

# Modelo de Dispersión de Contaminantes Sólidos Atmosféricos en la Ciudad de Lima

*Edson Plasencia Sánchez\**  
*Héctor Loro\**

## RESUMEN

Existe un gran número de emisores (**fuentes**) de contaminantes atmosféricos a lo largo de toda la ciudad de Lima, por ejemplo, las fábricas, los vehículos motorizados, la quema de llantas y la quema de basura. Entre otros factores, la humedad, las elevaciones montañosas y los vientos, originan en la ciudad de Lima zonas de menor o mayor acumulación de contaminantes, es decir, determinan la forma en la que los contaminantes atmosféricos emitidos se distribuyen.

En este trabajo se han encontrado las ubicaciones y características de un número reducido de fuentes, de tal manera que reproducen la distribución mensual promedio de los Contaminantes Sólidos Sedimentables (CSS) presentes en la atmósfera de la ciudad de Lima.

Con este modelo, se pretende avanzar en la comprensión de la problemática ambiental de la ciudad de Lima, proporcionar una base científica para las cuantiosas observaciones que se hacen en este campo y dar un primer paso en la modelación de un fenómeno tan complejo como es la distribución de CSS.

## ABSTRACT

Along the whole City of Lima there is a great number of atmospheric pollutants emitters (sources) such as factories, motorized vehicles, tire burning and trash burning. The humidity, the mountains and the winds, among other factors, create places in Lima City where the accumulation of pollutants is smaller or bigger, in other words, they give the last way in which pollutants are distributed.

In this paper, the best values for the locations and parameters of a few number of sources have been found in such a way that they reproduce the monthly average distribution of Solid Sedimentable Pollutants (CSS) present in the Lima City's atmosphere.

With this model we try to advance in the understanding of the Lima City Environmental Trouble, to give some formal knowledge to contrast experimental facts and to acquire some developmental skill to model this phenomenon as a whole.

\* Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú

## I. Marco Teórico

A continuación se revisan algunos conceptos utilizados en el desarrollo del modelo.

### La Atmósfera:

Es la masa gaseosa que rodea la superficie terrestre y clásicamente se encuentra dividida en tres capas, cada una con distinta composición química y características físicas propias. La capa más cercana a la Tierra es la Tropósfera; aquí se encuentra una zona en la cual el flujo atmosférico (de aire) se ve directamente influenciado por la corteza terrestre. Esta zona recibe el nombre de **capa límite atmosférica**, se encuentra a una altura que varía entre 200 m y 2 km sobre el nivel del suelo y constituye un limitante para la dispersión de contaminantes atmosféricos, pues a partir de ella prácticamente no existe movilidad vertical entre las masas de aire y predominan los fenómenos continentales.

### Contaminantes Atmosféricos:

Son sustancias de probada o muy probable acción dañina sobre la salud de los receptores (hombre, alguna especie animal, una especie vegetal en particular, etc.) cuando se encuentran permanentemente en altas concentraciones. Cada gobierno decide cuales sustancias considera contaminantes y fija las concentraciones aceptables de estas sustancias [4].

### Contaminantes Sólidos Sedimentables (CSS):

Son todas aquellas partículas sólidas presentes en la atmósfera que terminan depositándose en la superficie terrestre. El tiempo que permanecen suspendidas en la atmósfera depende de sus dimensiones, de su composición química, de la humedad atmosférica, así como de la turbulencia y velocidad del viento.

Sus orígenes son diversos: los desiertos, el envejecimiento animal, las fabricas de cemento, el desgaste de los motores, la quema de basura, la quema de llantas, entre otros.

### Escala de los Fenómenos Meteorológicos:

Los fenómenos meteorológicos se agrupan en *categorías*, de acuerdo a la frecuencia con la que se presentan y al grado de influencia que ejercen sobre el medio (*escala*), así por ejemplo: la turbulencia es un fenómeno que produce un cambio en la dirección del viento y se manifiesta a pocos metros sobre la superficie terrestre, sin embargo, su influencia no se extiende a distancias superiores a los cientos de metros (microescala), por esto, deja de considerarse cuando se desea evaluar la dirección del desplazamiento de masas de aire a lo largo de kilómetros (mesoescala).

