} f(x,y),$$

llamada *función de valor óptimo del seguidor*. Cuando $S(x)$ es no vacío y compacto, el mínimo es alcanzado en algún punto, podemos entonces escribir

$$w(x) = \min_{y \in S(x)} f(x, y),$$

El conjunto de soluciones óptimas del problema del seguidor, para $x$ fija, se define por

$$P(x) = \{y^* \in S(x) / f(x, y^*) = \min_{y \in S(x)} f(x, y) = w(x)\}$$

$P: S(x) \rightarrow R^m$, es llamada aplicación de soluciones óptimas.

$S^-(x) := \{ y \in R^m / g(x,y) < 0, \; h(x,y) = 0 \}$, es el conjunto tal que $cl\,(S^-(x)) = S(x)$.

El conjunto de índices para las desigualdades activas es definido por

$$I(x,y) := \{ i = 1,...,p \,/\, g_i(x,y) = 0 \}$$

**Definición 1.** Sea $f$: $X \subseteq R^n \rightarrow R$, se dice que $f$ es inferiormente semicontinua (isc) en $x^-$ si $\lim_{k\to\infty} \inf f(x^k) \geq f(x^-)$,

para cualquier sucesión $\{x^k\} \subseteq X$ : $x^k \rightarrow x^-$, donde

$$\lim_{k\to\infty} \inf f(x^k) = \inf \{\nu \in R \,/\, \nu \text{ es punto límite de } \{f(x^k)\}\}.$$

Se dirá que $f$ es superiormente semicontinua (ssc) en $x^-$ si

$$\lim_{k\to\infty} \sup f(x^k) \leq \{f(x^-)\}.$$

para cualquier sucesión $\{x^k\} \subseteq X$ : $x^k \rightarrow x^-$, donde

$$\lim_{k\to\infty} \sup f(x^k) = \sup \{\nu \in R \,/\, \nu \text{ es punto límite de } \{f(x^k)\}\}$$

**Definición 2.** Se dirá que $f$ es continua en $x^-$ si es superior e inferiormente semicontinua en $x^-$.

**Definición 3.** *Sea* $X \subseteq R^n$ un abierto e $Y \subseteq R^m$ cualquier subconjunto. Una aplicación de punto a conjunto $\Omega$ : $X \rightarrow 2^Y$ se dice que es uniformemente





compacta próximo a $x^- \in X$ si existe una vecindad $\eta(x^-)$ de $x^-$ tal que $\Omega\,(\eta(x^-))$ es acotada.

**Definición 4.** Sea $X \subseteq R^n$ e $Y \subseteq R^m$, $\Omega$ : $X \rightarrow 2^Y$ una aplicación punto a conjunto. Se dirá que $\Omega$ es cerrada en $x^- \in X$ si de $\{x^k\} \subseteq X$ : $x^k \rightarrow x^-$, $y^k \in \Omega(x^k)$: $y^k \rightarrow y^-$ se implica que $y^- \in \Omega\,(x^-)$.

**Teorema 1.** Sea $h : R^n \times R^m \rightarrow R^q$ continuamente diferenciable en una vecindad del punto $(x^-, y^-)$, y sea $ran\,(\nabla_y h(x^-, y^-)) = q$. Entonces, para cada par de direcciones $(s^-, r^-) \in R^n \times R^m$, existen vecindades $\eta(x^-, y^-)$, $\eta(s^-, r^-)$ en $R^n \times R^m$, $t^- > 0$ y una función continua $\phi : B \rightarrow R^m$ (donde $B = \langle -t^-, t^- \rangle \times \eta(x^-, y^-) \times \eta(s^-, r^-)$ ) que satisface

*i.* $\phi\,(0, x, y, s, r) = 0$, $\forall\,(x, y, s, r) \in \eta(x^-, y^-) \times \eta(s^-, r^-)$,

*ii.* $(\partial/\partial t)\,\phi\,(t, x, y, s, r)$ existe, es continua sobre B, y $(\partial/\partial t)\,\phi\,(0, x, y, s, r) = 0$, $\forall\,(x, y, s, r) \in \eta(x^-, y^-) \times \eta(s^-, r^-)$,

*iii.* $h(x + ts, y + \phi\,(t, x, y, s, r) + tr) = h(x,y) + t[\nabla_x h(x,y)\, s + \nabla_y h(x,y)\, r]$, $\forall\,(t, x, y, s, r) \in B$.

A continuación mencionamos la restricción de calificación llamada de Mangasarian – Fromovitz (RCMF)

Sea $y^- \in S(x^-)$, $x^- \in R^n$. Entonces

1. Existe un vector $r^- \in R^m$ tal que $\langle \nabla_y g_i(x^-, y^-), r^- \rangle < 0$, $i \in I(x^-, y^-)$,
   $\langle \nabla_y h_i(x^-, y^-), r^- \rangle = 0$, $i = 1, \dots, q$.

2. Los vectores $\nabla_y h_i(x^-, y^-)$, $i = 1, \dots, q$, son linealmente independientes.

## 4. Continuidad de la función valor óptimo

El siguiente teorema sobre la continuidad de la función valor óptimo $w$, se debe a Gauvim – Debeau.

**Teorema 2.** Supongamos que $S(x^-) \neq \Phi$, que $S(.)$ es uniformemente compacto en $\eta(x^-)$ vecindad de $x^-$, $f$ continua sobre $\eta(x^-) \times R^m$, y que la (RCMF) es satisfecha en un punto $y^* \in S(x^-)$. Entonces la función valor óptimo $w(x) = \inf \{ f(x,y) / y \in S(x)\}$ es continua en $x^-$.

Prueba.
Veremos que $w$ es semicontinua superior y semicontinua inferior.
(ssc): Primero veamos un Lema.

**Lema.** Si $g$ y $h$ son continuamente diferenciables sobre $\{x^-\} \times R^m$, y la condición (RCMF) es satisfecha en $y^* \in S(x^-)$, entonces para cada dirección $s^- \in R^m$, existe $t^- > 0$, $\eta(s^-)$ vecindad de $s^-$ y una función $r : \eta(s^-) \to R^m$ tal que

$$(y^* + \phi (t, x^-, y^*, s, r(s)) + tr(s)) \in S^- (x^- + ts), \ \forall (t, s) \in \langle 0, t^- \rangle \times \eta(s^-),$$

donde $\phi$ es una función cuya existencia se asegura en el Teorema 1.

Prueba del Lema
Sea $s \in R^n$ cualquiera, definimos la dirección $r(s) \in R^m$ por

$$r(s) := \beta r^- - \nabla_y h(x^-, y^*)^{\#} \nabla_x h(x^-, y^*) s \tag{6}$$

donde $\nabla_y h(x^-, y^*)^{\#} = \nabla_y h(x^-, y^*)^T \{\nabla_y h(x^-, y^*) \ \nabla_y h(x^-, y^*)^T\}^{-1}$ es la matriz seudoinversa de $\nabla_y h(x^-, y^*)$, $\beta > 0$ arbitrario, y $r^- \in R^m$ es la dirección tal que

$$\nabla_y g_i (x^-, y^*) \ r^- < 0, \ i \in I(x^-, y^*),$$
$$\nabla_y h_i (x^-, y^*) \ r^- = 0, \ i = 1, \dots, q.$$

En (6), multiplicando a izquierda por $\nabla_y h(x^-, y^*)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla_y h(x^-, y^*) \ r(s) &= \beta \nabla_y h(x^-, y^*) r^- - \nabla_y h(x^-, y^*) \nabla_y h(x^-, y^*)^{\#} \nabla_x h(x^-, y^*) s \\ &= \beta(0) - I_m \ \nabla_x h(x^-, y^*) s,\end{aligned}$$

entonces $\nabla_x h(x^-, y^*) s + \nabla_y h(x^-, y^*) \ r(s) = 0$ (7)

Como $r$ esta definido en vecindades de $s^-$, entonces $\forall \ s \in \eta(s^-)$ e $i \in I(x^-, y^*)$ tenemos



REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS-UNI

$$\begin{aligned}&\nabla_x g_i (x^-, y^*) s + \nabla_y g_i (x^-, y^*) \ r(s) = \\ &\nabla_x g_i (x^-, y^*) s + \nabla_y g_i (x^-, y^*) (\beta r^- - \nabla_y h(x^-, y^*)^{\#} \nabla_x h(x^-, y^*) s) \\ &= \beta \nabla_y g_i (x^-, y^*) r^- + (\nabla_x g_i (x^-, y^*) - \nabla_y h(x^-, y^*)^{\#} \nabla_x h(x^-, y^*)) s\end{aligned}$$

como $\nabla_y g_i (x^-, y^*) r^- < 0$, $i \in I(x^-, y^*)$ (por la RCMF), entonces para $\beta > 0$ suficientemente grande, se tendrá

$$\nabla_x g_i (x^-, y^*) s + \nabla_y g_i (x^-, y^*) \ r(s) < 0, \ \forall \ s \in \eta(s^-) \text{ e } i \in I(x^-, y^*) \tag{8}$$

Vamos aplicar el Teorema 1.
Tenemos que $h$ es continuamente diferenciable en $\{x^-\} \times R^m$, y como $y^* \in S(x^-)$ entonces $\nabla_y h_i (x^-, y^*)$, $i = 1,\dots, q$ son linealmente independientes, así $\nabla_y h(x^-, y^*) = q$.

Además para $s \in \eta^- (s^-)$, $r(s) \in \eta(r(s^-))$. Entonces, por el Teorema 1, existe $t^-_0 > 0$ y una vecindad $\eta_0 (s^-) \subseteq \eta^- (s^-)$ de $s^-$ tal que (por la parte (iii) del Teorema 1).

$$\begin{aligned}&h(x^- + ts, \ y^* + \phi (t, x^-, y^*, s, r(s)) + t\, r(s)) = h(x^-, y^*) + t[\nabla_x h(x^-, y^*) s + \\ &\nabla_y h(x^-, y^*) \ r(s)] = 0 \ , \ \forall (t, s) \in \langle 0, t^-_0 \rangle \times \eta_0(s^-).\end{aligned}$$

Como $y^* \in S(x^-) \Rightarrow h(x^-, y^*) = 0$, y de (7) : $\nabla_x h(x^-, y^*) s + \nabla_y h(x^-, y^*) \ r(s) = 0$,
así, $h(x^- + ts, \ y^* + \phi (t, x^-, y^*, s, r(s)) + t\, r(s)) = 0, \ \forall (t, s) \in \langle 0, t^-_0 \rangle \times \eta^- (s^-)$ (9)

Sabemos que, para $i \notin < I(x^-, y^*)$, $g_i (x^-, y^*) < 0$ y como $g$ y $\phi$ son continuas, entonces existe $t^-_i > 0$ y una vecindad $\eta_i(s^-)$ de $s^-$ tal que

$$g_i (x^- + ts, \ y^* + \phi (t, x^-, y^*, s, r(s)) + t\, r(s)) < 0, \ \forall (t, s) \in \langle 0, t^-_i \rangle \times \eta_i (s^-)$$

Ahora, para $i \in I(x^-, y^*)$ y $t = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}&g_i (x^- + ts, y^* + \phi (t, x^-, y^*, s, r(s)) + t\, r(s)) = g_i (x^-, y^* + \phi (0, x^-, y^*, s, r(s))) \\ &= g_i (x^-, y^*) = 0, \text{ pues por la parte (i) del Teorema 1, } \phi (0, x^-, y^*, s, r(s)) = 0\end{aligned}$$

Entonces existe $\tau \in \langle 0, t \rangle$ (por Teorema del valor medio) tal que

$$\frac{g_i(x^- + ts, y^* + \phi t, x^-, y^*, s, r(s)) + tr(s)) - g_i(x^-, y^*)}{t - 0} =$$

$$d_\tau g_i(x^- + \tau s, y^* + \phi(\tau, x^-, y^*, s, r(s)) + \tau r(s)) \qquad =$$

$$\nabla_x g_i(x^- + \tau s, y^* + \phi(\tau, x^-, y^*, s, r(s)) + \tau r(s))s +$$

$$\nabla_y g_i(x^- + \tau s, y^* + \phi(\tau, x^-, y^*, s, r(s)) + \tau r(s)) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\tau, x^-, y^*, s, r(s)) + r(s) \right\}$$