Tabla 1. Escala de los fenómenos meteorológicos

Categoría	Escala de Tiempo	Escala Espacial	Fenómeno Típico
Micro	T < 1 hora	L < 2 km	Turbulencia
Meso	1 hora < T < 1 día	2 km < L < 200 km	Brisa Marina
Sinóptica	1 día < T < 5 día	200 km < L < 3000 km	Frentes Fríos
Planetaria			El Niño
Climatológica			Efecto Estufa

## II. Análisis de los Datos Disponibles

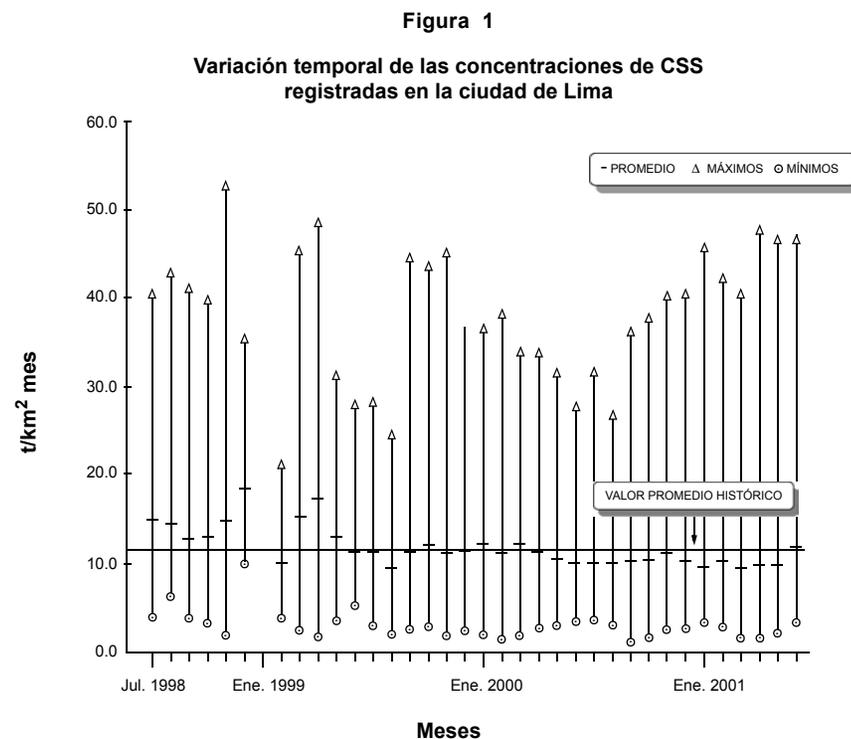
El Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI) cuenta con una red de estaciones de monitoreo de CSS y edita el Boletín Mensual de Vigilancia de la Contaminación Ambiental [1] en donde se da cuenta de las concentraciones mensuales de CSS registradas en cada una de sus estaciones.

La **Tabla 2** contiene los códigos que se usarán para identificar a las estaciones, así como sus correspondientes valores mínimo, máximo y promedio mensual de CSS, para el periodo de tiempo comprendido entre julio de 1998 y junio del 2001.

**Tabla 2. Estaciones de monitoreo de CSS en la ciudad de Lima**

Código	Nombre estación	Mínimo t/km <sup>2</sup>	Máximo t/km <sup>2</sup>	Promedio t/km <sup>2</sup>
E1	Ate-Vitarte	6,4	17,0	10,9
E2	Bellavista	1,6	13,7	5,1
E3	Breña	2,3	9,3	6,8
E4	Carmen de la Legua	3,3	22,3	7,2
E5	Cercado I	3,6	44,5	9,8
E6	Cercado II	12,5	37,6	24,2
E7	Cercado III	11,3	43,7	14,9
E8	Comas	18,0	46,4	33,4
E9	Chorrillos	2,1	16,7	7,1
E10	El Agustino	19,2	47,5	29,8
E11	Independencia	7,1	43,2	13,1
E12	Jesús María	2,9	11,5	5,8
E13	La Molina I	1,5	17,2	11,6
E14	La Molina II	2,4	52,0	9,3
E15	Lince	1,1	11,4	3,8
E16	Los Olivos I	5,8	22,4	14,7
E17	Los Olivos II	5,5	15,8	9,9
E18	Magdalena	1,9	10,3	3,9
E19	Pueblo Libre	2,7	10,2	4,7
E20	Rímac	3,6	23,8	7,9
E21	San Juan de Lurigancho I	5,9	35,9	14,9
E22	San Juan de Lurigancho II	8,8	19,8	13,3
E23	San Juan de Miraflores I	3,6	19,2	6,9
E24	San Juan de Miraflores II	3,4	18,9	10,2
E25	San Luis	9,9	34,4	16,4
E26	San Martín de Porres	7,0	19,8	12,2
E27	Santiago de Surco	2,6	18,1	7,5
E28	Villa el Salvador	4,2	16,6	9,2
<b>Promedio</b>				<b>11,6</b>

En la **Figura 1** se observa como evoluciona la **concentración mensual promedio, máxima y mínima** de CSS en la ciudad de Lima entre los años 1998 y 2001. Las concentraciones mensuales promedio de CSS son las que menos variaciones sufren respecto a su valor **promedio histórico**: 11,6 t / km<sup>2</sup>.

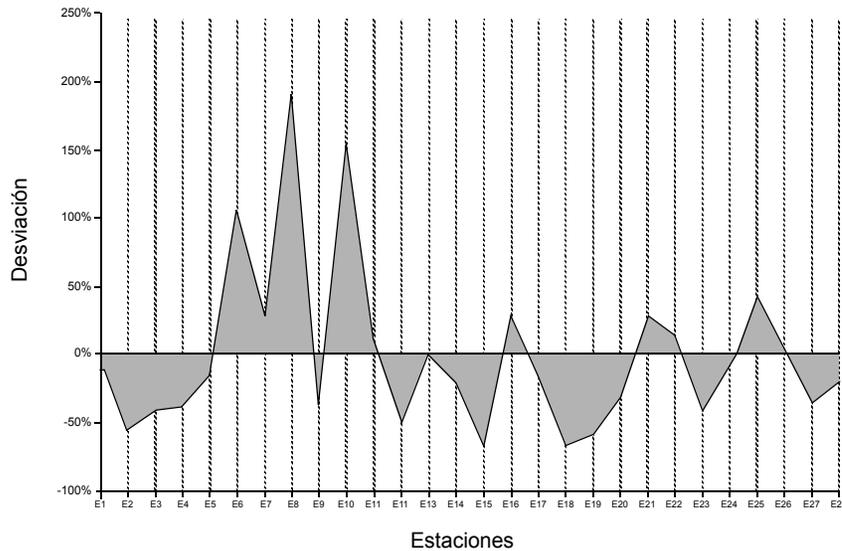


De la **Figura 2** se observa que las zonas con mayores desviaciones respecto al **promedio histórico** son:

- Comas (E8) : +21,6 t/km<sup>2</sup> (+189%)
- El Agustino (E10) : +18,0 t/km<sup>2</sup> (+157%)
- y
- Magdalena (E18) : - 7,5 t/km<sup>2</sup> (-67%)
- Bellavista (E2) : - 6,3 t/km<sup>2</sup> (-56%)

**Figura 2**

**Desviaciones al promedio histórico mensual de CSS en la ciudad de Lima**



### III. Modelo de Dispersión de CSS para Lima

Una vez emitidos los CSS pueden quedar en suspensión, ser absorbidos, transportados, depositados en la superficie, re-inyectados a la atmósfera, etc. Por esto, la distribución de CSS es compleja e irreversible, sin embargo, puede afirmarse que la cantidad de CSS depositada en las estaciones queda representada por:

$$\text{Concentración Estación } k = \sum_{i=1}^m f_i E_i + gS + hR + \varepsilon$$

Donde, en el periodo de tiempo entre registros (un mes):

$E_i$  = Cantidad de CSS emitido por la fuente  $i$

$S$  = Cantidad de CSS en suspensión al inicio del periodo de registro

$R$  = Cantidad de CSS depositados hasta el periodo anterior que han sido re-inyectados a la atmósfera

$\varepsilon$  = Pequeñas Contribuciones (positivas o negativas) debidas al estado de la estación (inclinada, etc)

$f_i, g, h$  = Factores numéricos con valores entre 0 y 1

Para reproducir las concentraciones de las estaciones se pueden seguir dos caminos :