Esto es $g_i\ (x^- + ts,\ y^* + \phi\ (t, x^-,\ y^*, s, r\ (s)) + t\,r\ (s)) =$

$$t\Big[\nabla_x g_i(x^- + \tau s, y^* + \phi(\tau, x^-, y^*, s, r(s)) + \tau r(s))s +$$

$$\nabla_y g_i(x^- + \tau s, y^* + \phi(\tau, x^-, y^*, s, r(s)) + \tau r(s)) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(\tau, x^-, y^*, s, r(s)) + \tau r(s) \right\}\Big] =$$

En la última expresión entre corchetes, con $\tau = 0$ se tiene

$$= t\ [\nabla_x\, g_i\, (x^-, y^*)\ s + \nabla_y\, g_i\, (x^-, y^*)\ r\ (s)] < 0 \quad (\text{ por } (7)).$$

Entonces para $i \in I(x^-, y^*)$, $t^-_i > 0$ y $\eta_i\,(s^-)$ se tiene

$$g_i\ (x^- + ts,\ y^* + \phi\ (t, x^-,\ y^*, s, r\ (s)) + t\,r\ (s)) < 0\ ,\ \ \forall\ (t, s) \in \langle 0, t^-_i \rangle \times \eta_i\ (s^-)$$

Así tenemos que

$$g_i\ (x^- + ts\ , y^* + \phi\ (t, x^-, y^*, s, r\ (s)) + t\,r\ (s)) < 0\ ,\ \forall\ (t,s) \in \langle 0, t^-_i \rangle \times \eta_i\ (s^-),$$
$$i = 1\ , \ldots , p \qquad (10)$$

Escogiendo $t^- = mín\ \{t^-_0\, , \ldots , t^-_p\}$ , $\eta\ (s^-) = \cap_{i=0}^{p}\ \eta_i\ (s^-)$ y de (9) y (10), se sigue que

$$(y^* + \phi\ (t, x^-, y^*, s, r\ (s)) + t\,r\ (s)) \in S^-\ (x^- + ts)$$



REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS-UNI

Ahora volvamos a la prueba de la semicontinuidad superior de $w(x)$.

Sea una sucesión $\{x^k\}$: $x^k \to x^-$, definamos el número $\delta$ por

$$\delta := \lim_{x \to x^-} \sup\ w(x)$$

Como $$\lim_{x \to x^-} \sup\ w(x) = \inf_{\varepsilon > 0}\ \sup_{x \in B(x^-;\varepsilon)} \{w(x)\}$$
$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\ \sup_{x \in B(x^-;\varepsilon)} \{w(x)\}$$
$$= \lim_{k \to \infty}\ w(x^k) \qquad (11)$$

Sea $s^k = \dfrac{x^k - x^-}{\|x^k - x^-\|}$, $t^k = \|x^k - x^-\|$ y $s^-$ un punto de acumulación arbitrario de $\{s^k\}$.

Denotando por $\{s^k\}$ mismo una subsucesión tal que $s^k \to s^-$

Entonces, por el Lema anterior, se tiene

$(y^* + \phi\ (t_k,\ x^-,\ y^*,\ s^k,\ r(s^k)) + t_k\ r(s^k)) \in S^-\ (x^- + t_k\, s^k) = S^-(x^k)$, para $k$ suficientemente grande.

Luego $\delta = lím_{k \to \infty}\ w(x^k) \leq lím_{k \to \infty}\ f\,(x^k, y^* + \phi\ (t_k\, , x^-, y^*, s^k, r\ (s^k)) + t_k\, r\ (s^k)) =$ (por continuidad de $f$ y de la parte (i) del Teorema 1)

$$= f\,(x^-, y^*) = w(x^-)$$

Se ha obtenido que $lím\ sup_{k \to \infty}\ w(x^k) \leq w(x^-)$. Así, $w$ es superiormente semicontinua en $x^-$.