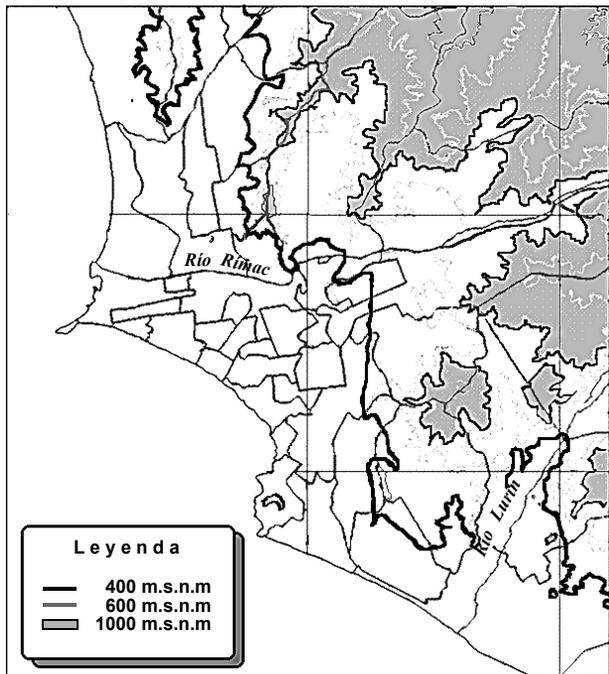
- Hacer un Inventario de fuentes reales, donde se registre por lo menos su ubicación y la cantidad de CSS emitidos. Luego, conociendo la interacción de los CSS con la atmósfera, sus dimensiones, la velocidad del viento, la humedad, la morfología del terreno, entre otros factores; tratar de encontrar los sumandos en la ecuación anterior.
- Asumir la existencia de una(s) fuente(s) y variar su(s) ubicación(ciones) y/o ajustar su(s) características hasta obtener el grado de aproximación deseado.

Se desarrollará en adelante el segundo camino.

El área geográfica comprendida entre los  $77^{\circ}12'$  y  $76^{\circ}48'$  de longitud Oeste y los  $11^{\circ}52'$  y  $12^{\circ}118'$  de latitud Sur, se denominará : “*Ciudad de Lima*”. En esta área existen aproximadamente  $1590 \text{ km}^2$  de superficie terrestre, por lo cual, de acuerdo al valor histórico promedio CSS de las estaciones, se deben depositar unas 18408 toneladas de CSS al mes en la *Ciudad de Lima*.

Figura 3

## Área geográfica de la Ciudad de Lima



Se puede confiar en que prácticamente los CSS emitidos en la *Ciudad de Lima* no logran salir de ella debido a las siguientes consideraciones:

- Como se observa de la **Figura 3**, la *Ciudad de Lima* se encuentra limitada casi en su totalidad por el Océano Pacífico o por elevaciones montañosas superiores a los 600 m.s.n.m.
- Las poblaciones urbanas de la *Ciudad de Lima* están asentadas casi ininterrumpidamente desde unos pocos metros sobre el nivel del mar hasta los 400 m.s.n.m.
- La capa límite atmosférica de la *Ciudad de Lima* se encuentra entre los 600 y 900 m.s.n.m.

Debido a que las emisiones de CSS duran minutos u horas y las estaciones de monitoreo registran concentraciones mensuales, se pueden considerar las emisiones de CSS como instantáneas.

Las dimensiones del área de estudio (kilómetros) y la frecuencia de registro (mensual) permiten pasar por alto fenómenos de microescala como las turbulencias del viento cercana a la superficie terrestre.

Dejando de lado las elevaciones de terreno dentro de la *Ciudad de Lima*, se propone que la **distribución mensual promedio de CSS** quede representada, en una primera aproximación, como la distribución producida por una única fuente puntual de emisión instantánea. A una fuente como ésta en un medio donde la cantidad de masa se conserva, le corresponde una *distribución gaussiana* [2].

$$\text{Concentración } C(x, y, t) = \frac{C_0 e^{-\frac{(x-X_0)^2}{4D_x t}} e^{-\frac{(y-Y_0)^2}{4D_y t}}}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}}$$

Caso: Fuente Puntual, Emisión Instantánea BiDimensional

Donde:

$X_0, Y_0$  = Posición de la Fuente (kilómetros)

$D_x, D_y$  = Constantes de Dispersión ( $\text{km}^2/\text{mes}$ )

$C_0$  = Cantidad Emitida (toneladas)