La semicontinuidad inferior $w$.

Sea $\{x^k\} : x^k \to x^-$. Como $S^-\,(x^-) \subset S(x^k)$, entonces por el Lema, $S(x^k) \neq \phi$ para $k$ suficientemente grande.

Como $P(x^k) = \{y^k \in S(x^k)\} / w(x^k) = \inf\{f(x^k, y^k),\ y^k \in S(x^k)\}$, $f$, $g$, $h$ son continuas y $S(.)$ es uniformemente compacto próximo de $x^-$, entonces $P(x^k) \neq \phi$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario fijo, entonces existe $y^k \in S(x^k)$ tal que $w(x^k) \geq f(x^k, y^k) - \varepsilon$.

Consideremos $\{x^{k_j}\}$ una subsucesión de $\{x^k\}$ tal que

$$\text{lím inf}_{k \to \infty} w(x^k) = \text{lím}_{j \to \infty} w(x^{k_j})$$

Como $S(.)$ es uniformemente compacto próximo a $x^-$ (i.e. $S(\eta(x^-))$ es acotado), entonces la subsucesión $\{y^{k_j}\}$ de $\{y^k\}$ tiene un punto de acumulación $y^-$ tal que $y^{k_j} \to y^-$.

Por lo que se tiene que

$$y^{k_j} \in S(x^{k_j}),\ \underset{k\to\infty}{\text{lím}}\ \text{inf}\ w(x^k) = \underset{j\to\infty}{\text{lím}}\ w(x^{k_j}) \tag{12}$$

(Pues $\underset{j\to\infty}{\text{lím}}\ g(x^{k_j}, y^{k_j}) = g(x\ , y\ ) < 0$ y $\underset{j\to\infty}{\text{lím}}\ h(x^{k_j}, y^{k_j}) = h(x^-, y^-) = 0$)

Necesitamos el siguiente Teorema:

**Teorema 3.** Si $g$ y $h$ son continuas sobre $\{x^-\} \times \mathrm{R}^m$, entonces la aplicación de restricciones $S(.)$ es una aplicación cerrada en $x^-$.

Según el Teorema 3, se tiene que $y^- \in S(x^-)$, y de la continuidad de $f$ se sigue que $\text{lím}\ \ w(x^{k_j}) + \varepsilon \geq \text{lím}\ \ f(x^{k_j}, y^{k_j}) = f(x^-, y^-) = w(x^-)$

Como $\varepsilon$ se tomo arbitrario, de (12) se sigue que

$\text{lím inf}_{k\to\infty} w(x^k) \geq w(x^-)$. Luego, $w$ es iss en $x^-$. En consecuencia $w$ es continua en $x^-$.





## 5. Ejemplos de problemas de dos niveles y su reformulación

**Ejemplo 1**. Un modelo para el administrador de una red de tránsito urbano y los usuarios de la red. El interés del administrador es optimizar inversiones en la red para mejorar su desempeño, en tanto los usuarios por su lado tratan de minimizar sus costos de viaje.

Casos a considerar:

**a.** Si la función de costo de viaje en un arco se formula como dependiendo solo del flujo y capacidad del propio arco, $C_a(x_a, s_a)$, en este caso el problema del segundo nivel (o del seguidor) es una minimización convexa. El problema de dos niveles es

$\text{mín}_s\ T(x, s)$
s.a. $x \geq 0,\ 0 \leq s_a \leq K_a$ y $x$ resuelve

$$\underset{x}{\text{mín}} \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} C_a(t, s_a)\, dt \tag{1}$$

s.a.

$$\sum_{w \in \mathrm{W}} \sum_{r \in \mathrm{R}_w} \delta_{ar}^{w}\ h_w^r = x_a\ , \quad a \in A \tag{2}$$

$$\sum_{r \in \mathrm{R}} h_w^r = d_w\ , \quad w \in \mathrm{W} \tag{3}$$

$$h_w^r \geq 0\ ,\quad r \in \mathrm{R}_w\ ,\quad w \in \mathrm{W} \tag{4}$$

donde:

$T$ : es la función objetivo del administrador
$x$ : es el vector de flujo en arcos
$A$ : es el conjunto de arcos en al red

W : conjunto de pares Origen/Destino (O/D)
$R_w$ : conjunto de rutas entre cada par O/D $w \in$ W
$h^r_w$ : flujo sobre la ruta $r \in R_w$
$d_w$ : demanda de viaje para el par O/D $w \in$ W
$C_a(x_a, s_a)$ : función costo de viaje sobre el arco $a \in A$

$$\delta^w_{ar} = \begin{cases} 1 & \text{si la ruta } r \text{ entre el O/D } w \text{ usa el arco } a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las ecuaciones 2 y 3 son las restricciones de conservación de flujo en arco y 4 la restricción de no negatividad.

**b.** Como es fácil suponer, una situación mas real es aquella donde la función de costo de viaje en arcos, depende de los flujos y capacidades de los otros arcos. En este caso la matriz Jacobiana es no simétrica y la formulación para el problema del usuario (seguidor) es una desigualdad variacional. Así el problema de dos niveles es

$$\begin{aligned} & \text{mín}_s \ T(x, s) \\ & \text{s.a. } x \geq 0, \ 0 \leq s_a \leq K_a \text{ y } x \text{ resuelve} \\ & \langle C(x, s), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall \ y \in \Omega \end{aligned}$$

donde $\Omega$ es el conjunto de flujos factibles.

**Ejemplo 2**. Uso de la función valor óptimo, ejemplo geométrico, ilustración de algunos conceptos.

$$\begin{aligned} PDN: \quad & \text{mín}_{x \geq 0} \ F(x,y) = x^2 + 3y \\ & \text{s.a.} \quad y \geq 0 \text{ e } y \text{ resuelve} \\ & \text{mín}_{y \geq 0} \ f(x,y) = -x + 2y \\ & \text{s.a.} \quad 2x + y \geq 2 \\ & \qquad -x + 2y \leq 4 \\ & \qquad x + y \leq 4 \end{aligned}$$





Conjunto factible del seguidor $S(x) = \{ y \in R \,/ g(x,y) \leq 0, \ y \geq 0\}$ i.e.

$$S(x) = \begin{cases} \left[2 - 2x, 2 + \frac{x}{2}\right], & 0 \leq x \leq 1 \\ \left[0, 2 + \frac{x}{2}\right], & 1 \leq x \leq \frac{4}{3} \\ [0, 4 - x], & \frac{4}{3} \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Observar que $S(x)$ es un conjunto compacto para cada $x$ factible.

De la definición de función valor óptimo para el usuario se tiene

$$w(x) = \begin{cases} 4 - 5x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Vemos que $w$ es continua en [0,4] y tiene un punto de no diferenciabilidad en (1, -1) (ver figura 1).

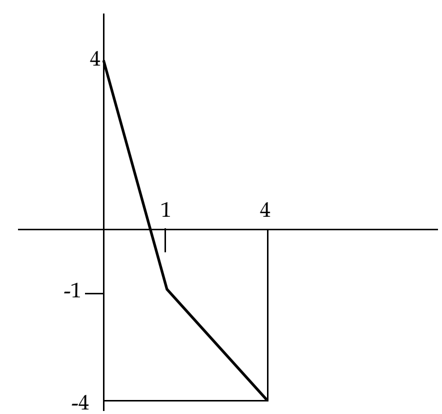


**Figura 1.** Gráfica de $w(x)$

El conjunto de soluciones óptimas del seguidor es

$$P(x) = \{y^* \in S(x) \,/\, f(x,y^*) = \text{mín}_{y \in S(x)} f(x,y) = w(x)\},$$

A partir de este conjunto podemos definir el conjunto de la Región Inducida (RI), RI = {$(x\ ,\ y^*)\ /G(x\ ,\ y^*) \leq 0\ ,\ y^* \in\ P(x)$}. Este conjunto representa los puntos sobre los cuales el líder optimiza su función objetivo (ver figura 2).