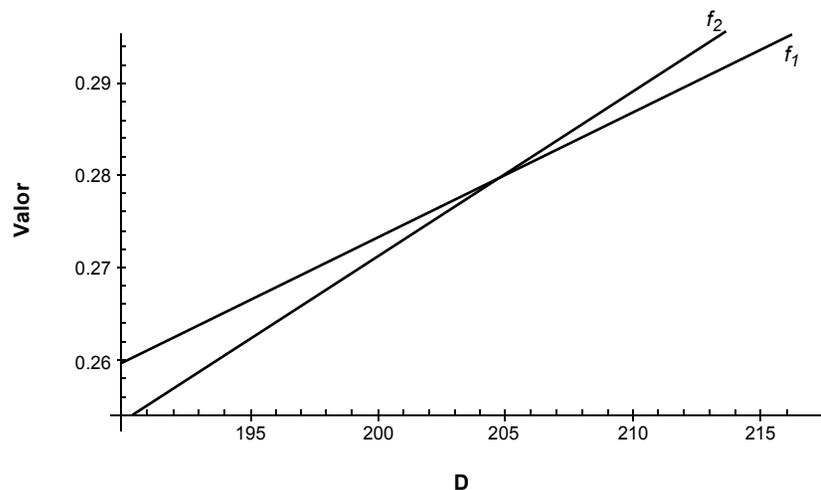
Se toma :  $C_0 = 18408 \text{ t}$ ,  $D_x = D_y = D$  y para simplificar la solución analítica, se ubica la fuente y el Origen de Coordenadas en el centro de la *Ciudad de Lima*, además, dado que las concentraciones disminuyen cuanto más distante se esté del origen, se toma  $2\text{t}/\text{km}^2$  como valor representativo para la **frontera**, pues es del orden de magnitud de los mínimos en las estaciones, y evaluamos, luego:

$$2(4\pi Dt) = C_0 e^{-\frac{x_1^2}{4Dt}} e^{-\frac{y_1^2}{4Dt}} \quad \text{Con: } x_1 = 43,5 \quad \text{y} \quad y_1 = 47,8$$

Finalmente se tiene una ecuación trascendente, así que haciendo  $t = 1$  se encuentra el valor:  $D = 205$  gráficamente [3]. (Figura 4,  $f_1$  es la parte derecha y  $f_2$  la parte izquierda de la ecuación anterior)

Figura 4

Obtención de la constante de difusión de CSS en LIMA



Conocida  $D$ , se varió la posición de la fuente:  $(X_0, Y_0)$  con el fin de encontrar su **mejor posición**, es decir, aquella posición donde la sumatoria de las desviaciones cuadráticas entre las concentraciones calculadas y las registradas en cada una de las estaciones es mínima (Ajuste mínimo cuadrático).

Así se encontró:

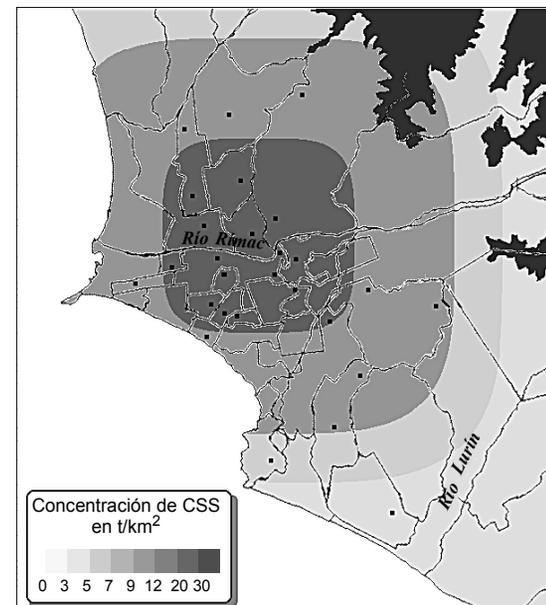
$$X_0 = -2,5 \text{ km}, \quad Y_0 = 4,0 \text{ km}$$

como la **mejor posición** de la fuente única (RMS = 8,65).

Sin embargo, como se ve en la figura 5, la simetría casi circular de la distribución impide aceptarla como válida.

Figura 5

Mejor posición – fuente única



Se estudian entonces, diversos *casos* para dos fuentes; así por ejemplo para el caso dos fuentes con:

$$C_1 = 18408 \quad \text{y} \quad C_2 = 2C_1 = 36816$$

y constantes de dispersión :

$$D_1 = 205 \quad \text{y} \quad D_2 = D_1/2 = 102,5$$

se encuentra que :

$$X_{10} = 8,0 \text{ km}, \quad Y_{10} = 0,0 \text{ km}$$

$$X_{20} = 0,0 \text{ km}, \quad Y_{20} = 20,0 \text{ km}$$

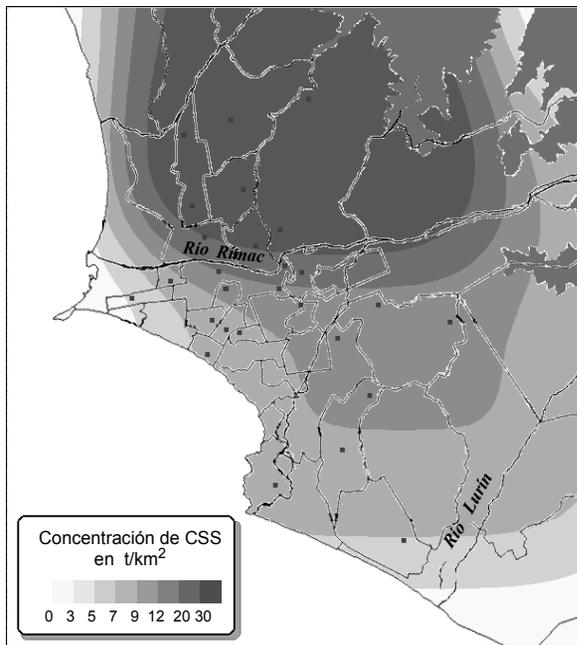
son las **mejores posiciones** para estas dos fuentes (RMS = 6,79).

En el **Figura 6** se aprecia cómo el modelo ya da cuenta de aquellas “**zonas irregulares**” en Lima, es decir, de las bajas concentraciones en la costa cercana al Callao y de las altas concentraciones en Comas; además, los distritos de Carabaylo y San Juan de Lurigancho íntegramente presentan la misma concentración, pero en la realidad, posiblemente no sea así debido a las considerables elevaciones de terreno en el Límite Distrital de San Juan de Lurigancho-Comas-Carabaylo.

Para que el modelo refleje en cierta forma lo difícil que es para los CSS desplazarse por dicho Límite Distrital, se han supuesto las Estaciones 29 y 30 de concentraciones mensuales promedio nulas (0) y la Estación 31 de concentración mensual promedio 5 t/km<sup>2</sup>.

**Figura 6**

Dos fuentes,  $C_2 = 2C_1$  y  $D_2 = D_1/2$



Luego, con dos fuentes de igual emisión ( $C_1 = C_2 = 18408$ ), pero con constantes de dispersión:

$$D_1 = 205 \quad \text{y} \quad D_2 = D_1/2 = 102,5$$

se encuentra que:

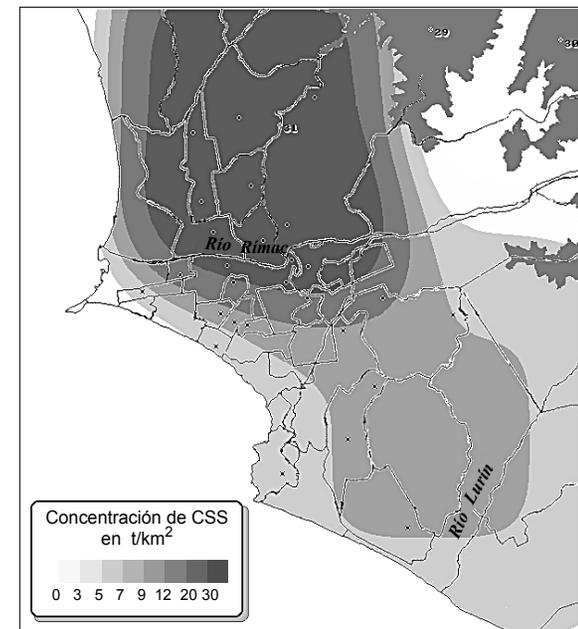
$$X_{10} = 10,0 \text{ km} , \quad Y_{10} = -9,0 \text{ km}$$

$$X_{20} = -4,0 \text{ km} , \quad Y_{20} = 16,0 \text{ km}$$

son las *mejores posiciones* de estas dos fuentes con una resolución de 1 km en Y y 2 km en X (RMS = 5,84)