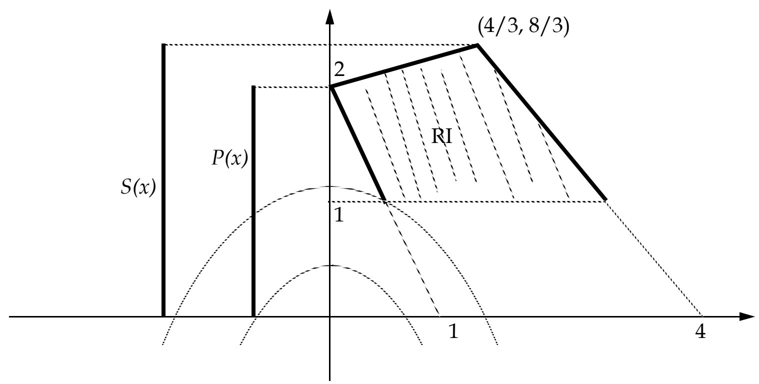


**Figura 2.** Representación de los conjuntos *S(x), P(x),* RI y curvas de nivel de *F*

Notemos que cuando el líder optimiza su función objetivo sobre el conjunto RI, encuentra como solución el punto $(x^*,\ y^*) = (1/2\ ,\ 1)$. Este punto es la solución del problema de dos niveles, es llamado punto de equilibrio del *PDN*. La misma solución es hallada cuando se resuelve el problema equivalente, i.e. el problema reformulado del *PDN* como de un solo nivel utilizando la función valor óptimo. En este ejemplo el problema reformulado es:

$$
\begin{aligned}
P1: \quad & \min_{x\,,y\, \geq\, 0}\ F(x,y) = x^2 + 3y \\
s.\,a. \quad & y \geq 1 \\
& 2x + y = 2\,, \quad 0 \leq x \leq 1 \\
& -x + 2y \leq 4 \\
& x + y \leq 4
\end{aligned}
$$





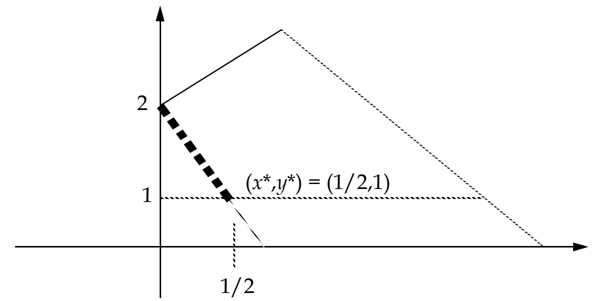


**Figura 3.** Puntos factibles para el problema *P1* y su solución óptima (1/2 , 1).

## 6. Conclusiones

El uso de la función valor óptimo permite la elaboración de algoritmos para la solución de problemas de dos niveles.

La función valor óptimo, en general resulta no convexa y/o no diferenciable, por esta razón es conveniente tener en cuenta resultados de la teoría de optimización no difereenciable.

Además de la propiedad de continuidad estudiada en este trabajo, la función valor óptimo tiene otras propiedades que son materia de estudio.

En un problema de dos niveles, considerando que el primer nivel representa una unidad central de decisión, éste puede evaluar el desempeño de unidades de decisión de menor jerarquía (que se encuentren en un mismo segundo nivel), a través de la función valor óptimo.

## Bibliografía


**1.** Auslender A., Differentiable Stability in Nonconvex and Programming Study 10, pp 29-41, North - Holland, Amsterdam (1979).

**2**. Shimizu, K., Ishizuka Y., and Bard J., Non differentiable and Two – level mathematical programming, Kluwer Academic Plublishers, (1997).

**3**. Clarke F. , Optimization and Nonsmooth Analysis, John Wiley & Sons, New York (1983).

**4.** Gauvin J. and Dubeau F. , Differentiable Properties of the Marginal Function in mathematical programming, Mathematical Programming Study 19, pp 101-119, North Holland, Amsterdam (1979).