**Figura 7**

Dos fuentes con 3 estaciones ficticias



Es notoria la mejoría obtenida cerca a la frontera superior del área de estudio, sin embargo, ni aún con la alta resolución con la que se trabajó el caso anterior, se logra separar la zona Comas-Carabaylo-San Juan de Lurigancho, por ello se tomaron **cuatro fuentes** con:

$$D_1 = 205, D_2 = D_1/2 = 102,5, D_3 = D_4 = D_1/12 = 17,08$$

$$C_1 = C_2 = 18408/2, C_3 = C_4 = 18408/4$$

obteniéndose:

$$X_{10} = 10,0 \text{ km} \pm 1 \text{ km}, Y_{10} = -9,0 \text{ km} \pm 0,5 \text{ km}$$

$$X_{20} = -4,0 \text{ km} \pm 1 \text{ km}, Y_{20} = 16,0 \text{ km} \pm 0,5 \text{ km}$$

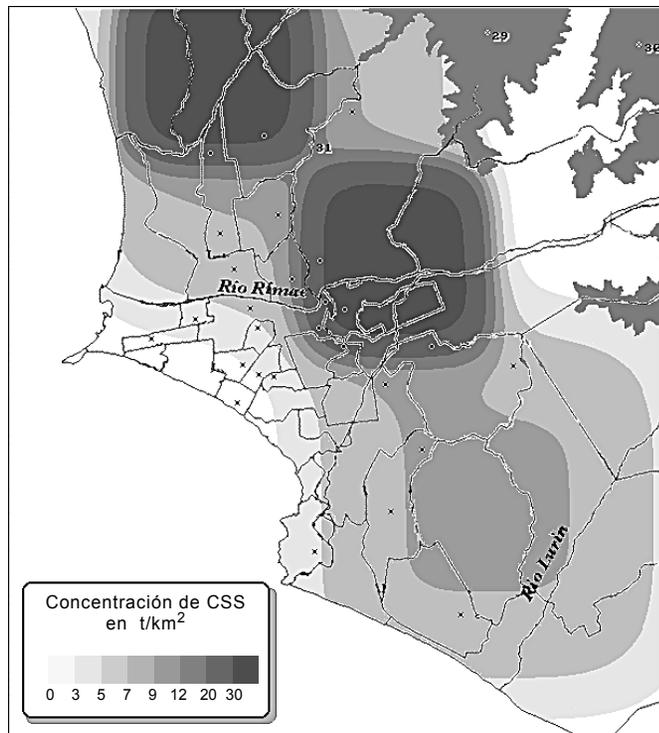
$$X_{30} = 4,0 \text{ km} \pm 1 \text{ km}, Y_{30} = 7,5 \text{ km} \pm 1,25 \text{ km}$$

$$X_{40} = -8,0 \text{ km} \pm 1 \text{ km}, Y_{40} = 20,0 \text{ km} \pm 1,25 \text{ km}$$

Como las mejores posiciones de las cuatro fuentes (RMS = 4,36)

**Figura 8**

**Mejor posición – cuatro fuentes**



**Tabla 3. Comparación de concentraciones mensuales promedio con las concentraciones calculadas mediante el modelo propuesto**

Cód.	Nombre estación	Concentración (t/km <sup>2</sup> )				
		Prom. Mensual	Figura 5	Figura 6	Figura 7	Figura 8
E1	Ate-Vitarte	10,9	7,0	10,7	11,5	15,4
E2	Bellavista	5,1	6,8	4,1	6,1	2,7
E3	Breña	6,8	7,1	9,7	11,6	4,8
E4	Carmen de la Legua	7,2	7,1	8,2	10,1	4,1
E5	Cercado I	9,8	7,2	10,6	12,8	14,4
E6	Cercado II	24,2	7,2	14,5	14,8	20,0
E7	Cercado III	14,9	7,1	12,1	13,0	5,3
E8	Comas	33,4	6,2	32,2	14,9	2,3
E9	Chorrillos	7,1	4,4	6,1	6,4	4,7
E10	El Agustino	29,8	7,1	18,4	13,2	24,2
E11	Independencia	13,1	7,1	28,1	16,4	7,8
E12	Jesús María	5,8	7,1	6,5	7,7	3,2
E13	La Molina I	11,6	6,8	9,1	9,7	15,3
E14	La Molina II	9,3	5,6	7,7	7,0	6,5
E15	Lince	3,8	7,1	6,8	8,0	3,7
E16	Los Olivos I	14,7	6,6	23,5	14,6	16,5
E17	Los Olivos II	9,9	7,1	21,7	15,4	6,8
E18	Magdalena	3,9	7,1	5,5	5,5	1,7
E19	Pueblo Libre	4,7	7,1	6,5	7,9	2,9
E20	Rímac	7,9	7,1	18,4	15,7	9,5
E21	San Juan de Lurigancho I	14,9	7,1	22,3	16,7	18,9
E22	San Juan de Lurigancho II	13,3	6,0	30,5	14,4	7,1
E23	San Juan de Miraflores I	6,9	6,7	7,1	7,2	7,1
E24	San Juan de Miraflores II	10,2	5,9	6,8	7,1	6,9
E25	San Luis	16,4	7,1	9,0	11,3	14,1
E26	San Martín de Porres	12,2	7,1	18,4	15,0	6,3
E27	Santiago de Surco	7,5	7,1	7,5	8,7	7,5
E28	Villa el Salvador	9,2	2,6	4,9	7,0	6,8
E29	Ficticia	0,0	---	---	2,4	2,8
E30	Ficticia	0,0	---	---	0,0	0,0
E31	Ficticia	5,0	---	---	15,2	11,0

#### IV. Conclusiones

El modelo propuesto hace posible reproducir aproximadamente la *dispersión mensual promedio* de CSS en Lima con sólo un número finito de fuentes.

La influencia de las elevaciones de terreno en la dispersión de CSS queda confirmada con el buen ajuste obtenido al incluir *estaciones ficticias* de concentraciones nulas en puntos elevados (Figura 7).

La resolución espacial con la cual se trabajó el *caso* de dos fuentes del Gráfico 7 y la disminución del RMS en más del 20% al considerar cuatro fuentes, sugiere que la **Figura 8** está cerca de representar la distribución promedio de CSS para la *Ciudad de Lima*.

Con el grado de precisión alcanzado, es posible incorporar al modelo propuesto los estudios de impacto ambiental que se pudieran realizar sobre nuevas chimeneas industriales en la *Ciudad de Lima* y determinar en cuánto cambiarían las condiciones actuales.

#### Bibliografía

- [1] **Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología**  
(DGM, DGH, DGA, DGIA)  
"Vigilancia de la Contaminación Ambiental", Boletín Mensual, 1999  
"Boletín Meteorológico e Hidrológico del Perú", Boletín Mensual, 2000  
"Boletín Meteorológico e Hidrológico del Perú", Boletín Mensual, 2001
- [2] **Eugene Butkov**, Mathematical Physics , Addison-Wesley (1968)  
**Dimitri Vvedensky**, Partial Differential Equations , Addison-Wesley (1993).
- [3] **Edson Jesús Plasencia Sánchez**, "Informe Final del Curso CF-581: Proyecto de Tesis". "Modelo de Dispersión de CSS para la Ciudad de Lima", FC - UNI, 2002.
- [4] **Decreto Supremo N° 074-2001 – PCM del 26 de Junio del 2001**  
Reglamento de Estándares Nacionales de Calidad Ambiental del Aire
- [5] **Modelos de Dispersión de Contaminantes Atmosféricos, Monografía**  
Edson Jesús Plasencia Sánchez – Practicante SENAMHI 2001.

## CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN VALOR ÓPTIMO EN PROGRAMACIÓN DE DOS NIVELES

*Pedro Canales García*  
UNI-Facultad de Ciencias-Postgrado en Matemática Aplicada

#### RESUMEN

Variados problemas de la vida real pueden modelarse como problemas de programación matemática de dos niveles (PDN). Resolver estos problemas no es tarea fácil, es frecuente utilizar métodos conocidos de la programación no lineal. Para esto, es necesario reformular el problema de dos niveles como de un solo nivel. Una manera de lograrlo es a través de la denominada función valor óptimo (o función marginal), por esta razón es conveniente conocer algunas de sus propiedades mas importantes. En este trabajo estudiamos la continuidad por ser de interés en la solución de problemas de programación matemática de dos niveles. Al final presentamos ejemplos de problemas de programación matemática de dos niveles e ilustramos algunos conceptos.